重积分

二重积分的定义与计算

$$对于平面有界图形P, 若\underline{I}_P = \overline{I}_P, 称P可求面积，面积I = \underline{I}_P = \overline{I}_P$$

$$平面有界图形P为可求面积的充要条件是对于任意的\xi > 0,$$
$$存在P的分割T使得S_P(T) - s_P(T) < \xi$$

二重积分的定义

以三维空间为例，先将物体分割为足够小的单位体积，分别在x,y轴上积分，得到这个物体的体积。

简而言之，二重积分是通过“分割，求和，取极限”得到的

二重积分的性质

- 线性性质
  - $\iint_D(\alpha f \pm \beta g)d\sigma = \alpha \iint_D f d\sigma \pm \beta \iint_D g d\sigma$
- 保序性质
  - $若在D上, f \leq g, \iint_D f d\sigma \leq \iint_D g d\sigma$
- 区域可加性
  - $\iint_D f d\sigma = \iint_{D_1} f d\sigma + \iint_{D_2} f d\sigma$
- 绝对可积性
  - $若f在D上可积，则|f|在D上也可积，且|\iint_D f d\sigma| \leq \iint_D |f| d\sigma$
- 积分中值定理
  - $设f在闭区域D上连续，则存在(\xi, \eta) \in D, 使得\iint_D f d\sigma = f(\xi, \eta) S_D$
  - $其中S_D是D的面积$

直角坐标系下二重积分的计算

$$函数f(x, y)在区域D = [a, b] \times [c, d]上可积，对任意x \in [a, b]$$

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy存在, 则\int_a^b A(x)dx也存在$$

$$且\iint_D f(x, y)d\sigma = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b f(x, y)dy$$

$$\text{函数}f(x,y)\text{在区域}D=[a,b]\times[c,d]\text{上可积，对任意的}y\in[c,d],$$

$$C(y)=\int_a^b f(x,y)dx\text{存在}, \text{则}\int_c^d C(y)dy\text{也存在},$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d C(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

推论：当函数$f(x,y)$在区域$D=[a,b]\times[c,d]$上连续时有
$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

平面集

$$D_x=\{(x,y)|y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$$

$$D_y\{(x,y)|x_1(y)\le x\le x_2(y),c\le y\le d\}$$

$$\text{设}D_x=\{(x,y)|y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le y\le b\}\text{若}f(x,y)\text{在}D_x\text{上连续}$$

$$y_1(x),y_2(x)\text{在}[a,b]\text{上连续，}$$

$$\text{则}\iint_{D_x} f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dx$$

二重积分的换元公式

$$\text{设}f(x,y)\text{在有界闭区间}D\text{上可积，映射}T:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u.v)\end{cases}$$

$$\text{将平面上分段光滑曲线围成的闭区域}\Delta\text{一一映射到}xOy\text{平面区域}D$$

$$\text{映射}T\text{在}\Delta\text{上连续且具有一阶连续偏导数, 且}J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ne 0$$

$$\text{则}D\text{面积}S=\iint_\Delta |J(u,v)|dudv,\iint_\Delta f(x(u,v),y(u,v)|J(u,v)|dudv$$

极坐标下二重积分的计算

当被积函数区域边界函数含有$f(x^2,y^2)$时，采用极坐标变换

$$\text{设}f(x,y)\text{在有界闭区域}D\text{上可积，变换}$$

$$T:\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}(0<r<+\infty,0\le\theta\le 2\pi)$$

$$\text{将}xOy\text{平面上的有界闭区域}D\text{映射到}r\theta\text{平面上的区域}\Delta\text{，则}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

三重积分的定义和计算

三重积分的定义

$$\text{设}f(x,y,z)\text{为定义在三维空间中可求体积的有界闭区间}V\text{上的有界}$$

$$\text{函数用若干光滑曲面组成的曲面网分割}V,\text{得到}n\text{个小区域}V_1,V_2\dots$$

$$\text{定义分割细度}||T||=\max\{diamV_i\},i=1,2....,n.$$

$$\text{若对于任意的}\xi>0\text{，存在}\delta\text{》}0\text{，对于}V\text{中的任意分割}T\text{，}$$

$$\text{当}||T||<\delta\text{时，}|\sum_{i=1}^{n}f(x,y,z)\Delta V_i-J|<\xi,\forall(x_i,y_i,z_i)\in V_i$$

性质

- 线性性
- 保序性
- 区域可加性
- 绝对可积性
- 积分中值定理
  - $\iiint_\omega fdV=f(\alpha,\beta,\gamma)\cdot V(\omega)$

直角坐标系下三重积分的计算

$$\text{若函数}f(x,y,z)\text{在}V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]\text{上的三重积分存在}$$

$$\text{且对任意}x\in[a,b]\text{，}I(x)=\iint_D f(x,y,z)\text{存在}$$

$$\text{则积分}\int_a^b I(x)dx\text{存在，}$$

$$\text{且}\iint_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^h f(x,y,z)dz$$

三重积分不同的可积区域可采用不同积分方法，先二重积分再三重积分或者先一重积分后二重积分，最后都转化成三次积分来计算

投影法，截面法，三次积分法

交换积分位置

三重积分的换元公式

$$\text{对于一个变化}T:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases},(u,v,w)\in\Delta$$

$$\text{将}uvw\text{空间映射到}xyz\text{空间。}J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\neq 0,(u,v,w)\in\Delta$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Delta f(x(u,v,w),y,(u,v,w),z(u,v,w))dxdydz$$

柱坐标下三重积分的计算

可利用三重积分的换元公式推出，积分的尾部为$rdrd\theta dz$.

极坐标下三重积分的计算

可利用三重积分的换元公式推出，积分的尾部为$r^2drd\theta d\varphi$.

重积分的物理应用

重心坐标

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i\rho(x,y,z)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x,y,z)\Delta V_i}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^n y_i\rho(x,y,z)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x,y,z)\Delta V_i}$$

$$\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i\rho(x,y,z)\Delta V_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x,y,z)\Delta V_i}$$

引力

略

提高课

无界区域上的二重积分

设D是平面R^2中的无界区域，它的边界由有限条光滑曲线组成

L是一条面积为零的连续有界曲线且L与D相交，分割出D_L

$$d(L)=inf\{\sqrt{x^2+y^2}|(x,y)\in L\}$$

为L到原点的距离

比较判别法

对于有界可求面积的子区域上满足$0\leq f(x,y)\leq g(x,y)$

若$\iint_D g(x,y)dxdy$收敛，则$\iint_D f(x,y)dxdy$也收敛

若$\iint_D f(x,y)dxdy$发散，则$\iint_D g(x,y)dxdy$也发散

设D为平面R^2中具有分段光滑边界(有限条)的无界区域，

$f(x,y)$在D上可积的充要条件是$|f(x,y)|$在D上可积

设$D=\{(x,y)|a^2\leq x^2+y^2<+\infty\},a>0$

如果存在常数c, 在D上$|f(x,y)|\leq\dfrac{e}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}}$

当$\alpha>2$时$\iint_D f(x,y)dxdy$收敛

如果存在常数c, 在D上$|f(x,y)|\geq\dfrac{e}{\sqrt{(x^2+y^2)^\alpha}}$

当$\alpha\leq a\iint_d f(x,y)dxdy$发散