导数的计算与应用

导数的性质

- 可导必连续，连续不一定可导
- 几何意义为曲线的切线

常见求导公式

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{1-\sin^2 y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = \frac{1}{1-\cos^2 y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\text{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- **以上证明通过$\frac{dx}{dy}$为媒介**

高阶导数公式

- $(a^x)^{(n)} = a^x \times \ln^n a (a > 0)$
- $(e^x)^{(n)} = e^x$
- $(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin(\alpha x + \frac{\pi n}{2})$
- $(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos(\alpha x + \frac{\pi n}{2})$
- $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$
- $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$

莱布尼茨公式

$$\text{设}f, g\text{在}I\text{上有}n\text{阶导数，则}(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{n-k} g^k$$

隐函数

定义:

$$\text{若方程}f(x, y) = 0\text{，对任意}x \in I\text{，总存在唯一的}y \in J\text{，}$$
$$\text{满足此方程，则称}F(x, y) = 0\text{在}I\text{上确定了一个隐函数}$$

计算：与复合函数求导方式相同

驻点

定义：满足$f'(x)=0$的点为f(x)的驻点

罗尔定理

$$\text{若函数} f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续，}(a,b)\text{内不可导，且} f(a)=f(b)$$

$$\text{则至少存在一点}\xi\in(a,b),\text{使得} f'(\xi)=0$$

三个条件：闭区间上连续（一致连续），开区间内可导，区间端点函数值相等

达布定理(导函数的介值定理)

$$\text{若函数} f\text{在}(a,b)\text{上可导，} f'(a+0)\neq f'(b-0), k\text{是} f'(a+0),$$

$$f'(b-0)\text{之间的任意实数则至少存在一点}\xi\in(a,b),\text{使得} f'(\xi)=k$$

拉格朗日

中值定理

$$\text{设} f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续，}(a,b)\text{上可导，则至少存在一个}\xi\text{满足}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\text{或} f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)[\text{有限增量公式}]$$

柯西中值定理

$$\text{设} f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续，在}(a,b)\text{上可导,且} g'(x)\neq 0$$

$$\text{至少存在一点}\xi\in(a,b),\text{使得}\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

等价形式

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{a+\theta(b-a)}{a+\theta(b-a)}$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{a+h}{a+h}$$

凹凸函数

- 设函数$f(x)$在区间I上有定义，若对任意的$x_1,x_2\in I,x_1\neq x_2$，任意$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_1+\lambda_2=1$
  - 凸函数：$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$
  - 凹函数：$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\geq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$

詹森不等式

$$\text{函数}f\text{定义在}I\text{上，任取}\{x_i\}_{i=1}^{n}\in I\text{和任取一组正实数}\{\lambda_i\}_{i=1}^{n},$$

$$\text{满足}\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$$

$$\text{若函数}f\text{在}I\text{上为凸函数，}f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$$

$$\text{若函数}f\text{在}I\text{上为严格凸函数，}f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i)<\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$$

洛必达法则

定义

$$\text{对于}\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},1^{\infty}\text{型的极限可以使用洛必达法则(前提是可导)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

应用

- $0\cdot\infty$
  - 化为$\frac{1}{\infty}\cdot\infty$或$0\cdot\frac{1}{0}$
- $\infty-\infty$
  - 化为$\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$或$\frac{0-0}{0\cdot 0}$
- $0^0,1^{\infty},\infty^0$
  - 通过 $\ln$ 化成$\frac{f(x)}{g(x)}$的形式