Soluções dos Exercícios

Capítulo 1

1.1-
a) Suponha que $x+y \notin \mathbb{Q}-\mathbb{R}$. Então $x+y \in \mathbb{R}$ ou $y = r-x$. Daí, $y \in \mathbb{Q}$, pois $r-x \in \mathbb{Q}$, o que contradiz a hipótese de que $y \in \mathbb{Q}-\mathbb{R}$.

b) Suponha que $xy \notin \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Então $xy = r \in \mathbb{Q}$ ou $y = \dfrac{r}{x}$. Daí, $y \in \mathbb{Q}$, pois $\dfrac{r}{x} \in \mathbb{Q}$ o que condradiz a hipótese de que $y \in \mathbb{Q}-\mathbb{R}$.

c) Temos:

$$y = y \cdot 1 = y \cdot x \cdot \frac{1}{x} = xy \cdot \frac{1}{x} = 0 \cdot \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$$

d) Temos:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0, \quad \forall x \geq 0 \;\text{ e }\; \forall y \geq 0$$

Logo:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

e) Temos:

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |-1 \cdot b| = |a| + |-1||b| = |a| + |b|$$

$$\Rightarrow |a-b| \leq |a| + |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

f) Temos:

$$|a| = |a-b+b| \leq |a-b| + |b|$$

$$|a| - |b| \leq |a-b| \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$|b| = |-1||b| = |-b| = |-a+a-b| = |a-b-a| \leq |a-b| + |a|$$

$$\Rightarrow -|a-b| \leq |a| - |b| \qquad (2)$$

Por (1) e (2) segue que:

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$$

ou equivalentemente:

$$||a| - |b|| \leq |a-b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

g) Temos:

$$|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a+b|$$
$$\Rightarrow |a+b| \geq |a| - |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

h) Basta mostrar que:

$$\frac{|a|}{1+|b|} + \frac{|b|}{1+|b|} - \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \geq 0, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

De fato,

$$\frac{|a|}{1+|b|} + \frac{|b|}{1+|b|} - \frac{|a+b|}{1+|a+b|} =$$

$$= \frac{|a|(1+|b|)(1+|a+b|) + |b|(1+|a|)(1+|a+b|) - |a+b|(1+|a|)(1+|b|)}{(1+|a|)(1+|b|)(1+|a+b|)}$$

Note que,

$$|a|(1+|b|)(1+|a+b|) + |b|(1+|a|)(1+|a+b|) - |a+b|(1+|a|)(1+|b|) =$$

$$= |a| + |a||a+b| + |a||b| + |a||b||a+b| + |b| + |b||a+b| + |a||b| + |a||b||a+b| -$$

$$-|a+b| - |b||a+b| - |a||a+b| - |a||b||a+b|$$

$$= |a| + |b| + 2|a||b| + |a||b||a+b| - |a+b|$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{|a|}{1+|b|} + \frac{|b|}{1+|b|} - \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= \frac{|a| + |b| + 2|a||b| + |a||b||a+b| - |a+b|}{(1+|a|)(1+|b|)(1+|a+b|)} \geq \\
&\geq \frac{|a| + |b| + 2|a||b| + |a||b||a+b| - |a| - |b|}{(1+|a|)(1+|b|)(1+|a+b|)} = \\
&= \frac{2|a||b| + |a||b||a+b|}{(1+|a|)(1+|b|)(1+|a+b|)} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{|a|}{1+|b|} + \frac{|b|}{1+|b|} - \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

1.2-

a) Se $a < b$ então, $\max\{a, b\} = b$. Logo:

$$a < b \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow |a-b| = -(a-b) = b - a \Rightarrow |a-b| = b - a + b - b$$
$$\Rightarrow |a-b| + a + b = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}\{a + b + |a-b|\}$$

Se $a > b$ então, $\max\{a, b\} = a$. Logo:

$$a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow |a-b| = a - b \Rightarrow |a-b| = a - b + a - a$$
$$\Rightarrow |a-b| + a + b = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}\{a + b + |a-b|\}$$

Se $a = b$ então, $\max\{a, b\} = c$, com $c = a = b$. Logo:

$$a = b \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow |a - b| = a - b \Rightarrow |a - b| = a - b + a - a$$
$$\Rightarrow |a - b| + a + b = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}\{a + b + |a - b|\} \Rightarrow c = \frac{1}{2}\{a + b + |a - b|\}$$

Portanto $\max\{a, b\} = \dfrac{1}{2}\{a + b + |a - b|\}$.

b) Análoga.

1.3- i) Se $n = 2$, pela desigualdade triangular, temos:

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|, \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

ii) Agora, suponha que

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \tag{3}$$

é verdadeira para n, e mostremos que a mesma é satisfeita para $n + 1$. De fato,

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}| = |(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1}| \leq |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| + |a_{n+1}|$$

Pela hipótese de indução temos:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + |a_{n+1}|$$

Portanto, (3) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.4- i) Se $n = 1$ temos:

$$(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1x$$

ii) Agora admitamos que

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \tag{4}$$

é verdadeira para n. Multiplicando ambos os lados de (4) por $1 + x$, teremos:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &\geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + nx + x + nx^2 = \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x, \quad \text{pois} \quad nx^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq -1$.

1.5- i) Para $n = 1$ temos:

$$(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = 1 + 1 \cdot x + \frac{1(1 - 1)}{2}x^2$$

ii) Agora, suponha que

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \tag{5}$$

é verdadeira para n e mostremos que a mesma vale para $n+1$. De fato,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

Pela hipótese de indução temos:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &\geq \left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2\right)(1+x) = \\
&= 1 + x + nx + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 = \\
&= 1 + (n+1)x + \left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right)x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 = \\
&= 1 + (n+1)x + \left(\frac{n+n^2}{2}\right)x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 = \\
&= 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 = \\
&= 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \geq \\
&\geq 1 + (n+1)x + \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}x^2
\end{aligned}$$

Portanto, (5) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.6- De fato, pela propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ temos que: dado $\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N\varepsilon > 1 \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon$$

1.7- Suponha que não existisse $x \in S$ tal que $y > x \geq m_0$ para cada $y > m_0$. Então teríamos $y \leq x$ $\forall x \in S$, isto é, y seria uma cota inferior para S. Mas $y > m_0$, o que contradiz o fato de m_0 ser o ínfimo de S. Portanto, para cada $y > m_0$, existe $x \in S$ tal que $y > x \geq m_0$.

1.8- *a)* (Existência) Temos:

$$b = b \cdot 1 = b \cdot \frac{a}{a} = a \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow a \cdot \frac{b}{a} = b$$

Logo, $x = \dfrac{b}{a}$ satisfaz $ax = b$, e está provada a existência.

(Unicidade) Suponha que exista $y \in \mathbb{R}$ tal que $ay = b$. Então:

$$y = 1 \cdot y = \frac{a}{a} \cdot y = \frac{1}{a} \cdot ay = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a} \Rightarrow y = \frac{b}{a}$$

Logo $ax = b$ possui solução única em $\mathbb{R}$.

b) Análoga.

1.9- i) Se $n = 1$ temos $x - y = x - y$.
ii) Adimitamos que

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + x^{n-j}y^{j-1} + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

é verdade para n e mostremos a igualdade para $n+1$. De fato,

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x^n \cdot x - y^n \cdot y = x^n x - x^n y + x^n y - y^n y \\ &= x^n(x-y) + (x^n - y^n)y \end{aligned}$$

Agora, utilizando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x^n(x-y) + (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})y \\ &= (x-y)x^n + (x-y)(x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + xy^{n-1} + y^n) \\ &= (x-y)(x^n + x^{n-1}y + \ldots + xy^{n-1} + y^n) \\ &= (x-y)(x^{(n+1)-1} + x^{(n+1)-2}y + \ldots + xy^{(n+1)-2} + y^{(n+1)-1}) \end{aligned}$$

Assim, vale a igualdade $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo Princípio de Indução Matemática.

1.10- De fato, temos:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1.2\ldots k(k+1)} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(k+1) + n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)}{1.2\ldots k(k+1)} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)[k+1+n-k]}{1.2\ldots k(k+1)} = \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots k(k+1)} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.11- i) Se $n = 1$ temos:

$$(x+y)^1 = \sum_{k=1}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} x^{1-k}y^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x^{1-0}y^0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x^{1-1}y^1 = x + y$$

ii) Suponha que:

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^{m-k} y^k \tag{6}$$

e provemos (6) para $m+1$. Temos

$$\begin{aligned}
(x+y)^{m+1} &= (x+y)^m (x+y) = (x+y) \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^{m-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^{m-k+1} + \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^{m-k} y^{k+1} \\
&= \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} x^{m+1} + \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} x^m y + \ldots + \begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} x^{m-k+2} y^{k-1} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^{m-k+1} y^k + \ldots + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} x y^m + \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} x^m y + \\
&\quad + \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} x^{m-1} y^2 + \ldots + \begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} x^{m-1+k} y^k + \\
&\quad + \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^{m-k} y^{k+1} + \ldots + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} y^{m+1} \\
&= \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} x^{m+1} + \left[\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \right] x^m y + \ldots + \\
&\quad + \left[\begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \right] x^{m-k+1} y^k + \ldots + \\
&\quad + \left[\begin{pmatrix} m \\ m-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} \right] x y^m + \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} y^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \begin{pmatrix} m+1 \\ k \end{pmatrix} x^{m+1-k} y^k
\end{aligned}$$

onde foi usada a relação:

$$\begin{pmatrix} m \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 \\ k \end{pmatrix}$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, (6) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.12- Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reais e considere, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + t y_i)^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

Então:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + t y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + t^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq 0$$

Fazendo $A = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ e $C = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ temos:

$$f(t) = At^2 + 2Bt + C \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Logo:

$$\Delta = (2B)^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow 4B^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow 4(B^2 - AC) \leq \Rightarrow B^2 - AC \leq 0$$

$$\Rightarrow B^2 \leq AC$$

e substituindo os valores de A, B e C concluimos que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

1.13- (Existência) Consideremos o conjunto:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 > a, \quad x > 0\}$$

e mostremos que $b = \inf \mathcal{A}$ satisfaz $b^2 = a$. Basta mostrarmos que $b^2 < a$ e $b^2 > a$ não são verdadeiras.
Suponha que $b^2 < a$. Como

$$\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \leq b^2 + \frac{2b+1}{n}$$

e $b^2 + \frac{2b+1}{n} < a$ se $n > \frac{2b+1}{a - b^2}$, teremos

$$\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 < a \ \text{ se } \ n > \frac{2b+1}{a-b^2}$$

Isto mostra que $b + \frac{1}{n}$ é uma cota inferior de $\mathcal{A}$, o que é uma contradição.
Suponha então, que $b^2 > a$. Como

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \geq b^2 - \frac{2b}{n}$$

e $b^2 - \frac{2b}{n} > a$ se $n > \frac{2b}{b^2 - a}$ então temos:

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 > a \ \text{ se } \ n > \frac{2b}{b^2 - a}$$

Desde que, $b - \frac{1}{n} < b$ então existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que,

$$b - \frac{1}{n} < r < b \Rightarrow a < \left(b - \frac{1}{n}\right)^2 < r^2$$

Logo, existe $r \in \mathcal{A}$ tal que $r < b$, que é uma contradição.
(Unicidade) Sejam x_1 e x_2 soluções reais positivas de $x^2 = a$. Então

$$x_1^2 = a \ \text{ e } \ x_2^2 = a \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$$

Como $x_1 + x_2 > 0$ então:

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Exercício Complementar 1- Sejam a, b números irracionais tais que $a^2 - b^2$ seja um racional não nulo. Então $a + b$ e $a - b$ são números irracionais.

Solução: Temos, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Se pelo menos um dos fatores $(a + b)$ ou $(a - b)$ fosse racional, teríamos que $a + b$ e $a - b$ seriam racionais, pois:

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{a - b}$$

e

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

Logo,

$$a = \frac{a + b + a - b}{2}$$

e

$$b = \frac{a + b - (a - b)}{2}$$

seriam racionais, o que contradiz nossa hipótese.

1.14-

c) Suponha que $2 + \sqrt{3}$ seja um número racional. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}$, com $\mathrm{mdc}\{a, b\} = 1$, tais que $2 + \sqrt{3} = \frac{a}{b}$. Logo:

$$2 + \sqrt{3} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2b + b\sqrt{3} = a \Rightarrow b\sqrt{3} = a - 2b \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a - 2b}{b}$$

Como $a - 2b \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, faça $m = a - 2b$ e $n = b$ e teremos:

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

que é uma contradição, uma vez que $\sqrt{3}$ é irracional.

d) Segue do exercício complementar 1.

1.15- Suponhamos que $m = \inf S$. Então m é uma cota superior para S, e portanto satisfaz a). Agora, se existisse $\varepsilon_0 > 0$ tal que $x \geq m + \varepsilon_0$, $\forall x \in S$, então $m + \varepsilon_0$ que é estritamente maior que m, seria cota inferior de S, o que contradiz a maximalidade de m. Portanto $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in S$ tal que $x < m + \varepsilon$.
Reciprocamente, suponha que m satisfaz a) e b) e seja p uma outra cota inferior de S. Se fosse $m < p$ tomaríamos $\varepsilon = p - m > 0$ e por b) existiria $x \in S$ com $x < m + p - m$. Isto é, $x < p$, o que contradiz o fato de p ser cota inferior de S. Portanto $m \geq p$, donde segue que $\inf S = m$.

1.16- Seja m uma cota inferior para S. Então:

$$m \leq x, \quad \forall x \in S$$

Portanto

$$-m \geq -x, \quad \forall x \in S$$

Logo, o conjunto $-S$ é limitado superiormente. Pelo Teorema 1.2, $-S$ possui supremo, e seja $M = \sup(-S)$. Então:

i) $-x \leq M$, $\forall x \in S$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $M - \varepsilon < -x_0$

o que implica em

iii) $-M \leq x$, $\forall x \in S$

iv) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $-M + \varepsilon > x_0$

ou seja, $-M = \inf S$ e portanto:

$$\inf S = -M = -\sup(-S)$$

1.17-
a) Temos que:

$$d(x,y) = |x - y| \geq 0 \Rightarrow d(x,y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Temos ainda:

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

b) Temos:

$$d(x,y) = |x - y| = |-(y - x)| = |-1||y - x| = d(y,x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

c) Temos:

$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z|+|z-y| = d(x,y)+d(y,z), \;\; \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

1.18- Temos que, $\dfrac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, 0 é cota inferior para A. Vamos mostrar que nenhum $c > 0$ é cota inferior para A. De fato, se $c > 0$ fosse cota inferior para A, então teríamos:

$$\frac{1}{n} > c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mas, pelo Exercício 1.6, dado $c > 0$, $\exists n_0$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < c$, o que contradiz o fato de c ser cota inferior para A. Logo $\inf A = 0$.

1.19- Seja $p \in \mathbb{N}$ primo e suponha que $\sqrt{p} \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Então:

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \;\text{ e }\; \text{mdc}(a,b) = 1$$

Logo,

$$p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = pb^2 \Rightarrow p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a \cdot a \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid a \Rightarrow a = kp, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Daí,

$$(kp)^2 = pb^2 \Rightarrow k^2p^2 = pb^2 \Rightarrow b^2 = pk^2 \Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b \Rightarrow b = k'p$$

ou seja, $a = kp$ e $b = k'p$ o que contradiz o fato de a e b serem irredutíveis. Logo $\sqrt{p} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

1.20- Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ primos tal que $p \neq q$. Suponha que $\sqrt{pq} \notin \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Então:

$$\sqrt{pq} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0 \;\text{ e }\; \text{mdc}(a,b) = 1$$

Logo,

$$pq = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow b^2pq = a^2 \Rightarrow pq \mid a^2 \Rightarrow pq \mid a \Rightarrow a = k(pq), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Daí,

$$b^2pq = (k(pq)^2) = k^2p^2q^2 \Rightarrow b^2 = k^2pq \Rightarrow pq \mid b \Rightarrow b = k'(pq), \quad k' \in \mathbb{Z}$$

Mas isto contradiz o fato de a e b serem irredutíveis. Portanto: $\sqrt{pq} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

1.21- No Exercício 1.8, vimos que nenhum $a > 0$ satisfaz

$$a < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como neste caso temos $a \geq 0$, então: $a = 0$, pois se $A = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$, $\inf A = 0$.

