向量空间与子空间

#数学 #线性代数

设V是非空集合，其中的元素称之为向量，

在V中定义两个运算，称为加法和数乘，分别记作 $u+v$ 和 cu，$\forall u,v\in V,c\in\mathbb{R}$

满足以下八条公理（规则） $(\forall u,v,w\in V,c,d\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases}(1)\ u+v=v+u\\(2)\ (u+v)+w=u+(v+w)\\(3)\ \text{存在}\mathbf{0}\in V,\text{使得}u+\mathbf{0}=u\\(4)\ \text{对每个}u\in V,\text{存在}-u\in V,\text{使得}u+(-u)=\mathbf{0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(5)\ c(du)=(cd)u\\(6)\ 1u=u\end{cases}$$

$$\begin{cases}(7)\ c(u+v)=cu+cv\\(8)\ (c+d)u=cu+du\end{cases}$$

此时，称V是向量空间

（或 线性空间）

子空间的定义

定义 向量空间V的一个子空间H是V的一个子集,满足

(1) $0\in H$

(2) $\forall u,v\in H$,有$u+v\in H$

(3) $\forall u\in H$,和常数c,有$cu\in H$

零空间

定义 矩阵$A_{m\times n}$的零空间是齐次方程$Ax=0$的所有解的集合，记作$\operatorname{Nul}A$

隐式定义

列空间

定义 矩阵$A_{m\times n}$的列空间是A的各列的线性组合的集合，记作$\operatorname{Col}A$

显式定义

线性变换

定义 线性变换$T:V\to W$称为映上的(或满射)，

若$\forall b\in W$，$\exists x\in V$使得$T(x)=b$

定义 线性变换$T:V\to W$称为一对一的(或单射)，

若$\forall b\in \operatorname{Im}T$，$\exists !\ x\in V$，使得$T(x)=b$

或 $\forall x_1,x_2\in V$，若$T(x_1)=T(x_2)$，则$x_1=x_2$

定义 线性变换T称为同构，若T是映上的且一对一的.

记 $V\cong W$

二维空间中的变换

伸缩变换

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

剪切变换

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

旋转变换

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

线性相关与线性无关

定义 向量空间V中的一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$称为线性无关的，若向量方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$仅有平凡解

向量空间V中的一组向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$称为线性相关的，若向量方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m=0$有非平凡解

生成集定理

设$S=\{v_1,\cdots,v_p\}$是向量空间V中的向量集，$H=\mathrm{Span}\{v_1,\cdots,v_p\}$

(1) 若S中某向量v_k是S中其余向量的线性组合，

则S中去掉v_k后形成的集合仍然可以生成H

(2) 若$H\neq\{0\}$，则S的某一子集是H的一组基

坐标和坐标映射

定义 设向量空间V的一组基为$\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_p\}$，

$\forall x\in V$，则$x=c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_pv_p$

(1) $c_1,c_2,\cdots,c_p$称为x(相对于$\mathcal{B}$)的坐标，或x的$\mathcal{B}$-坐标

(2) $[x]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_p\end{bmatrix}$称为$x$(相对于$\mathcal{B}$)的坐标向量，或$x$的$\mathcal{B}$-坐标向量

(3) 映射 $\begin{array}{l}V\rightarrow\mathbb{R}^p\\x\mapsto[x]_{\mathcal{B}}\end{array}$ 称为由$\mathcal{B}$确定的坐标映射

坐标变换矩阵

定义 设$\mathbb{R}^n$的一组基为$\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$,

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad x=c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n$$

$$=[v_1,v_2,\cdots,v_n]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=P_{\mathcal{B}}\cdot[x]_{\mathcal{B}}$$

