Estruturas de Dados e Algoritmos II
1ª Frequência

Departamento de Informática
Universidade de Évora

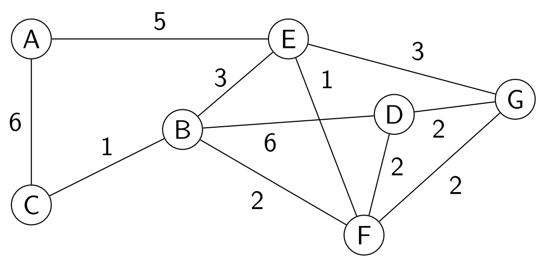
7 de Abril de 2022

1. Seja G um grafo orientado, acíclico, em que existe um caminho que contém todos os seus vértices.

(a) [1 valor] Apresente um grafo, com 4 vértices, que corresponda à descrição acima, assim como o caminho descrito.

(b) [1 valor] Quantas ordenações topológicas existem para um grafo com estas características? Apresente uma para o grafo que criou na alínea anterior.

2. Considere o grafo não orientado pesado representado na figura:



(a) [1,5 valores] Apresente uma ordem pela qual os vértices do grafo poderiam ser visitados, durante a execução de um percurso em profundidade, a partir do vértice C.

(b) [1,5 valores] Apresente uma árvore de cobertura mínima do grafo.

3. Considere a versão simplificada do percurso em profundidade apresentada abaixo:

```
DFS(G, s)
 1 for each vertex u in G.V do
 2     u.color <- WHITE
 3 DFS-VISIT(G, s)
```

```
DFS-VISIT(G, u)
 1 u.color <- GREY
 2 for each vertex v in G.adj[u] do
 3     if v.color = WHITE then
 4         DFS-VISIT(G, v)
 5 u.color <- BLACK
```

(a) [1 valor] Se este algoritmo for aplicado a um grafo orientado, o que significa o vértice `v` estar `GREY`, na linha 3 de `DFS-VISIT`? (Justifique a sua resposta.)

(b) [1 valor] Diga, justificando, se o significado é o mesmo se isso acontecer durante a aplicação do algoritmo a um grafo não orientado.

4. Existe *contacto potencial de grau 1* entre duas pessoas A e B se elas estão, com alguma frequência, em contacto directo, e representa-se por (A, B) ou (B, A), indiferentemente.

Se (A, B) e (B, C), mas não (A, C), diz-se que há contacto potencial de grau 2 entre A e C. Generalizando, se (A, B), há contacto potencial de grau k entre B e C, e não há contacto potencial de grau igual ou inferior a k entre A e C, então há contacto potencial de grau $k+1$ entre A e C.

Duas pessoas, entre as quais haja contacto potencial de grau k, têm uma probabilidade p^k de transmitir COVID-19 uma à outra, caso uma delas apanhe a doença.

Uma *rede de contactos* é definida através dos contactos potenciais de grau 1 existentes num conjunto de pessoas. Dada uma rede de contactos, a probabilidade de uma pessoa apanhar a doença é a soma das probabilidades de lhe ser transmitida por outra pessoa da rede, com a qual tenha contacto potencial de grau k, para algum inteiro positivo k.

Por exemplo, considere a rede com 6 pessoas, A, B, C, D, E e F, em que (A, B), (A, D), (B, C), (B, D), (C, E), (D, E) e (E, F). Dada esta rede, a probabilidade de A apanhar COVID-19 é $2p+2p^2+p^3$, devido aos contactos potenciais de grau 1 com B e D, de grau 2 com C e E, e de grau 3 com F. Para as restantes pessoas, as probabilidades são: B: $3p+p^2+p^3$, C: $2p+3p^2$, D e E: $3p+2p^2$, e F: $p+2p^2+2p^3$.

Dadas uma rede de contactos, uma probabilidade p e uma pessoa, pretende-se calcular a probabilidade da a essa pessoa ser transmitida a COVID-19.

(a) [1,5 valores] Apresente o grafo que usaria para representar a informação relativa ao exemplo acima.

(b) [0,5 valores] Em termos de grafos, o que é necessário calcular para obter o resultado pretendido?

(c) [2 valores] Descreva o algoritmo que utilizaria para obter o resultado pretendido. (Pode fazê-lo através de texto ou recorrendo a pseudo-código.)

5. Considere a função recursiva $f_{MN}(i,j)$, onde:

- M e N são inteiros positivos;
- $1 \leq i \leq M$ e $1 \leq j \leq N$.

$$f_{MN}(i,j) = \begin{cases} j & \text{se } i = M \\ i & \text{se } i < M \wedge j = 1 \\ f_{MN}(i+1,j) + f_{MN}(i,j-1) & \text{se } i < M \wedge j > 1 \end{cases}$$

(a) [4 valores] Apresente o pseudo-código de *uma função iterativa* que, dados M e N, calcula e devolve o valor de $f_{MN}(1,N)$.

(b) [1 valor] Estude (justificando) as complexidades temporal e espacial da sua função.

6. [4 valores] Um Percurso numa Pirâmide é um percurso desde o vértice da pirâmide até uma posição da sua base, passando por uma única posição em cada linha intermédia. Quando o percurso passa para a linha abaixo, ele pode fazê-lo para a posição imediatamente à esquerda ou imediatamente à direita da vertical da posição corrente. O custo de um percurso é a soma dos valores em cada posição visitada durante o percurso.

Por exemplo, dada a pirâmide à direita, só há quatro percursos distintos desde o vértice até à base da pirâmide. Os valores contidos nas posições por que esses percursos passam são 5–4–7, 5–4–2, 5–6–2 e 5–6–3, e o custo desses percursos é, respectivamente, 16, 11, 13 e 14.

```
    5
  4   6
7   2   3
```

Repare que não é possível um percurso passar pelas posições com os valores 5–6–7 (porque o 7 não está abaixo e imediatamente à esquerda ou à direita da vertical da posição que contém o 6), 5–4–6–3 (porque o 4 e o 6 estão na mesma linha), ou 5–4–5–6–3 (porque o 5 está na linha acima do 4).

Seja $n > 0$ a altura da pirâmide e seja $P = (p_{ij})$, com $1 \leq j \leq i \leq n$, a sequência dos valores contidos na pirâmide, tal que p_{11} corresponde ao valor no vértice da pirâmide, p_{21} corresponde ao valor mais à esquerda na 2ª linha da pirâmide a contar do topo, etc., tal como é mostrado na figura à direita.

$$\begin{array}{ccccc} & & p_{11} & & \\ & p_{21} & & p_{22} & \\ p_{31} & & p_{32} & & p_{33} \end{array}$$

Apresente *uma função recursiva* que, dadas a altura da pirâmide e a sequência dos valores contidos na pirâmide, calcula o custo máximo de efectuar um percurso na pirâmide.

Indique claramente o que representa cada uma das variáveis que utilizar e explicite a chamada inicial. (Note que não é pedido que escreva código.)