1.22-
a) Temos que, existe $x_0 \in S \Rightarrow ax_o \in aS \Rightarrow aS \neq \emptyset$. Além disso, $a + x_0 \in a + S \Rightarrow a + S \neq \emptyset$. Se $y \in aS$ então:

$$y = ax \quad x \in S \Rightarrow |y| = |ax| = |a||x| \leq |a| \cdot k \quad k \in \mathbb{R}$$

onde $|x| \leq k$ $\forall x \in S$ uma vez que S é limitado. Agora,

$$y \in a + S \Rightarrow y = a + x \Rightarrow |y| = |a + x| \leq |a| + |x| \leq |a| + k, \quad \forall y \in a + S$$

donde segue que $a + S$ é limitada.

b) Se $a = 0$ as igualdades são imediatas. Sejam então $a > 0$ e $\alpha = \sup S$. Temos:

i) $x \leq \alpha$, $\forall x \in S$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $\alpha - \dfrac{\varepsilon}{a} < x_0$

Multiplicando cada desigualdade acima por a, obtemos:

iii) $ax \leq a\alpha$, $\forall x \in S$

iv) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $a\alpha - \varepsilon < ax_0$

Logo, $\sup(aS) = a\alpha = a \sup S$.
Agora seja, $\beta = \inf S$. Então:

v) $\beta \leq x$, $\forall x \in S$

vi) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $x_0 < \beta + \dfrac{\varepsilon}{a}$

Multiplicando cada desigualdade acima por a, obtemos:

vii) $a\beta \leq ax$, $\forall x \in S$

viii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $ax_0 < a\beta + \varepsilon$

Logo, $\inf(aS) = a\beta = a \inf S$.

c) Já vimos que: $\sup(-S) = -\inf S$. Sendo $a < 0$ então: $a = -k$, onde $k > 0$. Logo

$$\sup(aS) = \sup(-kS) = -\inf(kS) = -k \inf S = a \inf S$$

Agora, note que, se $S = -S$, então:

$$\sup(-S) = -\inf S \Rightarrow \sup S = -\inf(-S)$$

$$\Rightarrow -\sup S = \inf(-S)$$

Daí, sendo $a < 0$ temos: $a = -\ell$, onde $\ell > 0$. Logo:

$$\inf(aS) = \inf(-\ell S) = -\sup(\ell S) = -\ell \sup S = a \sup S$$

d) Seja $\alpha = \sup S$. Então, temos:

i) $x \leq \alpha$, $\forall x \in S$

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $\alpha - \varepsilon < x_0$

e somando a as duas desigualdades acima, obtemos:

iii) $a + x \leq a + \alpha$, $\forall x \in S$

iv) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $a + \alpha - \varepsilon < a + x_0$

Logo, $\sup(a + S) = a + \alpha = a + \sup S$.
Agora seja $\beta = \inf S$. Então:

v) $\beta \leq x$, $\forall x \in S$

vi) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $x_0 < \beta + \varepsilon$

e somando a as duas desigualdades acima, obtemos:

vii) $a + \beta \leq a + x$, $\forall x \in S$

vii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in S$ tal que $a + x_0 < a + \beta + \varepsilon$

Logo, $\inf(a + S) = a + \beta = a + \inf S$.

1.23- Por definição temos que, se A e B são limitados superiormente então:

$$x \leq \sup A,\ \forall x \in A \quad \text{e} \quad y \leq \sup B,\ \forall y \in B.$$

Considerando o conjunto $A + B = \{x + y;\ x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}$ e somando as duas desigualdades acima obtemos:

$$x + y \leq \sup A + \sup B,\ \forall x + y \in A + B$$

isto é, $\sup A + \sup B$ é uma cota superior de $A + B$, e portanto, $A + B$ é limitado superiormente. Agora para mostrar que esta cota superior é o supremo, tomemos $\varepsilon > 0$. Logo, pela definição sabemos que existe $x \in A$ e $y \in B$ tal que:

$$x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad y > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$$

Somando estas duas desigualdades concluímos:

$$x + y > \sup A + \sup B - \varepsilon$$

isto é, $\forall \varepsilon > 0$ existe $z = x + y \in F$ tal que a última desigualdade ocorre, e portanto: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

1.24- Seja $f : A \longrightarrow B$ sobrejetiva. Então existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, $\forall y \in B$, donde segue que $f^{-1}(B) \subset A$ é não vazio. Logo, para cada $y \in B$, escolha $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e ponhamos $g(y) = x$, o que define uma função

$$g : B \longrightarrow A$$

tal que $f(g(y)) = y$. Note que $I_B : B \longrightarrow B$ é dada por $I_B(y) = y$. Portanto:

$$(f \circ g)(y) = y \Rightarrow f \circ g = I_B$$

1.25- Seja $f : A \longrightarrow B$ injetiva. Então:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \quad x_1, x_2 \in A, \quad y_1 = f(x_1) \text{ e } y_2 = f(x_2)$$

o que é equivalente a dizer que $\forall y \in f(A)$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Escrevamos $x = h(y)$, o que define a função,

$$h : f(A) \longrightarrow A$$

tal que $h(f(x)) = x$, $\forall x \in A$. Completemos a definição de h, pondo $h(y) = x_0$ (x_0 fixo em A) para $y \in B - f(A)$. Obtemos assim $h : B \longrightarrow A$ tal que $(h \circ f)(x) = x \Rightarrow h \circ f = I_A$.

1.26- Considere $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ bijeções e seja $g \circ f : A \longrightarrow C$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Mostremos que $g \circ f$ é injetiva. De fato, dados $x_1, x_2 \in A$ temos:

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Agora, mostremos que $g \circ f$ é sobrejetiva. De fato, como g é bijetiva, e portanto sobrejetiva, $\exists y \in B$ tal que $g(y) = w$, $\forall w \in C$. Mas do fato de f ser bijetiva, e portanto, sobrejetiva, $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$, $\forall y \in B$. Segue então que: $g(y) = g(f(x)) = w$, ou seja: existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = w$, $\forall w \in C$. Logo $g \circ f$ é sobrejetiva.
Portanto $g \circ f$ é bijetiva, como queríamos.

1.27- Suponhamos que $a > b \Rightarrow a - b > 0$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n_o} < a - b$$

o que contradiz o fato de $\frac{1}{n} > a - b \ \forall n \in \mathbb{N}$. Logo: $a \leq b$.

1.28- i) Para $n = 2$ temos:

$$2^{2-1} = 2 \leq 2! = 2 \cdot 1 \tag{7}$$

ii) Agora suponha que

$$2^{n-1} \leq n!$$

é verdadeira para n e mostremos que a mesma vale para $n+1$. De fato,

$$2^{(n+1)-1} = 2^n = 2^{n-1} \cdot 2$$

Por hipótese de indução, $2^{n-1} \cdot 2 \leq n! \cdot 2$, donde segue que:

$$2^{(n+1)-1} \leq n! \cdot 2$$

Agora, é fácil ver que $2 \leq n+1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo:

$$2^{(n+1)-1} \leq n! \cdot 2 \leq n!(n+1) = (n+1)!$$

Portanto (7) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.29- Primeiro mostremos, por absurdo, que o Princípio da Boa Ordenação implica o Primeiro Princípio de Indução. Para isto considere $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e suponha que uma certa afirmativa $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$ é falsa. Queremos demonstrar que $\mathbb{N}$ é vazio. Vamos supor, então, que exista algum elemento em $\mathbb{N}$. Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe um menor elemento, $n_0 \in \mathbb{N}$. Por hipótese, $n_0 \neq 1$, e então $n_0 > 1$. Como n_0 é o menor elemento de $\mathbb{N}$, segue-se que $n_0 - 1$ não está em $\mathbb{N}$; em outras palavras, a afirmativa $A(n_0 - 1)$ é verdadeira. Mas, pelo Primeiro Princípio de Indução, concluímos que $A(n_0)$ é também verdadeira, pois

$$n_0 = (n_0 - 1) + 1$$

Mas isso é uma contradição, como queríamos.
Reciprocamente, mostremos, também por absurdo, que o Primeiro Princípio de Indução implica o Princípio da Boa Ordenação. Para isto, suponha que A é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e que A não possui um menor elemento e mostremos que isto leva-nos a uma contradição. De fato, defina $M \subseteq \mathbb{N}$ por

$$M = \{x \in \mathbb{N};\ x < a \quad \forall a \in A\}$$

Pelo princípio da tricotomia $M \cap A = \emptyset$. Agora $1 \notin A$; caso contrário 1 seguramente seria o menor elemento de A. Conseqüentemente $1 < a$ para todo $a \in A$, e assim $1 \in M$. Seja agora $p \in M$; então $p < a$ para todo $a \in A$. Se $p+1 \in A$ então $p+1$, que é o primeiro número natural maior que p, seria o menor

elemento de A, em contradição com nossa suposição de que A não possui menor elemento. Assim $p+1 \notin A$, e assim $p+1 < a$ para todo $a \in A$. Então $p+1 \in M$ e por indução $M = \mathbb{N}$. Mas $M \cap A = \emptyset$, e assim $A = \emptyset$, que é uma contradição. Então A deve ter um menor elemento.
Portanto o Primeiro Princípio de Indução e o Princípio da Boa Ordenação são equivalentes em $\mathbb{N}$.

1.30- Se B é finito não há o que demonstrar. Agora se B não for finito, considere $f : A \longrightarrow B$ sobrejetiva. Pelo exercício 1.24, existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = I_B$. Em particular vimos que g é injetiva. Como A é enumerável, usando a proposição 1.6, segue que B também é enumerável.

1.31- Por definição temos que, se A e B são limitados inferiormente então:

$$x \geq \inf A, \ \forall x \in A \quad \text{e} \quad y \geq \inf B, \ \forall y \in B.$$

Considerando o conjunto $A + B = \{x + y; \ x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}$ e somando as duas desigualdades acima obtemos:

$$x + y \geq \inf A + \inf B, \ \forall x + y \in A + B$$

isto é, $\inf A + \inf B$ é uma cota inferior de $A + B$, e portanto, $A + B$ é limitado inferiormente. Agora para mostrar que esta cota inferior é o ínfimo, tomemos $\varepsilon > 0$. Logo, pela definição sabemos que existe $x \in A$ e $y \in B$ tal que:

$$x < \inf A - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad y < \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$$

Somando estas duas desigualdades concluímos:

$$x + y < \inf A + \inf B - \varepsilon$$

isto é, $\forall \varepsilon > 0$ existe $z = x + y \in F$ tal que a última desigualdade ocorre, e portanto: $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

1.32- Como $D = C - A \subset C$, segue pelo corolário da proposição 1.6 que $D = C - A$ é contável. Pelo Exercício 1.38, A contém um subconjunto infinito contável E. Desde que $E \cup D$ é contável (proposição 1.7) e infinito, temos que, existem as bijeções

$$f : E \cup D \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{e} \quad g : \mathbb{N} \longrightarrow D$$

Como $g \circ f$ é uma bijeção de $E \cup D$ em D, segue que $E \cup D \simeq D$. Então

$$A \cup C = A \cup (C - A) = A \cup D = (A - E) \cup (E \cup D) \simeq (A - E) \cup E = A$$

isto é, $A \cup C \simeq A$.
Agora, como C é enumerável, segue que $B \cap C$ é contável. Mas B é não enumerável e $B - C = B - (B \cap C)$. Como B não é contável, é infinito. Em particular $B - C$ é infinito. Então

$$B - C \simeq (B - C) \cup (B \cap C) = B \Rightarrow B - C \simeq B$$

1.33-
a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{array}{rccl} f: & (0,1) & \longrightarrow & (a,b) \\ & x & \longmapsto & f(x) = a + (b-a)x \end{array}$$

Temos que f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a + (b-a)x_1 = a + (b-a)x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in (0,1)x$.
Agora, por definição, o conjunto $A = \{y = a + (b-a)x;\ 0 < x < 1\}$ é o segmento de reta cujas extremidades são a e b. Mas, $A = (a,b) = \mathcal{I}m(f)$, ou seja, f é sobrejetiva, donde segue que f é bijetiva. Portanto $(0,1) \simeq (a,b)$, donde conclui-se que todos os intervalos abertos limitados de $\mathbb{R}$ são equipotentes.

b) Seja $a \in \mathbb{R}$ e $f : (0,1) \longrightarrow (a,\infty)$ definida por $f(x) - a = \dfrac{1}{x} - 1$. É fácil ver que f é injetiva e que $\mathcal{I}m(f) = (a,\infty)$, ou seja, que f é sobrejetiva. Segue então que f é bijetiva, e portanto $(0,1) \simeq (a,\infty)$. Claramente $(-\infty,a) \simeq (-a,\infty)$ (basta considerar $g(x) = -x$). Temos ainda $(-1,1) \simeq (-\infty,\infty)$. Basta considerarmos $h : (-1,1) \longrightarrow (-\infty,\infty)$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, que claramente é uma bijeção. Segue portanto, que todos os intervalos abertos de $\mathbb{R}$ são equipotentes.

c) Por a) segue imediatamente que $(a,b) \simeq (a,b]$, $(a,b] \simeq [a,b)$, etc.

1.34- Primeiro mostremos que

$$X - \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} (X - A)$$

De fato, seja $x \in X - \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$. Então $x \in X$ mas $x \notin \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$, ou seja, $x \in X$ mas $x \notin A$ qualquer que seja $A \in \mathcal{C}$. Daí, segue que $x \in X - A$ qualquer que seja $A \in \mathcal{C}$, donde conclui-se que

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{C}} (X - A) \Rightarrow X - \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{C}} (X - A)$$

Agora seja $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{C}} (X - A)$. Então $x \in X - A$ para algum $A \in \mathcal{C}$, ou seja, $x \in X$ mas $x \notin A$ para algum $A \in \mathcal{C}$. Logo $x \in X$ mas $x \notin \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$, donde segue que

$$x \in X - \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{C}} (X - A) \subset X - \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A$$

Portanto,

$$X - \bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} (X - A)$$

Mostremos agora que

$$X - \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} (X - A)$$

De fato, seja $x \in X - \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$. Então $x \in X$ mas $x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$, ou seja, $x \in X$ mas $x \notin A$, qualquer que seja $A \in \mathcal{C}$. Logo $x \in (X - A)$ qualquer que seja $A \in \mathcal{C}$, donde segue que

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} (X - A) \Rightarrow X - \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \subset \bigcap_{A \in \mathcal{C}} (X - A)$$

Agora seja $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{C}} (X - A)$. Então $x \in X - A$ qualquer que seja $A \in \mathcal{C}$, ou seja, $x \in X$ mas $x \notin A$ qualquer que seja $A \in \mathcal{C}$. Logo, $x \in X$ mas $x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$, donde segue que

$$x \in X - \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \Rightarrow \bigcap_{A \in \mathcal{C}} (X - A) \subset X - \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$$

Portanto,

$$X - \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \bigcap_{A \in \mathcal{C}} (X - A)$$

1.35- Temos que $A - B$, $B - A$ e $A \cap B$ são dois a dois disjuntos e

$$A = (A - B) \cup (A \cap B), \quad B = (B - A) \cup (A \cap B),$$

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B).$$

Então, $\#A = \#(A - B) + \#(A \cap B)$, $\#B = \#(B - A) + \#(A \cap B)$ e $\#(A \cup B) = \#(A - B) + \#(B - A) + \#(A \cap B)$. Logo

$$\#A + \#B = \#(A - B) + \#(A \cap B) + \#(B - A) + \#(A \cap B) = \#(A \cup B) + \#(A \cap B)$$

1.36-

a) Temos: $y \in f(\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$ tal que $y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A)$ para algum $A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y \in \bigcup_{A\in\mathcal{C}} f(A)$. Portanto, $f(\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A) = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} f(A)$.

b) Temos: $y \in f(\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A$ tal que $y = f(x) \Rightarrow y \in f(A)$ para todo $A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow y \in \bigcap_{A\in\mathcal{C}} f(A)$. Portanto, $f(\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{C}} f(A)$.

c) Análoga a b).

d) Análoga a b).

e) Se f é injetiva, $y = f(x)$ para no máximo um $x \in X$. Então $y \in f(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}$. Daí temos que $\exists x \in \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A$ tal que $y = f(x)$.

f) Suponha que f não fosse injetiva. Então existiriam $x, x' \in X$ distintos talque $f(x) = f(x') = y$. Tome $A = \{x\}$, e $B = \{x'\}$. Daí $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$, onde $f(A) \cap f(B) = y$, que é um absurdo. Portanto f é injetiva.

1.37-

a) Temos: $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \Leftrightarrow f(x) \in B$, para algum $B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x \in f_{-1}(B)$, para algum $B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{B\in\mathcal{C}} f^{-1}(B)$. Logo

$$f^{-1}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B\right) = \bigcup_{B\in\mathcal{C}} f^{-1}(B)$$

b) Temos: $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{B\in\mathcal{C}} B\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{B\in\mathcal{C}} B \Leftrightarrow f(x) \in B$, para cada $B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$ para cada $B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{B\in\mathcal{C}} f^{-1}(B)$. Logo

$$f^{-1}\left(\bigcap_{B\in\mathcal{C}} B\right) = \bigcap_{B\in\mathcal{C}} f^{-1}(B)$$

c) Temos: $x \in f^{-1}(C - D) \Leftrightarrow f(x) \in C - D \Leftrightarrow f(x) \in C$, mas $f(x) \notin D \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C)$, mas $x \notin f^{-1}(D) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$. Logo

$$f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$$

d) Temos: $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$. Logo

$$f^{-1}(f(A)) \supset A$$

e) Se f é injetiva, então $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$. Assim $f^{-1}(f(A)) = A$. Reciprocamente, se f não é injetiva, existem $x, x' \in A$ distintos, tais que $f(x) = f(x') = y$. Tome $A = \{x\}$. Então $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\}) \supset \{x, x'\}$, de modo que $f^{-1}(f(A)) - A \neq \emptyset$, que é um absurdo. Logo f é injetiva.

f) Temos: $y \in f(f^{-1}(B)) \Leftrightarrow \exists x \in f^{-1}(B)$ tal que $y = f(x) \Leftrightarrow \exists x$ tal que $f(x) \in B$ e $y = f(x) \Rightarrow y \in B$. Logo

$$f(f^{-1}(B)) \subset B$$

g) Se f é sobrejetiva, então $y \in B \Rightarrow \exists x$ tal que $y = f(x)$. Assim, $f(f^{-1}(B)) = B$. Reciprocamente, suponha que f não é sobrejetiva, ou seja, $Y - f(X) \neq \emptyset$. Tome $B = Y - f(X)$. Então $f(f^{-1}(B)) = f(\emptyset) = \emptyset$, que é um absurdo. Logo f é sobrejetiva.

1.38- Seja A um conjunto infinito e considere $a_1 \in A$. Então $A - \{a_1\}$ é não vazio. Seja $a_2 \in A - \{a_1\}$. Então, $A - \{a_1, a_2\}$ é não vazio. Prosseguido com este procedimento, na n-ésima etapa teremos que o conjunto,

$$A - \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$$

é não vazio, pois A é infinito. Prosseguindo indefinidamente, segue que o conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, \}$, é um subconjunto infinito e contável de A.

