特征向量与特征值

#数学 #线性代数

特征值定义

定义 设A是n阶方阵，若存在数λ和非零向量ξ，使得

$$A\xi = \lambda\xi$$

则称λ是A的特征值，ξ是A的对应于λ的特征向量.

注记 (1) 给定ξ，则λ唯一

(2) 给定λ，则ξ无数

若ξ是对应于λ的特征向量，则$k\xi\,(k \neq 0)$也是对应于λ的特征向量

若ξ_1, ξ_2是对应于λ的特征向量，则$\xi_1 + \xi_2$也是对应于λ的特征向量

特征空间定义

定义

A的对应于λ的特征空间 $V_\lambda \triangleq$

$\{A$的所有对应于λ的特征向量和0向量$\}$

不变子空间的定义

定义 设T是线性空间V上的线性变换，W是V的子空间，若$\forall \alpha \in W, T(\alpha) \in W$，则称$W$是$T$的不变子空间

推论

设方阵A的互异的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，且

$$\lambda_1 \leftrightarrow \xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1r_1}（线性无关）$$

$$\lambda_2 \leftrightarrow \xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2r_2}（线性无关）$$

$$\cdots$$

$$\lambda_m \leftrightarrow \xi_{m1},\xi_{m2},\cdots,\xi_{mr_m}（线性无关）$$

则$\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1r_1}$，$\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2r_2},\cdots$，$\xi_{m1},\xi_{m2},\cdots,\xi_{mr_m}$线性无关.

特征方程

定义

定义　称$|A-\lambda I|=0$为特征方程，称$|A-\lambda I|$为特征多项式

算法

- λ

  分析　$A\xi=\lambda\xi \Leftrightarrow (A-\lambda I)\xi=0$，$\xi\neq 0$

  $\Leftrightarrow$齐次线性方程组$(A-\lambda I)x=0$有非零解ξ

  $\Leftrightarrow |A-\lambda I|=0$

  回顾　λ是A的特征值$\Leftrightarrow (A-\lambda I)x=0$有非平凡解

  A的对应于λ的特征空间$V_\lambda=\mathrm{Nul}(A-\lambda I)$

  -

- ξ

(1) 令$|A-\lambda I|=0$，计算出所有的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$(互异)

(2)对每个λ_i，

线性无关的特征向量

求$\mathrm{Nul}(A-\lambda_i I)$的一个基：$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$，

也即齐次线性方程组$(A-\lambda_i I)x=0$的基础解系$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$，

则对应于λ_i的全部特征向量为

$$k_{i1}\xi_{i1}+k_{i2}\xi_{i2}+\cdots+k_{ir_i}\xi_{ir_i}\quad(k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{ir_i}\text{不全为零})$$

-

验证

注记 A的特征值λ具有 $\begin{cases}\text{代数重数：特征方程中}\lambda\text{的重根个数}\\ \text{几何重数：特征空间}V_\lambda\text{的维数}\end{cases}$

$$\boxed{\text{对每个特征值，它的几何重数}\le\text{代数重数}}$$

迹

性质1 A与A^T有相同的特征值

性质2 设$A_{n\times n}$的全部特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$\mathrm{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n;$$

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

tr(A)指A的迹，定义为A的主对角线元素之和

注记 A可逆$\Leftrightarrow$所有的$\lambda\neq 0$

性质

- 设A_{nxn}的特征值λ，对应的特征向量ξ，则
  - kA的特征值$k\lambda$，对应的特征向量ξ
  - A^m的特征值λ^m，对应的特征向量ξ
  - $\varphi(A)$的特征值$\varphi(\lambda)$，对应的特征向量ξ
- 设可逆阵A的特征值λ，对应的特征向量ξ

- A^{-1}的特征值λ^{-1}，对应的特征向量ξ

定义 设$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$是$m$次多项式，
则称$\varphi(A)=a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$为$A$的多项式
（矩阵多项式）

矩阵相似

定义 称n阶矩阵A和B相似，若$P^{-1}AP=B$

性质 （1）自反性 A和A相似

（2）对称性 若A和B相似，则B和A相似

（3）传递性 若A和B相似，B和C相似，则A和C相似

性质 设$\varphi(x)$是一个多项式，设矩阵A和B相似，即$P^{-1}AP=B$

则$\varphi(A)$和$\varphi(B)$相似，且$P^{-1}\varphi(A)P=\varphi(B)$

性质 设矩阵A和B相似，则

(1) $\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} B$

(2) $|A-\lambda I|=|B-\lambda I|$

(3) A与B有相同的特征值

(4) $|A|=|B|$

(5) $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(B)$

注记 设矩阵A和B满足(1)--(5)，但A和B未必相似

举例：$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ ***不相似***

特殊算法

对于一个每行相加后得到相同常数的矩阵，$[1,1,...,1]^T$是对应的特征向量

例 设$A=\begin{bmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{bmatrix}$,则以下是$A$的特征向量的是（　　）

