集合与关系

集合及其运算

基本概念

- 空集是一切集合的子集，并且是唯一的
- 设A为集合，把A的全体子集构成的集合称为A的幂
- 以集合为元素的集合称为集族

集合的运算

集合的并，交，补

可以使用文氏图

- 交换律
  - $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A A \oplus B = B \oplus A$
- 结合律
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 分配律
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 等幂律
  - $A \cap A = A, A \cup A = A$
- 单位律
  - $A \cup E = E, A \cap \varnothing = A$
- 吸收律
  - $A \cup (A \cap B) = A. A \cap (A \cup B) = A$
- 德·摩尔根
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
  - $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
  - $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

证明空集时采用反证法

二元关系及其运算

笛卡尔积

设A,B是两个集合，称下述集合：

$A\times B=\{<a,b>|a\in A,b\in B\}$为笛卡尔积（直接积）

其中$A\times B$中的元素$<a,b>$为有序对，称为序偶

- 分配律
  - $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
  - $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
  - $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

二元关系及其表示

设A,B是两个集合，称笛卡尔积$A\times B$子集为从A到B的二元关系，简称关系

假设R是从A到B的关系,如果$<a,b>\in R$称a,b之间具有关系R

记为aRb

R的定义域是属于R的序偶的第一个元素组成的集合,记为$dom(R)$

R的值域是属于R的序偶的第二个元素组成的集合

如果R集合是A到自身的关系,R是A^2的子集,则称R是A上的关系

称为恒等关系，空集和笛卡尔积A^2本身也是A的子集

称为空关系和全域关系

设R是从集合A到集合B的关系,S是从集合B到集合A的关系

则从A到C的关系

$R\circ S=\{<a,c>|\exists b\in B(<a,b>\in R\wedge<b,c>\in S)\}$

二元关系的性质和闭包

二元关系的性质

设R是A上的关系,若对任意的$a\in A$都有$<a,a>\in R$

$$则称R是自反的，若对任意的a都有<a,a>\notin R，称R反自反的$$

$$R是A上的关系,若<a,b>\in R,有<b,a>\in R，则称R是对称的，$$
$$若<a,b>\in R,<b,a>\in R必有<b,a>\in R,必有a=b,$$
$$则称R是反对称的$$

$$设R是A上的关系,若<a,b>\in R,<b,c>\in R,必有<a,c>\in R$$
$$则称R是传递的$$

二元关系闭包

$$设R是集合A上的关系,R的自反闭包(对称/传递)是A上的R'关系$$
$$满足R'是自反的(对称/传递)，R\subseteq R',R'元素最少$$

$$设R是集合A上的关系$$
$$r(R)=R\cup R^0,s(R)=R\cup R^{-1},t(R)=R\cup R^2\cup\ldots$$

推论

$$若R自反,s(R),t(R)自反,若R对称,r(R),t(R)对称,$$
$$若R传递,r(R)传递$$

$$若S_1\subseteq R_1,S_2\subseteq R_2，则S_1\circ S_2\subseteq R_1\circ R_2$$
$$S\subseteq R,S^n\subseteq R^n$$

等级关系与划分

等价关系

$$设R是集合A上的关系,如果R是自反的，对称的，传递的，$$
$$则称R为等价关系$$

等价类

$$设R是非空集合A上的等价关系,\forall a\in A，称$$

$$[a]_R = \{x|x \in A, < a, x > \in R\}\text{为元素}a\text{关于等价关系}R\text{的等价类}$$

商集和划分

$$\text{设}R\text{是非空集合}A\text{上的等价关系，以}R\text{的所有等价类作为元素}$$
$$\text{的集合称为}A\text{关于}R\text{的商集, 记为}A/R = \{[a]_R|a \in A\}$$

$$\text{任给一个划分}\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}, \text{定义}A\text{上的一个关系}R$$
$$R = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup \ldots (A_n \times A_n)$$

函数

设f是从X到Y的二元关系，若f满足：
(1)关系f的定义域$dom(f) = X$;
(2)$< x, y > \in f \wedge < x, z > \in f \Rightarrow y = z$
则称f是X到Y的函数记作$f : X \to Y$

设f是从Y到X的函数,g是从Y到X的函数，则f是双射函数且$f^{-1} = g$的充要条件是$f \circ g = I_X$且$g \circ f = I_Y$

称集合A上的恒等关系I_A为集合A上的恒等函数，对所有的$x \in A$都有$I_A(x) = x$

设R是集合A上的等价关系，令函数$g : A \to A/R$ 且满足$g(a) = [a], \forall a \in A$,则称函数$g$是从$A$到商集$A/R$的自然映射

集合的等势与基数

设A, B是两个集合，如果存在从A到B的双射函数，就称A和B是等势的，记作A~B.

- 整数集合Z和自然数集合N等势
- 有理数集合Q与自然数集合N等势，但实数集合和自然数集合N不等势

一般把集合A的基数记作card(A)或|A|