1.39- Seja A um conjunto infinito e seja $S = \{a_1, a_2, \ldots\}$ um subconjunto infinito contável de A. Considere a função $f : A \longrightarrow A - \{a_1\}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a_{n+1}, & \text{se } x = a_n \ (n = 1, 2, \ldots) \\ x, & \text{se } x \in A - S \end{cases}$$

É fácil ver que f é bijetiva, donde segue que $A \simeq A - \{a_1\}$.

1.40- Se $\mathcal{C}$ é uma coleção infinita de conjuntos enumeráveis, então ela é da forma $\{A_1, A_2, \ldots\}$. Logo, $A_n \sim [n-1, n)$; seja f_n uma bijeção de A_n em $[n-1, n)$; Então $f : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \longrightarrow [0, \infty)$ dada por

$$f(x) = f_n(x) \quad \text{se } x \in A_n$$

é uma bijeção. Argumento semelhante quando $\mathcal{C}$ é finito.

1.41- Se A e B são finitos, nada temos a demonstrar. Considere então, A e B enumeráveis, e seja $x \in A$. Então:

$$\{x\} \times B \simeq B$$

Como B é enumerável então, $\{x\} \times B$ também é enumerável. Portanto segue pela Proposição 1.7 que,

$$A \times B = \bigcup_{x \in A} (\{x\} \times B)$$

é enumerável.

1.42- i) Para $n = 2$, $A_1 \times A_2$ é contável, pois A_1 e A_2 são contáveis.
ii) Agora, suponha que para n, o conjunto

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

é contável, e mostremos que $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$ também é contável. De fato, sejam A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}, conjuntos contáveis. Fazendo $B = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ temos:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1} = B \times A_{n+1}$$

Mas, por hipótese de indução, $B = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é contável e como A_{n+1} é contável, segue que $B \times A_{n+1}$ é contável, e portanto:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}$$

é contável.
Portanto, pelo Príncipio de Indução, segue que $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ é contável, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.44- Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todos os intervalos abertos dois a dois disjuntos de $\mathbb{R}$. Escolha em cada intervalo $\mathcal{I} \in \mathcal{A}$ um número racional $r_{\mathcal{I}}$. Como os intervalos são dois a dois disjuntos então, a correspondência $\mathcal{I} \longrightarrow r_{\mathcal{I}}$ é injetiva e como $\mathbb{Q}$ é contável segue que $\mathcal{A}$ é contável.
Exercício Complementar 2- Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$.

Solução: Suponha que existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n + 1$. Logo, existem $p, q \in \mathbb{N}$ tais que

$$n + p = x \quad \text{e} \quad x + q = n + 1$$

Portanto, $n + p + q = n + 1$. Pela lei do cancelamento em $\mathbb{N}$ temos $p + q = 1$ que é uma contradição.

Exercício Complementar 3- Mostre que se X e Y são subconjuntos de $\mathbb{R}$ limitados superiormente então $\sup(X \cup Y) = \max\{\sup X, \sup Y\}$.

Solução: Seja $c \in X \cup Y$ então, ou $c \in X$ ou $c \in Y$. Ou ainda, ou $c \leq \sup X$ ou $c \leq \sup Y$. Portanto,

$$\sup(X \cup Y) \leq \max\{\sup X, \sup Y\} \tag{8}$$

Por outro lado,

$$\sup X \leq \sup(X \cup Y)$$

e

$$\sup Y \leq \sup(X \cup Y)$$

Portanto

$$\max\{\sup X, \sup Y\} \leq \sup(X \cup Y) \tag{9}$$

De (8) e (9) segue o resultado.

Capítulo 2

2.1-

a) Temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-2}{2n^2+1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{3+0-0}{2+0} = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

b) Temos,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3+n}+\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\left[(\sqrt{3+n}+\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{3+n}-\sqrt{n}}{\sqrt{3+n}-\sqrt{n}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+3-n}{\sqrt{3+n}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{3+n}+\sqrt{n}} = 0
\end{aligned}
$$

c) Temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\right] = \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1+\frac{1}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right) = \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

d) Temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e) Temos

$$
0 \le \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \le \frac{1}{n}
$$

pois $|\sin n| < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

2.2- Temos

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Logo

$$a_n = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1 - 0 = 1$$

2.3- Pela desigualdade de Bernoulli temos:

$$2^n = (1+1)^n \geq 1 + n > n \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$$

Logo, $\forall \varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ e teremos

$$\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{2^n}\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

ou seja: $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$.

2.4- Sim, pois

$$|x_n| = \left|\frac{(-1)^n \sin(n)}{3}\right| = \frac{|(-1)^n| \cdot |\sin(n)|}{3} = \frac{|\sin(n)|}{3} \leq \frac{1}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja, (x_n) é limitada, e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (x_n) possui uma subseqüência convergente.

2.5- Como $M = \sup S$ então:

i) $x \leq M$, $\forall x \in S$;

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in S$ tal que $M - \varepsilon < x$.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S$ tal que $M - \dfrac{1}{n} < x_n \leq M$, donde segue pelo Teorema do Confronto que:

$$\lim \left(M - \frac{1}{n} \right) \leq \lim x_n \leq \lim M \Rightarrow \lim x_n = M$$

2.6- Como $a_n \longrightarrow a$ e $b_n \longrightarrow b$ então: $a_n + b_n \longrightarrow a + b$ e $a_n - b_n \longrightarrow a - b$. Donde, $|a_n - b_n| \longrightarrow |a_n - b_n|$. Assim,

$$\max\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}\{a_n + b_n + |a_n - b_n|\} \longrightarrow \frac{1}{2}\{a + b + |a - b|\} = \max\{a, b\}$$

2.7- Temos que: $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite nesta desigualdade obtemos:

$$-\lim |a_n| \leq \lim a_n \leq \lim |a_n| \Rightarrow 0 \leq \lim a_n \leq 0$$

e pelo Teorema do Confronto segue que $\lim a_n = 0$.

2.8- Como (b_n) é limitada então existe $c > 0$ tal que $|b_n| \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, desde que, $\lim a_n = 0$, então: $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall n \geq N$$

Logo,

$$n \geq N \Rightarrow |a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq c|a_n| < \varepsilon \Rightarrow \lim a_n b_n = 0$$

2.9- Temos que:

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_2 = \sqrt{2a_1}$$

$$a_3 = \sqrt{2a_2}$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Daí, mostremos que $a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $n = 1$ temos:

$$a_1 = \sqrt{2} < 2$$

Admitamos que $a_n < 2$ e provemos que $a_{n+1} < 2$. Temos,

$$a_n < 2 \Rightarrow 2a_n < 4 \Rightarrow \sqrt{2a_n} < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$$

Logo, pelo princípio de indução, $a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Temos também que (a_n) é extritamente crescente, ou seja, $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, para $n = 1$ temos:

$$a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = a_2$$

pois $1 < \sqrt{2} \Rightarrow 2 < 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}}$.
e mais:

$$a_{n-1} < a_n \Rightarrow 2a_{n-1} < 2a_n \Rightarrow \sqrt{2a_{n-1}} < \sqrt{2a_n} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

e pelo princípio de indução, segue que $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Logo (a_n) é monótona e limitada e portanto convergente. Assim, seja $L = \lim a_n$ e teremos

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2L} \Rightarrow L^2 = 2L \Rightarrow L^2 - 2L = 0 \Rightarrow L = 2$$

2.10- Considerando $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$ temos: $x_n > 0$ e $1 + x_n = \sqrt{a}$. Utilizando o binômio de Newton:

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x_n + \ldots + x_n^n > nx_n$$

Logo

$$a > nx_n \Rightarrow nx_n < a \Rightarrow 0 < nx_n < a \Rightarrow 0 < x_n < \frac{a}{n}$$

Tomando o limite temos:

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}$$

Como $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, então pelo Teorema do Confronto, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Logo:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}(1 + x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} x_n = 1 + 0 = 1$$

Se $a = 1$ temos: $\sqrt[n]{a} = 1$, $\forall n \geq 2$.
Agora, se $0 < a < 1$, então, $\frac{1}{a} > 1$. Logo:

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$$

Assim temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{1}} = 1$$

Portanto $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ se $a > 0$.

2.11- Temos: $\sqrt[n]{n} > 1$ se $n \geq 2$. Logo podemos escrever:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \quad h_n > 0$$

Portanto,

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \ldots + h_n^n > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

Logo,

$$1 > \frac{n-1}{2}h_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n-1} > \frac{2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{2}h_n^2$$

ou seja,

$$\frac{2}{n-1} > h_n^2 \text{ ou } 0 < h_n^2 < \frac{2}{n-1}$$

$$\Rightarrow 0 < h_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Tomando o limite obtem-se:

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} h_n \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Mas, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2}{n-1}} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n-1}} = \sqrt{0} = 0$. Daí, pelo Teorema do Confronto conclui-se que:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1 + h_n) = 1 + \lim_{n\to\infty} h_n = 1 + 0 = 1$$

2.12- Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < 1$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a < c$ então $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < c$, $\forall n$ grande. Logo,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot x_n < cx_n < x_n, \quad \forall n \text{ grande}$$

Assim a seqüência (x_n) é monótona e limitada pois,

$$0 < \ldots < x_{n+1} < \ldots < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1$$

Portanto (x_n) converge. Seja $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ e mostremos que $b = 0$. Suponha que $b \neq 0$. Então de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$$

temos

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = a < 1$$

ou seja,

$$\frac{b}{b} = a < 1 \Rightarrow 1 = a < 1$$

que é um absurdo. Logo $b = 0$.

2.13- Seja $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Então:

$$\begin{aligned}
\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim \left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right] = \lim \left[\frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n!}\right] \\
&= \lim \left[\frac{n^n}{(n+1)^n}\right] = \lim \left[\frac{1}{\frac{(n+1)}{n}}\right]^n = \lim \frac{1^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

2.14- Suponha que $\lim z_n = a$. Como (y_n) e (x_n) são subseqüências de (z_n), já que $z_{2n-1} = y_n$ e $z_{2n} = x_n$ então, pela proposição 2.7, segue que (x_n) e (y_n) convergem e

$$\lim x_n = \lim y_n = a$$

Reciprocamente, suponha que $\lim x_n = \lim y_n = a$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

e

$$n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$$

Logo tome $N_0 = \max\{2N_1, 2N_2 - 1\}$. Então

i) Se $n = 2k$ temos:

$$\begin{aligned}
&n > N_0 \Rightarrow n > 2N_1 \Rightarrow 2k > 2N_1 \Rightarrow k > N_1 \\
&\Rightarrow |z_n - a| = |z_{2k} - a| = |x_k - a| < \varepsilon \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon
\end{aligned}$$

ii) Se $n = 2k - 1$ temos:

$$n > N_0 \Rightarrow 2k - 1 > 2N_2 - 1 \Rightarrow k > N_2$$
$$\Rightarrow |z_n - a| = |z_{2k-1} - a| = |y_k - a| < \varepsilon \Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$$

Portanto, em qualquer caso temos: $\lim z_n = a$.

2.15- Se $\varepsilon \leq x_n \leq n^2$ então: $\sqrt[n]{\varepsilon} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \sqrt[n]{n^2}$. Tomando o limite, temos:

$$\lim \sqrt[n]{\varepsilon} \leq \lim \sqrt[n]{x_n} \leq \lim \sqrt[n]{n^2} = \lim(\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n})$$

Como $\sqrt[n]{\varepsilon} \longrightarrow 1$, quando $n \longrightarrow \infty$ e $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ quando $n \longrightarrow \infty$ temos:

$$1 \leq \lim \sqrt[n]{x_n} \leq 1$$

e pelo Teorema do Confronto, segue que, $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$.

2.16- Se $\lim x_n = a$ então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N \qquad (*)$$

Agora temos:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a = \frac{x_1 + \ldots + x_n - na}{n} = \frac{x_1 - a}{n} + \ldots + \frac{x_n - a}{n}$$

Para $n \geq N$ temos:

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a = \frac{x_1 - a}{n} + \ldots + \frac{x_{N-1} - a}{n} + \frac{x_N - a}{n} + \ldots + \frac{x_n - a}{n} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a\right| \leq \frac{|x_1 - a|}{n} + \ldots + \frac{|x_{N-1} - a|}{n} + \frac{|x_N - a|}{n} + \ldots + \frac{|x_n - a|}{n}$$

Desde que N está fixo, podemos escolher n grande tal que

$$\frac{|x_1 - a|}{n} + \ldots + \frac{|x_{N-1} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e por $(*)$ segue que

$$\frac{|x_N - a|}{n} + \ldots + \frac{|x_n - a|}{n} < [n - (N-1)] \cdot \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{n} = \frac{n - N + 1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Logo

$$\left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a\right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N \text{ grande}$$

ou seja: $\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \longrightarrow a$ quando $n \longrightarrow \infty$.

A recíproca não é verdadeira. Considere, por exemplo, a seqüência $x_n = (-1)^n$. Temos:

$$a_1 = \frac{x_1}{1} = -1$$

$$a_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

$$a_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 0$$

$$a_5 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\vdots$$

Assim, pelo exercício 2.14, $a_{2n} = 0 \longrightarrow 0$ e $a_{2n-1} = -\dfrac{1}{2n-1} \longrightarrow 0$. Portanto, $a_n \longrightarrow 0$, mas, (a_n) não converge.

2.17- Seja $a = \lim x_n$. Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Se $1 \leq n < N$, considere $k \in \mathbb{N}$ tal que $n + kp > N$, e portanto, $|x_{n+kp} - a| < \varepsilon$. Mas, $x_{n+kp} = x_{n+(k-1)p+p} = x_{n+(k-1)p} = x_{n+(k-2)p+p} = x_{n+(k-2)p} = \ldots = x_{n+2p} = x_{n+p} = x_n$. Logo,

$$|x_n - a| = |x_{n+kp} - a| < \varepsilon, \quad \text{se} \ \ 1 \leq n < N$$

Assim, $|x_n - a| < \varepsilon|$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall \varepsilon > 0$, ou seja

$$0 \leq |x_n - a| < \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x_n - a = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n = a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.18- Seja (x_n) monótona e (x_{i_n}) uma subseqüência convergente de (x_n) e portanto limitada. Suponha que $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e mostremos que (x_n) é limitada. De fato, se (x_n) não é limitada, então $\forall M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} > M$. Mas, como $i_{n_0} \geq n_0$ então, $x_{i_{n_0}} \geq x_{n_0} > M$, ou seja, $x_{i_{n_0}} > M$, donde segue que (x_{i_n}) não é limitada, o que é um absurdo.
Suponha agora que $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e mostremos que (x_n) ainda é limitada, ou seja, $\exists M > 0$ tal que $-M \leq x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, se (x_n) não é limitada, então $\forall M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-x_{n_0} > M$. Mas,

$$i_{n_0} \geq n_0 \Rightarrow x_{i_{n_0}} \leq x_{n_0} \Rightarrow -x_{i_{n_0}} \geq -x_{n_0} > M \Rightarrow -x_{i_{n_0}} > M$$

Daí, temos que (x_{i_n}) não é limitada, o que contradiz o fato de (x_{i_n}) ser convergente.
Portanto, em qualquer caso, concluimos que (x_n) é limitada, e como (x_n) é monótona, segue que ela também é convergente, como queríamos.

2.19- Temos

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \leq \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1} \Rightarrow x_{n+1} \leq y_{n+1}$$

Logo:

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n x_n} = x_n \Rightarrow x_n \leq x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq \frac{y_n + y_n}{2} = y_n \Rightarrow y_n \geq y_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou seja, (x_n) é não decrescente e (y_n) é não crescente. Agora mostremos que (x_n) e (y_n) são limitadas, isto é,

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots y_{n+1} \leq y_n \leq \ldots \leq y_2 \leq y_1 \leq b$$

De fato, suponha $a < b$. Então:

$$b - a > 0 \Rightarrow a(b-a) > 0 \Rightarrow ab - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < ab \Rightarrow a < \sqrt{ab} = x_1$$

Por outro lado, como $a < b$ então $\dfrac{a+b}{2} \leq b \Rightarrow y_1 \leq b$. Logo (x_n) e (y_n) convergem. Daí, sejam

$$x = \lim x_n \quad \text{e} \quad y = \lim y_n$$

Tomando o limite em $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ temos:

$$\lim y_{n+1} = \lim \frac{x_n + y_n}{2} \Rightarrow y = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 2y = x + y \Rightarrow x = y$$

ou seja, (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.

2.20- Fixemos $N \in \mathbb{N}$ e sejam $p, n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n| \leq \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| < \\
&< r^{n+p-1} + r^{n+p-2} + \ldots + r^{n+2} + r^{n+1} + r^n = \\
&= r^n(r^{p-1} + r^{p-2} + \ldots + r^2 + r + 1), \quad \forall p \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Mas, se $0 < r < 1$ então (r^n) converge e $\lim r^n = 0$. Assim

$$\lim[r^n(r^{p-1} + r^{p-2} + \ldots + r^2 + r + 1)] = (r^{p-1} + r^{p-2} + \ldots + r^2 + r + 1) \lim r^n = 0$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow r^n(r^{p-1} + r^{p-2} + \ldots + r^2 + r + 1) < \varepsilon$$

Daí, concluímos que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

e portanto (x_n) é de Cauchy.

2.21- Seja $a = \max\{a, b\}$. Então $b < a$. Logo:

$$a = (a^n)^{\frac{1}{n}} < (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} < (a^n + a^n)^{\frac{1}{n}} = (2a^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}}a$$

Tomando o limite temos:

$$\lim a \leq \lim(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \leq \lim 2^{\frac{1}{n}}a$$

Mas, $\lim 2^{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{2} = 1$, pois $2 > 0$. Logo $\lim 2^{\frac{1}{n}}a = a$ e pelo Teorema do Confronto segue que $\lim(a_n + b_n)^{\frac{1}{n}} = a = \max\{a, b\}$.
Se $\max\{a, b\} = b$, o processo é análogo.