即 $\quad x=P_{\mathcal{B}}\cdot[x]_{\mathcal{B}}$

称 $P_{\mathcal{B}}$ 为从$\mathcal{B}$到标准基的坐标变换矩阵

向量空间的维数

定理 若向量空间V的一组基为$\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$,

则V中任意包含多于n个向量的集合一定线性相关

定理 若向量空间V的一组基为$\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$,

则V中每一组基一定恰好含有n个向量

定义 (1) 若向量空间V由一个有限集生成,则V 称为有限维的

(2) V的维数记作$\dim V$，指V中一组基所含向量的个数

(3) 零向量空间$\{0\}$的维数定义为0

(4) 如果V不是由一个有限集生成，则V称为无限维的

性质

$\dim \mathrm{Col}\ A$：A中主元列的个数 $= A$中主元的个数

$\dim \mathrm{Nul}\ A$： 方程$Ax=0$中自由变量的个数

$$\dim \mathrm{Col}\, A + \dim \mathrm{Nul}\ A = n$$

维数定理

设K和H是有限维向量空间V的两个子空间，则

$$\dim K + \dim H = \dim(K \cap H) + \dim(K + H)$$

值和

如果 $K \cap H = 0$，则和$K + H$ 称为直和，记$K \oplus H$

注记 若$V = K + H$,则

$$V = K \oplus H \iff \dim V = \dim K + \dim H$$

命题 若 $\dim V = \dim K + \dim H$,则

$$V = K \oplus H \iff K \cap H = 0$$

补空间

定义 若$V = K \oplus H$，

则称H是K的补空间，也称K是H的补空间

设$A_{m\times n}$，线性变换$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$x \mapsto Ax$$

线性变换T的核 $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Nul} A$

线性变换T的值域（或像）$\operatorname{Im} T = \operatorname{Col} A$

$$\dim \operatorname{Im} T + \dim \operatorname{Ker} T = n$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$$

行空间

定义 $A_{m\times n}$的行空间$\operatorname{Row} A \triangleq \{A$ 的行向量的所有线性组合$\}$

注记 $\operatorname{Row} A$ 是$\mathbb{R}^n$的子空间

$\operatorname{Row} A = \operatorname{Col} A^T$

性质

(1) 若两个矩阵A和B行等价，则它们的行空间相同

(2) 若B是A的阶梯形矩阵，
则B的非零行构成 A或B的行空间的一组基

(3) $\dim \operatorname{Row} A = \dim \operatorname{Col} A = A$的主元的个数

秩定理

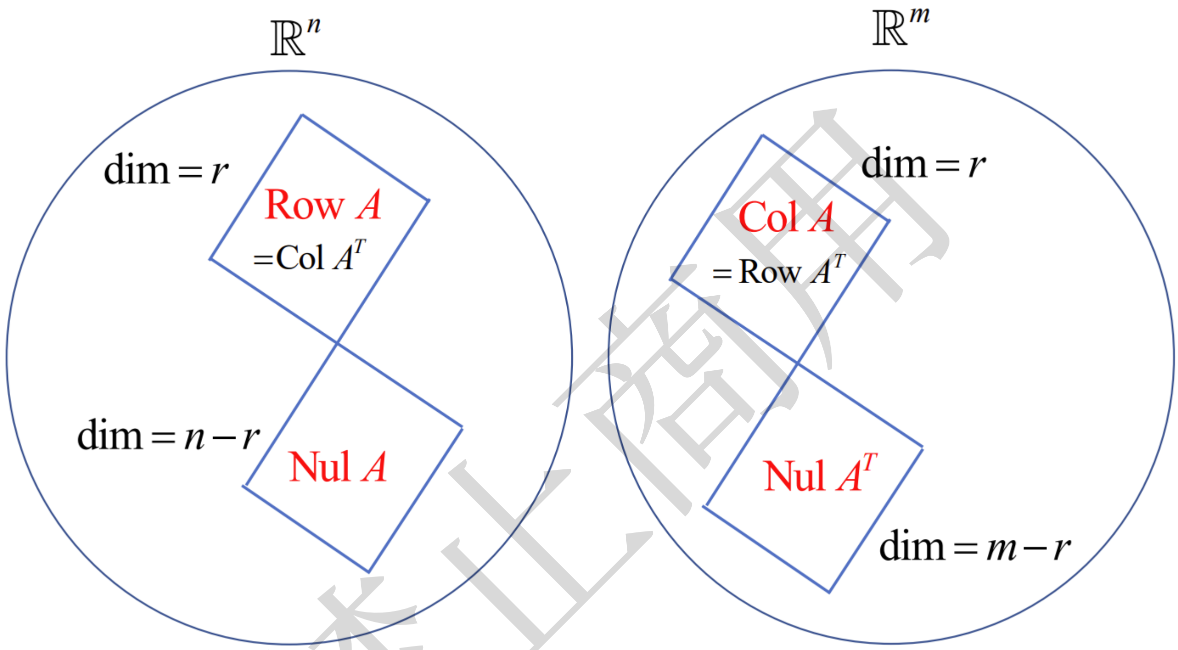
定理 (秩定理)

