

迪利克雷函数

迪利克雷函数是一种数论函数，通常用符号 $D(x)$ 表示。它定义为：

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

其中 x 是实数。迪利克雷函数在数论中有许多应用，包括研究素数分布的定理。

迪利克雷函数的积分形式可以表示为：

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{x} D\left(\frac{b}{x}\right) dx$$

其中 a 和 b 是实数。这个积分的解析形式不是很容易求出，但可以使用一些数值方法来计算它。这个积分在数论和统计物理学中都有应用。

特别地，当 $a = b = 1$ 时，该积分被称为狄利克雷积分，可以使用傅里叶级数展开式来求解：

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} D\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\pi}{2}$$

其中 π 是圆周率。