2.22- Basta mostrar que (x_n) não é uma seqüência de Cauchy. Para isto, suponha que (x_n) seja de Cauchy. Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Pela definição de (x_n), temos também

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left|1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} - 1 - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{n}\right| \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \end{aligned}$$

Se $p = n$ temos

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, se $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ temos

$$|x_{2n} - x_n| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

que é um absurdo. Portanto, (x_n) não é uma seqüência de Cauchy, donde segue que (x_n) é divergente.

2.23- Mostremos que (x_n) é extritamente crescente. De fato, para $n = 1$ temos:

$$a_1 = 1 < \sqrt{2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{1+a_1} = a_2$$

Suponha agora, que $a_{n-1} < a_n$ mostremos que esta desigualdade é satisfeita para $n + 1$. De fato,

$$a_{n-1} < a_n \Rightarrow 1 + a_{n-1} < 1 + a_n \Rightarrow \sqrt{1+a_{n-1}} < \sqrt{1+a_n} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

Logo, pelo princípio de indução, $a_{n-1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Afirmamos ainda, que $x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, para $n = 2$ temos:

$$a_2 = \sqrt{2} < 2$$

Suponha então, que $a_n < 2$ e mostremos que esta desigualdade é satisfeita para $n + 1$. De fato,

$$a_n < 2 < 3 \Rightarrow 1 + a_n < 4 \Rightarrow \sqrt{1+a_n} < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$$

Logo, pelo princípio de indução, $a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Das duas afirmativas feitas acima, obtem-se

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots < 2$$

ou seja, (x_n) é monótona e limitada, e portanto converge. Seja $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Então de $a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+a_{n-1}} \Rightarrow L = \sqrt{1+L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

2.24- Seja $m = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Então, como (a_n) é não crescente, temos:

$$m \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1$$

ou seja, (a_n) é monótona e limitada. Logo converge. Agora, pela definição de ínfimo, temos:

i) $m \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_n$ tal que $a_n < \varepsilon + m$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe a_n tal que:

$$m \leq a_n \leq \frac{1}{n} + m$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} m = m$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + m\right) = m$, segue pelo Teorema do Confronto, que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = m$.

2.26- Seja (x_{n_k}) uma subseqüência de uma seqüência de Cauchy (x_n), tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq k_0$$

Como (x_n) é de Cauchy, existe m_1 tal que

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m, n \geq m_1$$

Tomemos $N = \max\{k_0, m_1\}$ e fixemos um $k \geq N$ natural com $n_k \geq N$, isto é, fixemos um termo x_{n_k} de (x_{n_k}) com $n_k \geq N$. Então, para $n \geq N$ temos:

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, $\lim x_n = a$.

2.29- Seja $x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$ e seja $p \in \mathbb{N}$. Então

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} \leq \\
&\leq \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-1}}, \quad \forall p \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Mas, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = 0$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p-1}} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

Daí,

$$n \geq N \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

donde segue que, (x_n) é de Cauchy e portanto convergente.

2.30- Basta mostrar que (x_n) é de Cauchy. Para isto, temos:

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n| \leq \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \leq \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| + \\
&\qquad + |x_{n+1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}| + \ldots + |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| \leq \\
&\leq c_{n+p-1} + c_{n+p-2} + \ldots + c_n + c_{n-1} + \ldots + c_2 + c_1 = \\
&= \sum_{k=1}^{n+p-1} c_k = (s_{n+p-1}), \quad \forall p \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Mas, como (s_{n+p-1}) é convergente então ela é limitada. Logo, $\exists M > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{n+p-1} c_k \leq M$, $\forall n, p \in \mathbb{N}$. Agora, pela propriedade arquimediana, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $Nr > M$, $\forall r > 0$. Daí, dado $\varepsilon > 0$, tome $r = \dfrac{\varepsilon}{N}$ e teremos:

$$n \geq N \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=1}^{n+p-1} c_k \leq M < Nr = N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Logo (x_n) é de Cauchy e portanto convergente.

2.31- Como (x_n) é converge, (x_n) é de Cauchy. Logo dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Daí, tome $m = n + p$, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$, e teremos:

$$n \geq N \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

donde segue que $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+p} - x_n) = 0$.

2.32- Afirmamos que $(x_n) = (1, 1, 1, \ldots)$. De fato, para $n = 2$ temos:

$$x_2 = 2 - \frac{1}{x_1} = 2 - 1 = 1$$

Agora suponha que

$$x_n = 2 - \frac{1}{x_{n-1}} = 1$$

é verdadeira, e mostremos que ela vale para $n + 1$. De fato,

$$x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} = 2 - 1 = 1$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, $x_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Agora, (x_n) é monótona e limitada, pois

$$1 = |1| = |x_n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$1 \leq 1 \leq 1 \leq 1 \ldots$$

Portanto (x_n) converge, e é evidente que $\lim x_n = 1$.

2.33- Devemos mostrar que (r_{2k}) é decrescente e limitada inferiormente e (r_{2k-1}) é crescente e limitada superiormente. Para isto mostremos primeiro que $1 \leq r_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, $r_1 = 1$ e $1 \leq 1 \leq 2$. Suponha agora que $1 \leq r_k \leq 2$. Então

$$r_{k+1} = \frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{r_k + r_{k-1}}{r_k} = 1 + \frac{r_{k-1}}{r_k} = 1 + \frac{1}{r_k}$$

Conseqüentemente $1 < 1+\dfrac{1}{2} \leq 1+\dfrac{1}{r_k} = r_{k+1} \leq 1+\dfrac{1}{1} = 2$, e assim, pelo princípio de indução, $1 \leq r_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Agora, se $n \geq 3$, temos

$$r_n = 1 + \frac{1}{r_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{r_{n-2}}} = 1 + \frac{r_{n-2}}{1 + r_{n-2}}$$

Assim

$$r_{n+2} - r_n = \left(1 + \frac{r_n}{1 + r_n}\right) - \left(1 + \frac{r_{n-2}}{1 + r_{n-2}}\right) = \frac{r_n - r_{n-2}}{(1 + r_n)(1 + r_{n-2})}$$

A última equação implica que $r_{n+2} - r_n$ tem o mesmo sinal que $r_n - r_{n-2}$. Agora, $r_3 - r_1 = \dfrac{3}{2} - 1 > 0$, e assim $r_{2k+1} - r_{2k-1} > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Segue que (r_{2k-1}) é crescente. Semelhantemente $r_4 - r_2 = \dfrac{5}{3} - 2 < 0$, e assim $r_{2k+2} - r_{2k} < 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Então (r_{2k}) é decrescente. Portanto, (r_{2k-1}) e (r_{2k}) convergem. Seja $\ell_1 = \lim\limits_{k\to\infty} r_{2k-1}$ e $\ell_2 = \lim\limits_{k\to\infty} r_{2k}$. Como foi dito acima, $r_n = 1 + r_{n-2}/(1 + r_{n-2})$, para $n \geq 3$. Então

$$\ell_1 = \lim_{k\to\infty} r_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{r_{2k-3}}{1 + r_{2k-3}}\right) = 1 + \frac{\ell_1}{1 + \ell_1}$$

e

$$\ell_2 = \lim_{k\to\infty} r_{2k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{r_{2k-2}}{1 + r_{2k-2}}\right) = 1 + \frac{\ell_2}{1 + \ell_2}$$

Assim, tanto ℓ_1 quanto ℓ_2 satisfazem a equação $\ell^2 - \ell - 1 = 0$, cujas soluções são $\ell = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Recorde que $1 \leq r_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim $\ell_1, \ell_2 > 0$. Conseqüentemente, $\ell_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = \ell_2$, e portanto

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Exercício Complementar 1- Mostre que dado qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ existe uma seqüência (x_n) em $\mathbb{Q}$ com $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$.

Solução: Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ então, para qualquer intervalo (a, b) aberto de $\mathbb{R}$, temos $\mathbb{Q} \cap (a, b) \neq \emptyset$. Portanto, $\mathbb{Q} \cap \left(x_0, x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, para cada n, existe (x_n) em $\mathbb{Q}$ com $x_0 < x_n < x_0 + \dfrac{1}{n}$. Logo, (x_n) está em $\mathbb{Q}$, $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = x_0$.

Capítulo 3

3.1- Já foi visto que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Assim, temos:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \ln 1 = 0$$

Agora,

$$\begin{aligned}
&s_1 = \sqrt{2}-1\\
&s_2 = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}\\
&s_3 = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}\\
&\vdots\\
&s_n = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-1
\end{aligned}$$

donde segue que, $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1) = \infty$. Agora, como

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1)-\ln n$$

temos:

$$\begin{aligned}
&t_1 = \ln 2\\
&t_2 = \ln 2+\ln 3-\ln 2\\
&t_3 = \ln 2+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3\\
&\vdots\\
&t_n = \ln 2+\ln 3-\ln 2+\ln 4-\ln 3+\ldots+\ln(n+1)-\ln n = \ln(n+1)
\end{aligned}$$

donde segue que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1)) = +\infty$. Portanto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são divergentes.

3.2-

a) Seja $a_n = \dfrac{n^5}{5^n}$. Então:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^5}{5^n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^5}}{5} = \frac{1}{5}\lim\sqrt[n]{n\cdot n\cdot n\cdot n\cdot n} = \frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5} < 1$$

Logo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^5}{5^n}$ converge, pelo Testa da Raíz.

b) Seja $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$. Então:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sqrt[n]{n} - 1|} &= \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{n} - 1| = |\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)| = |\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - \lim_{n\to\infty} 1| = \\
&= |1 - 1| = 0 < 1
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teste da raíz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n} - 1)^n$ converge.

c) Seja $a_n = \left(\dfrac{-n}{3n+1}\right)^n$. Então:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{-n}{3n+1}\right|^n} = \sqrt[n]{\left|-\frac{n}{3n+1}\right|^n} = -\frac{n}{3n+1}$$

Daí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{3+1/n} = -\frac{1}{3} < 1$$

Logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

3.3-

a) Seja $a_n = \left(\dfrac{2}{n}\right)^n n!$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{n+1}(n+1)!\right|}{\left|\left(\dfrac{2}{n}\right)^n n!\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{2}{n+1}\right|^{n+1}(n+1)!}{\left|\dfrac{2}{n}\right|^n n!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^{n+1}(n+1)}{\left(\dfrac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\dfrac{2}{n+1}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{n}\right)^n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{2}{n+1}\cdot\frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n
\end{aligned}$$

Tá errado. Depois eu faço!

b) Seja $a_n = \dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}$. Então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}2^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Portanto, pelo Teste da razão, segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$ converge.

c) Seja $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n(n+2)}$. Então fazê-la pelo Teste de Leibniz!! Depois eu faço!!

3.4- Temos, $|a_n x^n| = |a_n||x^n| \leq a_n \cdot 1 = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois $|x| \leq 1 \Rightarrow |x|^n = |x^n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Critério da Comparação, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ converge, ou seja, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente.

Agora temos: $|a_n \sin(nx)| = |a_n||\sin(nx)| \leq a_n \cdot 1 = a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pois $|\sin(nx)| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo Critério da Comparação $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \sin(nz)|$ converge, ou seja, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente.

3.5- Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Logo, $\exists\, K > 0$ tal que $|a_n| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e portanto:

$$|a_n| \cdot |a_n| \leq K|a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mas então:

$$|a_n|^2 \leq K|a_n|$$

ou ainda,

$$a_n^2 \leq K|a_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo pelo Critério da Comparação $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

3.6- Temos:

$$a_n b_n \leq \frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergem, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{2}$ convergem, e portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^2}{2} + \frac{b_n^2}{2} \right)$ converge. Logo, pelo Critério da Comparação concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

3.7- Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergem, segue pelo exercício anterior que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. Conseqüentemente $\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n b_n$ converge e portanto: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2)$ converge, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ converge.

3.8- Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} a_n b_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{k} a_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{k} b_n^2 \right)$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ convergem, então:

$$\left(\sum_{n=1}^{k} a_n b_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{k} b_n^2 \right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)$$

e como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge (exercício 3.6) concluímos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)$$

3.9- Temos:

$$a_n \cos(nx) \leq |a_n \cos(nx)| = |a_n| |\cos(nx)| \leq |a_n|$$

e

$$b_n \sin(nx) \leq |b_n \sin(nx)| = |b_n| |\sin(nx)| \leq |b_n|$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ convergem, segue pelo Critério da Comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ convergem e portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

converge.

3.10- Como (a_n) é decrescente temos: $n + n \geq n + 1 \Rightarrow a_{2n} \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde segue que: $a_{2n} \leq a_{n+2}, \ldots, a_{2n} \leq a_{2n}$. Logo:

$$na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = s - s_n$$

onde $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (pois esta série é convergente por hipótese), $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e $s_{2n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$. Daí, $\lim_{n\to\infty}(s - s_n) = 0$, isto é, $\lim_{n\to\infty} na_{2n} = 0$. Portanto $\lim_{n\to\infty}(2n)a_{2n} = 0$.
Temos também que $n + n \geq n + 1 \Rightarrow 2n - 1 \geq n \Rightarrow a_{2n-1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $a_{2n-1} \leq a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1} \leq a_{2n-1}$. Logo:

$$na_{2n-1} \leq a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{2n-1} \leq a_n + a_{n+1} + \ldots = s = s_{n-1}$$

Como $\lim_{n\to\infty}(s - s_{n-1}) = 0$ então $\lim_{n\to\infty} na_{2n-1} = 0$, e portanto $\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_{2n-1} = 0$
Concluimos assim que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

3.11- Seja a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutamente convergente. Então $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, donde segue também que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Segue daí que, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ converge, e como

$$-|a_n| \leq a_n \Rightarrow a_n + |a_n| \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

esta última série é de termos não negativos. Logo como $\sum_{n=1}^{\infty} -|a_n|$ converge temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Reciprocamente, seja $a_n = b_n - c_n$. Então:

$$|a_n| = |b_n - c_n| \leq |b_n| + |c_n|$$

Como b_n e c_n são positivos, segue que $|a_n| \leq b_n + c_n$ e como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ convergem, então $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n + c_n)$ converge. Logo, pelo Critério da Comparação $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Conseqüentemente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

3.12- Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente. Então, a seqüência (s_n) de suas somas parciais é convergente e portanto limitada.
Reciprocamente, suponha que (s_n) seja limitada. Então,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

e como $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ temos que $s_{n+1} \geq s_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, (s_n) é monótona crescente. Logo (s_n) é convergente, e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

3.13- Seja $a_n = \dfrac{x^n}{n^2}$ e

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{|x|^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{|x|^n} \right] = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[|x| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right] = |x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \\ &= |x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n} \right) \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+1/n} \right) = |x| \cdot 1 = |x| \end{aligned}$$

Pelo teste da razão $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ converse se $|x| < 1$, ou equivalentemente, se $-1 < x < 1$.
Mas, se for $x = 1$, temos a série, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, que converge, e se for $x = -1$, temos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ que converge absolutamente e portanto converge.
Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge para $-1 \leq x \leq 1$.
Seja agora $a_n = \dfrac{x^n}{n^n}$. Temos:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|x|^n}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

3.14- Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, que converge pelo Critério de Leibniz e seja $x_n = (-1)^n$ que é limitada. Temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)^n \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

que diverge.

3.15- Usando o exercício 3.12 e a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos:

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ s_n &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sqrt{a_i} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\sqrt{a_i})^2\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right)^{\frac{1}{2}} \leq \alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{2}} = c \end{aligned}$$

isto é, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

Outra resolução: Temos que $a_n \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Logo:

$$\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n} \leq \frac{(a_n)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}$$

Como, por hipótese, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ converge. Conseqüentemente $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}\right)$ converge, e pelo Critério da Comparação $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

3.16- Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$a_{n+1} \leq f(x) \leq a_n \quad \forall x \in [n, n+1]$$

Portanto,

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $n \geq 2$ temos

$$\sum_{n=1}^{k-1} a_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{k-1}\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{k-1} a_n$$

e portanto,

$$s_k - a_1 \leq \int_1^k f(x)dx \leq s_{k-1} \tag{10}$$

Suponhamos que, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ converge. Então (s_{k-1}) converge. Logo, (s_{k-1}) é limitada, donde por (10) temos que

$$\left(\int_1^k f(x)dx\right)$$

é também limitada, e como ela é crescente, segue que $\left(\displaystyle\int_1^k f(x)dx\right)$ converge. Reciprocamente, suponha que $\left(\displaystyle\int_1^k f(x)dx\right)$ converge. Então ela é limitada e por (10) segue que (s_k) é limitada e como ela é crescente segue que ela converge. Logo, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ converge.

