若当标准形

定义

任何方阵最简单形式的相似矩阵

空间分解

定理

设T是n维向量空间V上的线性变换，则

V能分解成若干T-不变子空间的直和 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$，

$\Leftrightarrow$ T在V的一个基下的矩阵是分块对角矩阵$diag(A_1,\cdots,A_s)$

其中A_i是$T\big|_{W_i}$ 在 W_i 的一个基下的矩阵

可以和特征值和特征向量作类比

注记 V上线性变换T的核、像、特征空间都是T-不变子空间

定理 设T是n维向量空间V上的线性变换，多项式 $f(x)$有因式分解 $f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$，其中$f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素，

则 $\mathrm{Ker}\, f(T)=\mathrm{Ker}\, f_1(T)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}\, f_s(T)$

每一个可以让因式等于0的x都是$f(x)=0$的解

结论 设T是n维向量空间V上的线性变换，$f(\lambda)$是T的特征多项式，

$$f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{n_1}(\lambda_2-\lambda)^{n_2}\cdots(\lambda_s-\lambda)^{n_s},\text{其中}\lambda_1,\cdots,\lambda_s\text{互不相等，}$$

则 $V=\mathrm{Ker}(\lambda_1 I-T)^{n_1}\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(\lambda_s I-T)^{n_s}$

$$\overset{\text{记}}{=}W_1\oplus\cdots\oplus W_s,$$

其中W_i是T-不变子空间，在每个W_i中取一个基，合起来就是V的基，

T在这个基下的矩阵为 $$A=\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s\end{bmatrix},$$

A_i是$T|_{W_i}$在W_i的上述基下的矩阵

定义 $\mathrm{Ker}(\lambda_i I-T)^{n_i}$称为根子空间

不难看出这个等式就是所有特征向量组成的空间为原空间

哈密顿凯莱定理

设T是n维向量空间V上的线性变换, $f(\lambda)$是T的特征多项式, 则$f(T)=0$

或 设A是n阶方阵，$f(\lambda)$是A的特征多项式, 则$f(A)=0$

证明 记$f(\lambda)=|\lambda I-A|$, $(\lambda I-A)^*(\lambda I-A)=f(\lambda)I$

$$(\lambda I-A)^*=\begin{pmatrix}g_{11}(\lambda) & \cdots \\ g_{11}(\lambda) & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}=\lambda^{n-1}B_{n-1}+\lambda^{n-2}B_{n-2}+\cdots+\lambda B_1+B_0$$

$$(\lambda I-A)^*(\lambda I-A)=(\lambda^{n-1}B_{n-1}+\lambda^{n-2}B_{n-2}+\cdots+\lambda B_1+B_0)(\lambda I-A)$$
$$=\lambda^n B_{n-1}+\lambda^{n-2}(B_{n-2}-B_{n-1}A)+\cdots+\lambda(B_0-B_1A)-B_0A$$

$$f(\lambda)I=(\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0)I$$
$$=\lambda^n I+b_{n-1}\lambda^{n-1}I+\cdots+b_1\lambda I+b_0 I$$

$B_{n-1}=I$ 右乘A^n

$B_{n-2}-B_{n-1}A=b_{n-1}I$ 右乘A^{n-1}

$\cdots$ $\cdots$

$B_1-B_2A=b_2I$ 右乘A^2

$B_0-B_1A=b_1I$ 右乘A^1

$-B_0A=b_0$

累和，得

$$0=A^n+b_{n-1}A^{n-1}+\cdots+b_1A+b_0I$$
$$=f(A)$$

零化多项式

定义 (1) 设T是n维向量空间V上的线性变换，若多项式$f(x)$满足$f(T)=0$, 则称$f(x)$是T的零化多项式

(2) 设A是n阶矩阵, 多项式$f(x)$满足$f(A)=0$, 则称$f(x)$是A的零化多项式

最小多项式

定义 T的非零的零化多项式中，次数最低且首系数为1的多项式称为 T的最小多项式

幂零变换(nilpotent transformation)是一类特殊的线性变换。设V是数域P上的线性空间，σ是V的线性变换。若存在自然数m，使σm=0，但σm-1≠0，则σ称为幂零变换，m称为幂零指数。一个线性变换是幂零变换，当且仅当它的特征多项式的根都是零。

范例:

(1) T是幂零指数为l的幂零变换

$\Leftrightarrow T$的最小多项式是λ^l

(2) $T = kI + U, U$是幂零指数为l的幂零变换

$\Leftrightarrow T$的最小多项式是$(\lambda - k)^l$

结论 设T是n维向量空间V上的线性变换，$f(\lambda)$是T的最小多项式，

$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{l_s}$，其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$互不相等

