PM001 Atividade 2 - 28/04
Aluno: Diogo Takamori Barbosa
RA: 037382

1. Dê exemplo de dois subespaços U e W do espaço vetorial das matrizes 2x3 tais que :
i) A matriz 2x3 formada pelos algarismos do seu RA seja um elemento de U
ii) As dimensões de U e W sejam 4 e 3 respectivamente e a dimensão do subespaço intersecção U∩W seja 2
iii) Exiba bases para U, W, U∩W e U+W.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Para U, escolhemos uma base $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ com dimensão 4. Podemos escolher as seguintes matrizes 2x3:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para W, escolhemos uma base $\{w_1, w_2, w_3\}$ com dimensão 3. Podemos escolher as seguintes matrizes 2x3:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A interseção $U \cap W$ é o subespaço gerado pelas matrizes que estão em ambas as bases. Nesse caso, escolhemos duas matrizes de cada base para formar a interseção:

$$u_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad w_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, uma base para $U \cap W$ é $\{u_i, w_j\} = \{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\}$.

A soma $U + W$ é o conjunto de todas as combinações lineares de vetores em U e W.

$$\{u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_2, w_3\}$$

2)a) Dê exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ tal que:
i) O vetor formado pelos quatro últimos algarismos do seu RA não pertença ao núcleo.
ii) O vetor do seu RA esteja na imagem
iii) O núcleo tenha dimensão 2. Encontre também bases para o núcleo e para a imagem da sua transformação
a matriz de transformação A é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Verificando se o vetor formado pelos quatro últimos algarismos do meu RA não pertence ao núcleo:

$A \cdot \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot \mathbf{x}$ não é o vetor nulo, o vetor formado pelos quatro últimos algarismos do meu RA não pertence ao núcleo de A.

ii) Verificando se o vetor do meu RA está na imagem de A:

$$A \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 0 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 3 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 7 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 = 3 \\ 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 8 \\ 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = 2 \end{cases}$$

as coordenadas do vetor na imagem de A são $(8, 2, 7, 3)$.

$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores que compõem uma base para o núcleo de A são:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para encontrar a base da imagem de A, podemos primeiro observar que a imagem de A é gerada pelos vetores coluna de A que não são nulos. Neste caso, os quatro primeiros vetores coluna de A são nulos, então a imagem de A é gerada pelos dois últimos vetores coluna de A, que são $[1, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ e $[0, 1, 0, 0, 0, 0]^T$.
Portanto, uma base para a imagem de A é dada pelos vetores:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3)
i) Encontre uma transformação linear do plano no plano que deforme uma elipse de semieixo maior medindo a sobre a reta y = k x e semieixo menor com medida igual a b (a>0 ,b>0 e k >0)
numa circunferência de raio 1 centrada na origem.
ii))Escolha a, b e k. para testar se sua dedução está correta e ilustre no computador.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que ela leve a elipse inicial para a circunferência desejada.

1. Primeiro, precisamos considerar a elipse inicial. Uma parametrização para a elipse centrada na origem com semieixo maior a e semieixo menor b é dada por:

$$x = a\cos(t), \quad y = b\sin(t)$$

2. Agora, queremos deformar essa elipse em uma circunferência de raio 1 centrada na origem. Para isso, podemos aplicar uma transformação linear T tal que a elipse seja transformada em uma circunferência.

3. Uma transformação linear que faz isso é a rotação seguida de um redimensionamento. A rotação por um ângulo θ no sentido anti-horário é dada por:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

4. Para garantir que a circunferência resultante tenha raio 1, precisamos redimensionar a elipse de acordo. Como os semieixos da elipse têm medidas a e b, a circunferência terá raio 1 se a redimensionarmos por $\frac{1}{\max(a,b)}$.
A transformação linear T pode ser definida como a composição dessas duas transformações:

$$T = R_\theta \cdot D$$

Onde D é a matriz de redimensionamento e θ é o ângulo de rotação necessário para alinhar a reta $y = kx$ com um dos eixos.

5. Agora, precisamos encontrar θ. A reta $y = kx$ forma um ângulo α com o eixo x, onde $\tan(\alpha) = k$. Então, o ângulo θ de rotação para alinhar essa reta com o eixo x é dado por $\theta = \arctan(k)$.

6. A matriz de redimensionamento D será uma matriz diagonal com os fatores de escala $\frac{1}{\max(a,b)}$ ao longo de ambos os eixos.

A transformação linear T que deforma a elipse no plano para uma circunferência de raio 1 centrada na origem é dada por:

$$T = R_\theta \cdot D$$

Onde R_θ é a matriz de rotação por θ e D é a matriz de redimensionamento.

Realizando os cálculos para os valores escolhidos $a = 2$, $b = 1$ e $k = 2$.

