定积分的应用 平面图形的面积

- 与x轴围成的面积 $\int_{\alpha}^{\beta} y dx$
- 平面图形参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$
 除端点外无交点

$$|\circ|A = |\int_{lpha}^{eta} y(t) x'(t) dt| = |\int_{lpha}^{b} etax(t) y'(t) dt|$$

空间面积

- 旋转曲面积
 - 关于x轴旋转

- 关于y轴旋转的同理
- 绕斜轴旋转

$$lacksquare S = rac{1}{\sqrt{1+m^2}} \int_p^q [f(x) - mx - b] (1 + mf'(x)) dx$$

○ 使用极坐标

$$lacksquare S = 2\pi \int_{lpha}^{eta} r(heta) \sin heta \sqrt{(r(heta))^2 + (r'(heta))^2} d heta$$

曲线的弧长

光滑曲线

$$egin{cases} x = x(t) \ y = y(t) \end{cases}$$
 $lpha \leq t \leq eta, x'(t), y'(t)$ 在 $[lpha, eta]$ 上连续,
并且 $(x'(t))^2 + (y'(t))^2
eq 0$

计算

平面

$$C=\int_{lpha}^{eta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

空间

$$C = \int_{lpha}^{eta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

证明: p389

曲率

定义

角度比弧长

$$an heta = rac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow heta = rctan rac{y'(t)}{x'(t)}$$
 $rac{dC}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

y=y(x)时:

曲率:
$$k=|rac{y''(x)}{(1+(y'(x))^2)^{rac{3}{2}}}|$$