UNIVERSIDADE DE ÉVORA

DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

Linguagens Formais e Autómatos
Correcção da Primeira Frequência
5 de Novembro de 2014

Exercício 1 *Seja L a linguagem das palavras sobre $\{a, b, c\}$, não vazias, em que o primeiro símbolo é também o último. Por exemplo b, aca estão em L enquanto que ab, bca não estão.*

1. **[1,5 valores]** *Escreva uma expressão regular que represente L;*
2. **[2,5 valores]** *Defina um autómato finito determinista que reconheça L;*

Resolução 1 *Uma expressão regular para a linguagem indicada é*

$$a \cup b \cup c \cup a(a \cup b \cup c)^* a \cup b(a \cup b \cup c)^* b \cup c(a \cup b \cup c)^* c$$

Um AFD é $A = (\{q_I, q_a, q_b, q_c, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_I, \{q_a, q_b, q_c\})$ em que a transição é dada por

q	a	b	c
q_I	q_a	q_b	q_c
q_a	q_a	q_1	q_1
q_b	q_2	q_b	q_2
q_c	q_3	q_3	q_c
q_1	q_a	q_1	q_1
q_2	q_2	q_b	q_2
q_3	q_3	q_3	q_c

Exercício 2 *Considere o AFND $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1, q_2\})$ com a transição δ definida pela tabela seguinte*

q	a	b	λ
q_0	$\{q_0, q_1\}$		
q_1		$\{q_1, q_2\}$	
q_2			$\{q_0, q_1\}$

1. **[2,5 valores]** *Aplique o algoritmo dado nas aulas para determinar um autómato finito determinista equivalente a A;*
2. **[2 valores]** *Encontre um autómato finito determinista mínimo equivalente a A;*

Resolução 2 *Um AFD equivalente ao autómato dado é $A' = (Q, \{a, b\}, \delta', p_I, F)$ em que*

p	a	b
$p_I = \lambda$-fecho$(q_0) = \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\} = p_1$	$\emptyset = p_2$
$p_1 = \{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\} \cup \emptyset = p_1$	$\emptyset \cup \{q_1, q_2\} \cup \{q_0, q_1\} = \{q_0, q_1, q_2\} = p_3$
$p_2 = \emptyset$	$\emptyset = p_2$	$\emptyset = p_2$
$p_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\} \cup \emptyset \cup \emptyset = p_1$	$\emptyset \cup \{q_1, q_2\} \cup \emptyset \cup \{q_0, q_1, q_2\} = p_3$

isto é:

p	a	b
p_I	p_1	p_2
p_1	p_1	p_3
p_2	p_2	p_2
p_3	p_1	p_3

O conjunto dos estados de aceitação é $F = \{p_I, p_1, p_3\}$.

Um autómato mínimo equivalente obtém-se por

estados	partição		partição	
p_I	I	$\in F$	I	$\delta'(p_I, b) \in II$
p_1	I	$\in F$	III	$\delta'(p_1, b) \in I$
p_2	II	$\notin F$	II	
p_3	I	$\in F$	III	$\delta'(p_3, b) \in I$

Portanto $A'' = (\{I, II, III\}, \{a, b\}, \delta'', I, \{I, III\})$ em que δ'' é dada por

P	a	b
I	III	II
II	II	II
III	III	III

Exercício 3 [2 valores] *Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, q_I, \{q_f\})$ um AFND "bem preparado", isto é, sem transições para o estado inicial, com um único estado de aceitação q_f e sem transições a partir de q_f. Considere $A' = (Q, \Sigma, \delta', q_f, \{q_I\})$ com estado inicial q_f, um (único) estado final q_I e em que a transição δ' está definida por*

$$p \in \delta'(q, a) \iff q \in \delta(p, a) \quad \forall p, q \in Q, a \in \Sigma$$

Supondo que $L = \mathcal{L}(A)$ que linguagem é $\mathcal{L}(A')$? [Sugestão: considere A um autómato simples, por exemplo para reconhecer $\mathcal{L}\left((ab)^*\right)$, e encontre o respectivo A'.]