1. Ângulo de Rotação (θ):
O ângulo de rotação θ necessário para alinhar a reta $y = 2x$ com o eixo x é dado por
$\theta = \arctan(k) = \arctan(2)$.
$\theta = \arctan(2) \approx 1.107$ radianos.

2. Matriz de Rotação (R_θ):
A matriz de rotação R_θ é dada por:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Substituindo $\theta = \arctan(2)$, obtemos:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(1.107) & -\sin(1.107) \\ \sin(1.107) & \cos(1.107) \end{pmatrix}$$

Calculando os valores trigonométricos, obtemos:

$$R_\theta \approx \begin{pmatrix} 0.416 & -0.909 \\ 0.909 & 0.416 \end{pmatrix}$$

3. Matriz de Redimensionamento (D):
A matriz de redimensionamento D é uma matriz diagonal com os fatores de escala $\frac{1}{\max(a,b)}$ ao longo de ambos os eixos. Para $a = 2$ e $b = 1$, o fator de escala será $\frac{1}{2}$.

A matriz de redimensionamento é:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Transformação Linear (T):
A transformação linear T é dada pela composição das matrizes de rotação e redimensionamento:

$$T = R_\theta \cdot D$$

Substituindo as matrizes R_θ e D, obtemos:

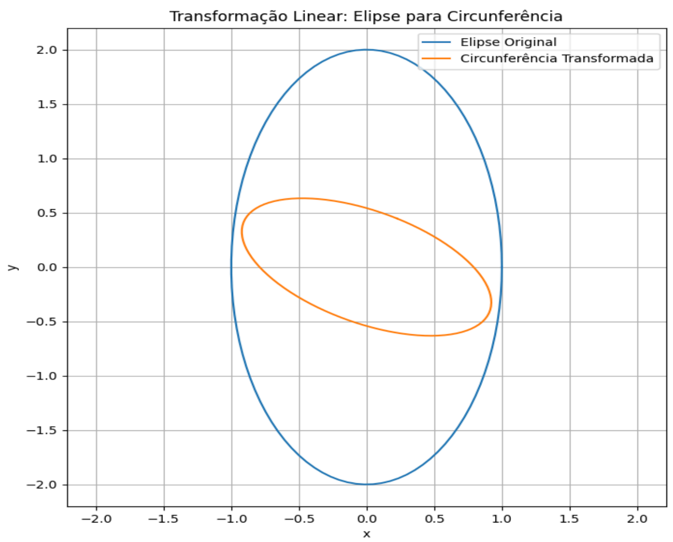
$$T = \begin{pmatrix} 0.416 & -0.909 \\ 0.909 & 0.416 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Multiplicando as matrizes, obtemos a matriz de transformação T.

Usando uma Demonstração por Código em Python temos :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros da elipse original
a = 2
b = 1
k = 2  # Coeficiente angular da reta y = kx

# Parâmetro da transformação de rotação
theta = np.arctan(k)  # Ângulo de rotação

# Matriz de rotação
R_theta = np.array([[np.cos(theta), -np.sin(theta)],
                    [np.sin(theta), np.cos(theta)]])
```

```
# Matriz de redimensionamento para transformar a elipse em uma circunferência de raio 1
D = np.diag([1/max(a, b), 1/max(a, b)])

# Deslocamento para o centro
centro_elipse = np.array([0, 0])  # Centro da elipse original
centro_circunferencia = np.array([0, 0])  # Centro da circunferência desejada
deslocamento = np.array([centro_circunferencia - centro_elipse])

# Transformação linear
T = R_theta.dot(D)

# Parametrização da elipse original
t = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
x_elipse = a * np.cos(t)
y_elipse = b * np.sin(t)

# Aplicação da transformação linear na elipse
elipse_transformada = T.dot(np.vstack((x_elipse, y_elipse))) + deslocamento.T

# Plot da elipse original
plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(x_elipse, y_elipse, label='Elipse Original')

# Plot da circunferência resultante
plt.plot(elipse_transformada[0], elipse_transformada[1], label='Circunferência Transformada')

# Ajustes de plot
plt.axis('equal')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Transformação Linear: Elipse para Circunferência')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```



4. Encontre a transformação linear do espaço no espaço que é uma projeção no plano ax +by + cz = 0 , onde a, b e c são os três maiores algarismos do seu RA. Ilustre no computador.

A matriz de projeção ortogonal P para o plano $ax + by + cz = 0$, onde $a = 8$, $b = 7$ e $c = 3$.

