函数的极限与连续

定理

集合

等价

$$\text{如果集合}A,B\text{存在一一对应，}$$
$$\text{则称}A,B\text{等价或具有相同的势，记}A\sim B$$

对称性

$$A\sim A$$

传递性

$$\text{如果}A\sim B,B\sim C,\text{则}A\sim C$$

自反性

$$\text{如果}A\sim B,\text{则}B\sim A$$

分类

- **有限集**$\exists n\in N^+,A\sim n$
- **可数集**$A\sim N^+$

邻域

定义

$$U(x_0;\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\};U^0(x_0;\delta)=\{x|0<|x-x^0|<\delta\}$$

函数极限

函数极限存在

$$\text{函数在}U^0(x;\delta)\text{上有定义，}$$
$$\forall\xi>0,\exists 0<\delta(\xi)<\delta',0<|x-x_0|<\delta:|f(x)-L|<\xi$$

函数极限不存在

$$\forall L\in R,\exists\xi_0>0,\forall\delta>0,\exists x'\in U^0(x_0;\delta'),0<|x-x_0|<\delta:$$

$$|f(x')-L|\geq \xi_0$$

左极限

$$x\to x_0^-$$

右极限

$$x\to x_0^+$$

夹逼定理

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x),\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=A,\text{则}\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

复合函数极限

$$f(x)\text{在}U^0(x_0,\delta')\text{上有定义且}\lim_{x\to x_0}f(x)=A,g(x)\text{在}U^0(t_0,\delta'')\text{上有定义}$$

$$\text{且}\lim_{t\to t_0}g(t)=x_0(g(t)\neq x_0)\text{则}\lim_{t\to t_o}f(g(x))=A$$

海涅原理

函数$f(x)$定义在$U^0(x_0;\delta^*)$上，则$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$的充分必要条件:

$$\forall\{x_n\}\subset U^0(x_0;\delta^*),\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\text{有}\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$$

柯西收敛准则

$$\forall\xi>0,\forall x_1,x_2\in U^0(x_0;\delta),|f(x_1)-f(x_2)|\leq\xi\text{则}\lim_{x\to x_0}f(x)\text{存在}$$

重要函数

迪利克雷函数

$$y=sgn(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

黎曼函数

$$D(x)=\begin{cases}-1, & x\text{为有理数}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

连续函数

定义

$$\text{设}f:(a,b)\to R,\text{对}x_0\in(a,b)\text{有}\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\text{则函数在}x_0\text{处连续}$$

$$\text{或者}\forall\xi>0,\exists\delta>0,\forall x\in(a,b),|x-x_0|<\delta:|f(x)-f(x_0)|<\xi$$

局部有界性

$$\text{若函数在}x_0\in(a,b)\text{连续，则存在}U(x_0;\delta)\subset(a,b),$$
$$\text{使得}f(x)\text{在}U(x_0;\delta)\text{上有界}$$

局部保号性

$$\text{若}f(x)\text{在}x_0\in(a,b)\text{连续，且}f(x_{)})>0,\text{则存在}\delta>0,$$
$$\text{当}x\in U(x_0;\delta)\subset(a,b),f(x)>0$$

复合函数的连续性、

$$\text{若}f(x)\text{在}x_0\in(a,b)\text{连续，}g(t)\text{在}t=t_0\text{连续，}g(t_0)=x_0$$
$$\text{则复合函数}f(g(x))\text{在}t=t_0\text{连续}$$

反函数的连续性

$$\text{设函数}f\text{是在区间}I\text{上连续单调的连续函数，}$$
$$\text{则}f^{-1}\text{是}f(I)\text{上严格单调的连续函数}$$

间断点

第一类间断点

- $f(x)$在点x_0的左右极限都存在
  - 若$f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$则称x_0为$f(x)$的跳跃间断点
  - 若$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$,或$f(x)$在该点无定义，则称$x_0$为$f(x)$的可去间断点

第二类间断点

$$f(x)\text{在点}x_0\text{的左右极限至少一个不存在，}$$

$$\text{则称}x_0\text{为}f(x)\text{的第二类间断点}$$

一致连续

定义：

一致连续

$$\forall \xi > 0, \forall x_1, x_2 \in E, |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \xi$$

不一致连续

$$\exists \xi_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in E, |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| > \xi_0$$

性质：

- 若$f(x), g(x)$在I上一致连续
  - $f(x) \pm g(x)$在I上一致连续
  - 若$f(x), g(x)$在I上有界，则$f(x)g(x)$在I上一致连续
- 闭区间上的连续函数一定是一致连续函数

渐近线

定义：

$$\text{直线}y = ax + b\text{满足}\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax - b) = 0,$$

$$\text{则称}y = ax + b\text{为函数}f(x)\text{的渐近线}$$

无穷小阶与无穷大阶

无穷小阶

- 若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小
- 若 $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$，则称$f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小
- 若$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称$f(x)$与$g(x)$为等价无穷小

无穷大阶

- 若 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称$g(x)$为$f(x)$的高阶无穷大量
- 若 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, 则称$f(x)$与$g(x)$为同阶无穷大量
- 若 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称$f(x)$为$g(x)$的等价无穷大量

等价无穷小

- $x \to 0$
  - $\sin x \sim x$
  - $\arcsin x \sim x$
  - $\tan x \sim x$
  - $\arctan x \sim x$
  - $\ln(1+x) \sim x$
  - $e^x - 1 \sim x$
  - $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
  - $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$
  - $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{3}$
  - $(1+x)^2 - 1 \sim 2x$

解题心得

有理函数的极限

- **因式分解**
- **降次**