3.17- Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, então para $\varepsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} < 1 \Rightarrow 0 \leq a_n < b_n, \quad \forall n \geq N$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge então: $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ também converge, donde segue que $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge, o que é equivalente a dizer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

3.18- Por (b) temos que (b_n) converge para um limite, digamos k. Daí, seja $b_n = k + c_n$ tal que (c_n) é monótona e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Por (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ converge e a seqüência (s_n), onde $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é limitada. Logo, pelo Critério de Dirichlet, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ converge. Sendo $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ obtém-se:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - k) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n - ka_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = s + \sum_{n=1}^{\infty} ka_n$$

donde conclui-se que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

3.19- Temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} &= \frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\frac{1}{5\ln 5}+\ldots+\frac{1}{8\ln 8}+\ldots=\\
&= \frac{1}{2\ln 2}+\left(\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}\right)+\left(\frac{1}{5\ln 5}+\ldots+\frac{1}{8\ln 8}\right)+\ldots>\\
&> \frac{1}{2\ln 2}+\left(\frac{1}{4\ln 4}+\frac{1}{4\ln 4}\right)+\left(\frac{1}{8\ln 8}+\ldots+\frac{1}{8\ln 8}\right)+\ldots=\\
&= \frac{1}{2\ln 2}+\frac{2}{4\ln 4}+\frac{4}{8\ln 8}+\ldots=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{2}{8\ln 2}+\frac{4}{24\ln 2}+\ldots=\\
&= \frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{4\ln 2}+\frac{1}{6\ln 2}+\ldots=\frac{1}{2\ln 2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)=\\
&= \frac{1}{2\ln 2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, então: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

3.20- Temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^r} &= \frac{1}{2(\ln 2)^r}+\frac{1}{3(\ln 3)^r}+\frac{1}{4(\ln 4)^r}+\ldots+\frac{1}{7(\ln 7)^r}+\ldots=\\
&= \left(\frac{1}{2(\ln 2)^r}+\frac{1}{3(\ln 3)^r}\right)+\left(\frac{1}{4(\ln 4)^r}+\ldots+\frac{1}{7(\ln 7)^r}\right)+\ldots<\\
&< \left(\frac{1}{2(\ln 2)^r}+\frac{1}{2(\ln 2)^r}\right)+\left(\frac{1}{4(\ln 4)^r}+\ldots+\frac{1}{4(\ln 4)^r}\right)+\ldots=\\
&= \frac{2}{2(\ln 2)^r}+\frac{4}{4(\ln 4)^r}+\frac{8}{8(\ln 8)^r}+\ldots=\\
&= \frac{1}{(\ln 2)^r}+\frac{1}{(\ln 4)^r}+\frac{1}{(\ln 8)^r}+\ldots=\\
&= \frac{1}{(\ln 2)^r}+\frac{1}{2^r(\ln 2)^r}+\frac{1}{3^r(\ln 2)^r}+\ldots=\\
&= \frac{1}{(\ln 2)^r}\left(1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\ldots\right)=\\
&= \frac{1}{(\ln 2)^r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}$ converge se $r>1$ e diverge se $r\leq 1$, então: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^r}$ converge se $r>1$ e diverge se $r\leq 1$.

3.21- Seja $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$. Então, para $\varepsilon = \dfrac{\ell}{2}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \frac{\ell}{2} \Leftrightarrow -\frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} - \ell < \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\ell}{2}$$

Logo:

$$\frac{\ell}{2} b_n < a_n < \frac{3\ell}{2} b_n, \quad \forall n \geq N$$

Portanto, pelo Critério da Comparação temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

3.22- Considere as séries:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\dfrac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n}} = \sqrt{1} = 1
\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, segue pelo Exercício 3.21 que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ também diverge.

3.23- Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, seja $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Como (s_n), onde $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é a seqüências das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, temos que $s_n \longrightarrow s$, quando $n \longrightarrow \infty$. Portanto, segue pelo exercício 2.16, que

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} \longrightarrow s$$

como queríamos.

3.24- Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ fosse convergente. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge temos que $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$ também converge. Logo teríamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

seria convergente, que é um absurdo.

3.25- Temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(-1)^{n+1} + (-1)^n}{n+1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1+1)}{n+1} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ diverge e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge pelo Critério de Leibniz, segue pelo exercício 3.25 que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$ diverge.

3.26- Seja $a_n = \frac{x^n}{n^x}$. Então:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^x}}{\dfrac{|x|^n}{n^x}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^x}\cdot\frac{n^x}{|x|^n} = \\
&= |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^x = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x} = |x|
\end{aligned}$$

Logo, pelo teste da razão $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^x}$ converge se $|x| < 1$, ou seja, se $-1 < x < 1$.
Agora, se $x = 1$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

que diverge, e se $x = -1$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$$

que também diverge.
Logo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^x}$ converge para $|x| < 1$.

3.27- Basta mostrar que a seqüência das somas pariais é limitada. Sejam

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\ t_k &= a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} \end{aligned}$$

Para $n < 2^k$,

$$s_n \quad \leq \quad a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1})$$

de modo que

$$s_n \leq t_k \tag{11}$$

Por outro lado, se $n > 2^k$,

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k \end{aligned}$$

de modo que

$$2s_n \geq t_k \tag{12}$$

Por (11) e (12), as seqüências são ambas limitadas ou ambas ilimitadas, o que demonstra o resultado.

3.28- Sejam

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad \beta_n = B_n - B$$

Então,

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n (B + \beta_0) \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0 \end{aligned}$$

Seja

$$\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0$$

Queremos mostrar que $C_n \to AB$. Como $A_n B \to AB$, basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \tag{13}$$

Seja

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, $\beta_n \to 0$. Podemos, pois, escolher N tal que $|\beta_n| \leq \varepsilon$ para $n \geq N$. Logo

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0| \\ &\leq |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha \end{aligned}$$

Mantendo N fixo e fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup |\gamma_n| \leq \varepsilon\alpha,$$

visto que $a_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Sendo ε arbitrário, (13) está demonstrado.

3.29- Defina:

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n) \quad \text{e} \quad a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$$

Então:

$$a_n^+ - a_n^- = \frac{|a_n|}{2} + \frac{a_n}{2} - \frac{|a_n|}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n$$

e

$$a_n^+ + a_n^- = \frac{|a_n|}{2} + \frac{a_n}{2} + \frac{|a_n|}{2} - \frac{a_n}{2} = |a_n|$$

donde $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ e $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então segue pelo Critério da Comparação, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ são convergentes. Logo, para qualquer permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$$

e portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{\sigma(n)}^+ - a_{\sigma}^-) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$$

Exercício Complementar 1- A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a}-1)$, $a>1$ é convergente ou divergente? Justifique sua resposta.

Solução: É convergente. De fato, mostremos primeiro que $a_n = \sqrt[n]{a}-1$ é decrescente. Com efeito, mostra-se facilmente por indução que $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde segue que:

$$\sqrt[n+1]{a}-1 < \sqrt[n]{a}-1,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} < a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo (a_n) é decrescente, e como $a>1$ temos:

$$\sqrt[n]{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a}-1 > 0 \Rightarrow a_n > 0$$

ou seja, (a_n) é uma seqüência de termos positivos. Temos ainda que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} - \lim_{n\to\infty} 1 = 1-1 = 0$$

Portanto, pelo Critério de Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{a}-1)$$

é convergente.

Capítulo 4

4.2- Sejam $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$ e $(y_n) = (y_1, y_2, \ldots)$ seqüências limitadas tais que $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e considere os conjuntos

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \quad \text{e} \quad B_n = \{y_n, y_{n+1}, \ldots\}$$

que evidentemente são limitados. Temos:

$$\inf_{r \geq n} x_r \leq x_s \leq y_s, \quad \forall s \geq n$$

ou ainda,

$$\inf_{r \geq n} \leq \inf_{s \geq n} y_s$$

Tomando o limite nesta última desigualdade, quando $n \to \infty$ concluímos que:

$$\lim_{n \to \infty} \inf A_n \leq \lim_{n \to \infty} \inf B_n \Rightarrow \liminf x_n \leq \liminf y_n$$

Do mesmo modo temos:

$$x_s \leq y_s \leq \sup_{r \geq n} y_r, \quad \forall s \geq n$$

ou seja,

$$\sup_{s \geq n} x_s \leq \sup_{r \geq n} y_r$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ obtemos:

$$\lim_{n \to \infty} \sup A_n \leq \lim_{n \to \infty} \sup B_n \Rightarrow \limsup x_n \leq \limsup y_n$$

4.3-

a) Seja $\lambda = \liminf x_n$. Então $\exists$ (x_{n_k}) tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = \lambda$. Logo $x_{n_k} c \longrightarrow \lambda c$, quando $k \to \infty$. Agora se $x_{r_s} c \longrightarrow \ell$, (x_{r_s}) sendo uma subseqüência qualquer de (x_n), então, desde que $c > 0$,

$$x_{r_s} = \frac{x_{r_s} c}{c} \longrightarrow \frac{\ell}{c}$$

Mas, $\dfrac{\ell}{c} \geq \lambda \Rightarrow \ell \geq c\lambda$. Logo uma subseqüência qualquer de (cx_n) não possui um limite menor que $c\lambda$. Portanto,

$$\liminf (cx_n) = c\lambda = c \liminf x_n$$

Agora seja $\xi = \limsup x_n$. Então $\exists$ (x_{n_k}) tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k} = \xi$. Logo $cx_{n_k} \longrightarrow c\xi$, quando $k \to \infty$. Se $x_{r_s} c \longrightarrow L$, qualquer que seja (x_{r_s}), então, como $c > 0$ temos:

$$x_{r_s} = \frac{x_{r_s} c}{c} \longrightarrow \frac{L}{c}$$

Mas, $\dfrac{L}{c} \leq \xi \Rightarrow L \leq \xi c$. Portanto $\limsup(cx_n) = c\xi = c \limsup x_n$.
Obs: Em ambos os casos, se for $c = 0$ então $x_{n_k} \longrightarrow 0 = 0\lambda$ ou 0ξ.

b) Seja $c < 0$. Então $c = -M$, onde $M > 0$. Note que:

$$\inf_{r \geq n}(-x_r) = -\sup_{r \geq n}(x_r) \Rightarrow \liminf(-x_r) = -\limsup x_n$$

Logo:

$$\liminf(cx_n) = \liminf(-Mx_n) = -\limsup(Mx_n) = -M \limsup x_n = c \limsup x_n$$

e

$$\limsup(cx_n) = \limsup(-Mx_n) = -\liminf(Mx_n) = -M \liminf x_n = c \liminf x_n$$

4.4- Temos:

$$\inf_{r \geq n} x_r + \inf_{r \geq n} y_r \leq x_s + y_s,\ \forall s \geq n \Rightarrow \inf x_r + \inf y_r \leq \inf(x_s + y_s)$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ obtemos:

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n)$$

Agora:

$$x_s + y_s \leq \sup_{r \geq n} x_r + \sup_{r \geq n} y_r,\ \forall s \geq n \Rightarrow \sup(x_s + y_s) \leq \sup_{r \geq n} x_r + \sup_{r \geq n} y_r$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$ conclui-se:

$$\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$$

4.6- Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito de $\mathbb{R}$. Podemos admitir que a enumeração foi feita de modo que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Então

$$\mathbb{R} - X = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \ldots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, +\infty)$$

donde segue que $\mathbb{R} - X$ é aberto. Portanto X é fechado.

4.18-

a) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, onde L é um conjunto de índices, uma família qualquer de conjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Mostremos que $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto fechado. Temos pelo exercício 1.34 que

$$\mathbb{R} - \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} - A_\lambda)$$

Como dada A_λ é fechado então cada $\mathbb{R} - A_\lambda$ é aberto, e assim, $\bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} - A_\lambda)$ também é aberto. Logo $\mathbb{R} - \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto, donde segue que $\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ é fechado.

b) Seja A_{λ_1}, A_{λ_2}, ..., A_{λ_n} uma coleção finita de conjuntos fechados de $\mathbb{R}$. Mostremos que $\bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$. Temos pelo exercício 1.34 que

$$\mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i} = \bigcap_{i=1}^{n} (\mathbb{R} - A_{\lambda_i})$$

Como dada A_{λ_i}, $i = 1, \ldots, n$ é fechado, então $\mathbb{R} - A_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$ é aberto, e assim, $\bigcap_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} - A_{\lambda_i})$ é aberto. Logo $\mathbb{R} - \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}$ é aberto, donde segue que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\lambda_i}$ é fechado.

4.8- Temos, $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(\mathbb{R} - A) \cup \partial A$, união disjunta.
Suponha que A é aberto. Então $A = \mathrm{int}(A)$. Logo $A \cap \partial A = \mathrm{int}(A) \cap \partial A = \emptyset$.
Reciprocamente, suponha que A não é aberto. Então $\exists x \in A$, tal que x não é ponto interior de A. Logo, $\forall \varepsilon > 0$, $V_\varepsilon(x)$ contém pontos de $\mathbb{R} - A$, ou seja, $x \in \partial A \Rightarrow A \cap \partial \neq \emptyset$ o que é um absurdo.

4.9- Mostremos que $\overline{S} = S \cup \partial S$. De fato, suponha que $x \in \overline{S}$, mas $x \notin S$ (o caso em que $x \in S$ é evidente). Como $x \in \overline{S}$, então toda vizinhança de x contém ao menos um ponto de S e como $x \notin S$, então $x \in \mathbb{R} - S$. Logo, toda vizinhança de x contém um ponto de S e um ponto de $\mathbb{R} - S$, a saber, o próprio x. Assim, $x \in \partial S$, donde segue que $x \in S \cup \partial S$, isto é, $\overline{S} \subset S \cup \partial S$.
Mostremos agora que $S \cup \partial S \subset \overline{S}$. De fato, se $x \in S \cup \partial S$, então $x \in S$ ou $x \in \partial S$. Se $x \in S$, então $x \in \overline{S}$. Se $x \in \partial S$, então toda vizinhança de x contém pontos de S e de $\mathbb{R} - S$, e portanto, $x \in \overline{S}$. Dái concluímo-se a igualdade.
Conseqüentemente S é fechado $\Leftrightarrow S = \overline{S} \Leftrightarrow S = S \cup \partial S \Leftrightarrow \partial S \subset S$.

4.10- Temos que $X \subset X \cup Y$ e $Y \subset X \cup Y$, donde segue que $\overline{X} \subset \overline{X \cup Y}$ e $\overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$. Logo $\overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$.
Reciprocamente, se $a \in \overline{X \cup Y}$, então $a = \lim z_n$, com $z_n \in X \cup Y$. Para infinitos valores de n, z_n está em X (donde $a \in \overline{X}$) ou z_n está em Y (donde $a \in \overline{Y}$). Logo $a \in \overline{X} \cup \overline{Y}$, e portanto $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$, donde segue a igualdade.
Além disso, $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$, donde segue que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{Y}$. Logo $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.
Considere agora $X = [0, 1)$ e $Y = (1, 2]$. Então $X \cap Y = \emptyset$. Logo, $\emptyset = \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y} = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$.

4.11- Se x não é ponto de acumulação de S, então existe um intervalo aberto I contendo x, tal que $I \cap S \subset \{x\}$. Nenhum elemento de I é ponto de acumulação de S. Logo $\mathbb{R} - S'$ é aberto e portanto S' é fechado.

4.12- As inclusões $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ significam que

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$$

Assim o comjunto $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente. Seja $x_0 = \sup A$. Então $a_n \leq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e como cada b_n é cota superior para A temos que $x_0 \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto $x_0 \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Seja agora y_0 outro número real tal que $a_n \leq y_0 \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então temos:

$$a_n \leq x_0 \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \leq y_0 \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou ainda

$$a_n \leq x_0 \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$-b_n \leq -y_0 \leq -a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde segue que:

$$-(b_n - a_n) \leq x_0 - y_0 \leq b_n - a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o que é equivalente a

$$|x_0 - y_0| \leq b_n - a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, se $b_n - a_n \longrightarrow 0$, temos que $x_0 = y_0$, como queríamos.

4.13-

a) Suponha que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Logo, $x \in I_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é: $0 < x < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o que é impossível. Logo $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

b) Suponha que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_n \neq \emptyset$. Então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{J}_n$. Logo $x \in \mathcal{J}_n = (n, +\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é: $n \leq x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas então x é cota superior de $\mathbb{N}$, ou seja, $\mathbb{N}$ seria limitado superiormente o que é um absurdo.

4.14- Se C é denso em D então:

$$C \subset D \subset \overline{C}$$

e se D é denso em E então:

$$D \subset E \subset \overline{D}$$

Logo:

$$C \subset D \subset E \subset \overline{D} \subset \overline{\overline{C}} = \overline{C} \Rightarrow C \subset E \subset \overline{C}$$

e porntanto C é denso em E.

4.15- Suponha que $S' \neq \emptyset$. Então S possui algum ponto de acumulação. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de S. Pelo exercício 4.16, toda vizinhança de a contém infinitos pontos de S. Mas então S não é finito, o que é um absurdo.

4.16- Suponha que x_0 é ponto de acumulação de S. Então $\forall n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar um ponto $x_n \in S$, $x_n \neq x_0$ na vizinhança $\left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right)$. Logo, $\lim x_n = x_0$, o que mostra que x_0 é limite de uma seqüência de pontos $x_n \in S - \{x_0\}$. Daí, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N \Leftrightarrow x_n \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \quad \forall n \geq N$$

ou seja, toda vizinhança de x_0 contém um infinidade de pontos de S.
Reciprocamente, suponha que toda vizinhança de x_0 contém uma infinidade de pontos de S. Então toda vizinhança de x_0 contém algum ponto de S diferente de x_0, donde segue que $x_0 \in S'$.

4.17- Sejam A_1 e A_2 conjuntos abertos. Se $x \in A_1 \cap A_2$, então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são abertos, existem ε_1 e ε_2 positivos tais que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1$ e $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_2$, ou seja, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$, donde segue que x é ponto interior de $A_1 \cap A_2$, e portanto, $A_1 \cap A_2$ é aberto.
Considere agora A_1, A_2, ..., A_n, uma coleção finita de conjuntos abertos. Temos que $A_1 \cap A_2$ é aberto. Logo, $(A_1 \cap A_2) \cap A_3$ também é aberto e prosseguindo de tal forma concluimos indutivamente que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ é aberto.
Agora seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família qualquer de conjuntos abertos. Se $x \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então $x \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$. Como A_λ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subset A$. Logo todo ponto $x \in A$ é interior, e portanto, A é aberto.

4.7- Seja $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ uma coleção finita de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Mostremos que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ é compacto. Para isto msotremos primeiro que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ é limitado. De fato, como cada K_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ é limitado, então existem α_i e β_i tais que, $K_i \subset [\alpha_i, \beta_i]$. Sejam

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \ \text{ e } \ \beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$$

Então, $K_i \subset [\alpha_i, \beta_i] \subset [\alpha, \beta]$, donde segue que, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subset [\alpha, \beta]$. Logo, $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ é limitado.
Afirmamos que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ é fechado. De fato, como cada K_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ é compacto então cada K_i é fechado. Mas a união finita de conjuntos fechados também é fechada, donde conclui-se que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ é fechado. Portanto $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ é compacto.
Seja agora $\{K_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ uma coleção qualquer de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Mostremos que $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha$ é compacto. Para isto mostremos primeiro que $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha$ é limitado. De fato, como cada K_α é compacto, qualquer que seja $\alpha \in \Gamma$, temos que K_α é limitado. Logo existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que: $K_\alpha \subset [a, b]$. Mas,

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha \subset K_\alpha \subset [a, b] \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha \subset [a, b]$$

donde segue que $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha$ é limitado.
Afirmamos que $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha$ é fechado. De fato, seja $\alpha \in \Gamma$. Temos que K_α é compacto, e portanto fechado. Mas, como a interseção qualquer de conjuntos fechados é fechado, conclui-se que $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha$ é fechado. Portanto $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in \Gamma} K_\alpha$ é compacto.