Resolução 3 *Fica $\mathcal{L}(A') = \{w^R \ : \ w \in L\}$. Para ver que é assim, basta observar que a um passo de uma computação em A, por exemplo $q \xrightarrow{a} p$, corresponde um passo em A', "trocando o sentido da seta", $p \xrightarrow{a} q$.*

Se $w \in \mathcal{L}(A)$ é porque existe uma computação em A tal que $q_f = \hat{\delta}(q_I, w)$. Portanto, fazendo essa computação "para trás", fica $q_I \in \hat{\delta}'(q_f, w^R)$ isto é $w^R \in \mathcal{L}(A')$.

Exercício 4 [2,5 valores] *Mostre que a GIC $G = (\{S, X\}, \{a, b\}, \{S \to aaX \mid Xbb, X \to aX \mid bX \mid \lambda\}, S)$ é ambígua.*

Resolução 4 *A palavra $aabb$ tem duas derivações direitas:*

$$S \overset{S \to aaX}{\Rightarrow_R} aaX \overset{X \to bX}{\Rightarrow_R} aabX \overset{X \to bX}{\Rightarrow_R} aabbX \overset{X \to \lambda}{\Rightarrow_R} aabb$$
$$S \overset{S \to Xbb}{\Rightarrow_R} Xbb \overset{X \to aX}{\Rightarrow_R} aXbb \overset{X \to aX}{\Rightarrow_R} aaXbb \overset{X \to \lambda}{\Rightarrow_R} aabb$$

Exercício 5 [3 valores] *Na **notação prefixa** as operações escrevem-se antes dos termos. A versão simplificada das expressões aritméticas em notação prefixa usa as operações aritméticas comuns $+, -, \times, \div$ e o símbolo n para representar (quaisquer) números. Por exemplo*

notação prefixa	notação infixa ("comum")
$-nn$	$n - n$
$\div nn$	$n \div n$
$\times + nnn$	$(n + n) \times n$
$+ \times nnn$	$n \times n + n$
$\times n + nn$	$n \times (n + n)$
$+n \times nn$	$n + n \times n$

Defina uma GIC para gerar a linguagem das expressões aritméticas simplificadas em notação prefixa.

Resolução 5 *Uma GIC adequada é*

$$E \to + \ E \ E \mid - \ E \ E \mid \times \ E \ E \mid \div \ E \ E \mid n$$

Exercício 6 *Seja L a linguagem $\{a^i b^j c^k \ : \ i, j \geq 0, k = i + j\}$.*

1. **[2 valores]** *Defina um autómato de pilha para reconhecer L;*
2. **[2 valores]** *Para a demonstração de que L não é regular...*
   - *que palavra p usaria?*
   - *que decomposição (ou decomposições) de $p = uvw$ consideraria?*
   - *como, a partir daí, concluíria que L não é regular?*

Resolução 6 *Um autómato adequado é $A = (\{p, q, r\}, \{a, b, c\}, \{X\}, \delta, p, \{p, q, r\})$ em que a transição é dada por*

$$\delta(p, a, \lambda) = \{(p, X)\} \qquad \delta(q, b, \lambda) = \{(q, X)\} \qquad \delta(r, c, X) = \{(r, \lambda)\}$$
$$\delta(p, b, \lambda) = \{(q, X)\} \qquad \delta(q, c, X) = \{(r, \lambda)\}$$
$$\delta(p, c, X) = \{(r, \lambda)\}$$

Este autómato <u>só</u> aceita quando a pilha está vazia, a palavra foi completamente lida e o estado atingido é de aceitação.

Supondo que L é regular e A um AFD que reconheca L, seja $k = |Q|$ o número de estados de controlo de A.
Uma palavra adequada para aplicar o pumping lemma *será $p = a^k b^0 c^k$.*
O pumping lemma *garante que existe uma decomposição $p = uvw$ com $|uv| \leq k$ e $|v| > 0$ tal que $uv^n w \in L, \forall n \geq 0$. Portanto $u = a^p$, $v = a^q$ e e $w = a^{k-p-q} c^k$ para um certo $0 \leq p < k$ e $0 < q \leq k$.*

Como $|v| = q > 0$ fazendo $n = 0$ o número de a's em $uv^0 w$ fica necessariamente menor do que o número de c's. Mas então a condição $k = i + j$ (na definição das palavras de L) já não se verifica. Isto é, $uv^0 w \notin L$. Mas isto contradiz o pumping lemma. *A contradição resulta da suposição que L é regular, o que tornaria aplicável o* pumping lemma.