Estruturas de Dados e Algoritmos II
2ª Frequência e Exame

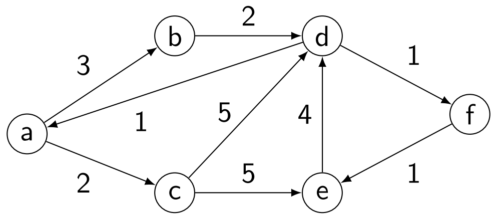
Departamento de Informática
Universidade de Évora

13 de Junho de 2023

Os símbolos à esquerda de cada pergunta identificam a prova ou provas a que ela pertence:
♣ assinala as perguntas do exame; ♢ assinala as perguntas da frequência.

Nas perguntas que pertencem ao exame **e** à frequência, o valor à esquerda de '/' corresponde à cotação da pergunta no exame, e o valor à direita de '/' corresponde à cotação da pergunta na frequência.

♣ ♢ **1.** [2/3 valores] Considere o grafo da figura seguinte.



Apresente uma ordem pela qual os vértices do grafo poderiam ser retirados da fila com prioridade, durante uma aplicação do algoritmo de Dijkstra, a partir do vértice a.

♢ **2.** [2 valores] Suponha que quer calcular caminhos com menor peso, a partir de um vértice dado, num grafo não orientado pesado.

Diga, justificando, que algoritmo, ou algoritmos, poderia utilizar, e em que circunstâncias.

Numa situação em que pudesse usar mais do que um algoritmo, qual escolheria e porquê?

3. Considere uma implementação do TAD Partição, com reunião por tamanho e compressão de caminho. Seja o seguinte o estado do vector que representa uma partição do conjunto $\{1, \ldots, 8\}$:

	-4	1	2	3	-2	5	-1	-1
Índice:	1	2	3	4	5	6	7	8

♣ ♢ (a) [1/1,5 valor] Apresente o estado do vector depois da execução da operação FIND-SET(3).

♣ ♢ (b) [1/1,5 valor] Apresente o estado do vector depois da execução da operação UNION$(7, 8)$, a partir do estado obtido na alínea anterior.

♢ (c) [1,5 valores] Apresente o estado do vector depois da execução da operação UNION$(5, 1)$, a partir do estado obtido na alínea anterior.

(continua...)

$\clubsuit$ **4.** A realização de um projecto consiste na realização de várias tarefas. Por exemplo, para a construção de um edifício é necessário desenhá-lo, adquirir o terreno, obter as licenças de construção, fazer as fundações, etc., até à pintura das paredes, à colocação dos azulejos, à instalação das portas, ...

A realização de muitas das tarefas depende da realização prévia de outras tarefas, mas algumas podem ser executadas em paralelo. O conhecimento das dependências entre tarefas e do tempo estimado para a realização de cada tarefa, permite estimar a duração da execução do projecto, mas o cálculo dessa estimativa pode ser demasiado complexo para se fazer à mão se a quantidade de tarefas e de dependências entre elas for muito grande.

Suponha que a realização de um projecto consiste na realização das tarefas A (duração: 5 dias), B (3 dias), C (6 dias), D (2 dias) e E (3 dias), e que as dependências entre elas são as seguintes: a B depende da realização prévia da A; a D depende da A, da B e da C; e a E depende da C. Dadas estas dependências, o tempo mínimo necessário para realizar o projecto será de 10 dias: mesmo que a A e a C comecem a ser executadas no mesmo dia, a D só poderá começar a ser executada ao fim de 8 dias.

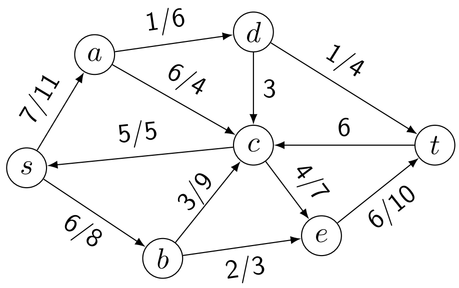
Dadas as tarefas que constituem um projecto, a duração da execução de cada uma e as dependências entre elas, pretende-se calcular o tempo mínimo necessário para a execução do projecto. (Pode assumir que a duração é sempre um valor positivo e que não há dependências cíclicas entre tarefas.)

