曲线积分与格林公式

第一型曲线积分

模型

计算线密度不同的二维曲线的质量

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

基本性质

- 线性性质
- 保序性质
- 路径可加性
- 绝对可积性
- 中值定理：$\int_L f(x,y,z)ds = f(x^*,y^*,z^*)s^*$

第二型曲线积分

模型

计算变力延曲线做功

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$

计算公式

$$\int_L Pdx = \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt$$

$$\int_L Qdy = \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

$$\int_L Rdx = \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt$$

两种曲线积分之间的关系

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz = \int_L [P\cos(t,x)+Q\cos(t,y)+Rcos(t,z)]ds$$

格林公式

定义

设D是由分段光滑的封闭曲线围成的封闭曲线围成的闭区域，向量场$F=(P(x,y),Q(x,y))$在D上连续，$P(x,y),Q(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数，则

$$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int_{\partial D}Pdx+Qdy$$

其中∂D为D的边界，并取正向（逆时针）.

积分与路径无关

条件

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

P,Q在D内连续且有一阶连续偏导数，以下四个命题等价

- 对D内任一分段光滑封闭曲线L，有$\int_L Pdx+Qdy=0$
- 对D内任一分段光滑曲线L,曲线积分$\int_L Pdx+Qdy$与路径无关，只与起点和终点有关
- $Pdx+Qdy$在D内为某一函数U的全微分$dU=Pdx+Qdy$,称U为$Pdx+Qdy$的原函数
- $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

,