Matemática I

Lógica e Teoria de Conjuntos

Diogo Ribeiro

POLITÉCNICO DO PORTO
ESCOLA SUPERIOR DE MEDIA ARTES E DESIGN

Expressões Algébricas

- Expressões onde surgem uma ou mais variáveis.

Expressões Designatórias e Condições

- **Expressões Designatórias**: expressões algébricas que se transformam em termos quando se concretizam as variáveis.
- **Condições**: expressões algébricas que se transformam em proposições quando se concretizam as variáveis.

$$3x + 2 = 1$$

Conjunto-solução: conjunto de valores para os quais a concretização da variável leva a proposições verdadeiras.

$$\text{Em } \mathbb{R}, 3x + 2 = 1 \quad \text{CS} = -\frac{1}{3}$$

Classificação de Condições

- Possíveis não universais: algumas concretizações da variável conduzem a proposições verdadeiras.
- Possíveis universais: todas as concretizações da variável conduzem a proposições verdadeiras.
- Impossíveis: nenhuma concretização da variável conduz a proposições verdadeiras.

Exemplos em $\mathbb{R}$:

- $x^2 = 1$
- $x^2 > -1$
- $x^2 < -1$

Quantificadores

- $\forall$: Quantificador Universal
- $\exists$: Quantificador Existencial

Exemplos:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : 3x = -21$$

Segundas Leis de DeMorgan

$$\sim \forall x, p(x) \iff \exists x :\sim p(x)$$

$$\sim \exists x : p(x) \iff \forall x, \sim p(x)$$

Exemplos:

$$\sim \forall x \in \mathbb{R}, 2x = 1 \iff \exists x \in \mathbb{R} : 2x \neq 1$$

$$\sim \exists x \in \mathbb{N} : x^2 < 0 \iff \forall x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 0$$

Operações com Conjuntos

- Reunião: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- Interseção: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- Complementar: $A' = \{x : x \notin A\}$
- Diferença: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

Relações entre Conjuntos

- Igualdade de conjuntos:
  $A = B \iff \forall x, (x \in A \iff x \in B)$
- Subconjunto: $A \subset B \iff \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Propriedades das Operações com Conjuntos

- **Comutativa**: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- **Associativa**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **Idempotência**: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- **Elemento Neutro**: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \mathcal{U} = A$
- **Elemento Absorvente**: $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
- **Distributiva**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Primeiras Leis de DeMorgan para Conjuntos

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$