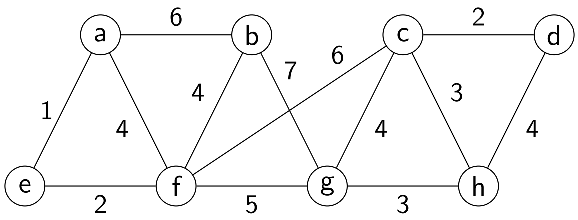
Estruturas de Dados e Algoritmos II
Exame de Recurso

Departamento de Informática
Universidade de Évora

6 de Julho de 2023

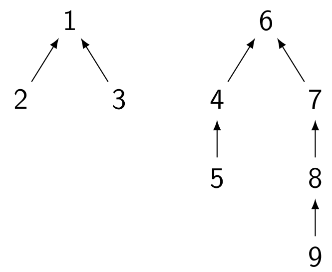
1. Considere o grafo da figura seguinte:



(a) [0,5 valores] Apresente um caminho não simples de comprimento 5.

(b) [2 valores] Apresente uma ordem pela qual os arcos poderiam ser considerados durante uma aplicação do algoritmo de Kruskal ao grafo, indicando quais seriam incluídos na árvore de cobertura mínima e quais não seriam.

2. Considere uma implementação do TAD Partição, com *reunião por altura* e *compressão de caminho*, e a partição do conjunto $\{1, \ldots, 9\}$ ilustrada na figura.



(a) [1 valor] Apresente o estado do vector que representa a partição da figura.

(b) [1 valor] Partindo do estado anterior, apresente o estado do vector depois da execução da operação $\mathsf{UNION}(1, 6)$.

3. Um recurso sensível (e secreto) está protegido por um *código* dividido em k partes, guardadas num cofre, em compartimentos numerados de 1 a k. Cada parte do código dá acesso a um subconjunto das funcionalidades do recurso. Os compartimentos só são acessíveis através de chaves, das quais existem várias cópias. Algumas das cópias estão também guardadas nos compartimentos do cofre, enquanto que outras estão na posse das pessoas que têm acesso, parcial ou total, ao código. Cada pessoa tem acesso à parte do código que está no compartimento cuja chave possui, e às partes que estão nos compartimentos que consegue abrir com as chaves que encontra nos compartimentos que abre.

Por exemplo, suponha que k é 5 e que a distribuição de chaves pelos compartimentos é a seguinte: no 1 estão as chaves dos compartimentos 2 e 4; no 2 estão as chaves do 2, do 4 e do 5; no 3 está a chave do 5; no 4 estão as chaves do 2 e do 3; e o 5 não contém nenhuma chave. Assim, quem tem a chave do compartimento 5, só tem acesso à parte do código que lá está; quem tem a do 2 ou a do 4 tem acesso às partes do código que estão nos compartimento 2, 3, 4 e 5; e só quem tem a chave do compartimento 1 tem acesso a todas as partes do código.

Dada a informação sobre as chaves que se encontram em cada compartimento e dado o número de um compartimento, pretende-se saber se quem tem a chave desse compartimento tem acesso a todas as partes do código.

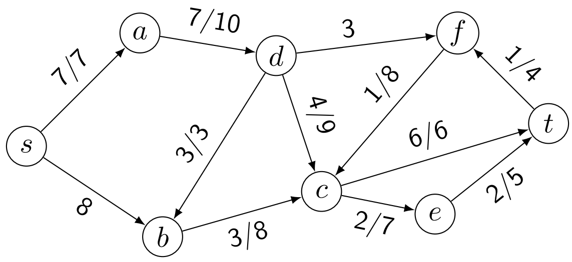
(continua. . .)

(a) [1,5 valores] Apresente o grafo que usaria, na resolução do problema, para representar a informação relativa à situação descrita acima.

(b) [0,5 valores] Em termos de grafos, o que iria calcular para chegar ao resultado pretendido?

(c) [1,5 valores] Descreva o algoritmo completo que utilizaria para obter o resultado pretendido, após a construção do grafo. (Pode incluir pseudo-código na sua descrição. Se o seu algoritmo recorre a algoritmos dados nas aulas, não precisa de os descrever, excepto se os alterar de algum modo.)

4. Considere a rede de fluxos seguinte e o fluxo f nela representado:



(a) [1 valor] Apresente, justificando brevemente, um majorante para o valor do fluxo nesta rede.

(b) [1,5 valores] Apresente a rede residual correspondente.

