Nome: Diogo Takamori Barbosa

RA: 037382

Lista 2 - Topologia da reta

Exercício 2. - Mostre que o fecho de qualquer conjunto fechado, isto é, $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$.

O fecho de um conjunto X, denotado por $\bar{X}$, é definido como a união de X e todos os seus pontos de acumulação.

Demonstrando: se a ∈ X, Como X é um subconjunto de seu fecho $\bar{X}$, temos que a também pertence a $\bar{X}$.

Se b ∉ X: Como b é um ponto de acumulação de $\bar{X}$, toda vizinhança de b deve conter algum ponto de $\bar{X}$ diferente de b. Isso implica que b é um ponto de acumulação de X, pois X e parte de $\bar{X}$].

Portanto, X também pertence a $\bar{X}$.

Exercício 4 - Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$. Prove que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$

Se $\overline{X} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $Y \subset \overline{X} \cup \overline{Y} \Rightarrow \overline{X} \cup \overline{Y} \subset \overline{X \cup Y}$

Se $\overline{X} \cap \overline{Y} \subset X$ e $\overline{X} \cap \overline{Y} \subset B$, logo $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X}$ e $\overline{X \cap Y} \subset Y$ portanto $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$.

Exercício 6 - Prove que se a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ então todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos X.

Usando x_n em $X - \{a\}$ para $\varepsilon > 0$, existe um N tal que para to $n > N$, temos $|x_n - a| < \varepsilon$

Todo intervalo $(a - \delta; a + \delta)$ com centro em a, existe um infinidade x_n de X que pertence a esse intervalo.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n > N \Rightarrow \forall \delta > 0, \exists x_n \in X, x_n \neq a$ tal que $x_n \in (a - \delta, a + \delta)$

Exercício 8: Sejam $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Então $a = \inf(X)$ é um ponto aderente a X e $b = \sup(Y)$ é um ponto aderente a Y.

Dado $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente e $Y \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, e que $a = \inf(X)$ é o ínfimo de X e $b = \sup(Y)$ é o supremo de Y, sendo o ponto a um aderente a X e b um ponto aderente a Y.

Um ponto x é um ponto aderente a um conjunto A se toda vizinhança de x contém algum ponto de A.

Portanto, mostra-se que para todo $\varepsilon > 0$:

- Para $a = \inf(X)$
  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X$ tal que $|x - a| < \varepsilon$
- Para $b = \sup(Y)$
  $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in Y$ tal que $|y - b| < \varepsilon$

garantindo que a é um ponto aderente de X e b é um ponto aderente a Y

Exercício 9) - Prove que uma reunião finita e uma interseção arbitraria.

União finita de conjunto compactos (teorema 10)

Sejam $K_1, K_2, \dots, K_n$ conjuntos compactos.

Provase que $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ é compacto. pois, K_i é compacto, existe uma subcobertura finita $\{U_{\alpha 1}, U_{\alpha 2}, \dots U_{\alpha n}\}$ que cobre $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$.

Interseção Arbitraria de Conjuntos Compactos.

Seja $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ coleção de conjuntos compactos

$\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ é compacto

Para cada $\alpha \in A$, como K_α é compacto, existe uma subcoberture finita $\{U_{\alpha 1}, U_{\alpha 2}, \dots U_{\alpha n}\}$ que cobre K_α. Portanto, a união de todas as cobertura finitas cobre $\bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$.

Prova-se que tanto a união finita quanto a interseção arbitraria de conjuntos compactos são conjunto compactos.