(a) [1,5 valores] Apresente o grafo que usaria para representar a informação relativa à situação descrita no exemplo acima.

(b) [0,5 valores] Em termos de grafos, a que corresponde o resultado pretendido?

(c) [2 valores] Descreva o algoritmo completo que utilizaria para obter o resultado pretendido, após a construção do grafo. (Pode incluir pseudo-código na sua descrição. Se o seu algoritmo recorre a algoritmos dados nas aulas, não precisa de os descrever, excepto se os alterar de algum modo.)

$\clubsuit$ $\diamondsuit$ **5.** Considere a rede de fluxos seguinte e um suposto fluxo nela representado:



(a) [2/2,5 valores] Altere os valores do fluxo nas ligações que achar necessário, de modo a obter um verdadeiro fluxo. (Não deve alterar as capacidades das ligações.)

(b) [1/1 valor] Apresente, justificando brevemente, um majorante para o valor do fluxo nesta rede.

$\clubsuit$ **6.** Considere a função recursiva $s_X(i)$, onde:

- n é um inteiro positivo;
- $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$ é uma sequência de inteiros; e
- $0 \leq i \leq n$

$$s_X(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ x_1 & \text{se } i = 1 \\ \max\left\{x_i + s_X(i-2), s_X(i-1)\right\} & \text{se } i > 1 \end{cases}$$

(a) [3 valores] Apresente o pseudo-código de *uma função iterativa* que, dada uma sequência não vazia de inteiros $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$, calcula e devolve o valor de $s_X(n)$.

(b) [0,5 valores] Estude (justificando) a complexidade temporal da sua função.

(CONTINUA...)

♣ ◇ **7.** [2,5/3,5 valores] Considere a implementação de um somador, que suporta duas operações: a operação $\mathsf{ADD}(S,k)$ acrescenta um novo valor k a ser somado ao somador S; a operação $\mathsf{VALUE}(S)$ retira todos os valores contidos no somador S, e calcula e devolve o valor da sua soma.

Por exemplo, seja S um somador sem qualquer elemento. Depois da sequência de operações $\mathsf{ADD}(S,1)$, $\mathsf{ADD}(S,3)$ e $\mathsf{ADD}(S,4)$, S contém os valores 1, 3, e 4. Se, agora, for executada a operação $\mathsf{VALUE}(S)$, o valor devolvido será 8 e S voltará a não ter qualquer elemento.

Recorrendo ao método do potencial, calcule a complexidade amortizada das operações ADD e VALUE. Use como função potencial a função:

$$\Phi(S_i) = v_i,$$

onde S_i é o estado do somador após a i-ésima operação e v_i é o número de valores contidos no somador, no estado S_i, com $v_0 = 0$. Considere que o custo real de cada operação é número de elementos acrescentados ou retirados do somador durante a execução da operação. (Assuma que um somador tem capacidade ilimitada e que, quando a operação VALUE é efectuada, existe pelo menos um valor no somador.)

Apresente todos os cálculos feitos.

♣ ◇ **8.** Seja A um conjunto de pares (v,p), em que cada par representa um *artigo* com valor (positivo) v e peso (positivo) p, e seja $\mathsf{KNAPSACK\text{-}01}(A,c,k)$ o problema de determinar se é possível colocar, num saco de capacidade c, sem a exceder, artigos de A cujo valor combinado é pelo menos k.

Por exemplo, sejam $A = \{(60,10),(100,20),(120,30),(140,40)\}$, $c = 50$ e $k = 200$. Colocando no saco os artigos $(60,10)$ e $(140,40)$, cujo peso total é $10+40=50$, não excedendo a capacidade c do saco, obtém-se um valor combinado de $60+140=200=k$ e a resposta, para esta instância do problema, é SIM.

(a) [1/1 valor] O que escolheria como certificado de uma solução, para poder verificar, em tempo polinomial, que a resposta para uma instância do problema é SIM?

(b) [2/2,5 valores] Seja $\mathsf{PART}(S)$ o problema da partição de um conjunto, que consiste em determinar se é possível dividir o conjunto de inteiros positivos S em dois conjuntos disjuntos S_1 e S_2, tais que a soma dos elementos de S_1 é igual à soma dos elementos de S_2.

Apresente uma redução polinomial do problema PART para o problema KNAPSACK-01. Justifique que a redução é polinomial e que se trata, de facto, de uma redução.