傅里叶级数与傅里叶变换

傅里叶级数

基本概念

（函数的正交）设函数$f(x)$和$g(x)$在区间$[a,b]$上可积,$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，则称$f(x),g(x)$在$[a,b]$上是正交的。

（三角级数）

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

若$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$在实数域上一致收敛，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,(n=1,2,\ldots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,(n=1,2,\ldots)$$

（傅里叶级数）三角函数$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$称为$f(x)$的傅里叶级数

傅里叶级数逐点收敛定理

（分段光滑函数）设以下条件满足：

- $f(x)$在$[a,b]$上至多有有限个第一类间断点$\{x_1,x_2,\ldots\}$
- $f(x)$的导数在除了点$\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$
- $f(x)$在点$\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$处存在广义的单侧导数

$$\lim_{t\to0+}\frac{f(x_i+t)-f(x_i+0)}{t}=f'_+(x_i)$$

$$\lim_{t\to0-}\frac{f(x_i+t)-f(x_i+0)}{t}=f'_-(x_i)$$

（迪利克雷逐点收敛定理）函数$f(x)$以2π为周期的连续函数且在$[-\pi,\pi]$上分段光滑，则其傅里叶级处处收敛于$f(x)$的左右极限的平均值

（黎曼·贝勒格定理）若f(x)在[a,b]上可积或绝对可积，那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0,\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0$$

（迪利克雷积分）
如果$f(x)$以2π为周期，并且在$[-\pi,\pi]$上可积

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

傅里叶函数的性质

（傅里叶逐项积分定理）设f(x)在[-\pi,\pi]上可积或绝对可积，则

$$\int_c^x f(t)dt=\int_c^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_c^x\cos ntdt+b_n\int_c^x\sin ntdt)$$

以2l为周期的傅里叶级数的计算

若$f(x)$在$[-l,l]$上分段光滑且周期为2l,则

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n-1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l})+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos\frac{n\pi x}{l})$$