若当标准形

定义

任何方阵最简单形式的相似矩阵

空间分解

定理

设T是n维向量空间V上的线性变换,则

V能分解成若干T-不变子空间的直和 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$, $\Leftrightarrow T$ 在V的一个基下的矩阵是分块对角矩阵 $diag(A_1, \cdots, A_s)$ 其中 A_i 是 $T |_{W_i}$ 在 W_i 的一个基下的矩阵

可以和特征值和特征向量作类比

注记 V上线性变换T的核、像、特征空间都是T-不变子空间

定理 设T是n维向量空间V上的线性变换,多项式 f(x)有因式分解 $f(x) = f_1(x) \cdots f_s(x), \quad \text{其中} f_1(x), \cdots, f_s(x)$ 两两互素,则 $\text{Ker } f(T) = \text{Ker } f_1(T) \oplus \cdots \oplus \text{Ker } f_s(T)$

每一个可以让因式等于0的x都是f(x) = 0的解

结论 设T是n维向量空间V上的线性变换, $f(\lambda)$ 是T 的特征多项式,

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{n_1} (\lambda_2 - \lambda)^{n_2} \cdots (\lambda_s - \lambda)^{n_s}$$
 ,其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 互不相等,则 $V = \operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T)^{n_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(\lambda_s I - T)^{n_s}$ $\stackrel{\mathrm{id}}{=} W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$,

其中 W_i 是T-不变子空间,在每个 W_i 中取一个基,合起来就是V的基,

$$T$$
在这个基下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_s \end{bmatrix}$

 $A_i \not\in T|_{W_i}$ 在 W_i 的上述基下的矩阵

定义 $Ker(\lambda_i I - T)^{n_i}$ 称为根子空间

不难看出这个等式就是所有特征向量组成的空间为原空间

哈密顿凯莱定理

设T是n维向量空间V上的线性变换, $f(\lambda)$ 是T的特征多项式,则 f(T)=0或 设A是n阶方阵, $f(\lambda)$ 是A的特征多项式,则 f(A)=0

证明 记
$$f(\lambda) = |\lambda I - A|$$
, $(\lambda I - A)^*(\lambda I - A) = f(\lambda)I$

$$(\lambda I - A)^* = \begin{pmatrix} g_{11}(\lambda) & \cdots \\ g_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = \lambda^{n-1}B_{n-1} + \lambda^{n-2}B_{n-2} + \cdots + \lambda B_1 + B_0$$

$$(\lambda I - A)^*(\lambda I - A) = (\lambda^{n-1}B_{n-1} + \lambda^{n-2}B_{n-2} + \cdots + \lambda B_1 + B_0)(\lambda I - A)$$

$$= \lambda^n B_{n-1} + \lambda^{n-2}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + \cdots + \lambda (B_0 - B_1A) - B_0A$$

$$= \lambda^n B_{n-1} + \lambda^{n-2}(B_{n-2} - B_{n-1}A) + \cdots + \lambda (B_0 - B_1A) - B_0A$$

$$= \lambda^n I + b_{n-1}\lambda^{n-1}I + \cdots + b_1\lambda I + b_0I$$

$$= A^n I + b_{n-1}\lambda^{n-1}I + \cdots + b_1\lambda I + b_0I$$

$$= f(A)$$

零化多项式

- **定义**(1)设T是n维向量空间V上的线性变换,若多项式 f(x)满足 f(T) = 0,则称f(x)是T的零化多项式
 - (2) 设A 是n 阶矩阵, 多项式 f(x)满足 f(A) = 0, 则称f(x)是A的零化多项式

最小多项式

定义 *T*的非零的零化多项式中,次数最低且首系数为1的多项式称为 *T*的最小多项式

幂零变换(nilpotent transformation)是一类特殊的线性变换。设V是数域P上的线性空间, σ 是V的线性变换。若存在自然数m,使 σ m=0,但 σ m-1 \neq 0,则 σ 称为幂零变换,m称为幂零指数。一个线性变换是幂零变换,当且仅当它的特征多项式的根都是零。

范例:

- (1) T是幂零指数为l的幂零变换 ⇔ T的最小多项式是 λ^l
- (2) T = kI + U, U是幂零指数为l的幂零变换 ⇔ T的最小多项式是 $(\lambda k)^l$

