Nome: Dioao Takamori Barbosa ①

RA: 037382

Lista 1 - 09/04/24

Exercício 1- Prove a lei do Corte. Se $m \cdot p = n \cdot p$, então $m = n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$

Suponha que $m \neq n$. para $m, n \in \mathbb{N}$.

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot p = n \cdot p$

Temos

$m \cdot p - n \cdot p = 0 \Rightarrow (m-n) \cdot p = 0$

Supondo $m > n$, temos $m - n > 0$, sabemos que p é um número natural e portanto $p \neq 0$. Então, o produto $(m-n) \cdot p$ é o produto de dois naturais não nulos. que resulta em zero.

Concluimos que $(m-n) = 0$. Isso só é possível se $m - n = 0$, o que implica que $m = n$

Portanto, se $m \cdot p = n \cdot p$ p/ $p \in \mathbb{N}$, então $m = n$

Isso prova a lei do corte

② Exercício 2 - Desigualdade de Bernoulli

por indução matemática temos:

para $x \geq 0$: p/ $n = 1$ temos $(1+x)^1 = 1+x$, verdadeiro

p/ $n = k+1$ temos:

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x)$$

$$(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx) \cdot (1+x)$$

$$1+(k+1)x + kx^2 \geq 1+(k+1)x \quad \Rightarrow kx^2 > 0$$

portanto, $x \geq 0$

E para $-1 \leq x \leq 0$:

Se $-1 \leq x \leq 0$; então $0 \leq 1+x < 1$.

Aplicando a desigualdade de Bernoulli pa $1+x$,

$$(1+(1+x))^n \geq 1+n(1+x)$$

$$(2+x)^n \geq 1+n(1+x)$$

Portanto, podemos afirmar que:

$$(2+x)^n \geq (1+x)^n \geq 1+n(1+x)$$

Então a desigualdade de Bernoulli continua válida p/ $-1 \leq x \leq 0$

Exercício 6 - Prove que $||x|-|y|| \leq |x-y|$

Para demonstrar a desigualdade denota-se $a = |x|$ e $b = |y|$, onde $a, b \geq 0$.

A desigualdade triangular diz que quaisquer números reais u, v, temos $|u+v| \leq |u|+|v|$

Portanto, podese escrever

$$||x|-|y|| = |a-b| \leq |a+(-b)| = |x+(-y)| = |x-y|$$

para quaisquer x, y reais, temos

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

Exercício 8 - Prove que se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b \neq 0$ então $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Usando as propriedade do limite em sequencia

Para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe um N_1 tal que para todo $n > N_1$, $|x_n - a| < \varepsilon_1$. Como os índices da subsequencia formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{i0} > n_0$. Daí, para $i > i_0$ $n_i > n_{i0} > n_0 \Rightarrow |x_{n_i} - a| < \varepsilon$. Portanto $\lim x_{n_i} = a$

Pelo limite do inverso temos:

$\lim y_n = b \neq 0$ então $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$

Demonstrando: Considerando o $\lim \left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right) =$

$\lim (b - y_n) \cdot \frac{1}{y_n b}$, no numerador temos um limite que é zero e no produto uma sequencia limitada, então limite é zero. logo,

$\lim \left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right) = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$

por corolario o limite do quociente é dado por $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, pois $\lim x_n \cdot \lim \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ //

Exercício 9 - Assuma que (x_n) seja uma sequência monotona descrescente e limitada. Prove que (x_n) é convergente

dado $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ temos $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)$

Uma sequencia é limitada inferiormente quando existe um numero real a tal que $a < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é decrescente quando $x_1 \geq x_2 \geq \dots$, isto é, quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $x_n > x_{n+1}$ a sequencia é

Sequencias crescentes e decrescentes são monotonas.

Como a sequencia é limitada, existe um número real L tal que a sequencia está limitada inferiormente por L, isto é, $x_n \geqslant L$ para todo n.

