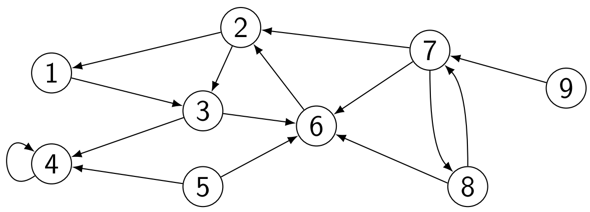
Estruturas de Dados e Algoritmos II
1ª Frequência

Departamento de Informática
Universidade de Évora

29 de Março de 2023

1. Considere o grafo orientado representado na figura:



(a) [0,5 valores] Apresente um caminho simples de comprimento 4, presente no grafo.

(b) [1,5 valores] Apresente as componentes fortemente conexas do grafo.

(c) [1,5 valores] Apresente uma ordem pela qual os vértices poderiam sair da fila durante um percurso em largura no grafo, a partir do vértice 9.

(d) [0,5 valores] Que percurso deverá aplicar se pretender encontrar um caminho mais curto, de um vértice para um outro, num grafo deste tipo? O percurso em largura, o percurso em profundidade, ou poderá usar qualquer um deles?

2. [2 valores] Apresente um grafo não orientado pesado, com 5 vértices e 8 arcos, que tenha uma única árvore de cobertura mínima.

3. As localidades de um país estão ligadas entre si através de linhas digitais bidireccionais, de Tipo A (TA) e de Tipo B (TB), de tal modo que pode haver comunicação entre quaisquer duas localidades. No entanto, neste momento, o governo pretende que seja possível que todo o tráfego, com origem em qualquer localidade, possa chegar a qualquer outra localidade passando só por linhas TA. Como as linhas TA são caras, o governo quer saber qual o número mínimo de linhas a instalar, de modo a alcançar o seu objectivo.

Tomemos como exemplo as cinco localidades A, B, C, D e E, ligadas do seguinte modo: A e B, A e C, B e C, e D e E estão ligadas entre si por linhas TA, enquanto que B e E, e A e D estão ligadas por linhas TB. Dadas estas ligações, o tráfego entre as localidades C e E, por exemplo, tem de passar por uma linha TB. Se a ligação entre as localidades B e E, por exemplo, passasse a ser TA, o tráfego entre C e E já poderia passar só por ligações TA, assim como o tráfego entre quaisquer duas localidades. Neste exemplo, o número mínimo de ligações TA a instalar seria 1.

Dadas as localidades e as ligações existentes, assim como os seus tipos, pretende-se calcular o número mínimo de ligações TA a instalar, para atingir o objectivo do governo.

(a) [2 valores] Apresente o grafo que usaria para representar a informação relativa à situação descrita acima.

(b) [0,5 valores] Em termos de grafos, o que é preciso calcular para poder obter o resultado pretendido?

(c) [2 valores] Descreva o algoritmo completo que utilizaria para obter o resultado pretendido, após a construção do grafo. (Pode incluir pseudo-código na sua descrição. Se o seu algoritmo recorre a algoritmos dados nas aulas, não precisa de os descrever, excepto se os alterar de algum modo.)

4. Considere a função recursiva $Cat(i)$, onde i é um inteiro positivo:

$$Cat(i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} Cat(k)\, Cat(i-k) & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

(a) [4 valores] Apresente o pseudo-código de *uma função iterativa* que, dado $n \geq 1$, calcula e devolve o valor de $Cat(n)$.

(b) [1,5 valores] Estude (justificando) as complexidades temporal e espacial da sua função.

5. [4 valores] Seja $X = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ uma sequência não vazia de inteiros. Pretende-se seleccionar uma subsequência de elementos não consecutivos cuja soma seja máxima.

Por exemplo, as subsequências de elementos não consecutivos da sequência (1 5 6 4) são λ (a subsequência vazia), (1), (5), (6), (4), (1 6), (1 4) e (5 4). Destas subsequências, aquela cujos elementos somam o maior valor é (5 4). Já para a sequência (3 2 -3 2 5), a subsequência de elementos não consecutivos cuja soma é máxima é (3 5).

Apresente *uma função (matemática) recursiva* que, dada uma sequência não vazia de inteiros $X = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$, calcula o valor máximo da soma de uma subsequência de elementos não consecutivos de X.

Indique claramente o que representa cada uma das variáveis que utilizar e explicite a chamada inicial, *i.e.*, a chamada da função que calcula o valor para a sequência completa.