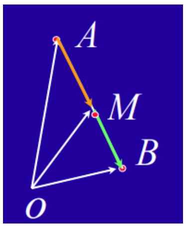
空间解析几何与向量代数

定比分点公式:



$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

向量积

定义:

$$\mathbf{axb} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin < \mathbf{a}, \mathbf{b} >$$

方向遵循右手定则

性质:

- $\mathbf{axa} = \mathbf{0}$
- $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{xc} = \mathbf{axc} + \mathbf{bxc}$
- **两个平行的向量向量积为0**

行列式计算

$$\mathbf{axb} = (\mathbf{a_y b_z} - \mathbf{a_z b_y})\mathbf{i} + (\mathbf{a_z b_x} - \mathbf{a_x b_z})\mathbf{j} + (\mathbf{a_x b_y} - \mathbf{a_y b_x})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = (\begin{bmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{bmatrix})$$

三角形面积

$$S = \frac{1}{2}|\mathbf{axb}|$$

向量混合积

定义:

$$(\mathbf{axb}) \cdot \mathbf{c} = [\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}] \text{记作} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{的混合积}$$

性质:

- 三个非零向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$共面的充要条件是$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=\mathbf{0}$
- 轮换对称性:$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=[\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}]=[\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}]$

平面方程

点法式方程:

设一个平面通过已知点$M_0(x_0,y_0,z_0)$且垂直于非零向量$\mathbf{n}=[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]^\mathbf{T}$,取点$M(x,y,z)$满足$MM_0\perp n$则$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$为垂直$\mathbf{n}$的平面

三点式方程:

过平面内三个点$M_k(x_k,,y_k,,z_k)(k=1,2,3)$的平面方程为:

$$\begin{bmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{bmatrix}$$

截距式方程

平面与三个坐标轴的交点是$P(a,0,0),Q(0,b,0),R(0,0,c)$此时方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

一般方程

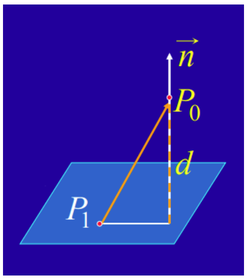
$$Ax+By+Cz+D=0(A^2+b^2+c^2\neq 0)$$

两平面的夹角

$$\cos\theta=\frac{|\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}|}{|\mathbf{n_1}||\mathbf{n_2}|}$$

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

点到平面距离



、

$$d=|Prj_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_1P_0}|=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0\ n}|}{n}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

空间直线

表现形式

假设直线的方向向量$n=(a,b,c)$
则直线表示为$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$

两个平面相交的直线方程

对于平面$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$和$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
可以令$x=0$求出相交直线上的一个点，由平面方程可知，两个平面的法向量$\mathbf{n_1=(A_1,B_1,C_1),n_2=(A_2,B_2,C_2)}$于是直线的方向向量$\mathbf{s=n_1xn_2}$
于是直线方程可求。

但是值得注意的是直接解方程组有时更加便捷。

求直线方程

条件：过某一点，与L_1直线相交，与L_2直线垂直。
解法：一点与直线确认一个平面，求出该平面的法向量n，再求出与L_2和n均垂直的方向向量为所求直线的方向向量。

点到直线距离

$$d=\frac{|M_1M_0\times s_1|}{|s_1|}$$

求过空间中一点并且与两直线相交的直线

将两条直线化作参数方程，利用三点共线求出相交两点，求出直线。

曲面方程

球面

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

$$\text{可能是球面，点，虚轨迹}$$

旋转曲面

假设曲线C绕z轴旋转，点$M_1(x_1,y_1,z_1)\in C$则有$z=z_1,\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|$

旋转双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\text{绕}x\text{轴旋转}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$$

$$\text{绕}y\text{轴旋转}\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

椭球

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

抛物面

- 椭圆抛物面
  - $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

- 双曲抛物面
  - $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$

圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

曲面的投影

对于曲面方程$\begin{cases}G(x,y,z)=0\\F(x,y,z)=0\end{cases}$
对于XOY面的投影是消去z,对于XOZ面的投影是消去$y\dots$

平面束方程

对于直线$L_1满足\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=0\\A_2x+B_2y+C_2z=0\end{cases}$
过这条直线的所有平面满足:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z)=0且\lambda_1,\lambda_2\neq 0$$
