函数序列与函数项数级数

函数项级数的基本概念与性质

项数级数的基本概念与性质

设$u_n(x)$,$n=1,2,...$是定义在实数集I上的函数序列称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \ldots$$

为定义在I上的函数项级数，记为$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$，称$\{S_n(x)\}$为该级数的部分很函数列

函数序列的一致收敛性

（函数序列的逐点收敛）设有函数序列$\{f_n(x)\}$，若对任意$x_0 \in I$，数列$\{f_n(x_0)\}$收敛到$f(x_0)$,则称$\{f_n(x)\}$在I上逐点收敛。

$$\forall x_0 \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon, x_0) \in N^*, \forall n > N : |f_n(x_0) - f(x_0) < \epsilon|$$

（函数序列的一致收敛）设函数序列$\{f_n(x)\}$定义在I上，如果对任意的$\epsilon > 0$，存在仅和ϵ有关的自然数$N(\epsilon)$，当$n > N(\epsilon)$时，对任意的$x \in I$一致有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

（余项定理）函数序列$\{f_n(x)\}$在I上一致收敛于$f(x)$的充要条件是

$$\beta_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 (n \to \infty)$$

（函数序列逐点收敛的柯西准则）函数序列$\{f_n(x)\}$在I上逐点收敛的充要条件是：对任意$x_0 \in I$,$\forall \epsilon > 0$,$\exists N(x_0, \epsilon) \in N^*$,$\forall n > N, \forall p \in N^*$有

$$|f_n(x_0) - f_{n+p}(x_0)| < \epsilon$$

（函数序列一致收敛的柯西准则）函数序列$\{f_n(x)\}$在I上一致收敛的充要条件是：对任给$\epsilon > 0$，存在仅与ϵ有关的自然数$N(\epsilon)$，当$n > N$时，对任意$p \in N^*$和任意的$x \in I$有

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \epsilon$$

函数项数的一致收敛性

（函数项数级数的一致收敛）设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$，若$\{S_n(x)\}$在$I$上收敛于$S(x)$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$

（函数项级数一致收敛的柯西准则）函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间I上一致收敛的充要条件是

$$\forall\epsilon>0,\exists N(\epsilon)\in N^*,\forall n>N,\forall p\in N^*,\forall x\in I:$$

$$|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\epsilon$$

（魏尔斯特拉斯判别法/优级数判别法）若存在正项收敛数列$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,使得当$x\in I$时，有

$$|u(x)|\leq a_n,n=1,2,\ldots$$

则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛

迪利克雷和阿贝尔判别法

（逐点有界）设函数序列{f_n(x)}定义在I上，若对任意x \in I，存在M(x)>0,使得

$$|f_n(x)|\leq M(x),n=1,2,\ldots$$

则称{f_n(x)}在I上逐点有界。

（一致有界）设函数序列$\{f_n(x)\}$定义在I上，若存在实数$M^*>0$，使得

$$\forall n\in N^*,\forall x\in I:|f_n(x)|\leq M^*$$

则称函数序列$\{f_n(x)\}$在I上一致有界

（阿贝尔判别法）如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$满足：

- $\{b_n(x)\}$对于固定的$x\in I$关于n单调，且在I上一致有界
- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$I$上一致收敛
  则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在$I$上一致收敛

（迪利克雷判别法）如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$满足：

- $\{b_n(x)\}$对于固定的$x\in I$关于n单调且在I上一致收敛于0
- $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和函数列$\{S_k(x)\}$在I上一致有界
  则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在$I$上一致收敛

函数项级数和函数的关系

和函数的连续性

(函数序列极限函数的连续性)设$\{f_n(x)\}, n=1,2,...$在I上连续，且$\{f_n(x)\}$在I上一致收敛于函数$f(x)$,则$f(x)$在I上连续，并且

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

（函数项级数的连续性）设$u_n(x), n=1,2,...$在I上连续，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$在$I$上连续，函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上一致收敛于$S(x)$,则$S(x)$在$I$上连续，$\lim_{x\to x_0} S(x)=S(x_0)$,$\forall x_0\in I$即

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right), \forall x\in I$$

推论：设函数序列$\{f_n(x)\}$，$n=1,2,...$在I上连续，且$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$,如果$f(x)$在$I$上不连续，则$\{f_n(x)\}$在$I$上不一致收敛。

推论：设$u_n(x), n=1,2,...$在I上连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上收敛于$S(x)$，如果$S(x)$在$I$上不一致连续，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上不一致收敛于$S(x)$

