图

基本概念

一个图G是一个序偶$< V,E >$，其中V是一个非空集合，E是V二元素子集的集合，分别称V和E为图G的顶点和边。

若$|V|=p,|E|=q$,通常称之为(p,q)图。p称为图G的阶。边集E为空的图称为**零图**。

没有边关联与它的顶点称为**孤立点**,不与任何边相接的边称为**孤立边**。

没有环也没有平行边的图称为**简单图**，每两个顶点之间都有边链接的**简单图**称为**完全图**。

设$G=< V,E >$是**简单图**，且$V=V_1\cup V_2,V_1\cap V_2=\varnothing$称为**二部图**，若两侧各自的每一个点都与另一边的点有边连接，称G为**完全二部图**，记作$K_{m\times n}$

若$G_1\subset G$且$G_1\neq G$则称G_1为G的**真子图**，若$E_1=\{(u,v)|u,v\in V_1\}\cap E$,则称$G_1$为$G$由顶点子集$V_1$确定的**导出子图**。若$G_1\subset G$且$V_1=V$,称$G_1$是$G$的**生成子图**。

顶点度数

设$G=< V,E >$，$v\in V$，E中与v关联的边的条数称为v的度数，记作$d(v)$，默认每一个环与该点的关边数为2。

若$d(v)$是奇数,就称v为奇点，反之称为偶点，度数为1的点称为悬挂点，与悬挂点关联的边称为悬挂边

握手定理：图中各顶点度数之和是边数的两倍

图中奇点的个数一定是偶数

图的连通性

$G=< V,E >$是一个图，G的一个点边交替序列$(v_0,e_1,v_1,\ldots,e_n,v_n)$称为$G$的通路。若$v_0=v_n$称为回路。

若通路（回路）上的边各不相同，就称为简单通路（简单回路），若顶点各不相同则称为基本通路（回路）。

有时基本回路被称为圈或环

顶点u,v之间的最短通路的长度称为u,v之间的距离，满足：

- 非负性
- 对称性$d(u,v)=d(v,u)$
- 三角不等式$d(u,v)+d(v,w)\geq d(u,w)$

连通图

若$\forall u,v\in V$都有u与v连通，则称G为连通图，否则称为非连通图。

若顶点子集$V_1\subset V$，对于任意$V_2\subset V_1$,使得$G-V_1$的连通分图数大于G的连通分图数，且$G-V_2$等于G的连通分图数，则称V_1是G的点割集。（当$V_1=\{v\}$）时称v是G的割点。

若边子集$E_1\subset E$，对于任意$E_2\subset E_1$,使得$G-E_1$的连通分图数大于G的连通分图数，且$G-E_2$等于G的连通分图数，则称V_1是G的边割集。（当$E_1=\{e\}$）时称e是G的割边或桥。

点连通度$k(G)$是为了由G产生一个不连通图或平凡图而需要从G中去掉的最少顶点数。

边连通度$\lambda(G)$是为了由G产生一个不连通图或平凡图而需要从G中去掉的最少边数。

树

基本概念

不含有基本回路的连通图就称为树。每个连通分图都是树的非连通图称为林。

生成树

若T是图G的生成子图，且是树，则称T为G的生成树，$\forall e\in E(G)$，若e在树T上，则称e为T的枝，否则称e为T的弦。

- G的任何基本回路都至少包含T的一条弦
- 若为T的枝，则G中恰好存在一个只含枝e的割集，称为G的对应T的枝e的基本割集

图的遍历

设$G=<V,E>$是p阶图，其中$V=\{v_1,v_2,...\}$,p阶方阵$A_G=(a_{ij})_{pxp}$称为图G的邻接矩阵，其中元素a_{ij}为起点为v_i终点为v_j的边的数目。

设$G=<V,E>$是p阶图，其中$V=\{v_1,v_2\ldots\}$。p阶方阵$C_D=(c_{ij})_{pxp}$称为G的连通矩阵。

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & v_i与v_j连通\\ 0 & v_i与v_j不连通\end{cases}$$

设$G=<V,E>$是$<p.q>$图，$V=\{v_1,v_2\ldots\}$，$E=\{e_1,e_2,\ldots\}$。pxq阶矩阵$M_G=(m_{ij})_{pxq}$称为G的关联矩阵。

$$m_{ij}=\begin{cases}2 & e_j是环且关联v_i\\ 1 & e_j关联v_i且不是环\\ 0 & e_j不关联v_i\end{cases}$$

欧拉图和哈密顿图

在图中，包含所有边的简单通路称为欧拉通路，包含所有边的简单回路称为欧拉回路。具有欧拉回路的图称为欧拉图，具有欧拉通路而没有欧拉回路的图称为半欧拉图。

若G是非平凡的连通图，则

- G是半欧拉图
- G中恰有两个奇点，而且这两个奇点是欧拉通路的起点和终点

若G是(p,q)简单图，且$p\geq 3$，若对于G中任意的两点u,v都有$d(v)+d(u)\geq p$，则G是哈密顿图