4.19- Seja $a \in \mathbb{R}$. Temos que $\{a\}$ é fechado, pois

$$\mathbb{R} - \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$$

é aberto. Daí, considere todos os elementos pertencentes ao intervalo (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$. Note que a união desses elementos é igual a (a, b), e cada elemento é um conjunto unitário fechado. Mas a união desses conjuntos é (a, b) que é aberto.

4.20- Considere a família $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde,

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

Vamos mostrar que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ (note que $\{0\}$ não é aberto).

Obviamente, $\{0\} \subset \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, pois $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Então $x \in A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $\forall n$. Logo

$$|x| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou ainda,

$$0 \leq |x| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde segue que $x = 0$.

Capítulo 5

5.1-
i) Dado $\varepsilon > 0$ devemos determinar $\delta > 0$ tal que $0 < |x-1| < \delta$ implique $|x^3 - 1| < \varepsilon$. Para isto restringiremo-nos aos pontos x tais que $|x-1| < 1$. Neste caso temos

$$|x| = |x-1+1| \leq |x-1| + 1 < 2 \Rightarrow |x^2| < 4$$

Logo

$$\begin{aligned} |f(x) - 1| &= |x^3 - 1| = |(x-1)(x^2+x+1)| = |x-1||x^2+x+1| \\ &\leq (|x^2| + |x| + 1)|x-1| < 7|x-1| \end{aligned}$$

Assim, tome $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ e temos

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x^3 - 1| < 7\delta \Rightarrow |x^3 - 1| < \varepsilon$$

ii) Temos:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

Logo, queremos mostrar que $\lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$ e teremos:

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| = |x+1-2| = |x-1| < \delta = \varepsilon$$

iii) De fato, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ e teremos que se $0 < |x-2| < \delta$, então:

$$|f(x) - 3| = |2x - 1 - 3| = |2x - 4| = 2|x-2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

iv) De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$ e temos que, se $0 < |x-a| < \delta$ então:

$$|f(x) - \cos a| = |\cos x - \cos a| < |x-a| < \varepsilon$$

5.2- Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Em particular, para $\varepsilon = 1$ temos:

$$\begin{aligned} &0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < 1 \Rightarrow |f(x) - L| + |L| < 1 + |L| \\ &\Rightarrow |f(x) - L + L| < 1 + |L| \Rightarrow |f(x)| < 1 + |L| \end{aligned}$$

Como $1 + |L| > 0$, faça $c = 1 + |L|$ e teremos

$$|f(x)| < c, \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Portanto, existe uma vizinhança, a saber $(a-\delta, a+\delta)$ na qual f é limitada.

5.3- Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então, pela proposição 5.2, para toda seqüência $(x_n) \in S$, com $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, tem-se $\lim f(x_n) = L$. Logo, $\lim \sqrt{f(x_n)} = \sqrt{L}$ e novamente utilizando a proposição 5.2, segue que, $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

5.4-
a) Temos que $g(x) = \sin x$ é limitada, pois $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Agora seja $h(x) = 1 + x^2$. Temos:

$$|x|^2 \geq 0 \Rightarrow |x^2| + 1 \geq 1 \Rightarrow |1 + x^2| \geq 1, \quad \forall x \in S$$

Logo, $\alpha = 1 > 0$ é tal que $|h(x)| \geq \alpha$, $\forall x \in S$ e pela proposição 5.1, g/h é limitada, isto é,

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + x^2}$$

é limitada.

b) Temos:

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1, \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

Agora, se $x \in (0,1)$, temos:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \quad \text{e} \quad |\sin x| \leq |x|, \quad \forall x \in (0,1)$$

Logo,

$$|f(x)| = \sqrt{x}\frac{|\sin x|}{|x|} \leq \sqrt{x} < \sqrt{1} = 1$$

c)

d)

5.6- Suponha que $f + g$ é limitada em A. Como f é limitada em A, então $-f$ também é limitada em A. Logo $(f + g) - f$ é limitada, isto é, g é limitada em A, o que é um absurdo. Portanto $f + g$ é limitada em A.

5.7- Sejam $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $g(x) = x$ definidas no intervalo $A = (0, \infty)$. Temos que f e g são ambas ilimitadas, mas $f(x) \cdot g(x) = 1$ que é limitada.

5.8- Temos que: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $\forall x \in V_\delta^*(a)$. Logo, como $\lim\limits_{x\to a}(-|f(x)|) = \lim\limits_{x\to a}|f(x)| = 0$, segue pelo Teorema do Confronto que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

5.9-
a) Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\sqrt{x+1}-1)}{x}\frac{(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}+1)}\right] = \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right] = \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right] = 0
\end{aligned}$$

5.10-
a) Sejam $A = f(S) = \{f(x);\ x \in S\}$, $B = g(S) = \{g(x);\ x \in S\}$ e $C = (f+g)(S) = \{f(x)+g(x);\ x \in S\}$. Temos que $C \subset A+B$, donde segue que $\sup C = \sup(f+g) \leq \sup(A+B) = \sup f + \sup g$.

b) Segue imediatamente que $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$.

c) Temos que $\sup(cf) = \sup\{c\cdot f(x);\ x \in S\} = \sup(cA) = c\sup A = c\cdot\sup f$, se $c \geq 0$. Analogamente, $\inf(cf) = c\inf f$ se $c \geq 0$.

d) Análoga a *c)*.

5.12- Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ então para cada $M > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Mas, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in V_\delta^*(a) \Rightarrow g(x) > M$. Logo, para cada $M > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow g(x) > M$$

ou seja, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

5.13-

a) Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então dado $M > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Logo, dado $\varepsilon = \dfrac{1}{M} > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M}$$

Portanto $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

b) Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, então dado $M > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$$

Logo, dado $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{M} \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{M} = \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \pm\infty$.

5.14- Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ então para $\varepsilon = 1$, existe $a > 0$ tal que $|f(x) - L| < 1$, se $x \geq a$, ou seja, existe $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ tal que $|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1$, $\forall x \geq a$. Portanto, $|f(x)| < 1 + |L| = M$, $\forall x \in [a, +\infty)$.

5.19- Dado $\varepsilon > 0$ seja q_0 um número inteiro tal que $\dfrac{1}{q_0} < \varepsilon$. Considere o conjunto $Q_0 = \left\{\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q};\ q < q_0\right\}$. Note que, em algum intervalo finito existe apenas um número finito de elementos de Q_0. Então, existe um $\delta > 0$ tal que os intervalos $(a - \delta, a)$ e $(a, a + \delta)$ não contém elementos de Q_0. Logo, segue que

$$0 < \left|a - \frac{p}{q}\right| < \delta \Rightarrow 0 \leq f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_0} < \varepsilon$$

e portanto $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Capítulo 6

6.1- Seja $x_0 \neq 0$ um número real. Então existem seqüências (x_n) em $\mathbb{Q}$, com $x_n > x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e tal que $x_n \longrightarrow x_0$ e $(\widehat{x})$ em $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, com $\widehat{x} > x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e tal que $\widehat{x} \longrightarrow x_0$. Logo, $f(x_n) = x_n$ e $f(\widehat{x}_n) = 0$, o que implica $\lim f(x_n) = \lim x_n = x_0$ e $\lim f(\widehat{x}_n) = \lim 0 = 0$. Como $x_0 \neq 0$, então, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ não existe.
Analogamente, mostra-se que $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ não existe e portanto, as descontinuidades de $f(x)$ em cada $x_0 \neq 0$ são de 2ª espécie.
Agora, seja (x_n) uma seqüência qualquer em $\mathbb{R}$, tal que $x_n \longrightarrow 0$. Então $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ ou $(x_n) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Se $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ então: $f(x_n) = x_n \longrightarrow 0$. Se $(x_n) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ então $f(x_n) = 0 \longrightarrow 0$. Logo, em qualquer caso tem-se:

$$x_n \longrightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow 0$$

Portanto $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, donde concluímos que f é contínua em 0.

6.2- Seja (x_n) uma seqüência de números reais qualquer tal que $x_n \longrightarrow x_0$. Como f é contínua em x_0 temos que $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Por outro lado como $f(x_n) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, segue pelo exercício 5.3 que, $\sqrt{f(x_n)} \longrightarrow \sqrt{f(x_0)}$, ou seja, $h(x_n) \longrightarrow h(x_0)$, donde concluímos que h é contínua em x_0.

6.3- Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, então dado $x \in \mathbb{R}$ existe uma seqüência (x_n) em $\mathbb{Q}$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Agora como (x_n) está em $\mathbb{Q}$, então $f(x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sendo f contínua em $\mathbb{R}$, temos que $f(x) = \lim f(x_n) = \lim 0 = 0$, ou seja, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6.4- Vamos mostrar que $x_n \longrightarrow x \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x)$. De fato, seja (x_n) uma seqüência em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Então $x_n - x \longrightarrow 0$ e como f é contínua em $x_0 = 0$ então $f(x_n - x) \longrightarrow f(0)$, ou seja, $f(x_n - x) \longrightarrow 0$, ou ainda, $f(x_n) - f(x) \longrightarrow 0$, e portanto, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Logo f é contínua em $\mathbb{R}$, como queríamos.

6.5- Em particular, $f(0) = 0$, pois $|f(0)| \leq |g(0)| = 0$. Seja (x_n) uma seqüência qualquer de números reais, tal que $x_n \longrightarrow 0$. Correspondente ao $\delta > 0$ da hipótese $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $|x_n| < \delta$, $\forall n \geq n_0$, ou seja, $x_n \in V_\delta(0)$, $\forall n \geq n_0$. Logo,

$$|f(x_n)| \leq |g(x_n)|, \quad \forall n \neq n_0 \qquad (*)$$

Como g é contínua em $x_0 = 0$, temos, $g(x_n) \longrightarrow g(0) = 0$. De $(*)$ temos que:

$$f(x_n) \longrightarrow 0 = f(0)$$

ou seja, f é contínua em $x_0 = 0$.

6.6- Defina a função:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (a,b) \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & \text{se } x = a \\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x) & \text{se } x = b \end{cases}$$

Temos que $\widetilde{f}$ é contínua em $[a,b]$. Logo $\widetilde{f}$ é limitada em $[a,b]$ e portanto $f = \widetilde{f}|_{(a,b)}$ é limitada em (a,b).

6.7- Suponha $f(a) < f(b)$ e vamos mostrar que f é extritamente crescente. Se f não fosse extritamente crescente existiriam $x, y \in [a,b]$ com $x < y$, porém $f(x) > f(y)$. Há duas possibilidades:

i) $f(a) < f(y)$ ou

ii) $f(a) > f(y)$

Se $f(a) < f(y)$, então $f(a) < f(y) < f(x)$. Como f é contínua, então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in (a,x)$ tal que $f(x_0) = f(y)$. Mas $x_0 \neq y$, pois, $x < y$. Logo f não é injetiva, que é um absurdo.
Se $f(a) > f(y)$, então temos $f(y) < f(a) < f(b)$. Como f é contínua, então pelo Teorema de Valor Intermediário, existe $x_0 \in (y,b)$ tal que $f(y_0) = f(a)$. Mas, $y_0 \neq a$, pois $a < y_0$. Logo f não é injetiva, que é um absurdo.

6.8- Colocando $a_n x^n$ em evidência em $p(x)$ temos:

$$p(x) = a_n x^n \left(\frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n} + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + 1 \right)$$

onde $r(x) = \dfrac{a_0}{a_n} \cdot \dfrac{1}{x^n} + \dfrac{a_1}{a_n} \cdot \dfrac{1}{x^{n-1}} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \dfrac{1}{x} + 1$.
É evidente que $\lim\limits_{x\to+\infty} r(x) = 1 \lim\limits_{x\to-\infty} r(x)$. Agora $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_n x^n) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} (a_n x^n) = -\infty$, em virtude de ser n ímpar. Logo:

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$

Estes limites mostram que $p(\mathbb{R})$ é ilimitado nos dois sentidos, ou seja, $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Logo $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva, donde segue que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$, como queríamos.

6.13- Temos:

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\}$$

Como f e g são contínuas, segue que $\frac{1}{2}\{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\}$ é contínua, ou seja, $h(x)$ é contínua. Do mesmo modo segue que $k(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\}$ é contínua.

6.14- Seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana, isto é, existe $\lambda > 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|, \quad \forall x, y \in I$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ e teremos:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y| < \lambda \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$$

Portanto f é contínua em I.

6.15- Temos:

$$f(x) - f(y) = x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Logo:

$$|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |x - y||x^2 + xy + y^2| \leq |x - y|(|x|^2 + |x||y| + |y|^2)$$

Como $x \in [-\alpha, \alpha]$ e $y \in [-\alpha, \alpha]$ temos: $|x| \leq \alpha$ e $|y| \leq \alpha$. Portanto:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|(\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2) = 3\alpha^2|x - y|, \quad \forall x, y \in [-\alpha, \alpha]$$

e fazendo $\lambda = 3\alpha^2 > 0$ concluímos que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|, \quad \forall x, y \in [-\alpha, \alpha]$$

como queríamos.

6.16- Como toda função da forma λx, $\lambda \in \mathbb{R}$ é contínua, basta mostrar que $f(x) = \lambda x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. De fato, como $x = 1 \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x) = f(1 \cdot x) = x \cdot f(1)$$

Fazendo $\lambda = f(1)$ concluímos que $f(x) = \lambda x$.

6.17- Dado $\varepsilon > 0$ seja $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{q_0} < \varepsilon$. Agora, considere o conjunto $Q_0 = \left\{\dfrac{p}{q},\ \text{com } q < q_0\right\}$. Note que, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$, existe somente um número finito de elementos de $\mathbb{Q}_0$, pois, quando $q \geq q_0$ tem-se $\dfrac{p}{q} \notin \mathbb{Q}_0$. Considere $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e seja $c \in [a,b]$ então é possível exibir uma vizinhança de c que não contém nenhum ponto de $\mathbb{Q}_0$, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c)$ e $(c, c+\delta)$ não contém elementos de $\mathbb{Q}_0$. Logo,

$$0 < \left|c - \frac{p}{q}\right| < \delta \Rightarrow \left|f\left(\frac{p}{q}\right) - 0\right| = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_0} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x) = 0 \ \text{ se } \ c \in \mathbb{Q}$$

Obviamente, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ se $c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Agora, dado $c \in \mathbb{R}$ ou $c \in \mathbb{Q}$ ou $c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Se $c \in \mathbb{Q}$ então:

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \neq \frac{1}{q} = f(c)$$

Se $c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ então: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 = f(c)$. Logo, f é contínua apenas nos números irracionais.

6.18- Temos:

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f(n) = f(n\cdot 1) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = nf(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(-1) = f(-1+1-1) = f(-1) + f(1) + f(-1) \Rightarrow 0 = f(1) + f(-1)$$

$$\Rightarrow f(-1) = -1\cdot f(1)$$

Se $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$, então $k = -n$, com $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(k) &= f(-n) = f(n\cdot(-1)) = f(-1) + \ldots + f(-1) = -1f(1) - \ldots - 1f(1) \\ &= -1\cdot(f(1) + \ldots + f(1)) = -1\cdot nf(1) = \\ &= -n\cdot f(1) = k\cdot f(1), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad k < 0 \end{aligned}$$

Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e $\mathrm{mdc}(p,q) = 1$. Então:

$$\begin{aligned} pf(1) &= f(p\cdot 1) = f\left(p\cdot\frac{q}{p}\right) = f\left(\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) + \ldots + f\left(\frac{p}{q}\right) \\ &= qf\left(\frac{p}{q}\right) \Rightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}f(1) \end{aligned}$$

Se $\alpha = f(1)$ então: $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \alpha\dfrac{p}{q}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$. Então existe uma seqüência (x_n) em $\mathbb{Q}$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, então

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim \alpha x_n = \alpha \cdot \lim x_n = \alpha \cdot x \Rightarrow f(x) = \alpha \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

6.20- Defina $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in [a,b] \\ f(a) & \text{se} \quad x < a \\ f(b) & \text{se} \quad x > b \end{cases}$$

Note que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$ e g é contínua em $\mathbb{R}$.

6.21- Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ k > 0$ tal que

$$|x| > k \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Agora em $[-k,k]$, como f é contínua então é limitada, ou seja, $\exists\ \zeta > 0$ tal que $|f(x)| \leq \zeta$, $\forall x \in [-k,k]$. Seja $C = \max\{\varepsilon, \zeta\}$ então: $|f(x)| \leq C$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

6.25- Como $\mathcal{D}$ é limitado, então existe $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq C, \quad \forall x, y \in I, \quad x \neq y$$

ou ainda $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, $\forall x, y \in I$, $x \neq y$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$ e teremos:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

donde segue que f é uniformemente contínua em I.

6.26- Como $g(x) = x^2$ é contínua, então $f(x) = \sqrt{x}$ também é contínua (pois é a inversa de g) e portanto f é uniformemente contínua.

Capítulo 7

7.1- Se $x \geq 0$ então:

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2 \quad \text{e} \quad f''(x) = 6(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Agora se $x < 0$ então:

$$f'(x) = [(-x)^3]' = -3x^2 \quad \text{e} \quad f''(x) = -6x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Mostremos que f'' não é derivável em $x = 0$. De fato,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{6h}{h} = 6$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f''(0+h) - f''(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-6h}{h} = -6$$

Como $f_d'''(0) = 6 \neq -6 = f_e'''(0)$, segue que f'' não é derivável em $x = 0$.

