定积分

定义

黎曼可积

$$\text{设函数} f(x) \text{在} [a,b] \text{上有定义,}$$

$$\exists I \in R\text{，对于} \forall \xi > 0,, \exists \delta > 0$$

$$\text{对任意分割} \pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\text{当分割细度} |\pi| = max\{\Delta x_i\} < \delta\text{，}$$

$$\text{都有} |\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I| < \varepsilon$$

$$\text{则记为} \int_a^b f(x)dx = I$$

性质

- 线性性
- 保序性
- 可加性
  - $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- 积分中值定理
  - 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可积，则$\exists \theta \in [a,b]$, 使得$\int_a^b f(x)dx = f(\theta)(b-a)$
  -

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，考虑下列两种情况：

（1） $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减且在 $x \in [a,b]$ 时， $g(x) \geq 0$，

那么存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)\, dx$.

（2） $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增且在 $x \in [a,b]$ 时， $g(x) \geq 0$，

那么存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(b) \int_{\xi}^{\mathrm{b}} f(x)\, dx$. [2]

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx$$

函数可积定理

$$设f(x)在[a,b]上有界，取[a,b]上的一个分割$$

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$定义和式\overline{S}(\pi,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \underline{S}(\pi,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$M_i, m_i分别为f(x)在[x_{i-1}, x_i]上的上确界和下确界，$$

$$和则称为达布上和和达布下和$$

$$当\pi \to 0且f(x)在[a,b]上有界时，达布上和，达布下和相等时$$

$$f(x)在[a,b]上可积$$

对于证明一个积分可积，取分割细度时要考虑区间内间断点个数。

达布定理

$$\lim_{|\pi|\to 0} \overline{S}(\pi,f) = \overline{I}, \lim_{|\pi|\to 0} \underline{S}(\pi,f) = \underline{I}, (\overline{I}, \underline{I}分别是f(x)在[a,b]上的上积分和下积分)$$

绝对可积

$$若f在[a,b]上可积，那么|f|也在[a,b]上可积，$$

$$并且|\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

可积函数类

- $f(x)$在$[a,b]$上单调有界
- $f(x)$在$[a,b]$上连续
- $f(x)$在$[a,b]$上有界且间断点只有有限个
- 在一定条件下$f(x)$在$[a,b]$上有无限个间断点时仍然可积
  - 一个函数在一个区间上可以有无数个间断点，但仍然是可积的，只要它的间断点是可数的。这类函数被称为可数间断函数。（黎曼函数）

- 设函数在$[a,b]$上有界，对$\forall\xi>0,\eta>0,\exists$分割$T$，使得所有属于$T$的子区间中对于振幅$\omega_{k'}\geq\xi$对应分割区间长度总和$\sum_{k'}\Delta x_{k'}<\eta$(充要)

重要不等式

- Cauchy-Schwarz

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$$

- 证明：

  根据定积分的定义：将[a,b]分等为n个小区间，当n $\rightarrow\infty$ ，也即 小区间的长度Δx_i →0时，$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x_i\to 0}f(x_i)\Delta x_i$,g(x)同理

  于是，利用式(1)，并将 Δx_i 提出来（记为 Δx)，有：

  $\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\Delta x_i\sum_{i=1}^n g^2(x_i)\Delta x_i$ = $(\Delta x)^2\sum_{i=1}^n f^2(x_i)\sum_{i=1}^n g^2(x_i)$
  $\geq(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i))^2(\Delta x)^2=(\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\Delta x)^2$

- Minkowski

$$(\int_a^b[f(x)+g(x)]^2dx)^{\frac{1}{2}}\leq(\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}+(\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

- 证明：超出能力范围，详情看知乎Minkowski不等式的三种证明（及吐槽） - 知乎 (zhihu.com)

微积分基本定理

牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

变上限积分可导性

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^b f(t)dt=f(x)$$

原函数存在定理

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则变上限积分$F(x)=\int_a^b f(t)dt$就是$f(x)$在$[a,b]$上的原函数

定积分中值定理

第一定理

$$\text{假设}f(x),g(x)\text{在}[a,b]\text{上连续，}g(x)\text{在}[a,b]\text{上不变号，}$$

$$\text{则存在}\theta\in[a,b]\text{使得}\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\theta)\int_a^b g(x)dx$$

第二定理

$$\text{假设}f(x),g(x)\text{在}[a,b]\text{上可积}$$

$$\text{如果}g(x)\text{在}[a,b]\text{上非负递减，则存在}\xi\in[a,b]$$

$$\text{使得}\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

$$\text{如果}g(x)\text{在}[a,b]\text{上非负递增，则存在}\xi\in[a,b]\text{，}$$

$$\text{使得}\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_a^\xi f(x)dx$$

勒贝格定理

零测度集

$$\text{设}A\text{为实数集，若对任意的}\xi>0\text{，}$$

$$\text{存在至多可数的一系列开区间}\{I_n,n\in N^*\},$$

$$\text{它是}A\text{的一个开覆盖，并且}\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\le\xi(|I_n|\text{表示区间}I_n\text{的长度})\text{，}$$

$$\text{称}A\text{为零测度集}$$

性质

- 至多可数集的并集是至多可数集
- 至多可数集个间断点的集合是零测集
- 设A为零测集，若$B\subset A$，那么B也是零测集

$$\text{设函数}f(x)\text{在}[a,b]\text{上有界，}$$

$$\text{则}f(x)\text{在}[a,b]\text{上黎曼可积的充要条件是}D(f)\text{是零测集}$$

$$D(f)\text{是一零测度集，}D(f)=\{x\in[a,b]:f\text{在}x\text{处不连续}\}$$