刚体力学基础

刚体的平动

特点

- 刚体中任意两条连线（在运动过程中）始终保持平行
- 刚体平动中个点的运动轨迹相同

刚体的绕轴转动

刚体各点绕一固定轴做圆周运动，各点具有相同的角速度和角加速度

任意与转轴垂直的平面为转动平面

刚体绕轴转动的转动方程：

$$\theta = \theta(t)$$

角速度为：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

角加速度为;

$$\beta = \frac{dw}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

加速度：

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\beta$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r^2\omega$$

大小和方向为：

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = r\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$$

$$\tan\varphi = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\beta}{\omega^2}(\varphi\text{为加速度方向与径向夹角})$$

刚体的一般运动

质点自由度

- 由三个独立坐标确认位置就有三个平动自由度
- 如果对质点的运动加以限制，自由度减少

刚体自由度

- 处了三个平动自由度以外，通过三个方位角确定质心轴的空间方位，一共有六个自由度

刚体转动的功和能

力矩的功

力矩：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

可以将力分解为垂直于转动轴和平行于转动轴的力

公式推导：

$$dA = \vec{F}_{\perp} d\vec{r} = F_{\perp} |d\vec{r}| \cos \varphi$$

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

刚体的动能

$$E_k = \sum \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} J \omega^2$$

刚体定轴转动的动能定理

$$A_i^{外} + A_i^{内} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (M_i^{外} + M_i^{内}) d\theta = \frac{1}{2} m_i v_{i_2}^2 - \frac{1}{2} m_{i_2} v_{i_1}^2$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} J w_1^2, E_{K1} = \frac{1}{2} J w_2^2$$

内力矩对刚体做功之和为0

转动刚体动能定理的积分形式：

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}Md\theta=\frac{1}{2}Jw_2^2-\frac{1}{2}Jw_1^2$$

刚体转动惯量的计算

转动惯量的计算

$$J=\lim_{\Delta m_i\to 0}\sum\Delta m_i r_i^2=\int_m r^2dm$$

实际计算中常用体积微元，面积微元和长度微元。

$$J=\iiint_V\rho r^2dV,J=\iint_S\sigma r^2dS,J=\int_L\lambda r^2dl$$

刚体定轴转动的转动定律

刚体定轴转动定律

$$M=J\beta$$

合外力矩等于转动惯量与角加速度的乘积（由刚体定轴的动能定理微分可得）

刚体对定轴的角动量定理和角动量守恒定律

角动量

质点的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

刚体定轴角动量

$$L_i=\Delta m_i r_i v_i$$

$$\sum_i L_i=\sum_i\Delta m_i r_i^2\omega=J\omega$$

刚体角动量定理和角动量守恒

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d(\vec{r}\times\vec{p})}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}+\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}$$

由于$\vec{r}$和$\vec{p}$方向相同，且$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$.化简后得：

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

角动量定理为：

$$Mdt = d(J\omega)$$

质点角动量守恒

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{C}$$

有三种情况角动量守恒

- 力的作用点通过原点O
- 质点受到的合外力为0（对刚体不适用）
- 力沿着质点位矢的方向

刚体定轴转动的角动量守恒定律

$$\int_{t_1}^{t_2} Mdt = L_2 - L_1 = J\omega_2 - J\omega_1$$

$\int_{t_1}^{t_2} Mdt$称为冲量矩，表示合外力矩在t_1到t_2时间内的积累效应
如果合外力矩为0，则刚体定轴转动的角动量守恒