7.2- Temos:

$$f_d'(x) = a \quad \text{e} \quad f_e'(x) = 3x^2$$

donde temos: $f_d'(1) = a$ e $f_e'(1) = 3$. Logo para que f seja derivável em $x_0 = 1$ devemos ter: $f_d'(1) = a = f_e'(1) = 3 \Rightarrow a = 3$. Devemos ter também:

$$1^3 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -2$$

7.3- Temos, para $x \neq 0$, e pela proposição 7.3 que f é derivável e

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2\left(-\frac{2}{x^3}\right)\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Para $x_0 = 0$ temos:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Como

$$\lim_{x \to 0}\left[x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] = 0$$

segue que f é derivável em $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$.

7.4- Mostremos que f não é derivável em $x_0 = 1$. De fato,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1 - |1-x| - 1}{x - 1} = \frac{|1-x|}{1-x}$$

Note que: $|1-x| = 1-x$, se $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$ ou $|1-x| = -(1-x) = x-1$ se $1-x < 0 \Rightarrow x > 1$. Logo:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(1-x)}{1-x} = \lim_{x\to 1^+}(-1) = -1$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{1-x} = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$

donde segue que $f'(x_0)$ não existe e portanto f não é derivável em (a,b), não satisfazendo assim o Teorema de Rolle.

7.6- Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right)-f\left(a-\frac{h}{2}\right)}{h} &= \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right)-f(a)}{\frac{h}{2}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)-f\left(a-\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right)-f(a)}{\frac{h}{2}}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a-\frac{h}{2}\right)-f(a)}{\frac{h}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right)-f(a)}{\frac{h}{2}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a-\frac{h}{2}\right)-f(a)}{-\left(\frac{h}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right)-f(a)}{\frac{h}{2}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{f\left(a+\left(-\frac{h}{2}\right)\right)-f(a)}{\left(-\frac{h}{2}\right)}\right]
\end{aligned}$$

Agora, tomando o limite quando $h \longrightarrow 0$ temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right)-f\left(a-\frac{h}{2}\right)}{h} &= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(a+\frac{h}{2}\right)-f(a)}{\frac{h}{2}}\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(a+\left(-\frac{h}{2}\right)\right)-f(a)}{\left(-\frac{h}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{1}{2}f'(a) + \frac{1}{2}f'(a) = f(a)
\end{aligned}$$

7.7- Vamos aplicar a fórmula de Taylor à função f no intervalo $[a-h, a+h]$ com $h > 0$. Temos que:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{f''(\xi)\cdot h^2}{2} \tag{14}$$

onde $\xi \in [a, a+h]$ e

$$f(a-h) = f(a) + f'(a)\cdot(-h) + \frac{f''(\eta)\cdot(-h)^2}{2} \tag{15}$$

onde $\eta \in [a-h, a]$.
Somando (14) e (15) membro a membro temos:

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + \frac{f''(\xi) + f''(\eta)}{2} \cdot h^2$$
$$\Rightarrow \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \frac{1}{2}(f''(\xi) + f''(\eta))$$

Mas, f'' é contínua em $x = a$ de modo que quando $h \longrightarrow 0$ então: $\xi \longrightarrow a$ e $\eta \longrightarrow a$, e isto acarreta que $f''(\xi) \longrightarrow f''(a)$ e $f''(\eta) \longrightarrow f''(a)$. Assim temos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = \frac{1}{2}[f''(a) + f''(a)] = f''(a)$$

7.8- Fixemos $x_0 = y \in \mathbb{R}$ e seja $x \in \mathbb{R}$ qualquer. Então

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (x - x_0)^2 = |x - x_0|^2 \Rightarrow \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq |x - x_0|, \quad \text{se} \quad x \neq x_0$$

Logo:

$$0 = \lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \lim_{x\to x_0} |x - x_0| = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Portanto f é constante.

7.9- Considere a função $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = c_0 x + \frac{c_1}{2}x^2 + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n}x^n + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

Temos:

$$F(0) = 0 \;\text{ e }\; F(1) = c_0 + \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} + \frac{c_n}{n+1}$$

Como F está nas condições do Teorema de Rolle, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Mas

$$F'(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n$$

ou seja, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n = 0$$

7.10- Seja $x > 0$ e apliquemos o Teorema do Valor Médio a f no intervalo $[x, x+1]$, ou seja, existe $x_0 \in (x, x+1)$ tal que:

$$f'(x_0) = f(x+1) - f(x) = g(x)$$

Portanto

$$0 = \lim_{x\to+\infty} f(x_0) = \lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = \lim_{x\to+\infty} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

7.11- Basta mostrar que $g'(x) > 0$, $\forall x > 0$. Temos:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

Usando o Teorema do Valor Médio para f no intervalo $[0, x]$ temos que $\exists\, \xi \in (0, x)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow xf'(\xi) = f(x)$$

Como f' é monótona crescente temos:

$$\xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow f(x) < xf'(x) \Rightarrow xf'(x) - f(x) > 0$$

Portanto, $g'(x) > 0$, $\forall x > 0$.

7.12- Seja $h > 0$ tal que $x_0 + h \in [x_0, b)$. Então f é contínua em $x_0, x_0 + h]$ e derivável em $(x_0, x_0 + h)$. Usando o Teorema do Valor Médio, temos que existe $x \in (x_0, x_0 + h)$ tal que:

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{16}$$

Note que, quando $h \longrightarrow 0^+$ então $x \longrightarrow x_0^+$. Daí, tomando o limite em (16) quando $h \longrightarrow 0^+$ temos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

Como $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ existe, por hipótese, então $f'_d(x_0)$ também existe e $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$.

7.13- Suponha que $f'_d(a) < k < f'_e(b)$. Defina a função $g(x) = f(x) - kx$, $x \in [a, b]$. Então g é derivável em $[a, b]$ e $g'(x) = f'(x) - k$, $\forall x \in (a, b)$. Além disso, $g'_d(a) = f'_d(a) - k < 0$ e $g'_e(b) = f'_e(b) - k > 0$. Logo, para $h > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\frac{g(a + h) - g(a)}{h} < 0 \Rightarrow g(a + h) - g(a) < 0 \Rightarrow g(a + h) < g(a) \tag{17}$$

Semelhantemente, para $h < 0$ suficientemente pequeno temos:

$$\frac{g(b+h)-g(b)}{h} > 0 \Rightarrow g(b+h)-g(b) < 0 \Rightarrow g(b+h) < g(b) \tag{18}$$

Agora, sendo g contínua em $[a,b]$ então g assume seu mínimo em $[a,b]$. Mas, as desigualdades (17) e (18) mostram que este mínimo não é atingido em em a nem em b. Portanto, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(x) \geq f(c), \quad \forall x \in [a,b]$$

Como $g'(c)$ existe então $g'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = k$.

7.18- Defina a função $\varphi(x) = g(x) - f(x)$, $x \in [a,b]$. Note que $\varphi(a) = 0$ e $\varphi'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Logo φ é crescente em $[a,b]$. Como $\varphi(a) = 0$ então $\varphi(a) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Portanto: $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

7.19- Sejam $f(x) = n(x-1)$ e $g(x) = x^n - 1$, ambas definidas em $[1,+\infty)$. Temos que $g(1) = 1^n - 1 = 0 = n(1-1) = f(1)$ e mais:

$$x \geq 1 \Rightarrow x^{n-1} \geq 1 \Rightarrow nx^{n-1} \geq n \Rightarrow g'(x) \geq f'(x), \quad \forall n \geq 1$$

Logo, pelo exercício 7.18 concluimos que $g(x) \geq f(x)$, $\forall x \geq 1$, ou seja, $x^n - 1 \geq n(x-1)$, $\forall x \geq 1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 8

8.1- Vimos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim S(f;P;\xi) = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

onde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Escolha $\xi_i = x_i$, então:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \ldots + \frac{f(x_n)}{n} = \\ &= \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \\ &= \frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right]\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

8.3- Para qualquer partição P de $[0,1]$ temos $L(P,f) = 0$ e portanto, $\underline{\int} f = 0$. Agora, seja P_n uma partição de $[0,1]$ com n subintervalos todos de comprimento $\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$. Logo, temos

$$\begin{aligned}U(P_n, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \\ &= \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+n}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Desde que, $\overline{\int} f \le U(P,f)$ para qualquer partição P, segue que:

$$\overline{\int} f \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto,

$$\overline{\int} f \le \frac{1}{2} \tag{19}$$

Mas, sabemos que $\forall \varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que: $U(P,f) < \overline{\int} f + \varepsilon$ se $||P|| < \delta$. Assim, para n suficientemente grande temos:

$$U(P_n, f) < \overline{\int} f + \varepsilon$$

e portanto,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < \overline{\int} f + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim,

$$\frac{1}{2} < \overline{\int} f + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Desde que, $\varepsilon > 0$ é qualquer, temos

$$\frac{1}{2} \leq \overline{\int} f \tag{20}$$

De (19) e (20) temos

$$\overline{\int} f = \frac{1}{2}$$

Conseqüentemente temos,

$$\underline{\int} f \neq \overline{\int} f$$

o que implica que f não é integrável.

8.4- Suponha que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$. Como f é contínua em x_0 existe $\delta > 0$ tal que:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \quad \text{tem-se} \quad f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)dx \geq \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{1}{2} f(x_0)dx = \frac{1}{2} f(x_0) \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx = \frac{1}{2} f(x_0) 2\delta = \delta f(x_0) > 0 \end{aligned}$$

8.5- Considere a função definida no intervalo $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Essa função é limitada mas não é integrável. Porém $|f| = 1$ é integrável.

8.6- Como $0 \leq m \leq f(x) \leq M$ então: $m^2 \leq f^2(x) \leq M^2 \; \forall \; x \in [a,b]$, o que implica

$$\int_a^b m^2 dx \leq \int_a^b f^2(x)dx \leq \int_a^b M^2 dx$$

$$\Rightarrow m^2(b-a) \leq \int_a^b f^2(x)dx \leq M^2(b-a)$$

$$\Rightarrow m^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dxdx \leq M^2$$

$$\Rightarrow m \leq \left(\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq M$$

8.7- Como f é contínua em $[a,b]$ então f^2 também é. Usando o primeiro teorema da Média temos que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f^2(x)dx = f^2(c)[b-a]$$

Logo

$$f^2(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx \Rightarrow f(c) = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

8.8- A integrabilidade das funções φ e ψ decorre das seguintes identidades:

$$\varphi(x) = \max[f(x), g(x)] = \frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$$

e

$$\psi(x) = \min[f(x), g(x)] = \frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$$

8.9- Temos,

$$\varphi(x) = \int_x^b f(t)dy = -\int_b^x f(t)dy$$

Logo, $\varphi'(x) = -f(x)$.

8.10- Defina $F(y) = \displaystyle\int_a^y f(t)dy$, o que implica $F'(y) = f(y)$. Mas,

$$F(v(x)) = \int_a^{v(x)} f(t)dt = G(x)$$

Logo, $G'(x) = (F \circ v)'(x) = F'(v(x)) \cdot v'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x)$.

8.12- Seja $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = \int_c^x f(t)dy, \quad a \leq c \leq b$$

Então: $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$. Temos:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{\alpha(x)}^{c} f(t)dy + \int_c^{\beta(x)} f(t)dy = \\ &= -\int_c^{\alpha(x)} f(t)dy + \int_c^{\beta(x)} f(t)dt = -F(\alpha(x)) + F(\beta(x)). \end{aligned}$$

Como F, α e β são deriváveis então φ é derivável e

$$\varphi'(x) = -F'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) + F'(\beta(x)) \cdot \beta'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

8.14- Temos,

$$\int_{a+p}^{x+p} f(t)dt$$

Seja $t = u + p$ então: $dt = du$ e $a + p = u + p \Rightarrow u = a$, $x + p = u + p \Rightarrow u = x$. Logo,

$$\int_{a+p}^{x+p} f(t)dt = \int_a^x f(u+p)du = \int_a^x f(u)du = \int_a^x f(t)dt$$

8.15- Como $f : [a + \varepsilon, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada e integrável, então para todo $0 < \varepsilon < b - a$ existe uma partição $\mathcal{P}'$, digamos, $a + \varepsilon = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ tal que $S(f; \mathcal{P}') - s(f; \mathcal{P}') < \varepsilon$. Se considerarmos a partição $\mathcal{P}$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ temos:

$$\begin{aligned} S(f; \mathcal{P}) - s(f; \mathcal{P}) &= M_0(x_1 - x_0) + S(f; \mathcal{P}') - m_0(x_1 - x_0) - s(f; \mathcal{P}') \\ &< \varepsilon + (M_0 - m_0)(x_1 - x_0) = \varepsilon + (M_0 - m_0)\varepsilon = \varepsilon' \end{aligned}$$

Portanto f é integrável em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe.

8.16- Vamos mostrar inicialmente o seguinte fato: se f é limitada em $[a, b]$ e $\displaystyle\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ existe para todo $0 < \varepsilon < b - a$ então: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ existe. Desde que f é integrável em $[a + \varepsilon, b]$ existe um partição P' de $[a + \varepsilon, b]$, digamos

$$a + \varepsilon = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

tal que:

$$S(P', f) - s(P', f) < \varepsilon$$

Sejam m e M e ínfimo e supremo de f em $[a, b]$. Se P é a partição $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ então:

$$S(P, f) - s(P, f) < (M - m)\varepsilon + \varepsilon$$

Logo, f é integrável em $[a, b]$. Vamos utilizar este fato para resolver o nosso problema da seguinte forma: Divida o intervalo $[a, b]$ em um número finito de subintervalos $[a_k, b_k]$ tal que f é contínua em $[a_k, b_k]$ exceto em um dos pontos finais, digamos no extremo inferior a_k.
Então: f é contínua em $[a_{k+\varepsilon}, b_k]$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ e portanto é aí integrável. Usando o fato que demonstramos, temos que f é integrável em $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots n$.
Mas, f sendo integrável em cada subintervalo $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ então: f é integrável em $[a, b]$.

8.17- Vamos mostrar que $f(x) = 0$ exceto no ponto a e seja $\alpha = f(\alpha) > 0$. Temos que, para qualquer partição P' de $[a, b]$ $s(P', f) = 0$ e $S(P', f) = \alpha(x_1 - x_0)$. Considere uma partição P de $[a, b]$ tal que $x_1 - x_0 < \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$, $\forall\ \varepsilon > 0$. Neste caso, temos, $S(P, f) - s(P, f) < \varepsilon$. Logo, f é integrável em $[a, b]$. Como $\underline{\int_a^b} f = 0$ então:

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = 0$$

8.18- Como $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0\ \forall\ g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua então, em particular,

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0$$

Vamos mostrar que, $f \equiv 0$. Suponha o contrário, então: $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = \eta \neq 0$. Por continuidade, temos $f^2(x) > \dfrac{1}{2}\eta^2 > 0$ para $\alpha \leq x \leq \beta$. Então:

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx > \frac{1}{2}\eta^2(\beta - \alpha) > 0$$

que contradiz a hipótese.

8.19- Considere o trinômio $p(\lambda) = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx$. Temos:

$$p(\lambda) = \int_a^b f(x)^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b g(x)^2 dx \geq 0$$

Sendo $C = \int_a^b f(x)^2 dx$, $B = \int_a^b f(x)g(x)dx$ e $A = \int_a^b g(x)^2 dx$ obtemos: $p(\lambda) = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0$. Logo, $\Delta \leq 0$, ou seja:

$$\Delta = (2B)^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow 4B^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$$

o que implica

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$$

8.20- Se $f \neq 0$ então: $M > 0$. Agora, $\forall\, \varepsilon > 0$ existe um intervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ no qual $f(x) > M - \varepsilon$. Portanto,

$$(M - \varepsilon)^n < f^n(x) \qquad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Por outro lado, $f^n(x) \leq M^n$ $\forall x \in [a, b]$. Logo,

$$(M - \varepsilon)^n(\beta - \alpha) < \int_\alpha^\beta f^n dx \leq \int_a^b f^n dx \leq M^n(b - a)$$

$$\Rightarrow (M - \varepsilon)(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} < \left(\int_a^b f^n dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M(b - a)^{\frac{1}{n}}$$

Mas, $(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ e $(b - a)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$ se $n \longrightarrow \infty$. Logo, $\forall\, \varepsilon > 0$ temos

$$M - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M$$

$$\Rightarrow M \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}} = M$$

8.22- Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um conjunto finito. Para todo $\varepsilon > 0$ considere a seguinte coleção finita de intervalos abertos:

$$I_i = \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^i}\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

É evidente que $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Alem disso temos:

$$\sum_{i=1}^{n} |I_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon$$

Portanto X tem conteúdo nulo.

8.24- Seja E um conjunto com conteúdo nulo, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe uma coleção finita de intervalos abertos (a_n, b_n) tais que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{k}(a_n, b_n) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{k}(b_n - a_n) < \varepsilon$$

Então, temos:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{k}(a_n, b_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$$

Além disso, para $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$0 < \sum_{n=1}^{k}(b_n - a_n) < \frac{1}{k}$$

e quando $k \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Portanto E tem medida nula. A recíproca não é verdadeira. Por exemplo, $E = \mathbb{N}$ tem medida nula, mas não tem conteúdo nulo.