Portanto, a sequencia "se estabilizará" perto do limite inferior L.

Podemos definir N como o menor número natural tal que $x_N - L < \varepsilon$. Como a sequencia é monotona decrescente, todos os termos subsequentes x_n para $n > N$ serão ainda mais próximos de L, ou seja,

$|x_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > N$

Portanto concluímos que a sequência (x_n) é convergente, e seu limite é L.

Exercício 10 - Mostre que a serie $\sum \frac{1}{n\log n}$ diverge mas a serie $\sum \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge quando $r > 1$.

A serie harmonica é conhecida por divergir sendo $\sum \frac{1}{n\log n} > \sum \frac{1}{n}$. Então pelo Criterio da Comparação $\frac{1}{n\log n} > \frac{1}{n}$ portanto $\sum \frac{1}{n\log n}$ também diverge

Agora para $\sum \frac{1}{n(\log n)^r}$ vamos demonstrar que converge p/ $r > 1$.

fazendo o teste de integral.

Considerando $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^r}$. Para $x \geq 2$, $f(x)$ é continua, positiva e decrescente p/ $r > 1$

fazendo a integral $f(x)$ de 2 a $+\infty$

temos $\int_{\log 2}^{\infty} \frac{1}{u^r}\, du = \frac{1}{1-r} u^{1-r} \Big|_{\log 2}^{\infty}$

quando $r > 1$, a parte "u^{1-r}" vai para zero e "u" vai para infinito, então a integral

Converge. Portanto, pela condição do teste da integral, a serie $\sum \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge quando $r > 1$

Exercício 12 - Decida se as series convergem ou divergem.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} \Rightarrow a_k = \frac{5^k}{k!}$

$L = \lim_{k \to \infty} \frac{5^k}{k!} = \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} \Big/ \frac{5^k}{k!} = \frac{5^{k+1} \cdot k!}{5^k (k+1)!}$

$L = \lim_{k \to \infty} \frac{5}{k+1} = 0$

Logo, $L = 0$, Portanto $L < 1$, convergente

b) $L = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{k+4}{3k+1}\right)^k = \left(\frac{4 \cdot 1/k + 1}{\cdot 1/k + 3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k$

$= \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$, Portanto $L < 1$, convergente

c) $\sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{3K}{7K+21}\right)$ = Vamos calcular o limite

$L = \lim_{K\to\infty} \left(\frac{3K}{7K+21}\right) = \lim_{K\to\infty} \left(\frac{3}{7+\frac{21}{n}}\right) \quad n \to \infty \ \frac{21}{n} = 0$

$L = \frac{3}{7}$

$0 < \frac{3n}{7n+21} < \frac{3n}{7n} = \frac{3}{7}$

Portanto, por comparação a serie é estritamente menor do que a série harmônica, logo podemos concluir que a serie é divergente

Assim, o limite é $3/7$ e a serie é divergente

d) $\sum_{K=0}^{\infty} \frac{K-1}{2K^3+K^2}$

$L = \lim_{K\to\infty} \frac{K-1}{2K^3+K^2} = \frac{\frac{1}{K^2}-\frac{1}{K^3}}{2+\frac{1}{K}} = \frac{\lim_{K\to\infty}\left(\frac{1}{K^2}-\frac{1}{K^3}\right)}{\lim_{K\to\infty}\left(2+\frac{1}{K}\right)}$

$= \lim_{K\to\infty} \left(\frac{1}{K^2}-\frac{1}{K^3} = 0\right) \quad \lim_{K\to\infty} 2+\frac{1}{K} = 2$

$L = \frac{0}{2} = 0$

Portanto $L < 1$, Convergente

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \Rightarrow e$$

Nessa serie podemos notar que $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ é estritamente crescente com k. portanto podemos dizer que a serie é maior do que uma serie geométrica. Assim, podemos concluir que a serie é divergente.