不定积分

#数学

第一类换元公式

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du$$

常用积分公式

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = -\int \frac{1}{sin^2 x}d\cos x = -\int \frac{1}{1-\cos^2 x}d\cos x$$
$$= \int \frac{1}{2}(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{1+\cos x})d\cos x = \frac{1}{2}\ln|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}| + C$$
$$= \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$$
$$\text{或者} \int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\frac{1}{cos^2\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}d\tan\frac{x}{2}$$
$$= \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})| + C, \text{证明将上式}x\text{替换为}x+\frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int \frac{-1}{2a}(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}| + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})dx = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a-x}{a+x}| + C$$

真分数分解是一个可以用于化简计算的方法

分部积分公式

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

第二类换元公式

- 三角换元（万能变换）
- 高次换倒数
- 真分数分解（与第二条一起使用更佳）

常用积分公式

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int |a\cos t| d(a\sin t) = \int a^2\cos^2 t dt$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, (x = a\sin t), t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \cos t d\tan t = \int \frac{1}{\cos t}dt$$

$$= \int \frac{1}{1-\tan^2\frac{t}{2}} d\tan\frac{t}{2}, (\text{这一步可能比较难想，其他思路也可以})$$

$$= \frac{-1}{2}\int (\frac{1}{\tan\frac{t}{2}-1} - \frac{1}{\tan\frac{t}{2}+1}) d\tan\frac{t}{2}$$

$$= \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C, (x = a\tan t)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C(x = a\sin t)(t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$$

$$\text{证明参考上式}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}|$$

$$\text{换元方式与上面相同}$$

有理函数的不定积分

化简为真分式求解

三角函数有理式的不定积分

万能代换

$$t=\tan\frac{x}{2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$