数项级数

定义

设$\{a_n\}$是任意的一个实数列，形如$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$的无穷和为无穷数值级数

$$简称数项级数，记为\sum_{n=1}^{\infty}a_n,若极限存在则称级数\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

级数的收敛性

柯西收敛准则

关于极限的问题都可以使用柯西收敛准则

正项级数

定义

在数项级数的基础上添加$a_n>0$的条件

比较判别法

$$设存在N\in N^*,使得n>N时,0\le a_n\le b_n,若级数\sum_{n=1}^{\infty}b_n收敛，则\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

$$若级数\sum_{n=1}^{\infty}a_n发散，则\sum_{n=1}^{\infty}b_n发散$$

$$可通过\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}来判断他们的关系$$

柯西积分判别法

$$设x\ge 1时,f(x)\ge 0,且单调递减，$$

$$则级数\sum_{n=1}^{\infty}f(n)与无穷积分\int_1^{+\infty}f(x)dx有相同的敛散性$$

柯西判别法

$$设\sum_{n=1}^{\infty}a_n为正项级数，则$$

$$若存在0<q<1,N\in N^*,使得当n>N时，有\sqrt[n]{a_n}\le q<1，$$

$$则\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

$$若有无穷多个n,使得\sqrt[n]{a_n}\geq 1,则\sum_{n=1}^{\infty}a_n发散$$

引理

$$设a_n>0.b_n>0,n=1,2,\ldots且存在n_0>0,当n\geq n_0时,$$

$$有\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$若\sum_{n=1}^{\infty}b_n收敛,则\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

$$若\sum_{n=1}^{\infty}a_n发散,则\sum_{n=1}^{\infty}b_n发散$$

达朗贝尔判别法

$$设a_n>0,n=1,2,\ldots,则$$

$$若\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1,则\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

$$若\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q'>1,则\sum_{n=1}^{\infty}a_n发散$$

拉贝判别法

$$设\sum_{n=1}^{\infty}a_n为正项级数,$$

$$若存在r>1,N_0\in N^*,使得当n>N_0时,有n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\geq r>1,$$

$$则\sum_{n=1}^{\infty}a_n收敛$$

$$若存在N_0\in N^*,使得当n>N_0时,有n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\leq 1,$$

$$则\sum_{n=1}^{\infty}a_n发散$$

交错级数

莱布尼茨判别法

$$\text{若交错级数}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\text{满足}\{a_n\}\text{递减趋于}0\text{，}$$

$$\text{则}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\text{收敛}$$

阿贝尔变换

$$\text{设}\{a_n\},\{b_n\}\text{是两个实数列，记}S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k,S_0=0$$

$$\text{则对任意正整数}n\text{有}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})+S_nb_n$$

阿贝尔引理

$$\text{设}\{b_n\}\text{为单调数列，}S_k=\sum_{l=1}^{k}a_l,\text{若}|S_k|\le M,k=1,2,\ldots,n,$$

$$\text{则}|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k|\le M(|b_1|+2|b_n|)$$

狄利克雷判别法

$$\text{设}\{a_n\},\{b_n\}\text{是两个数列，}S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\text{满足}$$
$$\{b_n\}\text{是单调数列且}\lim_{n\to\infty}b_n=0,S_n\text{有界}$$

$$\text{则级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\text{收敛}$$

阿贝尔判别法

$$\text{设}\{a_n\},\{b_n\}\text{是两个实数列，满足}\{b_n\}\text{单调有界，}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛，}$$

$$\text{则级数}\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\text{收敛}$$

绝对收敛和条件收敛

更序定理

$$设级数\sum_{n=1}^{\infty}a_n绝对收敛，则无穷次交换\sum_{n=1}^{\infty}a_n的顺序$$

$$得到的\sum_{n-1}^{\infty}b_n绝对收敛且和不变$$

黎曼更序定理

$$设\sum_{n=1}^{\infty}a_n条件收敛，但不绝对收敛$$

$$则适当交换各项的次序得到的新级数\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$$可以收敛到任意的指定实数c，也可以发散到+\infty,-\infty$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}发散，证明如下：$$

证: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

$y=\frac{1}{x}$ 是一个单调递减的函数，由积分中值定理可知:

$\int_1^2\frac{1}{x}dx<\frac{1}{1}$ $\int_2^3\frac{1}{x}dx<\frac{1}{2}$ $\int_3^4\frac{1}{x}dx<\frac{1}{3}\cdots\cdots$

所以有: $\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}+\int_3^4\frac{1}{x}dx\cdots<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots$

即: $\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(1+n)$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散