设矩阵A有n列，则$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$.

基本子空间

4个基本子空间

设 $A_{m\times n}$



$\mathbb{R}^n = \operatorname{Col} A^T \oplus \operatorname{Nul} A$　　　　$\mathbb{R}^m = \operatorname{Col} A \oplus \operatorname{Nul} A^T$

补充证明　$\mathbb{R}^n = \operatorname{Col} A^T \oplus \operatorname{Nul} A$

易知 $\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Col} A^T + \dim \operatorname{Nul} A$

下证 $\operatorname{Col} A^T \cap \operatorname{Nul} A = 0$

$\forall \alpha \in \operatorname{Col} A^T \cap \operatorname{Nul} A$,　则$\alpha = A^T x$, 且 $A\alpha = 0$

则 $AA^T x = 0$　　则$x^T AA^T x = 0$　　则$\left(A^T x\right)^T A^T x = 0$

故$A^T x = 0$　　即$\alpha = 0$　　于是$\mathbb{R}^n = \operatorname{Col} A^T \oplus \operatorname{Nul} A$

基变换

算法 设$\mathbb{R}^n$的两个基分别为$\mathcal{B}=\{v_1,\cdots,v_n\}$, $\mathcal{C}=\{w_1,\cdots,w_n\}$,

求 $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ 的算法： $$[\underbrace{w_1 \ \cdots \ w_n}_{\mathcal{C}} \mid \underbrace{v_1 \ \cdots \ v_n}_{\mathcal{B}}] \overset{r}{\sim} [I \mid \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}]$$

求 $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ 的算法： $$[v_1 \ \cdots \ v_n \mid w_1 \ \cdots \ w_n] \overset{r}{\sim} [I \mid \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}]$$

注记 $$[\underbrace{w_1 \ \cdots \ w_n}_{\mathcal{C}}]\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}=[\underbrace{v_1 \ \cdots \ v_n}_{\mathcal{B}}]$$

$$[v_1 \ \cdots \ v_n]\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}=[w_1 \ \cdots \ w_n]$$

$$\boxed{\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}=(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P})^{-1}}$$

算法

定理	方阵A可逆 $\Leftrightarrow A\overset{r}{\sim}I$	方阵A可逆 $\Leftrightarrow A\overset{c}{\sim}I$
算法	**(1) 求逆算法** $[A \ \ I]\overset{r}{\sim}[I \ \ A^{-1}]$	**(1) 求逆算法** $\begin{bmatrix}A\\I\end{bmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{bmatrix}I\\A^{-1}\end{bmatrix}$
	(2) 求AX=B的算法，其中A可逆 $[A \ \ B]\overset{r}{\sim}[I \ \ X]$	**(2) 求XA=B的算法，其中A可逆** $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\overset{c}{\sim}\begin{bmatrix}I\\X\end{bmatrix}$

性质

$$1.\ \operatorname{rank} PAQ=\operatorname{rank} PA=\operatorname{rank} AQ=\operatorname{rank} A,\ \text{其中}P,Q\text{可逆}$$

$$2.\ \max\{\operatorname{rank} A,\operatorname{rank} B\}\le\operatorname{rank}[A,B]\le\operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B$$

$$3.\ \operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank} A+\operatorname{rank} B$$

$$4.\ \operatorname{rank} AB\le\min\{\operatorname{rank} A,\operatorname{rank} B\}$$

可逆阵可以看成若干个初等矩阵的乘积