刚体力学基础 刚体的平动

特点

- 刚体中任意两条连线(在运动过程中)始终保持平行
- 刚体平动中个点的运动轨迹相同

刚体的绕轴转动

刚体各点绕一固定轴做圆周运动,各点具有相同的角速度和角加速度

任意与转轴垂直的平面为转动平面

刚体绕轴转动的转动方程:

$$\theta = \theta(t)$$

角速度为:

$$\omega = rac{d heta}{dt}$$

角加速度为;

$$eta = rac{dw}{dt} rac{d^2 heta}{dt^2}$$

加速度:

$$a_t = rac{dv}{dt} = r eta$$

$$a_n=rac{v^2}{r}=r^2\omega$$

大小和方向为:

$$ert ec{a} ert = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = r\sqrt{eta^2 + \omega^4}$$
 $an arphi = rac{a_t}{a_n} = rac{eta}{\omega^2} (arphi$ 为加速度方向与径向夹角)

刚体的一般运动

质点自由度

- 由三个独立坐标确认位置就有三个平动自由度
- 如果对质点的运动加以限制,自由度减少

刚体自由度

• 处了三个平动自由度以外,通过三个方位角确定质心轴的空间方位,一共有六个自由度

刚体转动的功和能 力矩的功

力矩:

$$ec{M}=ec{r} imesec{F}$$

可以将力分解为垂直于转动轴和平行于转动轴的力

公式推导:

$$dA=ec{F_{\perp}}dec{r}=F_{\perp}|dec{r}|\cosarphi$$
 $A=\int_{ heta_{1}}^{ heta_{2}}Md heta$

刚体的动能

$$E_k = \sum rac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \sum rac{1}{2} J \omega^2$$

刚体定轴转动的动能定理

$$egin{align} A_i^{
eth} + A_i^{
eth} &= \int_{ heta_1}^{ heta_2} (M_i^{
eth} + M_i^{
eth}) d heta &= rac{1}{2} m_i v_{i_2}^2 - rac{1}{2} m_{i_2} v_{i_1}^2 \ & E_{K2} = rac{1}{2} J w_1^2, E_{K1} = rac{1}{2} J w_2^2 \ \end{split}$$

内力矩对刚体做功之和为O

转动刚体动能定理的积分形式:

$$A = \int_{ heta_1}^{ heta_2} M d heta = rac{1}{2} J w_2^2 - rac{1}{2} J w_1^2$$

刚体转动惯量的计算

转动惯量的计算

$$J=\lim_{\Delta m_i o 0}\sum \Delta m_i r_i^2=\int_m r^2 dm_i$$

实际计算中常用体积微元,面积微元和长度微元。

$$J=\iiint_V
ho r^2 dV, J=\iint_S \sigma r^2 dS, J=\int_L \lambda r^2 dl$$

刚体定轴转动的转动定律

刚体定轴转动定律

$$M = J\beta$$

合外力矩等于转动惯量与角加速度的乘积 (由刚体定轴的动能定理微分可得)

刚体对定轴的角动量定理和角动量守恒定律 角动量

质点的角动量

$$ec{L}=ec{r} imes mec{v}$$

刚体定轴角动量

$$L_i = \Delta m_i r_i v_i \ \sum_i L_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega = J \omega$$

刚体角动量定理和角动量守恒

$$rac{dec{L}}{dt} = rac{d(ec{r} imesec{p})}{dt} = ec{r} imesrac{dec{p}}{dt} + rac{dec{r}}{dt} imesec{p}$$

由于 \vec{r} 和 \vec{p} 方向相同,且 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.化简后得:

$$rac{dec{L}}{dt}=ec{r} imesec{F}$$

角动量定理为:

$$Mdt = d(J\omega)$$

质点角动量守恒

$$ec{L}=ec{r} imes mec{v}=ec{C}$$

有三种情况角动量守恒

- 力的作用点通过原点O
- 质点受到的合外力为0 (对刚体不适用)
- 力沿着质点位矢的方向

刚体定轴转动的角动量守恒定律

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = L_2-L_1 = J\omega_2-J\omega_1$$

 $\int_{t_1}^{t_2} M dt$ 称为冲量矩,表示合外力矩在 t_1 到 t_2 时间内的积累效应如果合外力矩为0,则刚体定轴转动的角动量守恒