UNIVERSIDADE DE ÉVORA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Linguagens Formais e Autómatos
Segunda Frequência - Resolução
18 de Dezembro de 2014

Exercício 1 Os valores na linguagem `While` são representados por expressões geradas pela gramática

$$G = (\{V\}, \{\texttt{nil}, (, \cdot,)\}, \{V \to \texttt{nil} \mid (\, V \cdot V\,)\}, V).$$

1. **[3 valores]** Seguindo o processo dado nas aulas, obtenha uma gramática equivalente a G, na *Forma Normal de Greibach*;
2. **[1 valor]** Os números naturais podem ser representados por estas expressões pela seguinte definição:

$$0 \equiv \texttt{nil} \qquad\qquad n+1 \equiv (\,\texttt{nil} \cdot n\,)$$

Determine a expressão do número 2 e use as produções da gramática na FNG que obteve na alínea anterior para derivar essa palavra (se não obteve a FNG use G **com um desconto de 0,5 valores na pontuação da alínea**);

Na gramática G o símbolo inicial não é recursivo, a gramática é não contraível e não tem símbolos inúteis — isto é, está **limpa** e pronta a ser trasnformada numa gramática equivalente na **forma normal de Chomsky**:

$$\begin{aligned} V &\to \texttt{nil} \\ V &\to AX \\ X &\to VY \\ Y &\to PZ \\ Z &\to VF \\ A &\to (\\ P &\to \cdot \\ F &\to) \end{aligned}$$

Para se obter a **forma normal de Greibach** é necessário especificar uma ordem total nos não terminais em que o símbolo inicial é o primeiro elemento. Seja

$$V < X < Z < Y < A < P < F$$

essa ordem. Como X e Z têm produções a começar por V é necessário transformar essas produções. As produções de V podem ser substituidas por $V \to \texttt{nil} \mid (X$ portanto obtém-se (no passo descendente)

$$\begin{aligned} V &\to \texttt{nil} \\ V &\to (\,X \\ X &\to \texttt{nil}\,Y \\ X &\to (\,XY \\ Z &\to \texttt{nil}\,F \\ Z &\to (\,XF \\ Y &\to PZ \\ A &\to (\\ P &\to \cdot \\ F &\to) \end{aligned}$$

e a **forma normal de Greibach** (removendo os símbolos desnecessários A e P)

$$\begin{aligned} V &\to \texttt{nil} \\ V &\to (\,X \\ X &\to \texttt{nil}\,Y \\ X &\to (\,XY \\ Z &\to \texttt{nil}\,F \\ Z &\to (\,XF \\ Y &\to \cdot\,Z \\ F &\to) \end{aligned}$$

A expressão do número 2 é

$$2 = (\,\texttt{nil} \cdot 1\,) = (\,\texttt{nil} \cdot (\,\texttt{nil} \cdot 0\,)\,) = (\,\texttt{nil} \cdot (\,\texttt{nil} \cdot \texttt{nil}\,)\,)$$

e tem a seguinte derivação esquerda

$$\begin{aligned} V &\Rightarrow_L A\,X \\ &\Rightarrow_L (\,X \\ &\Rightarrow_L (\,\texttt{nil}\,Y \\ &\Rightarrow_L (\,\texttt{nil}\cdot Z \\ &\Rightarrow_L (\,\texttt{nil}\cdot(\,X\,F \\ &\Rightarrow_L (\,\texttt{nil}\cdot(\,\texttt{nil}\,Y\,F \\ &\Rightarrow_L (\,\texttt{nil}\cdot(\,\texttt{nil}\cdot Z\,F \\ &\Rightarrow_L (\,\texttt{nil}\cdot(\,\texttt{nil}\cdot\texttt{nil}\,F\,F \\ &\Rightarrow_L (\,\texttt{nil}\cdot(\,\texttt{nil}\cdot\texttt{nil}\,)\,F \\ &\Rightarrow_L (\,\texttt{nil}\cdot(\,\texttt{nil}\cdot\texttt{nil}\,)\,) \end{aligned}$$

Exercício 2 Considere a gramática $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \ldots, S)$ com as seguintes produções

$$S \to aA\# \mid abB\# \qquad\qquad A \to aA \mid \lambda \qquad\qquad B \to bB \mid \lambda$$