$(A)\ [1,1,1]^T \quad (B)\ [1,1,3]^T \quad (C)\ [1,1,0]^T \quad (D)\ [1,0,-3]^T$

几何重数和代数重数

定理 设n阶方阵A有一个特征值λ_0，则λ_0的几何重数$\le\lambda_0$的代数重数

证明 设λ_0的几何重数为r. λ_0的特征空间V_{λ_0}是$\mathbb{R}^n$的子空间,

设V_{λ_0}的一个基为$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$,将其扩充成$\mathbb{R}^n$的一个基　$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$

令$P=[\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n]$,则$P$是可逆阵

$$P^{-1}AP=P^{-1}A[\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n]=P^{-1}[A\alpha_1,\cdots,A\alpha_r,A\alpha_{r+1},\cdots,A\alpha_n]$$

$$=P^{-1}[\lambda_0\alpha_1,\cdots,\lambda_0\alpha_r,A\alpha_{r+1},\cdots,A\alpha_n]=[\lambda_0P^{-1}\alpha_1,\cdots,\lambda_0P^{-1}\alpha_r,P^{-1}A\alpha_{r+1},\cdots,P^{-1}A\alpha_n]$$

$$I=P^{-1}P=P^{-1}[\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n]=[P^{-1}\alpha_1,\cdots,P^{-1}\alpha_r,P^{-1}\alpha_{r+1},\cdots,P^{-1}\alpha_n]=[e_1,\cdots,e_r,e_{r+1},\cdots,e_n]$$

于是$P^{-1}AP=[\lambda_0e_1,\cdots,\lambda_0e_r,P^{-1}A\alpha_{r+1},\cdots,P^{-1}A\alpha_n]=\begin{bmatrix}\lambda_0I_r & B\\ 0 & C\end{bmatrix}$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}\lambda_0I_r-\lambda I_r & B\\ 0 & C-\lambda I_{n-r}\end{vmatrix}=(\lambda_0-\lambda)^r|C-\lambda I_{n-r}|$$

故λ_0的几何重数$\le\lambda_0$的代数重数

对角化

定义:

定义 如果n阶矩阵A相似于一个对角矩阵，则称A可对角化

也即，存在n阶可逆阵P和n阶对角阵Λ, 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$

注记　　分解式$A=P\Lambda P^{-1}$,

其中P是n阶可逆阵，Λ是n阶对角阵

算法

问题 如何求A^k?

分析 若$A=P\Lambda P^{-1}$,则 $A^k=P\Lambda^kP^{-1}$　　其中$\Lambda^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k\end{pmatrix}$

问题 设m次多项式$\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$，设$n$阶方阵$A$，如何求$\varphi(A)$?

分析 若$A=P\Lambda P^{-1}$,则 $\varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

$$\text{其中 }\varphi(\Lambda)=\begin{pmatrix}\varphi(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \varphi(\lambda_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \varphi(\lambda_n)\end{pmatrix}$$

定理

定理(对角化定理) $A_{n\times n}$可对角化$\Leftrightarrow$ A 有n个线性无关的特征向量

此时，设A的n个线性无关的特征向量为$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，

设它们对应的特征值依次为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

可令

$$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

则$P^{-1}AP=\Lambda$

$\boxed{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n:\mathbb{R}^n\text{的特征向量基}}$

推论 若$A_{n\times n}$有n个互异的特征值，则A可对角化

定理 设$A_{n\times n}$的互异的特征值为λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_s

则A 可对角化$\Leftrightarrow$对每一个λ_i,它的几何重数$=$代数重数

其中 λ_i的代数重数，指在特征方程中λ_i的重根数

λ_i的几何重数，指特征空间V_{λ_i}的维数 $=\dim\mathrm{Nul}(A-\lambda_iI)=n-\mathrm{rank}(A-\lambda_iI)$

此时，可令$P=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1r_1},\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2r_2},\cdots,\xi_{s1},\xi_{s2},\cdots,\xi_{sr_s})$

$$\Lambda=diag(\underbrace{\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{r_1\text{个}},\underbrace{\lambda_2,\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{r_2\text{个}},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{r_s\text{个}})$$

