多元函数微分学

#数学

全微分与偏导数

全微分

定义

$$设函数z=f(x,y)在点P_0(x_0,y_0)的某个领域U(P_0,\delta)内有定义$$

$$若z=f(x.y)在点P_0(x_0,y_0)处的全增量可以表示为$$

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(p)$$

$$p=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$我们将z=f(x,y)在点P_0(x_0,y_0)处的全微分记为$$

$$dz|_{P_0}=A\Delta x+B\Delta y$$

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}对x的偏导$$

$$B=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}对y的偏导$$

性质

若函数可微，则偏导数一定存在
注意：多元函数的偏导不能看做微商

可微的充要条件

$$设函数z=f(x,y)在点P_0(x_0,y_0)的某邻域U(P_0;\delta)内存在偏导数$$

$$且\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}在P_0(x_0,y_0)处连续，则z=f(x,y)在点P_0(x_0,y_0)处可微$$

$$设函数f(x,y)的全增量\Delta z,函数关于x的偏导数为A,关于y的偏导数为B$$

$$若\lim_{p\to 0}\frac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{p}=0，则函数f(x,y)可微$$

推论

- 函数可微$\Longrightarrow$偏导数存在，函数连续
- 偏导数存在且连续$\Longrightarrow$函数可微
- 偏导数连续$\Longrightarrow$函数可微
  逆否命题成立

多元复合函数求导

链式法则

$$设\phi(s,t),\varphi(s,t)在点(s,t)\in D可微,z=f(x,y)在点(x,y)\in D_1可微，$$

$$则z=f(\phi(s,t),\varphi(s,t))在点(s,t)可微,且关于s,t的偏导数分别为$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x,y)}\frac{\partial x}{\partial s}|_{(s,t)}+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(x,y)}\frac{\partial y}{\partial s}|_{(s,t)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x,y)}\frac{\partial x}{\partial t}|_{(s,t)}+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(x,y)}\frac{\partial y}{\partial t}|_{(s,t)}$$

首先画出复合函数的结构图，在由链式法则写出结果。

方向导数和梯度

定义

$$设函数f在点P_0的某邻域U(P_0;\delta)\subset R^n内有定义，$$

$$l是从P_0发出的射线，P\in U(P_0,\delta)为l上一个动点。$$

$$设\rho=||P-P_0||,若\lim_{\rho\to 0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}存在，$$

$$则称此极限为f在点P_0沿l的方向导数，记为\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0}或者f_l(P_0)$$

$$当l确定时，只需求\frac{\partial u}{\partial n}=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})\cdot\vec{n}即可求出l的方向导数$$

如果沿着x轴正向和沿着x轴负向的方向导数存在，但不是互为相反数

方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{\Delta x}{\rho},\cos\beta=\frac{\Delta y}{\rho},\cos\gamma=\frac{\Delta z}{\rho}$$

梯度

$$设f(x,y,z)在点P_0(x_0,y_0,z_0)关于所有自变量的偏导数存在，$$

$$\text{定义向量}(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))\text{为}f(x,y,z)\text{在点}P_0(x_0,y_0,z_0)\text{梯度}$$

$$gradf = \nabla f = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$$

高阶偏导数

首先画出复合函数的结构图，在由链式法则写出结果。

克莱罗定理

$$\text{如果函数}f(x,y)\text{的混合偏导数}f_{xy}, f_{yx}\text{在点}(x_0,y_0)\text{处连续，则}$$

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

高阶微分

可直接通过偏导数的定义直接写出偏导数

$$z = f(x,y), dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

中值定理与泰勒公式

多变量函数的中值定理

定理

$$\text{设函数}z = f(x,y)\text{在开凸区域}D\text{上可微，对}D\text{中任意两点}(x_0,y_0),$$

$$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y),\text{都有}$$

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

$$= f_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0+\theta x, y_0+\theta y)$$

$$\text{如果函数}z = f(x,y)\text{是定义在开区域}D\subset R^2\text{上的可微函数且是偏导数为零，}$$

$$\text{则}f(x,y)\text{在}D\text{上为常值函数}$$

多元函数的泰勒公式

$$\text{如果函数}z = f(x,y)\text{在点}(x_0,y_0)\text{处可微，则在点}(x_0,y_0)\text{附近}$$

$$\text{有}f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

实际上微分的本质就是双线性函数

公式

$$设函数在点(x_0,y_0)的某一邻域U(P_0;\delta)内有直到n+1阶的偏导数$$

$$则对U(P_0;\delta)中的任意一点(x_0+h,y_0+k)$$

$$f(x_0+h,y_0+k)=P_n(h,k)+R_n$$

$$=f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2f(x_0,y_0)$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^nf(x_0,y_0)$$