1. **[1 valor]** Modifique G de forma a obter uma gramática $\mathcal{LL}(1)$;
2. **[2 valores]** Calcule os conjuntos directores das produções e confirme que a gramática que obteve é mesmo $\mathcal{LL}(1)$;

Para uma gramática ser $\mathcal{LL}(1)$, os símbolos directores das produções de cada não terminal têm de ser disjuntos. Esta gramática não é $\mathcal{LL}(1)$ porque

$$\text{DIR}(S \to aA\#) = \{a\} = \text{DIR}(S \to abB\#)$$

Substituindo as produções de S por $S \to aC$ e acrescentando $C \to A\# \mid bB\#$ obtemos uma solução directa deste problema. Será suficiente? Isto é, a nova gramática é $\mathcal{LL}(1)$?

1. $\Lambda = \{A, B\}$
2. Primeiros e Seguintes (construindo os respectivos grafos orientados)

NT	PRIMEIROS	SEGUINTES
S	$\{a\}$	$\emptyset$
A	$\{a\}$	$\{\#\}$
B	$\{b\}$	$\{\#\}$
C	$\{a, b\}$	$\emptyset$

3. Directores

NT	Produção	DIRECTORES
S	$\to aC$	$\{a\}$
C	$\to A\#$	$\{a, \#\}$
C	$\to bB\#$	$\{b\}$
A	$\to aA$	$\{a\}$
A	$\to \lambda$	$\{\#\}$
B	$\to bB$	$\{b\}$
B	$\to \lambda$	$\{\#\}$

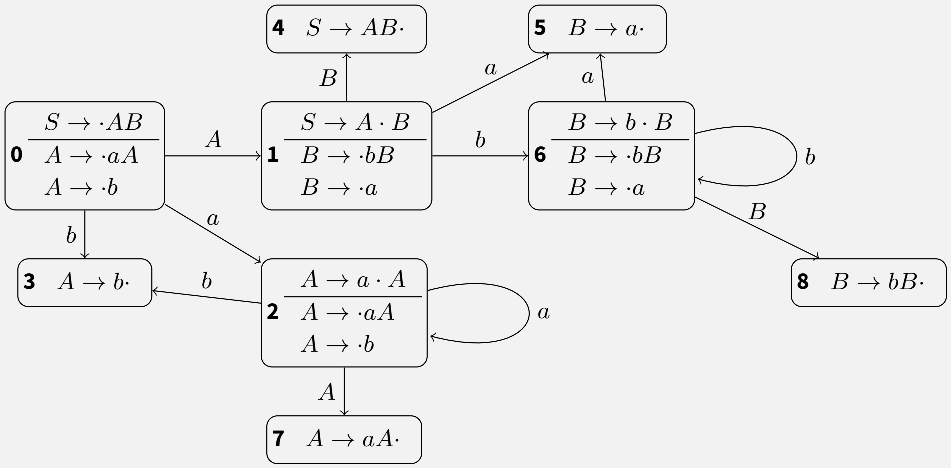
Como, para cada não terminal, os directores das respectivas produções são disjuntos, a gramática obtida é $\mathcal{LL}(1)$.

Exercício 3 Considere a gramática $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \ldots, S)$ com produções

$$S \to AB \qquad\qquad A \to aA \mid b \qquad\qquad B \to bB \mid a$$

1. **[2 valores]** Construa o autómato dos itens $\mathcal{LR}(0)$ válidos;
2. **[1 valor]** Determine o contexto-$\mathcal{LR}(0)$ da produção $A \to aA$;
3. **[2 valores]** Justifique se esta gramática é (ou não) $\mathcal{LR}(0)$. Em caso afirmativo, indique a sua tabela de análise sintáctica e construa o autómato de pilha reconhecedor; Caso contrário identifique o tipo (ou tipos) de conflitos que acontecem;

O autómato dos itens $\mathcal{LR}(0)$ válidos é



O contexto-$\mathcal{LR}(0)$ da produção $A \to aA$ é obtido percorrendo todos os caminhos possíveis desde o estado inicial (marcado com **0**) até ao estado que contém o item completo $A \to aA\cdot$ (marcado com **7**). Portanto **o contexto-$\mathcal{LR}(0)$ da produção** $A \to aA$ é o conjunto

$$\text{contexto-}\mathcal{LR}(0) = \mathcal{L}\left(aa^*A\right)$$

Os critérios $\mathcal{LR}(0)$ dizem que:

- cada estado contém, no máximo, um item completo;
- se um estado contém um item completo, nos restantes itens desse estado o ponto é seguido por um não terminal;

Neste caso é fácil observar que ambos os critérios são verificados. Portanto **esta gramática é** $\mathcal{LR}(0)$.
A tabela de análise sintáctica é:

q	S	A	B	a	b	ACÇÃO
0		1		2	3	TRANSF.
1			4	5	6	TRANSF.
2		7		2	3	TRANSF.
3						$A \to b$
4						ACEITA
5						$B \to a$
6			8		6	TRANSF.
7						$A \to aA$
8						$B \to bB$

O autómato de pilha reconhecedor é definido pelas seguintes transições

início	$p_I \to p$	
	$\lambda, \lambda/0$	
aceitação	$p \to p$	
	$\lambda, 4B1A0/\lambda$	
transferências	$p \to p$	
	$a, 0/2a0$	$b, 0/3b0$
	$a, 2/2a2$	$b, 2/3b2$
	$a, 1/5a1$	$b, 1/6b1$
	$a, 6/5a6$	$b, 6/6b6$
reduções	$p \to p$	
	$\lambda, 3b0/1A0$	$\lambda, 3b2/7A2$
	$\lambda, 7A2a2/7A2$	$\lambda, 7A2a0/1A0$
	$\lambda, 5a1/4B1$	$\lambda, 5a6/8B6$
	$\lambda, 8B6b6/8B6$	$\lambda, 8B6b1/4B1$

Exercício 4 Considere a gramática $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, \ldots, S)$ com produções

$$S \to A \mid Bc \qquad A \to aA \mid a \qquad B \to a \mid ab$$

1. **[1 valor]** Mostre que esta gramática **não é** $\mathcal{LR}(0)$;
2. **[2,5 valores]** Determine o autómato dos itens $\mathcal{LR}(1)$ válidos e justifique que a gramática é $\mathcal{LR}(1)$;
3. **[1,5 valores]** Construa a tabela de análise sintáctica;

As condições $\mathcal{LR}(0)$ dependem dos estados do **autómato dos itens** $\mathcal{LR}(0)$. Começando pelo estado inicial, obtém-se, pelo fecho,

$$\mathbf{0} = \{S \to \cdot A, S \to \cdot Bc, \ldots, A \to \cdot a, B \to \cdot a, \ldots\}$$

Ora, a partir deste estado, lendo a obtém-se o estado

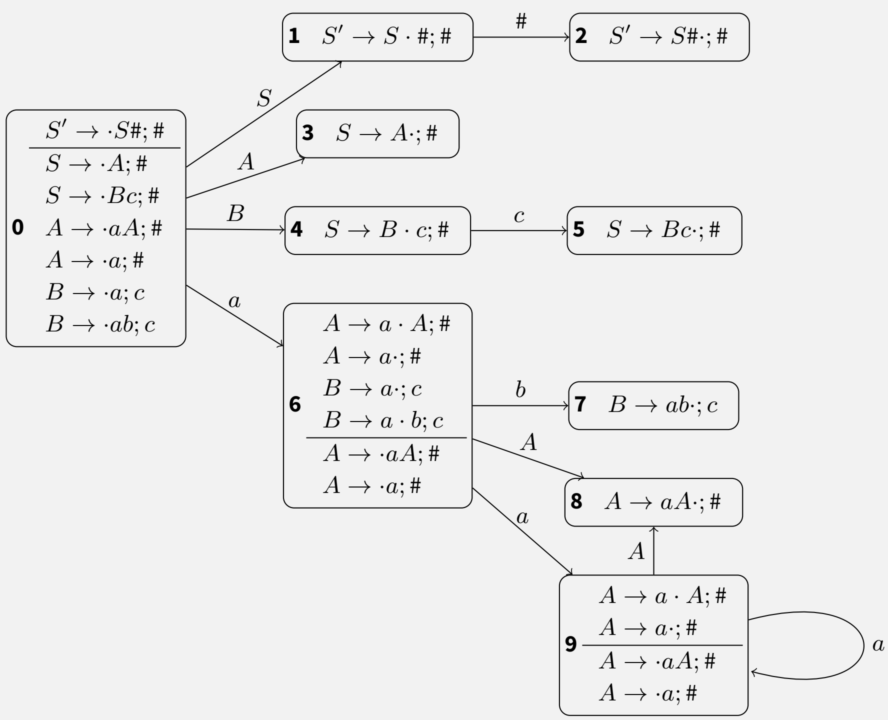
$$\{\ldots, A \to a\cdot, B \to a\cdot, \ldots\}$$

