命题逻辑

命题和逻辑连接词

逻辑符号

- 简单命题（原子命题）
- 复合命题

$\vee$称为析取词（逻辑加）
$\wedge$称为和取词（逻辑乘）
$\neg$称为否定词（逻辑非）
$\to$成为蕴含词，$p \to q$若p则q
$\leftrightarrow$等值词

注意若p则q时，如果p是0，结果是1；p是1，结果取决于q

优先级

$\neg$>$\wedge$>$\vee$>$\to$=$\leftrightarrow$

真值表

设A是以$p_1, p_2, p_3, ...$为变元的命题公式，各指定一个真值称为对A的一个解释，若使A的值为1，则称为成真解释，否则为成假解释。

替代规则

把永真式的某一个命题用变元用另一个公式处处替代，这个公式还是永真式。

命题公式的等价演算

- 双重否定
  - $\neg\neg A = A$
- 等幂律
  - $A \vee A = A, A \wedge A = A$
- 交换律
  - $A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A$
- 结合律
  - $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C), (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
- 分配律

    - $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 德·摩根律
    - $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B, \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
- 吸收律
    - $A \vee (A \wedge B) = A, A \wedge (A \vee B) = A$
- 零律
    - $A \vee 1 = 1, A \wedge 0 = 0$
- 单位律
    - $A \vee 0 = A, A \wedge 1 = A$
- 否定率
    - $A \vee \neg A = 1, A \wedge \neg A = 0$
- 蕴含律
    - $A \to B = \neg A \vee B$
- 等值律
    - $A \leftrightarrow B = (A \to B) \vee (B \to A)$

命题公式范式

初等积

有限个变元或其否定式组成的合取式。

初等和

有限个变元或其否定式组成的析取式。

析取范式

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (A_i\text{为初等积})$$

合取范式

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (A_i\text{为初等和})$$

标准析取范式和标准合取范式

定义

$$\text{在命题变元}p_1, p_2, \ldots\text{组成初等积（初等和）中}$$
$$\text{每个变元或其否定出现且只出现一次，并且按下标或字母表排序}$$

$$\text{则称初等积（初等和）为}p_1,p_2,...\text{的最小项(最大项)}$$

$$\text{如果每个初等积都是最小项，且最小项按下标递增排序}$$
$$\text{则称该析取范式为标准析取范式}$$

合取范式同理

转化方法

- 将初等积（初等和）中重复出现的命题变元，永假式及重复出现的最小项都"消去"。
- 用单位律和否定律补进初等积（初等和）中未出现的变元
- 用字母和下标表示：

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) = M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{110}$$
$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) = m_{001} \wedge m_{011}$$

  最小项的下标是成真赋值，最大项的下标是成假赋值

性质

- 最小项
  - 对于每一个最小项而言，只有与下标编码相同的赋值是成真赋值，其他都是成假赋值。
  - 任意两个最小项的合取式是永假式。
  - 全体最小项的析取式是永真式。
- 最大项
  - 对于每一个最大项而言，只有与下标编码相同的赋值是成假赋值，其他都是成真赋值。
  - 任意两个最大项的析取式是永真式。
  - 全体最大项的和取式是永假式。 '

最大项和最小项有如下关系：

$$m_i = \neg M_i$$

标准析取范式和下标互补的标准合区范式等价

- A是永真式当且仅当A的标准析取范式含有全部2^n个最大项
- A是永假式当且仅当A的标准析取范式不包含任何最小项（即为0）

- A的可满足式当且仅当A的标准析取范式至少含有一个最小项

命题公式的推理演算

基本概念

定义

设$A_1, A_2, ..., A_n$和B都是命题公式，如果对于任何赋值，当$A_1, A_2, ..., A_n = 1$是，B都取1，则称前提$A_1, A_2, ..., A_n$到结论B的推理是有效的。记为
$A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow B$

推论：对于A, B两个命题公式,$A = B$的充要条件是$A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$

设$A_1, A_2 ..., A_n$和B都是命题公式，则$A_1, A_2 ..., A_n \Rightarrow B$的充要条件是
$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$
注意：当$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$为永假式的时候结论推理不成立

演绎推理方法

P规则（前提引入规则）：证明任何步骤都可以引入前提，作为公式中的公式。
E规则（置换规则）：在证明任何步骤中，公式序列中命题公式的子公式都可以用与之等价的公式进行置换
T规则（结论引入规则）：在证明任何步骤中都可以引入公式中已有公式的逻辑结论，作为公式序列中的公式。

T规则

- $A \Rightarrow A \vee B$
- $A \wedge B \Rightarrow A/B$
- $A, B \Rightarrow A \wedge B$
- $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A/\neg B$
- $B \Rightarrow A \to B$
- $\neg A \Rightarrow A \to B$
- $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$
- $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
- $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \to C$

附加前提法

- $A_1, A_2, ..., A_n \Rightarrow A$的演绎推理转变为$A_1, A_2, ..., A_n, \neg A \Rightarrow 0$的推理，这里$\neg A$称为附加前提。

- $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow A \to B$的推理演绎转变为$A_1, A_2, \ldots, A_n, A \Rightarrow B$这里的$A$也称为附加前提