A matriz de projeção ortogonal P é dada pela fórmula:

$$P = I - \frac{2}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T$$

Onde:
- I é a matriz identidade 3x3,
- $\mathbf{n}$ é o vetor normal ao plano, e
- $\|\mathbf{n}\|$ é a norma do vetor normal.

norma do vetor normal:

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{8^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{113}$$

A matriz de projeção P:

$$P = I - \frac{2}{113}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

cálculos:

$$\frac{2}{113}\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{113}\begin{bmatrix} 64 & 56 & 24 \\ 56 & 49 & 21 \\ 24 & 21 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P = I - \frac{2}{113}\begin{bmatrix} 64 & 56 & 24 \\ 56 & 49 & 21 \\ 24 & 21 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{113}\begin{bmatrix} 64 & 56 & 24 \\ 56 & 49 & 21 \\ 24 & 21 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 - \frac{128}{113} & -\frac{112}{113} & -\frac{48}{113} \\ -\frac{112}{113} & 1 - \frac{98}{113} & -\frac{42}{113} \\ -\frac{48}{113} & -\frac{42}{113} & 1 - \frac{18}{113} \end{bmatrix}$$

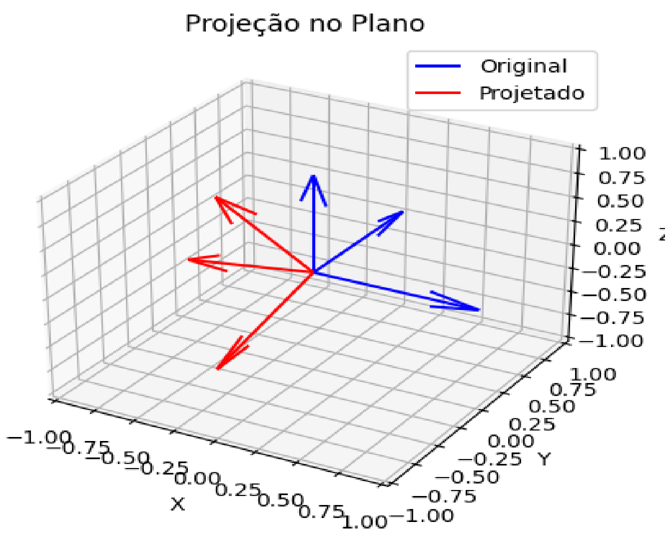
$$P = \begin{bmatrix} \frac{-15}{113} & -\frac{112}{113} & -\frac{48}{113} \\ -\frac{112}{113} & \frac{15}{113} & -\frac{42}{113} \\ -\frac{48}{113} & -\frac{42}{113} & \frac{95}{113} \end{bmatrix}$$

A matriz de projeção P para o plano $ax + by + cz = 0$, onde $a = 8$, $b = 7$ e $c = 3$, é:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-15}{113} & -\frac{112}{113} & -\frac{48}{113} \\ -\frac{112}{113} & \frac{15}{113} & -\frac{42}{113} \\ -\frac{48}{113} & -\frac{42}{113} & \frac{95}{113} \end{bmatrix}$$

Computacional em python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Definindo os valores de a, b, c
a = 8
b = 7
c = 3