5. Considere a função recursiva $m_{PD}(i)$, onde:

- $P = (p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)$ e $D = (d_1\ d_2\ \ldots\ d_n)$, com $n > 0$, são duas sequências de inteiros positivos; e
- $1 \leq i \leq n+1$.

$$m_{PD}(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = n+1 \\ \max\Big\{\ p_i,\ m_{PD}(i+1)\ \Big\} & \text{se } i \leq n \wedge i + d_i > n \\ \max\Big\{\ p_i + m_{PD}(i+d_i+1),\ m_{PD}(i+1)\ \Big\} & \text{se } i \leq n \wedge i + d_i \leq n \end{cases}$$

(a) [3 valores] Apresente o pseudo-código de uma função iterativa que, dadas as duas sequências P e D, calcula e devolve o valor de $m_{PD}(1)$.

(b) [0,5 valores] Estude (justificando) a complexidade temporal da sua função.

6. [3 valores] Seja Q uma fila, dotada de uma operação $\mathsf{ENQUEUE}(Q, e, n)$, que insere n cópias do valor e na fila Q. O seu funcionamento é o seguinte: se o elemento no fim da fila é diferente de e, acrescenta o par (e, n) no fim da fila; se o elemento no fim da fila é e, então no fim da fila está um par (e, k), para algum valor positivo de k, e altera esse par para $(e, k+n)$.

Por exemplo, se o conteúdo da fila é $Q = (3, 1)$ e é executada a operação $\mathsf{ENQUEUE}(Q, 4, 2)$, o conteúdo da fila passa a ser $Q' = (3, 1)\,(4, 2)$ (a fila contém um 3, seguido de dois 4). Se, agora, for executada a operação $\mathsf{ENQUEUE}(Q', 4, 5)$, o conteúdo da fila passa a ser $Q'' = (3, 1)\,(4, 7)$ (a fila passa a ter sete 4). Se, a seguir, for executada a operação $\mathsf{ENQUEUE}(Q'', 3, 2)$, o conteúdo da fila passa a ser $Q''' = (3, 1)\,(4, 7)\,(3, 2)$ (um 3, seguido de sete 4, seguidos de dois 3).

Recorrendo ao método do potencial, calcule a complexidade amortizada da operação $\mathsf{ENQUEUE}$. Use como função potencial a função:

$$\Phi(Q_i) = 2\,p_i,$$

onde Q_i é o estado da fila após a i-ésima operação e p_i é o número de *pares* contidos na fila, no estado Q_i, com $p_0 = 0$. Considere que o custo real de uma operação é número de pares acedidos ou acrescentados à fila durante a execução da operação. (Assuma que uma fila tem capacidade ilimitada e que n é sempre um inteiro positivo.)

Apresente todos os cálculos feitos.

(CONTINUA...)

7. [3 valores] A empresa que gere uma pequena cadeia de mercearias tem de decidir como faz a distribuição dos produtos pelas várias lojas, de modo a maximizar o lucro obtido. Em geral, a empresa sabe exactamente qual o lucro que irá obter ao enviar um determinado número de unidades de um produto para cada uma das lojas. A partir desta informação, ela pretende calcular qual o lucro máximo que pode obter com um dado produto.

Por exemplo, a empresa comprou 5 caixotes de morangos, que quer distribuir pelas 3 lojas. O lucro que consegue obter, em cada loja, é dado pela tabela à direita. De acordo com a tabela, por exemplo, se for enviado 1 caixote para a Loja 1, o lucro será de 1.50, se forem enviados 2 caixotes será de 3.50, e se forem enviados os 5 será de 6.50.

Lucro	Número de caixotes					
Loja	0	1	2	3	4	5
1	0.00	1.50	3.50	4.50	6.00	6.50
2	0.00	2.50	5.00	5.50	5.50	5.50
3	0.00	2.00	3.00	5.50	6.00	6.00

Dados estes lucros potenciais por loja, o lucro máximo que a empresa pode obter com os 5 caixotes de morangos é de 10.50. Esse valor é obtido enviando 0 caixotes para a Loja 1 (lucro 0.00), 2 para a Loja 2 (lucro 5.00) e 3 para a Loja 3 (lucro 5.50).

Seja $m > 0$ o número de lojas e seja $n > 0$ o número de unidades disponíveis de um produto. Apresente *uma função (matemática) recursiva* que, dada uma matriz de inteiros $L = (l_{10}\ l_{11}\ \ldots\ l_{1n}\ l_{20}\ \ldots\ l_{mn})$, em que o valor de l_{ij} representa o lucro obtido ao enviar j unidades do produto para a loja i, calcula o valor máximo do lucro que é possível obter com esse produto. (Pode assumir que, qualquer que seja a loja, o lucro obtido com j caixotes nunca é superior ao lucro obtido com $j + 1$ caixotes.)

Indique claramente o que representa cada uma das variáveis que utilizar e explicite a chamada inicial, *i.e.*, a chamada da função que calcula o valor para a matriz completa.