que tem dois itens completos, o que não pode acontecer numa gramática $\mathcal{LR}(0)$.

Começando por estender a gramática com um terminador #, obtém-se

$$\begin{aligned} S' &\to S\# \\ S &\to A \mid Bc \\ A &\to aA \mid a \\ B &\to a \mid ab \end{aligned}$$

Agora **o autómato dos itens** $\mathcal{LR}(1)$ fica



Neste autómato o único estado que tem mais do que um item completo é

$$\mathbf{6} = \{[A \to a \cdot A; \#], [A \to a\cdot; \#] \checkmark, [B \to a\cdot; c] \checkmark, [B \to a \cdot b; c], [A \to \cdot aA; \#], [A \to \cdot a; \#]\}$$

onde os itens completos são assinalados com ✓. Como para estes itens os símbolos de avanço são disjuntos, verifica-se a primeira condição $\mathcal{LR}(1)$.
A segunda condição, "se um estado contém um item completo $[A \to w\cdot; L]$ e um item $[B \to u \cdot av; K]$ então $a \notin L$" também é fácil de observar. Os únicos estados que interessam são o **6** e o **9**. Para o estado **6**, nenhum item tem o ponto antes de # ou de c. Para o estado **9** nenhum item tem o ponto antes de #.
Como as duas condições são verificadas a gramática é $\mathcal{LR}(1)$.

A **tabela de análise sintáctica** é

q	S	A	B	a	b	c	#	a	b	c	#
0	1	3	4	6				TRANSF.			
1							2				TRANSF.
2											ACEITA
3											$S \to A$
4						5				TRANSF.	
5											$S \to Bc$
6		8		9	7			TRANSF.	TRANSF.	$B \to a$	$A \to a$
7										$B \to ab$	
8											$A \to aA$
9		8		9				TRANSF.			

Exercício 5 [3 valores] Moste que o problema de decisão "*O programa* $\mathtt{p}$*, quando corrido com argumento* x*, tem resultado* x*.*" é indecidível.

1. Seja R este problema. As suas instâncias são pares $(\mathtt{q}, x)$;
2. Supondo que R é decidível, seja $\mathtt{r}$ um programa que o resolve:

$$\forall \mathtt{q}, x \quad \mathtt{r}(\mathtt{q}, x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \mathtt{q}(x) = x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3. Para cada programa MRI, $\mathtt{p}$, seja

$$\mathtt{q}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mathtt{p}\,[1 \to 2] \end{array} \right.$$

4. Para qualquer argumento x, $\mathtt{q}(x) = x$ **se e só se** $\mathtt{p}(x)$ termina;
5. Como é possível construir $\mathtt{q}$ a partir de $\mathtt{p}$, seja $\mathtt{f}$ o programa MRI que realiza essa tarefa: $\mathtt{q} = \mathtt{f}(\mathtt{p})$;
6. Seja agora $\mathtt{u}$ o programa

$$\mathtt{u} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mathtt{f}\,[1 \to 1] \\ 2 & \mathtt{r}\,[1, 2 \to 1] \end{array} \right.$$

7. Para cada par $(\mathtt{p}, x)$, o programa $\mathtt{u}$:
   (a) constrói $\mathtt{q} = \mathtt{f}(\mathtt{p})$;
   (b) decide se para o argumento x, $\mathtt{q}(x) = x$
   (c) isto é, decide se para o argumento x o programa $\mathtt{p}$ termina;
8. Portanto o programa $\mathtt{u}$ resolve o problema da terminação — **Contradicção**;
9. Como todos os passos são realizáveis, a premissa errada tem de ser a existência do programa $\mathtt{r}$. Portanto **o problema** R **é indecidível**.