常量微分方程与数值接法初步

一阶常微分方程

形式：

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

解法：

分离变量法

$$\text{化简为}\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx\text{，两边积分求解}$$

一阶齐次方程

形式：

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$$

解法：

$$\text{设}x = X+h, y = Y+k$$

$$\text{解二元一次方程}\begin{cases} a_1h+b_1k+c_1 = 0 \\ a_2h+b_2k+c_2 = 0 \end{cases}$$

分类讨论：

- $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0$
  - 化简方程为$\frac{dY}{dX} = f(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y})$
  - 设$u = \frac{y}{x}$化简后变成一阶常微分方程
- $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 0$
  - 设$a_1x+b_1y = u$化简后变成一阶常微分方程

一阶线性微分方程

形式：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$$

解法：

常数变易法

当$Q(x)=0$时，为一阶齐次线性方程，用分离变量法求解

得到通解公式：$y=ce^{-\int p(x)dx}$

当$Q(x)\neq 0$时，原方程可化为$\dfrac{dy}{y}=[\dfrac{Q(x)}{y}-p(x)]dx$

两边积分得$\ln|y|=\displaystyle\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int p(x)dx$

$y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$，带入原方程得$c'(x)=\dfrac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}}$

积分$c'(x)$并带入得到通解公式：

$$y=ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

伯努利方程

形式：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)=Q(x)y^n$$

解法：

原方程可化为$y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)(y\neq 0)$

即$\dfrac{dy^{1-n}}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x)$

于是方程变为以y^{1-n}为未知量的一阶线性微分方程

可降阶的高阶微分方程

形式：

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Q(x)$$

解法：

$$\text{通过多次积分降阶}$$

二阶线性微分方程

形式：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

性质：

- 如果y_1, y_2是二阶线性齐次方程的两个线性无关的解，则$y = c_1y_1 + c_2y_2$是该方程的通解。
- 如果y和y^*是方程的解，那么$y + y^*$也是方程的解。

解法：

已知方程的两个线性无关解

$$\text{设方程有形如}y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\text{的解}$$

$$\text{则}y' = c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

$$\text{令}c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$

$$\text{带入方程得到}\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\text{利用如上方程求解}$$

已知$y_1(x)$为方程的一个解

$$\text{假设方程有一个与}y_1(x)\text{线性无关的解}y(x), \frac{y(x)}{y_1(x)} = u(x) \neq c$$

$$\text{令}y = u(x)y_1(x)$$

$$y' = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)$$

$$y'' = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x)$$

带入原式得：

$$u''(x)y_1(x)+u'(x)(2y_1'(x)+py_1(x))+u(y_1''(x)$$
$$+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1)=f(x)$$

$$令z=u'(x),化简得y_1(x)z'+(2y_1'(x)+py_1(x))z=f(x)$$
$$设通解z=c_1Z(x)+Z^*(x)(在具体方程中可以求出)$$
$$则u=c_1\int Z(x)dx+\int Z^*(x)dx+c_2，\ y=uy_1=\dots$$

常系数二阶线性齐次微分方程

形式：

$$y''+py'+qy=0$$

解法：

$$解特征方程r^2+pr+q=0$$

- 若有互异的实根，$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
- 若有重根$r,y=c_1e^{rx}+c_2xe^{rx}$
- 若有一对共轭复根,$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

常系数二阶线性非齐次常微分方程

形式：

$$y''+py'+qy=f(x)$$

解法：

类型一：

$$形式：f(x)=P_m(x)e^{\lambda x},P_m(x)是x的m次多项式$$
$$设特解y^*=Q(x)e^{\lambda x},其中Q(x)是待定的多项式$$
$$带入原式得Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$
$$如果\lambda^2+p\lambda+q\neq 0,设特解y^*=Q_m(x)e^{\lambda x},$$
$$Q_m(x)为x的m次多项式$$

$$如果\lambda^2+p\lambda+q=0,且\lambda为单根,设特解y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x},$$

$$Q_m(x)为x的m次多项式$$

$$如果\lambda^2+p\lambda+q=0,且\lambda为重根,设特解y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x},$$

$$Q_m(x)为x的m次多项式$$

$$求出特解，y=通解+特解$$

类型二:

$$形式：f(x)=e^{\alpha x}(p_m(x)\cos\beta x+q_n(x)\sin\beta x))$$

$$利用欧拉公式$$

$$f(x)=e^{\alpha x}\{p_m(x)(\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2})+q_n(x)(\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2})\}$$

$$=e^{(\alpha+i\beta)x}\{\frac{p_m(x)}{2}+\frac{q_n(x)}{2}\}+e^{(\alpha-i\beta)x}\{\frac{p_m(x)}{2}-\frac{q_n(x)}{2}\}$$

$$=p(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+q(x)e^{(\alpha-i\beta)x},p(x)=\overline{q}(x)$$

$$由叠加原理知原方程\Leftrightarrow\begin{cases}y''+py'+qy=p(x)e^{(\alpha+i\beta)x}\\y''+py'+qy=q(x)e^{(\alpha-i\beta)x}\end{cases}$$

$$作为类型一来求解$$