# Calculando a norma do vetor normal
norma_n = np.sqrt(a**2 + b**2 + c**2)

# Calculando a matriz de projeção ortogonal P
n = np.array([a, b, c])
P = np.eye(3) - 2 / (norma_n**2) * np.outer(n, n)

# Vetores de teste
v1 = np.array([1, 0, 0])
v2 = np.array([0, 1, 0])
v3 = np.array([0, 0, 1])

# Aplicando a transformação linear nos vetores
v1_proj = P.dot(v1)
v2_proj = P.dot(v2)
v3_proj = P.dot(v3)

# Plotando os vetores original e projetado
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.quiver(0, 0, 0, v1[0], v1[1], v1[2], color='b', label='Original')
ax.quiver(0, 0, 0, v1_proj[0], v1_proj[1], v1_proj[2], color='r', label='Projetado')
ax.quiver(0, 0, 0, v2[0], v2[1], v2[2], color='b')
ax.quiver(0, 0, 0, v2_proj[0], v2_proj[1], v2_proj[2], color='r')
ax.quiver(0, 0, 0, v3[0], v3[1], v3[2], color='b')
ax.quiver(0, 0, 0, v3_proj[0], v3_proj[1], v3_proj[2], color='r')
ax.set_xlim([-1, 1])
ax.set_ylim([-1, 1])
ax.set_zlim([-1, 1])
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('Y')
ax.set_zlabel('Z')
ax.set_title('Projeção no Plano')
ax.legend()
plt.show()
```



5) Encontre uma transformação linear T : R3 → R3 tal que:
i) tenha auto valores a e b onde a e b são os maiores algarismos do seu RA
ii) ao autovalor a estão associados dois auto vetores perpendiculares, sendo um deles (e,f,g) onde e,f,g são os três últimos dígitos do seu RA.
iii) Ao autovalor b estão associados autovetores que são perpendiculares aos dois auto vetores de ii) . Encontre a matrIz [*T*]*aa* da sua transformação em relação à base canônica *a*

Para encontrar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com autovalores a e b, onde a e b são os maiores algarismos do seu RA (037382), precisamos construir uma matriz 3×3 que tenha a e b como autovalores.

matriz diagonal D:

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Construir a matriz P:
uma escolha possível para P é:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = PDP^{-1}$$

- P é a matriz de autovetores.
- D é a matriz diagonal dos autovalores.
- P^{-1} é a inversa da matriz de autovetores.

$$T = PDP^{-1} = PDP$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encontrando o vetor $[e, f, g]$, onde e, f, g são os três últimos dígitos do seu RA (037382), ou seja, $e = 3$, $f = 8$ e $g = 2$.
A projeção de $[1, 0, 0]$ em $[3, 8, 2]$ é:

$$\text{proj}_{[3,8,2]}([1, 0, 0]) = \frac{3}{77}[3, 8, 2] = \left[\frac{9}{77}, \frac{24}{77}, \frac{6}{77}\right]$$

O vetor ortogonal será:

$$[1, 0, 0] - \left[\frac{9}{77}, \frac{24}{77}, \frac{6}{77}\right] = \left[1 - \frac{9}{77}, 0 - \frac{24}{77}, 0 - \frac{6}{77}\right] = \left[\frac{68}{77}, -\frac{24}{77}, -\frac{6}{77}\right]$$

Norma:

Para o vetor $[3, 8, 2]$:

$$\|[3, 8, 2]\| = \sqrt{3^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{77}$$

Para o vetor $\left[\frac{68}{77}, -\frac{24}{77}, -\frac{6}{77}\right]$:

$$\left\|\left[\frac{68}{77}, -\frac{24}{77}, -\frac{6}{77}\right]\right\| = \sqrt{\left(\frac{68}{77}\right)^2 + \left(-\frac{24}{77}\right)^2 + \left(-\frac{6}{77}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4624}{5929} + \frac{576}{5929} + \frac{36}{5929}} = \sqrt{\frac{5228}{5929}}$$

Normalizar:

Para o vetor $[3, 8, 2]$:

$$\text{Vetor normalizado} = \frac{1}{\sqrt{77}}[3, 8, 2]$$

Para o vetor $\left[\frac{68}{77}, -\frac{24}{77}, -\frac{6}{77}\right]$:

$$\text{Vetor normalizado} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5228}{5929}}}\left[\frac{68}{77}, -\frac{24}{77}, -\frac{6}{77}\right]$$

$$\mathbf{v}_1 = \left[\frac{3}{\sqrt{77}}, \frac{8}{\sqrt{77}}, \frac{2}{\sqrt{77}}\right]$$

$$\mathbf{v}_2 = \left[\frac{68}{\sqrt{5228}}, -\frac{24}{\sqrt{5228}}, -\frac{6}{\sqrt{5228}}\right]$$

iii

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{77}} \\ \frac{8}{\sqrt{77}} \\ \frac{2}{\sqrt{77}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{68}{\sqrt{5228}} \\ -\frac{24}{\sqrt{5228}} \\ -\frac{6}{\sqrt{5228}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \left(\frac{8}{\sqrt{77}}\right)\left(-\frac{6}{\sqrt{5228}}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{77}}\right)\left(-\frac{24}{\sqrt{5228}}\right) \\ \left(\frac{2}{\sqrt{77}}\right)\left(\frac{68}{\sqrt{5228}}\right) - \left(\frac{3}{\sqrt{77}}\right)\left(-\frac{6}{\sqrt{5228}}\right) \\ \left(\frac{3}{\sqrt{77}}\right)\left(-\frac{24}{\sqrt{5228}}\right) - \left(\frac{8}{\sqrt{77}}\right)\left(\frac{68}{\sqrt{5228}}\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{192}{\sqrt{6008716}} - \frac{48}{\sqrt{6008716}} \\ \frac{136}{\sqrt{6008716}} - \frac{18}{\sqrt{6008716}} \\ -\frac{204}{\sqrt{6008716}} + \frac{544}{\sqrt{6008716}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{240}{\sqrt{6008716}} \\ \frac{118}{\sqrt{6008716}} \\ \frac{340}{\sqrt{6008716}} \end{bmatrix}$$

$$[T]_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{77}} & \frac{68}{\sqrt{5228}} & -\frac{240}{\sqrt{6008716}} \\ \frac{8}{\sqrt{77}} & -\frac{24}{\sqrt{5228}} & \frac{118}{\sqrt{6008716}} \\ \frac{2}{\sqrt{77}} & -\frac{6}{\sqrt{5228}} & \frac{340}{\sqrt{6008716}} \end{bmatrix}$$