则$P^{-1}AP=\Lambda$ **(不唯一)**

注记 单根不用检验，恒有$r_i=n_i$=1

Λ不唯一的原因，是因为ξ可以交换位置

幂零矩阵

定义

定义 设n阶矩阵A，若存在$l \in \mathbb{Z}^{+}$使得$A^{l}=0$，则A称为幂零矩阵

性质

幂等矩阵必有特征值，且特征值为0

跟幂等矩阵相似的矩阵仍然是零幂矩阵

非零的零幂矩阵必不可对角化

幂等矩阵

定义

定义 设n阶矩阵A满足$A^{2}=A$，则A称为幂等矩阵

性质

幂等矩阵必有特征值，且它的特征值必然是1或0

跟幂等矩阵相似的矩阵仍然是幂等矩阵

幂等矩阵一定可以对角化

$$A(A-I)=0, rank(A)+rank(A-I)=n$$

证明

$$\because (A-I) \subset NolA \quad \therefore rank(A)+rank(A-I) \leq n$$

$$\because n = rank(I-A+A) \leq rank(A-I)+rank(A)$$

$$\text{综上，} rank(A)+rank(A-I)=n$$

线性变换的矩阵

定义

定义 映射 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 称为线性变换，若

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(u)+T(v) \\ T(cu) &= cT(u) \end{aligned} \qquad \forall u,v\in\mathbb{R}^n, c\in\mathbb{R}$$

定理 设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是线性变换，则 $\exists !$ 矩阵 A，使得

$$T(x) = Ax,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

事实上，$A=[T(e_1),\cdots,T(e_n)]$，其中 e_i 是单位矩阵的第 i 列

线性变换 T 的**标准矩阵**

可以看成坐标变换的矩阵表示

基变换和坐标变换

定理 设向量空间 V 的一组基为 $\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$，

则坐标映射 $\begin{matrix} V \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto [x]_{\mathcal{B}} \end{matrix}$ 是一个由 V 到 $\mathbb{R}^n$ 的同构

定理 设向量空间 V 的两个基分别为 $\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$\mathcal{C}=\{w_1,\cdots,w_n\}$，

则 $\exists !$ n 阶方阵 $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ 使得 $[x]_{\mathcal{C}}=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}}$，$\forall x\in V$，

事实上，$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=\left[[v_1]_{\mathcal{C}},\cdots,[v_n]_{\mathcal{C}}\right]$

由 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{C}$ 的坐标变换矩阵

注记 $\underbrace{[w_1 \ \cdots \ w_n]}_{\mathcal{C}}\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=\underbrace{[v_1 \ \cdots \ v_n]}_{\mathcal{B}}$

形式记号

对于 $[x]_B=[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]^T$ 对应 $v_1,v_2,\ldots,v_n$ 在C空间中的坐标表示（基变换只能右乘，坐标变换只能左乘）。

但是对于计算 $P_{B\to C}$ 来说只有在非常容易观察出答案的情况才有用

定理 设T是n维向量空间V到m维向量空间W的一个线性变换

设V的一个基 $\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$， W的一个基 $\mathcal{C}=\{w_1,\cdots,w_m\}$

则$\exists!$ $m\times n$阶矩阵M使得$[T(x)]_{\mathcal{C}}=M[x]_{\mathcal{B}}$，$\forall x\in V$

事实上,$M=\left[[T(v_1)]_{\mathcal{C}},\cdots,[T(v_n)]_{\mathcal{C}}\right]$

T在基$\mathcal{B}$和$\mathcal{C}$下的矩阵，或T相对于基$\mathcal{B}$和$\mathcal{C}$的矩阵

问题 设T是n维向量空间V到m维向量空间W的一个线性变换

设V的一个基 $\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$W$的一个基 $\mathcal{C}=\{w_1,\cdots,w_m\}$

$$\begin{tikzcd} V \ni x \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{B}}}"'] & W \ni T(x) \arrow[d, "{[\ ]_{\mathcal{C}}}"] \\ \mathbb{R}^n \ni [x]_{\mathcal{B}} \arrow[r, "?"] & \mathbb{R}^m \ni [T(x)]_{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

$$[T(x)]_{\mathcal{C}}\overset{?}{=}M[x]_{\mathcal{B}}$$

分析 $T(x)=T(x_1v_1+\cdots+x_nv_n)=x_1T(v_1)+\cdots+x_nT(v_n)$

$$[T(x)]_{\mathcal{C}}=x_1[T(v_1)]_{\mathcal{C}}+\cdots+x_n[T(v_n)]_{\mathcal{C}}=\left[[T(v_1)]_{\mathcal{C}},\cdots,[T(v_n)]_{\mathcal{C}}\right][x]_{\mathcal{B}}$$

$$M=\left[[T(v_1)]_{\mathcal{C}},\cdots,[T(v_n)]_{\mathcal{C}}\right]$$

下角标表示坐标表示

注记 (1) 若$V=W$，且$T(x)=x,\forall x\in V$，则$M=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$

(2) 线性变换T $\xleftrightarrow[\text{分别给定}V\text{和}W\text{的一个基}]{\text{一一对应}}$ 矩阵$M_{m\times n}$