则 $V = \mathrm{Ker}(T - \lambda_1 I)^{l_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(T - \lambda_s I)^{l_s}$

$\overset{记}{=} W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$，

其中W_i是T-不变子空间，在每个W_i中取一个基，合起来就是V的基，

T在这个基下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{bmatrix}$， A_i是$T|_{W_i}$在W_i的上述基下的矩阵，

$T|_{W_i}$的最小多项式为$(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$

$T|_{W_i} = \lambda_i I|_{W_i} + U_i, U_i$是$W_i$上的幂零变换

若当块

定理 设T是l维向量空间V上的幂零变换，幂零指数为l，则V中必有一个基

$$T^{l-1}(\alpha),\ \cdots,T(\alpha)\ \ ,\alpha$$

T在这个基下的矩阵为
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

推论 设T是l维向量空间W上的线性变换，$T=kI+U,U$是幂零指数为l 的幂零变换，则V中必有一个基使得T在该基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} k & 1 & & \\ & k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & k \end{bmatrix}$$

称为主对角元为k的l级若当块

定理 设T是n维线性空间V上的幂零变换，则V中必有一个基

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_t \\ T(\alpha_1) & T(\alpha_2) & \cdots & T(\alpha_t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T^{k_1-1}(\alpha_1) & T^{k_2-1}(\alpha_2) & \cdots & T^{k_t-1}(\alpha_t) \end{matrix}$$

进而,T在这个基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}}_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}}_{k_t} \end{bmatrix}$$

定理 设T是n维向量空间V上的线性变换，T的最小多项式

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}, \text{其中}\lambda_1,\cdots,\lambda_s\text{互不相等}$$

则V中必有一个基，使得T在这个基下的矩阵为若当形矩阵

其全部主对角元是T的全部特征值，

特征值在主对角线上出现的次数等于它的代数重数，

主对角元为λ_i的若当块的总数为 $n-\mathrm{rank}\,(T-\lambda_i I)$,

主对角元为λ_i的t级若当块的个数为

$$\mathrm{rank}\,(T-\lambda_i I)^{t+1}+\mathrm{rank}\,(T-\lambda_i I)^{t-1}-2\mathrm{rank}\,(T-\lambda_i I)^{t},$$

这个若当形矩阵称为T的若当标准形，

不计若当块的排列次序，T的若当标准形唯一.

复特征值

实矩阵的复特征值

事实1 设 A是 n阶实方阵，$Ax=\lambda x$, $x\neq 0$, λ是复数

$$\left.\begin{array}{l}\overline{Ax}=\overline{A}\,\overline{x}=A\overline{x}\\ \overline{\lambda x}=\overline{\lambda}\,\overline{x}\end{array}\right\}\longrightarrow A\overline{x}=\overline{\lambda}\,\overline{x}\longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\overline{\lambda}\text{ 是特征值}\\ \overline{x}\text{ 是 }\overline{\lambda}\text{ 对应的特征向量}\end{array}\right.$$

n阶实方阵的复特征值以共轭复数对出现

对应的特征向量是共轭复向量

性质

性质 设A是n阶实方阵，

若 v是对应于复特征值 $\lambda=a-bi\,(b\neq 0)$ 的特征向量，

则

$$(1)\ \left\{\begin{array}{l}A(\mathrm{Re}\,v)=a\,\mathrm{Re}\,v+b\,\mathrm{Im}\,v\\ A(\mathrm{Im}\,v)=-b\,\mathrm{Re}\,v+a\,\mathrm{Im}\,v\end{array}\right.$$

(2) $\mathrm{Re}\,v,\mathrm{Im}\,v$ 线性无关

$$\longrightarrow\quad A\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,v & \mathrm{Im}\,v\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\,v & \mathrm{Im}\,v\end{bmatrix}}_{\text{列线性无关}}\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}$$

事实2 设$C=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$，其中$a,b$是实数，且不都等于0

(1) $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2a\lambda+a^2+b^2 \qquad \lambda_{1,2}=a\pm bi$

(2) $C=r\begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad r=|\lambda|=\sqrt{a^2+b^2}$

变换$x\mapsto Cx$可看成旋转φ角度和倍乘$|\lambda|$变换复合而成

定理 设A是2阶实方阵，
有复特征值$\lambda=a-bi\ (b\neq 0)$，及对应的复特征向量v，
则$A=PCP^{-1}$，其中$P=[\mathrm{Re}\,v,\ \mathrm{Im}\,v]$，$C=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & Ax \\
u \arrow[r, "C"'] & Cu \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

变量代换

变量代换

旋转、倍乘