拉格朗日余项

$$\phi^{n+1}(\theta)=(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1}f(x_0+\theta h,y+\theta k)$$

配亚诺余项

$$o||\rho||=o(\sqrt{x^2+y^2+\dots})$$

推广

$$记\alpha=(\alpha_1,,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$$

$$D^\alpha f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial x_1^{|\alpha_1|}\partial x_2^{|\alpha_2|}\dots\partial x_n^{|\alpha_n|}}$$

多元函数的极限

多元函数的无约束极值

定义

$$设函数f在点P_0的某个邻域U(P_0;\delta)内有定义，则$$

$$若存在U(P_0;\delta_1)\subset U(P_0;\delta)使得对任意的P\in U(P_0;\delta),$$

$$都有f(P)\le f(P_0),则称点P_0为f的极大值点f(P_0)为极大值$$

最小值同理

极值的必要条件

$$设函数f定义在点P_0的某个邻域U(P_0;\delta)\subset R^n,在点P_0处有极值$$

$$则f_{x_i}(P_0)=0,i=1,2,3,\dots,n.$$

$$满足上式的点称为f的稳定点$$

黑塞矩阵

$$\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}_{X=P_0}$$

定理

$$设函数f在点P_0的邻域U(P_0,\delta)内有二阶连续偏导数P_0为稳定点$$

- 若$H_f(P_0)$为正定矩阵，则P_0为极小值点
- 若$H_f(P_0)$为负定矩阵，则P_0为极大值点
- 若$H_f(P_0)$为不定矩阵，则P_0不是极值点

正定矩阵和负定矩阵的判断

矩阵A为负定矩阵的充要条件式其顺序主子式满足

$$|A_1|<0,|A_2|>0,\dots$$

矩阵A为负定矩阵的充要条件是-A为正定矩阵

条件极值

拉格朗日函数

$$对于条件\begin{cases} \varphi_1(x_1,x_2,\dots)=0 \\ \varphi_2(x_1,x_2,\dots)=0 \\ \varphi_3(x_1,x_2,\dots)=0 \\ \varphi_4(x_1,x_2,\dots)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$有拉格朗日函数L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$$

$$=f(x_1,x_2.\dots,x_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$$其中\lambda_1,\lambda_2,\dots为拉格朗日常数$$

拉格朗日函数将条件极值转化为无条件极值

条件极值解决方法

- 构造拉格朗日函数

- 求拉格朗日函数的稳定点
- 求黑塞矩阵
- 分析矩阵（正定，负定）

隐函数存在定理及应用

雅可比行列式

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\text{记为}\frac{\partial(f_1,f_2,\ldots)}{\partial(x_1,x_2,\ldots)}$$

$$\text{雅可比行列式中的元素都为函数，所以称为函数矩阵}$$

（还没讲）

隐函数存在定理

隐函数定义

$$\text{设}A\subset R,B\subset R,F:A\times B\to R.\text{若存在}I\subset A,J\subset B,$$

$$\text{对任意的}x\in I\text{有唯一的}y\in J\text{满足方程}$$

$$F(x,y)=0$$

$$\text{则称方程}F(x,y)=0\text{确定了定义在}I\text{上值域属于}J\text{的隐函数}y=f(x)$$

n元方程

隐函数存在的充分条件

- $F(x,y)=0$且在以$P_0(x_0,y_0)$为内点的某个邻域D上连续
- $F(x_0,y_0)=0$
- 在D内$F(x,y)$存在连续的偏导数$F_y(x_0,y_0)\neq 0$, 或者$F_x(x_0,y_0)\neq 0$
  则存在点$P_0(x_0,y_0)$的某一邻域$U(P-0;\delta)\subset D$内，方程$F(x,y)=0$唯一确定一个定义在$(x-\delta,x+\delta)$内的隐函数$y=f(x)$,使得;
- $y_0=f(x_0)$
- $F(x,f(x))=0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$
- $y=f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内连续
- $f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$(原式子两边对x求导)