8.25- Seja $X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ enumerável. Então X tem medida nula. De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja

$$I_i = \left(x_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, x_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Então $X \subset \bigcup I_i$ e $\sum |I_i| = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

8.26- Dado $\varepsilon > 0$, existe um número finito de intervalos abertos (a_i, b_i), $i = 1, \ldots, n$, dois a dois disjuntos, tais que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i) = G \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \varepsilon$$

A função f é contínua em

$$H = [a,b] - G = [a,b] \cap G'$$

e, desde ue H é limitado e fechado, f é uniformemente contínua em H. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ sempre que $x, y \in H$ e $|x - y| < \delta$.
Agora seja $\mathcal{P}$ uma partição de $[a,b]$ que contém todos os pontos extremos (em $[a,b]$) de $I_1, \ldots, I_n$ e todos os subintervalos em H, cujos comprimentos são menores que δ. Se os subintervalos de $\mathcal{P}$ são $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ então:

$$\begin{aligned} S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= (\Sigma_G + \Sigma_H)(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

onde Σ_G e Σ_H se estendem sobre os subintervalos em $\overline{G}$ e H, respectivamente. Claramente

$$\Sigma_G(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \Sigma_G(M - m)(x_i - x_{i-1}) < (M - m)\varepsilon$$

e

$$\Sigma_H(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \Sigma_H \varepsilon (x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon(b - a)$$

Portanto:

$$S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) < (M - m + b - a)\varepsilon = \varepsilon'$$

8.27- Dado $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos $I_1, \ldots, I_k, \ldots$ tais que $D \subset \bigcup I_k$ e $\sum |I_k| < \varepsilon/2K$, onde $K = M - m$. Para cada $x \in [a,b] - E$, seja J_x um intervalo aberto de centro x no qual a oscilação de f é menor do que $\varepsilon/2(b-a)$. Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, a cobertura aberta $[a,b] \subset (\bigcup_k I_k) \cup (\bigcup_x J_x)$ possui uma subcobertura finita $[a,b] \subset I_1 \cup \ldots \cup I_m \cup J_{x_1} \cup \ldots \cup J_{x_n}$. Seja $\mathcal{P}$ a partição de $[a,b]$ formada pelos pontos a, b e os extremos desses $m + n$ intervalos que pertençãm a $[a,b]$. Indiquemos com $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$ os intervalos de $\mathcal{P}$ que estão contidos em algum $\overline{I}_k$ e com $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ os demais intervalos de $\mathcal{P}$. Então $\sum(t_\alpha - t_{\alpha-1}) < \varepsilon/2K$ e a oscilação de f em cada intervalo $[t_{\beta-1}, t_\beta]$ é $\omega_\beta < \varepsilon/2(b-a)$. Logo

$$\begin{aligned} S(f;\mathcal{P}) - s(f;\mathcal{P}) &= \sum \omega_\alpha (t_\alpha - t_{\alpha-1}) + \sum \omega_\beta (t_\beta - t_{\beta-1}) \\ &< \sum K t_\alpha - t_{\alpha-1} + \sum \frac{\varepsilon(t_\beta - t_{\beta-1})}{2(b-a)} \\ &< \frac{K\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon \cdot (b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon \end{aligned}$$

Logo f é integrável.

8.28- Mostremos que f é contínua apenas em $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. De fato, dado $\varepsilon>0$ seja $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{q_0}<\varepsilon$. Agora, considere o conjunto $Q_0=\{p/q, \quad \text{com} \quad q<q_0\}$. Note que, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$, existe somente um número finito de elementos de Q_0, pois, quando $q \geq q_0$ tem-se $p/q \notin Q_0$.
Considere $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e seja $c \in [a,b]$, então é possível exibir uma vizinhança de c que não contém nenhum ponto de Q_0, isto é, existe $\delta>0$ tal que $(c-\delta,c)$ e $(c,c+\delta)$ não contém elementos de Q_0. Logo, se $0<|c-p/q|<\delta$ então:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)-0\right|=\frac{1}{q}\leq\frac{1}{q_0}<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to c} f(x)=0, \quad \text{se} \quad c\in\mathbb{Q}$$

Obviamente, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ se $c \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Agora, dado $c \in \mathbb{R}$ ou $c \in \mathbb{Q}$ ou $c \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Se $c \in \mathbb{Q}$ então:

$$\lim_{x\to c} f(x)=0\neq\frac{1}{q}=f(c)$$

Se $c \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ então:

$$\lim_{x\to c} f(x)=0=f(c)$$

Logo, f é contínua apenas nos números irracionais e como $\mathbb{Q}$ tem medida nula f é integrável em $[a,b]$.
Considere agora $\mathcal{P}=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Temos que todo intervalo da forma $[t_{i-1},t_i]$ contém números irracionais. Logo, $m_i=0$, $\forall i=1,\ldots,n$, ou seja, $s(f;\mathcal{P})=0$, donde segue que $\underline{\int_a^b} f(x)dx=0$. Como f é integrável, devemos ter $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=0$.

8.29- Seja $K \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto compacto com medida nula, ou seja, dado $\varepsilon>0$ existe uma coleção enumerável de intervalos abertos $I_i=(a_i,b_i)$ tais que

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty}|b_i-a_i|<\varepsilon$$

Como K é compacto, adimite subcobertura finita. Logo:

$$K\subset\bigcup_{k=1}^{n} I_{i_k} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n}|b_{i_k}-a_{i_k}|<\sum_{i=1}^{\infty}|b_{i_k}-a_{i_k}|<\varepsilon$$

Portanto K possui conteúdo nulo.

8.30- Temos que $c=\inf\limits_{[a,b]} g$, $d=\sup\limits_{[a,b]} g$, $g(a)=\alpha$ e $g(b)=\beta$, donde segue que $\alpha,\beta\in[c,d]$. Defina F em $[c,d]$ e G em $[a,b]$ pondo

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(x)dx \quad \text{e} \quad G=F\circ g$$

Então:

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_a^b G' = G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_\alpha^\beta f$$

ou seja:

$$\int_\alpha^\beta f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$$

Capítulo 9

9.1- Se $|x| < 1$ então: $x^n \longrightarrow 0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$$

Se $|x| > 1$ então: $\dfrac{1}{|x|} < 1$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n + 1} = 1$$

Se x = 1, temos:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

9.2- Basta mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x(1-x)^n$ converge em $[0,1]$. De fato, temos:

$$\begin{aligned} \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim\left|\frac{(n+1)^2x(1-x)^{n+1}}{n^2x(1-x)^n}\right| = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^2|1-x| \\ &= |1-x|\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = |1-x| < 1 \end{aligned}$$

pois $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow |x-1| < 1$. Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2x(1-x)^n$ converge em $[0,1]$, donde segue que $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$ converge pontualmente para a função identicamente nula em $[0,1]$.

9.3- Basta mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx^2}$ converge em $\mathbb{R}$. De fato, temos:

$$\begin{aligned} \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim\frac{(n+1)|x|e^{-(n+1)x^2}}{n|x|e^{-nx^2}} = \lim\frac{n+1}{n}e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = e^{-x^2} < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}-\{0\} \end{aligned}$$

Quando $x = 0$, $f_n(x) = 0$. Portanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx^2}$ converge em $\mathbb{R}$, donde segue que $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ converge pontualmente para a função identicamente nula em $\mathbb{R}$.

9.4- Temos que:

$$f(0) = 0 \longrightarrow 0 \ \text{ e } \ f(1) = 0 \longrightarrow 0$$

Considerando o intervalo $0 < x < 1$, segue que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

pelo teste da razão em $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e pelo teste do limite do termo geral, isto é, (f_n) coverge pontualmente a 0 no intervalo $0 \le x \le 1$.
Agora $f_n(x)$ não converge uniformemente no intervalo $0 \le x \le 1$.
De fato, seja $B_n = \displaystyle\sup_{0\le x\le 1} |nx(1-x)^n| = \max_{0\le x\le 1} |nx(1-x)^n|$. Então:

$$f_n'(x) = n(1-x)^n + nx[-n(1-x)^{n-1}] = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& f_n'(x) = 0 \Rightarrow n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = 0 \\
\Rightarrow\ & n(1-x)^n = n^2x(1-x)^{n-1} \Rightarrow (1-x)^n = nx(1-x)^{n-1} \\
\Rightarrow\ & 1-x = nx \Rightarrow nx + x = 1 \Rightarrow x(n+1) = 1 \\
\Rightarrow\ & x = \frac{1}{n+1} \quad \text{(ponto crítico)}
\end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$\begin{aligned}
f_n''(x) &= -n^2(1-x)^{n-1} - [n^2(1-x)^{n-1} - n^2x(n-1)(1-x)^{n-2}] \\
&= -n^2(1-x)^{n-1} - n^2(1-x)^{n-1} + n^2x(n-1)(1-x)^{n-2} \\
&= -2n^2(1-x)^{n-1} + n^2(n-1)x(1-x)^{n-2}
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
f_n''\left(\frac{1}{n+1}\right) &= -2n^2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-1} + n^2(n-1)\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n-2} \\
&= -2n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} + n^2(n-1)\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2} \\
&= -2n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-1} + \\
&\qquad +n^2(n-1)\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-2} \\
&= -2n^2\frac{n+1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} + n^2(n-1)\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)^2}{n^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \\
&= -2n(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} + (n^2-1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \\
&= [-2n(n+1) + (n^2-1)]\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} \\
&= [-n^2 - 2n - 1]\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} < 0
\end{aligned}$$

Logo $f_n(x)$ possui um máximo em $x = \dfrac{1}{n+1}$. Como $B_n = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |nx(1-x)^n|$, temos:

$$\begin{aligned} B_n &= f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e \neq 0$$

9.5- Temos que, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge pontualmente para a função descontínua $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. Decorre do teorema de Dini a convergência uniforme em todo intervalo da forma $[0, 1-\delta]$, $0 < \delta < 1$. Porém a convergência não é uniforme em $[0,1]$. De fato, tomando $\varepsilon = 1/2$, afirmamos que, seja qual for $n_0 \in \mathbb{N}$, existem pontos $x \in [0,1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq 1/2$, ou seja, $x^{n_0} \geq 1/2$. Basta observar que $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{n_0} = 1$. Logo existe $\delta > 0$ tal que $1-\delta < x < 1 \Rightarrow x^{n_0} > 1/2$. Isto mostra que f_n não converge uniformemente para f no intervalo $[0,1]$.

9.6- Consideremos $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ no intervalo $[0,1]$. Temos que:

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < x^n(1-x^n) < x^n$$

Como $x^n \longrightarrow 0$ pontualmente em $(0,1)$ segue que, $f_n(x) = x^n(1-x^n) \longrightarrow 0$ pontualmente no mesmo intervalo (note também que: $f_n(0) = f_n(1) = 0$ e assim $f_n \longrightarrow 0$ pontualmente em $[0,1]$). Porém essa convergência não é uniforme. De fato, seja $B_n = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |x^n(1-x^n)| = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |x^n(1-x^n)|$. Então:

$$f_n'(x) = [x^n(1-x^n)]' = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = \frac{nx^n - 2nx^{2n}}{x} = 0, \quad x \neq 0$$

Daí tem-se:

$$f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \quad \text{(ponto crítico)}$$

Temos ainda:

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= [nx^{n-1} - 2nx^{2n-1}]' = n(n-1)x^{n-2} - 2n(2n-1)x^{2n-2} \\ &= \frac{n(n-1)x^n - 2n(2n-1)x^{2n}}{x^2} \end{aligned}$$

donde segue que:

$$f''(\sqrt[n]{1/2}) = \frac{n(n-1)\frac{1}{2} - 2n(2n-1)\frac{1}{4}}{(1/2)^{\frac{2}{n}}} = -\frac{n^2}{(1/2)^{\frac{2}{n}}} < 0$$

ou seja, f possui um máximo em $x = \sqrt[n]{1/2}$. Logo:

$$B_n = f(\sqrt[n]{1/2}) = \frac{1}{4} \nrightarrow 0$$

e portanto a convergência não é uniforme em $[0,1]$. Porém, se nos restringirmos ao intervalo $[0, 1-\delta]$, $0 < \delta < 1$, $f_n \longrightarrow 0$ uniformemente, pois $x^n \longrightarrow 0$ uniformemente nesse intervalo e $0 \leq x^n(1-x^n) \leq x^n$.
Considere agora $g_n(x) = nxe^{-nx^2}$. Pelo exercício 9.3 esta seqüência converge pontualmente para 0 em $\mathbb{R}$ e portanto converge para 0 no intervalo $[0,1]$. Tomando $\varepsilon = e^{-1}$, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$, os pontos $1/n \in (0,1]$ satisfazem a seguinte desigualdade:

$$|g_n(1/n)| = e^{-1/n} \geq e^{-1} = \varepsilon$$

donde segue que g_n não converge uniformemente em $[0,1]$.

9.7- Seja $f_n(x) = x^n(1-x)$ no intervalo $[0,1]$. Afirmamos que $f_n \longrightarrow 0$ uniformemente em $[0,1]$. De fato,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = \frac{nx^n(1-x) - x^{n+1}}{x}, \quad x \neq 0$$

ou seja:

$$f_n'(x) = 0 \Rightarrow nx^n(1-x) - x^{n+1} = 0 \Rightarrow x^n[n(1-x) - x] = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$$

Temos ainda:

$$f_n''(x) = n^2x^{n-2}(1-x) - nx^{n-2}(1-x) - 2nx^{n-1}$$

donde segue que:

$$f_n''(n/(n+1)) = -n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-2} < 0$$

ou seja, f_n possui um máximo em $n/(n+1)$. Logo:

$$\begin{aligned} \sup_{0\leq x\leq 1} |x^n(1-x)| &= \max_{0\leq x\leq 1} |x^n(1-x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Portanto, $f_n \longrightarrow 0$ uniformemente em $[0,1]$ (em particular a convergência também é pontual).

9.8- Sejam $M(A) = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ e $M(B) = \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)|$. Temos que $M(A) \longrightarrow 0$ e $M(B) \longrightarrow 0$. Mostremos que $M(A \cup B) = \sup_{x \in A \cup B} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$. De fato, se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$, donde segue que

$$M(A \cup B) = \max\{M(A), M(B)\}$$

Logo, $M(A \cup B) = M(A) \longrightarrow 0$, ou $M(A \cup B) = M(B) \longrightarrow 0$, ou ainda, $M(A \cup B) = M(A) = M(B) \longrightarrow 0$, donde conclui-se que $\sup_{x \in A \cup B} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0$, isto é, f_n converge uniformemente para f em $A \cup B$.

9.9- É análogo a demonstração para seqüências numéricas. Agora, $f_n g_n \longrightarrow fg$ uniformemente, se (f_n) e (g_n) forem uniformemente limitadas, isto é, se existe $K > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq K$ e $|g_n(x)| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in I$. De fato, dado $\varepsilon > 0$ existem $n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tais que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{e} \quad n \geq n_2 \Rightarrow |g_n - g| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

Sendo $n \geq \max\{n_1, n_2\} = N$ segue que:

$$n \geq N \Rightarrow |fg - f_n g_n| \leq |f||g_n - g| + |g_n||f_n - f| < K\frac{\varepsilon}{2K} + K\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

Se (f_n) e (g_n) não forem uniformemente limitadas, não podemos afirmar que a convergência é uniforme. Por exemplo, se $f_n(x) = g_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$ temos: $f_n g_n = x^2 + \dfrac{2x}{n} + \dfrac{1}{n^2} \longrightarrow x^2 = fg$ pontualmente.

9.10- Seja $\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)$. Então se $|x| < 1$, temos:

$$\lim \Phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)(1 + x + x^2 + \ldots) = (1-x)\frac{1}{1-x} = 1$$

Se $x = 1$ então, $\sum x^n(1-x) = 0$, ou seja, $\sum x^n(1-x)$ converge pontualmente para

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

9.13- Temos que:

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad \left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$$

Como $\sum \frac{1}{n^2}$ e $\sum \frac{1}{n^3}$ convergem, segue pelo critério de Weierstrass que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ convergem uniformemente em $\mathbb{R}$.

Exercício Complementar 1- Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo às seguintes condições:

i) $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $\exists c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $x_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ solução da equação funcional $x' = f(x)(*)$. Se $x_n(0)$ converge, mostre que existe uma subseqüência (x_{n_k}) de (x_n) que converge uniformemente para uma solução de (*). Note que, $x_n \in C^1$.

Solução: Temos que, $x_n' = f(x_n)$. Ingrando de 0 até t, $0 < t \leq 1$ e usando o Teorema Fundamental do Cálulo, temos:

$$x_n(t) - x_n(0) = \int_0^t f(x_n(s))ds \quad (**)$$

Agora usando *i)* e a desigualdade $|a - b| \geq |a| - |b|$, temos?

$$|x_n(t)| - |x_n(0)| \leq \int_0^t M ds = Mt \leq M$$

pois, $t \geq 1$.
Como $(x_n(0))$ converge então $\exists \alpha > 0$ tal que $|x_n(0)| \leq \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Logo, $|x_n(t)| \leq M + \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Isto significa que, (x_n) é uniformemente limitada.
Vamos mostrar agora que, (x_n) é equicontínua. Sejam $t, t' \in [0,1]$ então temos:

$$\begin{aligned} x_n(t) - x_n(t') &= \int_0^t f(x_n(s))ds - \int_0^{t'} f(x_n(s))ds = \\ &= \int_{t'}^0 f(x_n(s))ds + \int_0^t f(x_n(s))ds = \int_{t'}^t f(x_n(s))ds \end{aligned}$$

donde temos:

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_n(t')| &\leq \left| \int_{t'}^t |f(x_n(s))| ds \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{t'}^t M ds \right| = M|t - t'|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad t, t' \in [0,1] \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, a seqüência (x_n) possui uma subseqüência (x_{n_k}) uniformemente convergente. Seja φ o limite uniforme de (x_{n_k}). Pela condição *ii)* temos que: $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(\varphi)$ uniformemente em $[0,1]$. De (**) temos que,

$$x_{n_k}(t) - x_{n_k}(0) = \int_0^t f(x_{n_k}(s))ds$$

Fazendo $n_k \longrightarrow \infty$ nesta igualdade temos:

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \int_0^t f(\varphi(s))ds$$

Finalmente, pelo Teorema de Fundamental do Cálculo, temos $\varphi' = f(\varphi)$