质点运动学

质点的运动方程

位置矢量

在直角坐标系中：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位置矢量用方向余弦表示：

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}, \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

质点的位移

时刻t质点的位矢为：

$$\vec{r_1} = \vec{r}(t)$$

时刻$t + \Delta t$质点的位矢为：

$$\vec{r_2} = \vec{r}(t + \Delta t)$$

位移为：

$$\vec{PP_1} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

位移与选取的坐标系无关

质点的速度

平均速度：

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

平均速率：

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

瞬时速率：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=|\frac{d\vec{r}}{dt}|=|\vec{v}|$$

速度：

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}\vec{\tau}=v\vec{\tau}$$

在直角坐标系中的表示与位置矢量同理

平均加速度

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\vec{a}}=\frac{d^2r}{dt^2}$$

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2},a_y=\frac{d^2y}{dt^2},a_z=\frac{d^z}{dt^2}$$

质点的圆周运动

圆周运动中的角量

圆周运动的运动方程：

$$r=R,\theta=\theta(t)$$

平均角速度

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

瞬时角速度

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}$$

平均加角速度

$$\bar{\beta}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

瞬时加角速度

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

和直角坐标系的转换

$$ds = Rd\theta, v = \frac{ds}{dt} = R\omega$$

圆周运动中的加速度

切向加速度

$$\vec{a_t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta v)_t}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$

法向加速度

$$\vec{a_n} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta v)_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

曲线运动中加速度的表示

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}v$$

其中切向加速度为$a_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$,法向加速度为$a_n = \frac{d\vec{\tau}}{dt}v$

加速度方向

$$\tan\phi = \frac{a_n}{a_t}$$

曲率半径

$$a_n = \frac{d\vec{\tau}}{dt}v = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \Longleftrightarrow |\frac{d\vec{\tau}}{dt}| = \frac{v}{\rho}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(\frac{v^2}{\rho})^2 + (\frac{dv}{dt})^2}$$

计算公式

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - (\frac{dv}{dt})^2}}$$

相对运动

根据绝对空间观，位移矢量和时间间隔测量与参考系无关（宏观低速）

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r'}$$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{v'}$$

$$\vec{a} = \vec{a_0} + \vec{a'}$$