广义积分

计算

积分的上下界是正无穷或负无穷，计算方法为积分+极限

敛散性判断方法

比较判断法

$$条件：设f(x),g(x)在[a,,+\infty]上定义的非负函数。对任何b>a$$

$$，f(x),g(x)在[a,b]上可积，且\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$$

- 若$0<l<+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$与 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$有相同的敛散性
- 若$l=0$且 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛
- 若$l=+\infty$且 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$, 则 $\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散

柯西收敛定理

因为无穷积分是否存在问题可以转换为极限是否存在的问题所以可以使用柯西收敛准则。

狄利克雷判定法

$$设f(x)和g(x)满足以下两个条件$$

$$(1)F(A)=\int_a^A f(x)dx在[a,+\infty]上有界$$

$$(2)g(x)在[a,+\infty)单调，且\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

$$则无穷积分\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx收敛$$

阿贝尔判别法

$$设f(x)和g(x)满足以下两个条件$$

$$(1)\int_a^{+\infty}f(x)dx收敛$$

$$(2)g(x)在[a,+\infty)上单调有界$$

$$\text{无穷积分}\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx\text{收敛}$$

瑕积分

有限闭区间无上界函数的处理方法，定义P420

比较判别法

$$\text{设非负函数}f(x),g(x)\text{在}(a,b]\text{上有定义，瑕点为}x=a,\text{且对任意}\xi>0.$$
$$f(x),g(x)\text{在}[a+\xi,b]\text{可积。如果存在}\delta>0\text{，}$$
$$\text{在}(a,a+\delta)\text{上}f(x)\le g(x)$$
$$\text{则若}\int_a^b g(x)dx\text{收敛},\text{则}\int_a^b f(x)dx\text{收敛}$$
$$\text{若}\int_a^b f(x)dx\text{发散},\text{则}\int_a^b g(x)dx\text{发散}$$

$$\text{常用于比较的瑕积分：}\int_a^b \frac{dx}{(a-x)^p}\text{和}\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}\text{当}p<1\text{时收敛，}p\ge 1\text{时发散}$$

柯西收敛准则

因为积分$\int_a^b f(x)dx$对于$x=a$的瑕点，可积的条件是$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$极限存在，所以可以使用柯西收敛准则判断。（其他情况类似）

狄利克雷判别法

$$\text{设}f(x),g(x)\text{定义在}(a,b]\text{上，且有唯一瑕点}x=a\text{满足：}$$
$$\forall 0<\xi<b-a,f(x),g(x)\text{在}[a+\xi,b]\text{上可积}$$
$$\exists M>0,\text{使得对任意的}0<\eta<b-a\text{有}|\int_{a+\eta}^b f(x)dx|<M$$
$$g(x)\text{在}(a,b]\text{上单调},\text{且}\lim_{x\to a+} g(x)=0$$
$$\text{则}\int_a^b f(x)g(x)dx\text{收敛}$$

阿贝尔判别法

$$\text{设}f(x),g(x)\text{定义在}(a,b]\text{上，且有唯一的瑕点}x=a\text{，满足：}$$
$$\forall 0<\xi<b-a,f(x),g(x)\text{在}[a+\xi,b]\text{上可积}$$

$$\int_a^b f(x)dx\text{收敛}$$

$$g(x)\text{在}(a,b]\text{上单调有界}$$

$$\text{则}\int_a^b f(x)g(x)dx\text{收敛}$$