注记 设T是n维向量空间V到m维向量空间W的一个线性变换

设V的一个基为$\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$，$W$的一个基$\mathcal{C}=\{w_1,\cdots,w_m\}$

则
$$\begin{cases} T(v_1)=a_{11}w_1+a_{21}w_2+\cdots+a_{m1}w_m \\ T(v_2)=a_{12}w_1+a_{22}w_2+\cdots+a_{m2}w_m \\ \cdots \\ T(v_n)=a_{1n}w_1+a_{2n}w_2+\cdots+a_{mn}w_m \end{cases}$$

可形式记为

$$[T(v_1),T(v_2),\cdots,T(v_n)]=[w_1,w_2,\cdots,w_n]\underline{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}$$

$$\downarrow$$

$$M=\left[[T(v_1)]_{\mathcal{C}},\cdots,[T(v_n)]_{\mathcal{C}}\right]$$

性质

V上的线性变换在不同基下的矩阵是相似的

相似的矩阵之间有相同的

行列式、秩、迹、特征多项式

不变量

故可定义V上的线性变换的

行列式、秩、迹、特征多项式

证明

问题 设T是n维向量空间V上的一个线性变换

设V的一个基 $\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$， 另一个基 $\mathcal{C}=\{w_1,\cdots,w_n\}$，

$$\left.\begin{aligned}[T(x)]_{\mathcal{B}}&=[T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}\\ [T(x)]_{\mathcal{C}}&=[T]_{\mathcal{C}}[x]_{\mathcal{C}}\end{aligned}\right\} \quad [T]_{\mathcal{B}} \overset{?}{\leftrightarrow} [T]_{\mathcal{C}} \qquad \text{相似}$$

分析 $[x]_{\mathcal{C}}=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}}$， $[T(x)]_{\mathcal{C}}=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[T(x)]_{\mathcal{B}}$，

$$\Longrightarrow [T]_{\mathcal{C}}\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[x]_{\mathcal{B}}=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[T]_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

$$\Longrightarrow [T]_{\mathcal{C}}\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}[T]_{\mathcal{B}}$$

$$\Longrightarrow \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{-1}[T]_{\mathcal{C}}\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=[T]_{\mathcal{B}}$$

结论

两个相似的矩阵可看成同一个线性变换在两个基下的矩阵

证明

证明 设$P^{-1}AP=B$，其中A和B是n阶矩阵，P是n阶可逆阵

设V是n维向量空间，取V的一个基$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，

定义$T:V\to V$为$T(x)=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n][T(x)]_{\mathcal{B}}\triangleq[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]A[x]_{\mathcal{B}}$

则T是V上的线性变换，T在基$\mathcal{B}$下的矩阵$[T]_{\mathcal{B}}=A$

令$[\beta_1,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]P$，由于$P$可逆，

则$\mathcal{C}=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$是$V$的一个基，且$P=\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$

故T在基$\mathcal{C}$下的矩阵$[T]_{\mathcal{C}}=\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}=P^{-1}AP=B$

推论

问题 设T是$\mathbb{R}^n$上的线性变换

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_{\ x} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "[\ ]_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^n_{\ Ax} \arrow[d, "[\ ]_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{R}^n_{\ [x]_{\mathcal{B}}} \arrow[r] & \mathbb{R}^n_{\ [Ax]_{\mathcal{B}}} \end{tikzcd}$$

设T：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto Ax$

假设$P^{-1}AP=\Lambda$

问：寻找合适的$\mathcal{B}$基，使得$[T]_{\mathcal{B}}=\Lambda$?

分析 $\mathbb{R}^n$的标准基$\mathcal{E}=\{e_1,\cdots,e_n\}$， $[T]_{\mathcal{E}}=A,$

令$[T]_{\mathcal{B}}=\Lambda=P^{-1}AP=\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}^{-1}[T]_{\mathcal{E}}\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$， 故$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=P$

设基$\mathcal{B}=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$， 则$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=\left[[\alpha_1]_{\mathcal{E}},\cdots,[\alpha_n]_{\mathcal{E}}\right]=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$

于是基$\mathcal{B}$取P的列

B与一个对角阵相似，因此B的特征向量是B的一个基

设T是R^n上的线性变换，其标准矩阵为A,$\forall$取R^n的基β,则$[T]_\beta$与A相似

在线性空间的特征值，特征向量，特征空间的定义

定义 设T是线性空间V上的线性变换，
如果存在数λ和非零向量ξ，使得$T(\xi)=\lambda\xi$，
则称λ是T的特征值，ξ是对应λ的特征向量

定义 设T有特征值λ，则T的对应λ的特征空间

$$V_\lambda \triangleq \{\lambda\text{对应的全部特征向量和零向量}\}.$$

定义 设T是线性空间V上的线性变换，
若存在V的一个基使得T在该基下的矩阵是对角阵，
则称T可对角化.