上面的最后一个公式可以推广到多元的情况。

$$f_{x_1} = -\frac{F_{x_1}}{F_y}, f_{x_2} = -\frac{F_{x_2}}{F_y}, \dots$$

隐函数组存在定理

$$设F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)定义在以点P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$$

$$为内点的区域V \subset R^4上且满足以下条件：$$

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,u_0,v_0) \\ G(x_0,y_0,u_0,v_0) \end{cases}$$

$$在V \subset R^4内，F,G对各个自变量具有连续的一阶偏导数$$

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & F_v \end{bmatrix}在P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)不为0$$

$$则在点P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)的某个邻域U(P_0) \subset V内，$$

$$唯一确定两个隐函数$$

$$u = f(x,y), v = g(x,y), (x,y) \in U(Q_0), Q_0 = (x_0,y_0)$$

$$使得u_0 = f(x_0,y_0), v_0 = g(x_0,y_0)$$

$$\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y)) = 0 \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y)) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

可以通过看$\frac{\partial(F,G)}{\partial(m,n)}$是否为0来判断是否存在确定,m,n以其他变量为自变量的隐函数组

逆映射定理

$$设函数组\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}(u,v) \in D, D \subset R^2, P_0(u_0,v_0) \in D$$

$$P_0'(x_0,y_0) = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))如果x = x(u,v), y = (u,v)在D上$$

$$\text{有连续的一阶偏导数，在点}P_0(u_0,v_0),\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$$

以下结论成立;

- 以点$P_0'(x_0,y_0)$为中心的邻域$U(P_0';\delta)$内，存在逆映射$\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial v}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial y}{\partial u}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\\\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial x}{\partial v}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial u}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\end{cases}$$

方程换元

$$\text{设二元函数}f\text{具有二阶连续偏导数，通过线性变换}\begin{cases}u=x+\lambda y\\v=x+\mu y\end{cases}$$

$$\text{将方程}A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0(AC-B^2<0)$$

$$\text{其中}\lambda,\mu\text{为一元二次方程}A+2Bt+Ct^2=0\text{的两个相异实根}$$

$$\text{方程可以化简为}\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0$$

隐函数的几何应用

平面曲线的一般方程:

$$F(x,y)=0$$

空间曲线的参数方程:

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

空间曲线的一般方程:

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

对于一个平面曲线方程$F(x,y)=0$,过点(x_0,y_0)的切线方程为:
$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$
法线方程为:
$F_y(x_0,y_0)(x-x_0)-F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

空间曲线的切线与法平面

空间曲线一般方程

$$设空间的曲线方程为\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

$$设点P_0(x_0,y_0,z_0)为曲线上一点，且在t=t_0处有$$

$$(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2\neq 0,并且过点t=t_1时的点的直线方程$$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

$$当\Delta t\to 0时，切线方程为\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

$$与直线l垂直的平面方程为$$

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

隐函数空间曲线

如果空间曲线由隐函数方程组$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$确定，设$F,G$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某个邻域内有连续的偏导数，且$\frac{\partial(f,G)}{\partial(x,y)}|_{P_0}\neq 0$

$$切线方程为\frac{x-x_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

$$切线的方向向量可记为\begin{bmatrix}i&j&k\\F_x&F_y&F_z\\G_x&G_y&G_z\end{bmatrix}$$

$$=(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_{P_0},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_{P_0},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_{P_0})$$

得到法平面方程：

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}|_{P_0}(x-x_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}|_{P_0}(y-y_0)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}|_{P_0}(z-z_0)$$

$=0$

或者记为：

$$\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \end{bmatrix} = 0$$

空间曲面

- 一般方程：

$$F(x,y,z)=0$$

- 曲面方程：

$$z=f(x,y)$$

- 空间曲面参数方程：

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$$

一般方程

$$设F(x,y,z)在点M_0(x_0,y_0,z_0)的某个邻域内有连续的偏导数$$

$$并且F_x^2(x_0,y_0,z_0)+F_y^2(x_0,y_0,z_0)+F_z^2(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

$$对于过点M_0(x_0,y_0,z_0)曲线方程：\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

$$对F(x_0,y_0,z_0)=0两边对t求导得$$

$$F_x(x_0,y_0,z_0)x'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)y'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)z'(t_0)=0$$

$$由此可知任意切向量(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))垂直于$$

$$(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

曲面的切平面方程为：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$$

$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

参数方程

$$\begin{cases} x = x(u.v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

切平面方程:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}|_{u_0,v_0}(x-x_0)+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}|_{u_0,v_0}(y-y_0)+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|_{u_0,v_0}(z-z_0)$$

$=0$

$$\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{bmatrix} = 0$$

法向量:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}|_{u_0,v_0}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}|_{u_0,v_0}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|_{u_0,v_0}}$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{bmatrix} = 0$$
