# 曲面积分

### 第一型曲面积分

对于一个曲面方程 $r(u,v)=egin{pmatrix} x(u,v) \ y(u,v) \ z(u,v) \end{pmatrix}$ , $(u,v)\in D$ 为光滑曲面定义曲面 $\sum$ 的第一

#### 基本量

$$egin{aligned} ||ec{r_u} imesec{r_v}|| &= \sqrt{||r_u||^2||r_v||^2 - (r_u\cdot r_v^2)} = \sqrt{EG-F^2} \ E &= ||r_u||^2 = (rac{\partial x}{\partial u})^2 + (rac{\partial y}{\partial u})^2 + (rac{\partial z}{\partial u})^2 \ G &= ||r_u||^2 = (rac{\partial x}{\partial v})^2 + (rac{\partial y}{\partial v})^2 + (rac{\partial z}{\partial v})^2 \ F &= ec{r_u}\cdotec{r_v} = rac{\partial x}{\partial u}rac{\partial x}{\partial v} + rac{\partial y}{\partial u}rac{\partial y}{\partial v} + rac{\partial z}{\partial u}rac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\iint f(x,y,z) dS = \iint f(x,y,z) \sqrt{EG-F^2} dx dy$$

### 第二型曲面积分

### 定义

微小分割平面的法向量 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 当法向量与z轴正向夹角为锐角时为正,否则为负.

$$\iint_{\sum} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

#### 性质:

- 方向性
- 线性性质
- 曲面可加性

# 两型面积分的关系

外法向量的方向向量的方向余弦 $(-\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},-\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})$ 

$$\iint_{\sum} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\sum} (P \cos lpha + Q \cos eta + R \cos \gamma) dS$$

其余派生的转换显而易见

# 高斯公式

$$\iiint_V (rac{\partial P}{\partial x} + rac{\partial Q}{\partial y} + rac{\partial R}{\partial z}) dx dy dz = \iint_{\sum} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

# 斯托克斯公式

设光滑曲面 $\sum$ 的边界 $\partial \sum$  是分段光滑封闭曲线,P,Q,R在 $\sum$ 及其边界 $\partial \sum$ 上连续且具有一阶连续偏导数

$$egin{aligned} \iint_{\Sigma} (rac{\partial R}{\partial y} - rac{\partial Q}{\partial z}) dy dz + (rac{\partial P}{\partial z} - rac{\partial R}{\partial x}) dz dx + (rac{\partial Q}{\partial x} - rac{\partial P}{\partial y}) dx dy \\ &= \int_{\partial \Sigma} P dx + Q dy + R dz \\ \iint_{\Sigma} egin{bmatrix} \frac{dy dz}{\partial x} & dz dx & dx dy \\ rac{\partial}{\partial x} & rac{\partial}{\partial y} & rac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & Q \end{bmatrix} = \int_{L} P dx + Q dy + R dz \end{aligned}$$