数列极限

定理

数列极限

极限存在：

$\forall \xi > 0, \exists N(\xi) \in N^+, \forall n > N : |a_n - a| < \xi$

极限不存在：

$\exists \xi > 0, \forall N(\xi) \exists n_0 \in N^+ : |a_{n_0} - a| > \xi$

夹逼定理

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \exists N \in N^+, \forall n > N \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n$$

$$\text{则} \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} c_n$$

单调有界原理

$$\text{若} \exists N \in N^+, \forall n > N, \text{有} \{a_n\} \text{单调且有界，则} \{a_n\} \text{收敛}$$

闭区间套定理

$$\text{设} I_n = [a_n, b_n], n = 1, 2, 3 \ldots \text{为一系列闭区间，}$$

$$\text{满足} I_1 \supset I_2 \supset I_3 \cdots \supset I_n, \text{且} \lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

$$\text{则存在唯一的点} \xi, \text{满足} \xi \in \cap_{i=1}^{n} I_i, \text{且} \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \xi$$

列紧性定理

任何有界的函数都有收敛的子列。

柯西收敛准则

数列极限不存在

$$\exists\xi>0,\forall N\in N^{+},\exists n>N,\exists p\in N^{+}:|a_{n+p}-a_{n}|\geq\xi$$

数列极限存在

$$\forall\xi>0,\exists N\in N^{+},\forall n>N,\forall p\in N^{+}:|a_{n+p}-a_{n}|<\xi$$

确界存在定理

非空有上界的集合一定有上确界（下确界同理）

---

stolz定理

$$\frac{\infty}{\infty}\text{型},\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}(\{b_n\}\text{严格单调递增且趋于正无穷})$$

$$\frac{0}{0}\text{型},\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}(\{b_n\}\text{严格递减且趋于负无穷})$$

有限覆盖定理

$$\text{设}\{I_\lambda\}\text{为有限闭区间的任意一个无限开覆盖，}$$

$$\text{则可从}\{I_\lambda\}\text{中选取有限个开区间覆盖}[a,b]$$

上下极限

设$\{a_n\}$是一个数列，集合E为$\{a_n\}$中所有子列的极限（包含$+\infty$ 和 $-\infty$)构成的集合，则集合E的上下确界为$a^*=supE$,$a_*=infE$.

重要不等式

$$\frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots+\frac{1}{a_n})}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$$(1+x)^n\geq1+nx(\forall x>-1,n\in N^{+})$$

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$$

$$对x \geq 0, y \geq 0, n \in N^+ (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} \leq x + y; |x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}| \leq |x + y|^{\frac{1}{n}}$$

$$对x \geq 0, y \geq 0, n \in N^+ (x + y)^n \geq x^n + y^n; (x + y)^{\frac{1}{n}} \leq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$$

$$(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

公理

杂项

若a_n收敛则极限唯一
收敛的数列必有界
无界数列必是发散数列
若一个数列收敛于a.则它的所有子列收敛于a
若一个数列的两个子列收敛于不同的值或有一个子列不收敛，则该数列不收敛

数列的保序性

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \alpha < a < \beta, 则存在N \in N^+, 使\forall n > N, 有\alpha < a_n < \beta$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \lim_{n \to \infty} b_n = b且a < b, 则存在N \in N^+, 使n > N, 有a_n < b_n$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a, \lim_{n \to \infty} b_n = b若存在N \in N^+, 使n > N时有a_n \leq b_n, 则a \leq b$$

无穷小量

$$若\{|a_n|\}为无穷小量则\{a_n\}为无穷小量$$

$$无限个无穷小量的和仍为无穷小量$$

$$若\{a_n\}为无穷小量，\{c_n\}有界，则\{a_n c_n\}为无穷小量$$

$$\{a_n\}极限为a的充要条件是\{a_n - a\}为无穷小量$$

实数的基本性质

实数对四则运算封闭
阿基米德性： $\forall a, b \in R, b > a > 0, \exists n \in N^+ : na > b$
实数与数轴间建立一一对应的关系

聚点

定义

$$a\text{在任意邻域}\cap(a;\delta)=\{x||x-a|<\delta\}\text{都包含集合}E\text{中}$$

$$\text{无穷多个点称}a\text{为这个集合的聚点}$$

性质

实轴上任意一个无限点集至少有一个聚点

解题心得

- **对给出较少的条件通过定义来增加切入点**
- **一些较为显然但难以表述的证明题可以考虑优先覆盖定理和闭区间套定理**
- **分奇偶的数列可使用数学归纳法+闭区间套定理**
- **低次幂的算式可通过通分和公式升次**

对于判断数列是否收敛

- **取两个子列，不收敛到同一点**
- **取一个子列发散**
- **柯西收敛准则**
- **证明数列的上极限等于下级限（）**

求数列极限

- **stolz定理或洛必达法则**
- **夹逼定理+不等式放缩（需要积累）**
- **对于证明题可以考虑反证法**
- **数学归纳法+单调有界定理**