（内闭一致收敛）
函数序列：设函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$定义在$I$上，若任意$[c,d]\subset I$，$\{f_n(x)\}$在$[c,d]$上一致收敛，则称$\{f_n(x)\}$在$I$上内闭一致收敛。

函数项级数：设$\{u_n(x\}_{n=1}^{\infty}$定义在I上，若任意$[c,d]\subset I$,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[c,d]$上一致收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$I$上内闭一致收敛。

推论：设函数序列$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$I$上连续，且$\{f_n(x)\}$在$I$上内闭一致收敛于$f(x)$,则$f(x)$在$I$上连续，即$\lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))=\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0} f_n(x)), \forall x_0\in I$

推论：设$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$I$上连续，函数项级数$\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\}$在$I$上内闭收敛于$S(x)$,则$S(x)$在$I$上连续，即$\lim_{x\to x_0}(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))=\sum_{n=1}^{\infty}(\lim_{x\to x_0} u_n(x)), \forall x_0\in I$

理解：收敛是对于一个点来说，当n趋于无穷时fn(x)收敛，一致收敛是对于一个区间来说的，在这个区间中fn(x)均收敛到一个值，并且收敛出来的函数是连续的

和函数的可积性

（函数序列极限函数的可积性）设函数序列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上连续，并且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上可积，并且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}(\int_a^b f_n(x)dx)$$

（函数项级数逐项积分定理）设$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$在$[a,b]$上连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$，则$S(x)$在$[a,b]$上可积，并且$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx$$

由$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx \neq \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx$可推出不一致连续

和函数可微性

（函数序列极限函数的可微分性）设函数序列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上满足：

- $f_n(x), n \in N^*$ 在$[a,b]$上有连续导函数；
- $\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$上收敛于$g(x)$;
- 至少存在一点$x_0 \in [a,b]$使得$\{f_n(x_0)\}$收敛

（函数项级数逐项求导定理

）若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上满足：

- $u_n(x)(n \in N^*)$在$[a,b]$上有连续的导函数
- $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛
- $\exists x_0 \in [a,b]$，使得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛
  则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且

$$(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \forall x \in [a,b]$$

幂级数

定义：形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$的函数项级数

幂级数的收敛域

设$R = \sup\{x| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n 收敛\}$，则$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R,R)$上收敛，在$(-\infty,-R),(R,\infty)$上发散

在以上推论中，R称为收敛半径，(-R,R)称为收敛区间，如果进一步考虑端点-R,R的收敛性，则称为收敛域

（阿贝尔定理）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$在$x=x_0(x_0\neq 0)$处收敛，当$|x|<|x_0|$时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛
若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_1\neq 0$处发散，则当$|x|>|x_1|$时,$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散

（柯西·阿达马定理）对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}}$

- 当$R=0$时，级数仅在$x=0$处收敛8
- 当$R=+\infty$时，级数在整个数轴上都绝对收敛
- 当$0<R<+\infty$时，级数在$(-R,R)$上收敛，在$[-R,R]$以外区域发散

当$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$有与上面相同的结论

幂函数和函数的性质

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$，则对
任意$0<r<R,\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[-r,r]$上一致收敛，则该级数在$(-R,R)$上一致收敛。

（逐项可导定理）设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛半径为$R$，和函数为$S(x)$则

- $S(x)$在$(-R,R)$内连续
- $S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}$

由于$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=R$,所以求导前后函数具有相同的收敛域

（逐项积分定理）设级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R\neq 0$,则

$$\forall x\in(-R,R),\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

（阿贝尔连续性定理）设\sum_{n=0}^\infty a_nx^n的收敛半径为R，其和函数为S(x),则

- 若该级数在x=R上收敛，则和函数S(x)在x=R左连续
- 若该级数在x=-R上收敛，则和函数S(x)在x=-R右连续

常用等比数列求和公式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n,|x|<1$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n,|x|<1$$

推论：$\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n},|x|<1$

若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,x\in(x_0-R,x_0+R)$，称$f(x)$可展开为幂级数。

泰勒级数

若$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,x\in(x_0-R,x_0+R)$,则

- 称$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$为$f(x)$在$(x_0-R,x_0+R)$的泰勒级数
- 当$x_0=0$时，称$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx_n$为f(x)的麦克劳林级数

设$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)内有任意阶导数，函数序列$\{f^{(n)}(x)\}$一致有界，则$f(x)$在(x_0-R,x_0+R)内能展开成泰勒级数

泰勒级数记忆

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arcsin x=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!}$$

$$\frac{1}{x+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^{2k},|x|<1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^k,|x|<1$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k,|x|\le 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k$$