nome: Diogo Takamori Barbosa (1)
RA 037382

Lista Derivadas

(2) - $f \to \mathbb{R}$ $a \in \text{int}(X)$

Seja $f: X \to \mathbb{R}$ é uma função derivável em a

Por definição, a derivada de f em a é

dado por $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Dada a expressão

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \Rightarrow$

$\frac{(f(a+h) - f(a)) + (fa - f(a-h))}{2h}$ => Separando em 2 limites

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} + \lim_{h \to 0} \frac{fa - f(a-h)}{2h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{fa - f(a-h)}{2h} \Rightarrow \lim_{k \to 0} \frac{f(a) - f(a+k)}{-k} =$

$\lim_{k \to 0} - \frac{f(a+k) - f(a)}{k} = -f'(a)$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h)-f(a))}{2h} + \lim_{h\to 0} \frac{(f(a)-f(a-h))}{2h} =$$

$$= \frac{f'(a)}{2} + \frac{f'(a)}{2} = f'(a)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

função não derivável que satisfaça o limite

$f(x) = |x|$ $f(x)$ é continua em $x=0$

Calculando o limite para $f(x)=|x|$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|-|-h|}{2h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{h-h}{2h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{0}{2h} = 0$$

Para funções continuas, mesmo que não sejam deriváveis, o limite pode coincidir com a derivada

4 - Função Par: $f: I \to \mathbb{R}$ é par se $f(-x) = f(x)$ p/ todo $x \in I$

Função Impar $f: I \to \mathbb{R}$ é impar se $f(-x) = -f(x)$, p/ todo $x \in I$

Funções Pares:

↳ suas derivadas de ordem par são funções pares

↳ suas derivadas de ordem impar são funções impares e se anulam no ponto $\emptyset$

Resultado análogo para função Impar

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função Impar, onde I é o intervalo com centro $\emptyset$.

↳ as derivadas de ordem impar de f são funções pares

↳ as derivadas de ordem par de f são funções impares e se anulam no ponto 0

Demonstração: 1 - Derivada de ordem par

Seja $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Primeira derivada

$f' \Rightarrow f'(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} =$

$= f'(x)$, portanto f' é uma função par

Indução $(2k-1)$ - enésima derivada $f^{(2k-1)}$

$f^{(2k-1)}(-x) = \frac{d f^{2k}}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}[-f^{(2k)}(x)] = -f^{(2k-1)}(x)$

Logo é uma função par

Derivada de Ordem Ímpar

2ª derivada f''

$$f''(-x) = \frac{d}{dx} f'(-x) = \frac{d}{dx} f'(x) = f''(x)$$

f'' é uma função ímpar

Indução

$2k$ - enesima derivada

$$f^{2k}(-x) = -f^{2k}(x).$$

$$f^{(2k-2)}(-x) = \frac{d}{dx} f^{(2k+1)}(-x) = -f^{(2k+2)}(x)$$

Logo, $f^{(2k+2)}$ é uma função ímpar.

no ponto $x=0$,

$$f^{(2k)}(0) = -f^{(2k)}(0) \Rightarrow f^{2k}(0) = 0$$

6-

Uma função $f: I \to \mathbb{R}$ é constante se $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in I$

Seja $x_0 \in I$ um ponto fixo. $f(y) = f(x_0)$ para todo $y \in I$.

$y_n = x_0 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ para $y_n \in I$

Pela condição dada

$|f(y_n) - f(x_0)| \leq C \cdot |y_n - x_0|^\alpha = C \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$

Como $\alpha > 1$, a sequencia $\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \to 0$ rápido

$\lim_{n \to \infty} C \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha = 0$

$\lim_{n \to \infty} |f(y_n) - f(x_0)| = 0$

$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0)$

p/ $y_n \to y \Rightarrow f(y) = f(x_0)$

Logo f é constante, a diferença entre os valores da função diminui mais rapidamente do que a diferença entre os pontos, o que força a função a ser invariável

8 - Provar $f''(a) > g''(a)$

$f, g : I \to \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathrm{int}(I)$

$f(a) = g(a)$

$f'(a) = g'(a)$

$f''(x) \geq g''(x)$ para todo $x \in I$

usando teorema de taylor

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + Rf(x)$

$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \dfrac{g''(a)}{2}(x-a)^2 + Rg(x)$

$Rf(x)$ e $Rg(x)$ são restos de ordem superior

$f(a) = g(a)$ e $f'a = g'a$

$f(x) - g(x) = \dfrac{f''(a) - g''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + o((x-a)^2)$

Dada condição $f(x) \geq g(x)$

$$\underbrace{\frac{f''(a) - g''(a)}{2}(x-a)^2}_{\text{Termo Dominante}} + o((x-a)^2) \geq 0$$

$f(x) \geq g(x)$ p/ $x \neq a$

$\frac{f''(a) - g''(a)}{2} > 0 \Rightarrow f''(a) - g''(a) > 0$

---

10 - - ,

Teorema Rolle

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a,b]$, diferenciável (a,b) e $g(a) = g(b)$ então $\exists$ $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Repetindo o processo n vezes, aplicando o teorema do Rolle, reduz o nº de raízes em cada etapa até ter uma única aplicação do teorema do Rolle $(n-1)$

derivada $f^{(n-1)}$ ~~de~~ obtém pelo menos um ponto c em (a,b) onde $f^{(n)}(c) = 0$