nome: Dioao Takamori Barbosa

RA: 037382

Lista limite de funções + continuidade

1- Uma função monotona limitado tem limites laterais em todos os pontos de seu domínio

$B \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x) \subset B$

$b \in X'$, existe sequencias (x_n) em X tal que $x_n \to b$ com $x_n < b$ para todo n.

$L = \lim_{x \to b^-} f(x)$

Supondo, por absurdo, que L não seja o supremo dos valores de $f(x)$ para $x < b$,

$\exists\ \varepsilon > 0$ tal que todo $\delta > 0$ $\exists\ x'$ tal que $b - \delta < x' < b$ e $f(x') > L + \varepsilon$.

Como f é monotona, para qualque x'' tal que $b - \delta < x'' < b$ teremos $f(x'') > L + \varepsilon$.

$\exists\ (x_{n_k})$ tal que $f(x_{n_k}) > L + \varepsilon$ para todo k

para $x_{n_k} \to b$, $f(x_{n_k})$ deve convergir para L, o que é uma contradição

Assim, o limite lateral à esquerda de $f(x)$ existe para todo $b \in X'$

---

2. para $f(x)$

x irracional $f(x) = 0$
x racional, $f(x) = x$.

$\delta = \varepsilon$, Assim, se $|x-0| < \delta$ então $|f(x) - 0| < \varepsilon$

portanto $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

para $g(x)$ $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(x) = 0 & p/\ x \neq 0 \end{cases}$

$\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$, se $|x-0| < \delta$, $|g(x) - 0| = |g(x)| = 0$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

para $g(f(x))$

- $g(f(x)) = g(0) = 1$ se $f(x) = 0$, se x irracional
- $g(f(x)) = g(x) = 0$ se $f(x) = x$, se x racional

$g(f(x))$ alterna entre 0 e 1 não convergindo para um valor específico

Assim, $\nexists \lim_{x \to 0} g(f(x))$

3. Considerando a sequência

$x_n = \frac{1}{\pi n}$, temos $x_n \to 0$ quando $n \to \infty$

$f(x_n) = sen\left(\frac{1}{x_n}\right) = sen(\pi n)$

quando n par, $sen(\pi n) = 0$

n impar, $sen(\pi n) = 0$

Portanto para qualquer C no intervalo $[-1, 1]$

x_n, tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ e $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$

---

4. quando n é par $a_n > 0$

$x^n \to +\infty$ $p(x) \to +\infty$

quando n é impar $a_n < 0$

$x \to -\infty$, $x^n \to -\infty$, mas a contribuicão dos termos de maio grau dominante continua sendo negativa devido $a_n < 0$ levando $p(x) \to +\infty$

portanto n é par $\lim_{x \to \infty} p(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} p x = +\infty$

quando n é ímpar e $a_n < 0$

$\lim_{x \to \infty} p(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} p(x) = +\infty$

---

5. Se f e g são continuas em a

$f(a) - g(a) = h(a)$

supondo que $f(a) \neq g(a)$

$h(x) = f(x) - g(x)$ $\quad h(x) < 0$

$h(y) = f(y) - g(y)$ $\quad h(y) > 0$

pelo teorema do valor intermediário

em algum ponto $h(c) = 0$

o que contradiz $f(a) \neq g(a)$

Portanto $f(a) = g(a)$

---

6. $x \in [0, 1/3]$ $\quad g(x) = f(x) - f(x + 1/3)$

$g(0) = f(0) - f(1/3)$ e $g(1/3) = f(1/3) - f(2/3)$

$f(0) = f(1) \Rightarrow g(0) = g(1/3) = 0$

pelo teorema do valor intermediário

$g(x)$ é continua em $[0, 1/3]$

tal que $g(x) = 0$ ouseja $f(x) - f(x+1/3)$
$= 0$ portanto, $f(x) = f(x+1/3)$

---

7 → Se $f(x)$ ∃
$f(x) - [a, b]$, $f(x)$ não é constante
pelo teorema do valor intermediário
∃ c entre a e b
Portanto, $f(x)$ foi assumido 3 vezes
Contradiz $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente
duas vezes

---

8 - $x_n = \sqrt{(n+\frac{1}{2})\pi}$ e $y_n = \sqrt{n\pi}$

$|x_n - y_n| = \sqrt{(n+\frac{1}{2})\pi} - \sqrt{n\pi} = 0$

$|f(y_n) - f(x_n)| = $ sen

9. Tomando $f: X \to \mathbb{R}$ dado por

$f(x) = x$ f é uma função identidade, é contínua em todo X. Porem, não é compacto, pois é infinito e ilimitado. Portanto $f: X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, mas X não é necessariamente compacto.

---

10. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função contínua, periódica e limitada.

Limitada: $f \to$ limitada $\exists\ [a, b]$ tal que $f(x) \subset [a, b]$ para todo x em $\mathbb{R}$

$a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Periódica: $\exists\ p > 0$ tal que $f(x+p) = f(x)$

i. f é periódica ~~cmp~~ com máximo e mínimos em a e b

11. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ $\lim_{x \to a} g(x) = M$

$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

pela definição: para todo $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta_1 > 0$ $\delta_2 > 0$

$0 < |x - a| < \delta_1$, $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$0 < |x - a| < \delta$, $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|(f(x) + g(x) - (L + M)| \Rightarrow |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Portanto $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

Propriedade do Produto dos limites.

pelo Teorema 8 do Capítulo 3 - operações de Limite

$f(x) \cdot g(x) - L \cdot M = f(x)(g(x) - M) + (f(x) - L) \cdot M$

$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x) - L \cdot M) = \lim_{x \to a} (f(x)(g(x) - M) + \lim_{x \to a} (f(x) - L) \cdot M$

$= \lim (f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$