谓词逻辑

个体词、谓词与量词

个体词与谓词

- 对象词称为个体词
- 特定的个体称为个体常元
- 不确定的个体词称为个体变元
- 谓词一般是原子命题中的谓语
- 含有n个个体变元的谓词称为n元谓词
- 个体域就是个体变元遍历的非空集合
- 由简单命题函数和命题连接词构成的表达式称为复合命题函数

量词

- $\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$
- $\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$

谓词

- 特性谓词
  - 如果要将人从其他事物之中分离出来，引进的谓词M(x)称为特性谓词
- 格式：
  - $\forall x(M(x) \wedge P(x))$
  - $\exists (M(x) \to P(x))$

谓词公式及其解释

谓词公式

$$\text{设} D_i (1 \le i \le n) \text{是相应于个体变元} x_i \text{的个体域，则相应于} D_i \text{的项}$$

$$D_i \text{中的个体常元和个体变元是相应于} D_i \text{的项}$$

$$\text{若} f \text{是从} D_1 \times D_2 \times D_3 \times \cdots \times D_n \text{到} D_i \text{的} n \text{元常数，} t_i (1 \le i \le n) \text{是}$$

$$\text{相应于} D_i \text{的项，} f(t_1 . t_2, t_3, \ldots, t_n) \text{为原子谓词公式，简称原子公式}$$

原子公式

$$\text{设} P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \text{是} n \text{元谓词，} t_i (1 \le i \le n) \text{是相应于个体变元}$$

$$x_i \text{的个体} D_i \text{的项，则称} P(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n) \text{为原子谓词公式}$$

简单来说就是谓词+项=原子公式

指导变元和约束变元

$$\text{在谓词公式}\forall xA\text{和}\exists xA\text{中，称}x\text{为指导变元，称}x\text{为指导变元}$$
$$\text{称}A\text{为相应量词的辖域或作用域,辖域中与指导变元相同的变元}$$
$$\text{称为约束变元，不是约束变元的个体变元称为自由变元}$$

换名规则

- 在谓词公式中，将某量词辖域中出现的某个约束变元以及对应的指导变元改成本辖域中未曾出现过的个体变元符号，其余部分保持不变，公式等价性不变
- 在谓词公式中，将某个自由变元的所有出现用其中未曾出现过的某个体变元符号代替，其余部分保持不变。

谓词公式的解释

对一个谓词公式的解释分为4个部分：

- 非空个体域D
- 对A中每个个体常元符号，指定D中一个固定元素
- 对A中每个函数符号，指定一个具体的函数
- 对A中每个谓词符号，指定一个具体的谓词

只有封闭的谓词公式才能称为公式

$$\text{设}A\text{是一个谓词公式，若}A\text{在任何解释下为真，则称}A\text{为永真式}$$
$$\text{(有效式)若}A\text{在任何解释下均为假，则称}A\text{为永假式(矛盾式)}$$

谓词公式的等价演算

等价

$$A\text{和}B\text{是两个谓词公式,如果在任何解释下，}A\text{和}B\text{有相同的真值}$$
$$\text{则称}A\text{和}B\text{等价}$$

量词否定律

$$\neg\forall xA(x)=\exists x\neg A(x)$$
$$\neg\exists xA(x)=\forall x\neg A(x)$$

量词辖域的收缩与扩张律

$$\forall x(A(x) \wedge B) = \forall x A(x) \wedge B$$

$$\forall x(A(x) \vee B) = \forall x A(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) = \exists x A(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \vee B) = \exists x A(x) \vee B$$

量词交换律

$$\forall x \forall y A(x,y) = \forall y \forall x A(x,y)$$

$$\exists x \exists y A(x,y) = \exists y \exists x A(x,y)$$

置换规则

$$\text{若} A = B, \varphi(A) = \varphi(B)$$

前束范式

将约束条件放在表达式之前

谓词公式推理演算

基本概念

$$\text{设} A_1, A_2, \ldots, A_n, B \text{是谓词公式, 如果对} A_1, A_2, \ldots, A_n \text{取1所有解释}$$
$$B\text{必取值1，则称} A_1, A_2, \ldots, A_n \text{到结论} B \text{的推理是有效的}$$

注意如果前提没有取值为1的解释，则推理仍然无效

演绎推理方法

US规则(全称量词消去规则)

$$\forall x A(x) \Rightarrow A(a) \text{或} \forall x A(x) \Rightarrow A(y), \text{其中} y \text{不在} A(x) \text{中以约束变元的形式出现}$$

ES规则(存在量词消去规则)

$$\exists x A(x) \Rightarrow A(a), \text{其中} a \text{是使} A(x) \text{为真的特定个体常元}$$

注意先ES后US推理会更顺利

UG规则(存在量词引入规则)

$$A(y) \Rightarrow \exists x A(x) \text{或} A(a) \Rightarrow \exists x A(x),$$

其中x不在$A(a)$中以约束变元出现