结论 设 T是 n维 向量空间 V上 的 线性变换, $f(\lambda)$ 是 T 的最小多项式, $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s},$ 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 互不相等 则 $V = \text{Ker}(T - \lambda_1 I)^{l_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(T - \lambda_s I)^{l_s}$ $= W_1 \oplus \cdots \oplus W_s,$

其中 W_i 是T-不变子空间,在每个 W_i 中取一个基,合起来就是V的基,

$$T$$
在这个基下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_s \end{bmatrix}$, A_i 是 $T \Big|_{W_i}$ 在 W_i 的上述基下的矩阵,

 $T|_{W_i}$ 的最小多项式为 $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$

$$T \Big|_{W_i} = \lambda_i I \Big|_{W_i} + U_i, U_i \neq W_i$$
上的幂零变换

若当块

定理 设T是l维向量空间V上的幂零变换,幂零指数为l,则V中必有一个基

$$T^{l-1}(\alpha), \cdots, T(\alpha), \alpha$$

T在这个基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

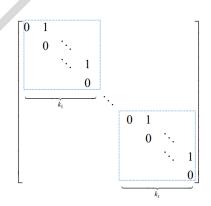
推论 设T是I维向量空间W上的线性变换,T = kI + U, U是幂零指数为I 的幂零变换,则V中必有一个基使得T在该基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} k & 1 & & & \\ & k & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & k & \end{bmatrix}$$

称为主对角元为k的l级若当块

定理 设T是n维线性空间V上的幂零变换,则V中必有一个基

进而,T在这个基下的矩阵为



定理 设 $T \in \mathbb{R}$ 设 $T \in \mathbb{R}$ 发生,T 的最小多项式

 $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 互不相等则V中必有一个基,使得T在这个基下的矩阵为若当形矩阵

其全部主对角元是T的全部特征值,

特征值在主对角线上出现的次数等于它的代数重数,

主对角元为 λ 的若当块的总数为 n-rank $(T - \lambda I)$,

主对角元为A的t级若当块的个数为

$$\operatorname{rank} (T - \lambda_i I)^{t+1} + \operatorname{rank} (T - \lambda_i I)^{t-1} - 2\operatorname{rank} (T - \lambda_i I)^t$$

这个若当形矩阵称为 T 的若当标准形,

不计若当块的排列次序, T的若当标准形唯一.

复特征值

实矩阵的复特征值

事实1 设 $A \in n$ 阶实方阵, $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\overline{Ax} = \overline{Ax} = A\overline{x}}{\overline{\lambda x} = \overline{\lambda x}} \longrightarrow A\overline{x} = \overline{\lambda x} \longrightarrow \begin{cases} \overline{\lambda} \text{ \mathbb{Z} \not $$} \\ \overline{x} \notin \overline{\lambda} \text{ x points the points of the points x points $$$

n阶实方阵的复特征值以共轭复数对出现 对应的特征向量是共轭复向量

性质

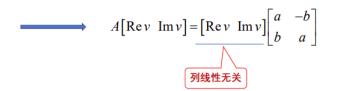
性质 设A是n阶实方阵,

若 ν 是对应于复特征值 $\lambda = a - bi$ (b ≠ 0) 的特征向量,

则

(1)
$$\begin{cases} A(\operatorname{Re} v) = a \operatorname{Re} v + b \operatorname{Im} v \\ A(\operatorname{Im} v) = -b \operatorname{Re} v + a \operatorname{Im} v \end{cases}$$

(2) Rev, Imv 线性无关



事**实2** 设 $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, 其中a,b是实数,且不都等于0

(1)
$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2$$
 $\lambda_{1,2} = a \pm bi$

(2)
$$C = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$
 $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$

变换 $x \mapsto Cx$ 可看成旋转 φ 角度和倍乘 $|\lambda|$ 变换复合而成

定理 设A是2阶实方阵,

有复特征值 $\lambda = a - bi$ ($b \neq 0$), 及对应的复特征向量v,

则
$$A = PCP^{-1}$$
,其中 $P = [\text{Re}\,v, \text{Im}\,v], C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

