Conceitos Fundamentais: Lógica, Teoria dos Conjuntos, Indução, e Integrais

1. Lógica

A lógica é a base do raciocínio matemático. É usada para entender a estrutura de provas matemáticas e sistemas formais.

1.1 Proposições e Conectivos Lógicos

Uma proposição é uma afirmação declarativa que é ou verdadeira ou falsa, mas não ambas. Os seguintes são conectivos lógicos comuns:

- **Negação** ($\neg p$): Se p é uma proposição, então $\neg p$ é a negação de p, ou seja, "não p".
- **Conjunção** ($p \wedge q$): É verdadeira apenas se p e q forem verdadeiros.
- **Disjunção** ($p \vee q$): É verdadeira se pelo menos um de p ou q for verdadeiro.
- **Implicação** ($p \Rightarrow q$): Significa "se p, então q", e é falsa apenas se p for verdadeiro e q for falso.
- **Bicondicional** ($p \Leftrightarrow q$): É verdadeira se p e q forem ambos verdadeiros ou ambos falsos.

1.2 Tabelas de Verdade

Uma tabela de verdade mostra todos os valores de verdade possíveis para uma proposição. Exemplo da tabela de verdade para $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.3 Equivalências Lógicas

Duas proposições são logicamente equivalentes se tiverem os mesmos valores de verdade em todos os casos. Algumas equivalências lógicas comuns:

- **Leis de De Morgan**:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \quad \text{e} \quad \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

- **Contrapositiva**:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

2. Teoria dos Conjuntos

A teoria dos conjuntos estuda coleções de objetos, chamados conjuntos, e oferece uma linguagem fundamental para todas as áreas da matemática.

2.1 Definições Básicas

- **Conjunto**: Uma coleção de objetos distintos. Exemplo: $A = \{1, 2, 3\}$.
- **Elemento**: Se a é um elemento do conjunto A, escrevemos $a \in A$.
- **Subconjunto**: Um conjunto A é subconjunto de B (escrito $A \subseteq B$) se todo elemento de A também for elemento de B.

2.2 Operações com Conjuntos

- **União**: A união de dois conjuntos A e B é $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- **Interseção**: A interseção de A e B é $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$.
- **Diferença**: A diferença entre A e B é $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$.
- **Complemento**: O complemento de A é $\bar{A} = \{x : x \notin A\}$, em relação a um conjunto universo U.

2.3 Produto Cartesiano e Conjunto Potência

- **Produto Cartesiano**: O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$.
- **Conjunto Potência**: O conjunto potência de A é o conjunto de todos os subconjuntos de A, denotado $\mathcal{P}(A)$.

2.4 Conjuntos Importantes

- $\mathbb{N}$: O conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- $\mathbb{Z}$: O conjunto dos números inteiros $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Q}$: O conjunto dos números racionais (frações de inteiros).
- $\mathbb{R}$: O conjunto dos números reais (incluindo os irracionais).

3. Indução Matemática

A indução matemática é um método usado para provar afirmações para todos os números naturais. Consiste em dois passos principais:

3.1 Princípio da Indução Matemática

Seja $P(n)$ uma afirmação sobre um número natural n.

- **Caso Base**: Mostra-se que $P(1)$ é verdadeira.
- **Passo Indutivo**: Assume-se que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 1$. Mostra-se que $P(k + 1)$ também é verdadeira.

Se o caso base e o passo indutivo forem verdadeiros, então $P(n)$ é verdadeira para todos os $n \geq 1$.

3.2 Exemplo

Prove que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todos os $n \geq 1$.

- **Caso Base**: Para $n = 1$, $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Verdadeiro.
- **Passo Indutivo**: Suponha que $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ é verdadeiro. Então:

  $$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

  Assim, a afirmação é verdadeira para $k + 1$.

4. Integrais

A integração é o processo de encontrar o integral de uma função, que representa a área sob uma curva.

4.1 Integrais Definidos

O integral definido de uma função $f(x)$ de a a b é:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Este representa a área sob a curva de $f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$.

4.2 Teorema Fundamental do Cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo liga diferenciação e integração:

- Se $F(x)$ é a antiderivada de $f(x)$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

4.3 Técnicas de Integração

Algumas técnicas comuns para avaliar integrais incluem:

- **Substituição**: Usada quando o integral contém uma função composta.
- **Integração por Partes**: Baseada na regra do produto para diferenciação:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

- **Frações Parciais**: Decompor uma função racional em frações mais simples.

4.4 Integrais Impróprios

Integrais impróprios ocorrem quando os limites de integração são infinitos ou a função integranda se torna infinita dentro dos limites:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$