对称矩阵的对角化

对称矩阵的对角化

实对称矩阵你的特征只必为实数，对应的特征向量可取实向量

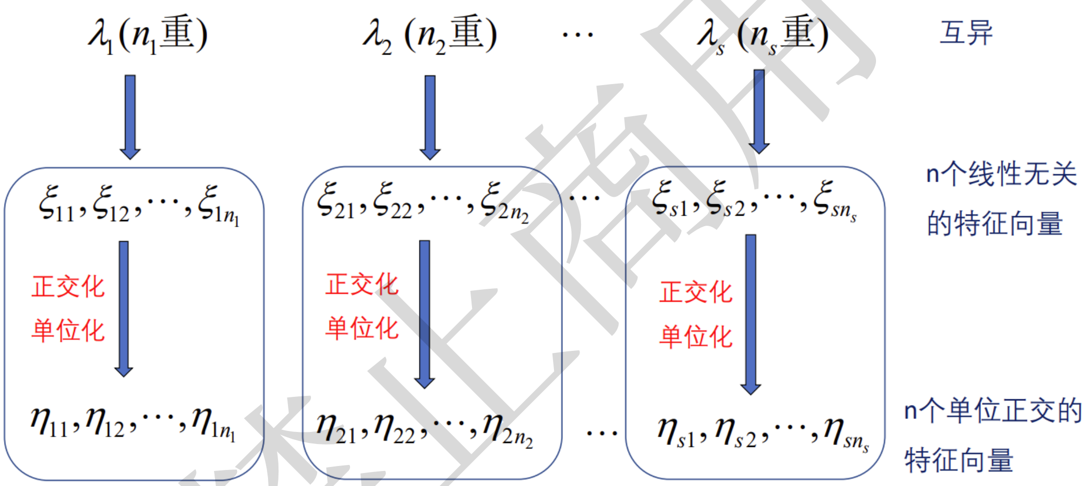
实对称矩阵的不同空间中的两个特征向量正交

n阶矩阵A可对角化，指存在正交阵Q和对角阵Λ

定理

n阶矩阵A可正交对角化$\Leftrightarrow A$是对角阵

流程　设A是n阶对称阵



$$令P=(\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1n_1},\xi_{21},\xi_{22},\cdots,\xi_{2n_2},\cdots,\xi_{s1},\xi_{s2},\cdots,\xi_{sn_s})$$

$$则P^{-1}AP=\Lambda=diag(\underbrace{\lambda_1,\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{n_1个},\underbrace{\lambda_2,\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{n_2个},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{n_s个})$$

$$令Q=(\eta_{11},\cdots,\eta_{1n_1},\eta_{21},\cdots,\eta_{2n_2},\cdots,\eta_{s1},\cdots,\eta_{sn_s})$$

$$则Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=diag(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{n_1个},\underbrace{\lambda_2,\cdots,\lambda_2}_{n_2个},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{n_s个})$$

Q 是正交阵

合同

设A,B是n阶方阵，若存在可逆阵C，使得$C^TAC=B$，则称A和B合同

对称矩阵的谱定理

A的谱={A的特征向量全体}

设n阶对称阵A，则

(1)A有n个实特征值，包含重复的特征值

(2)对每个特征值λ,λ的几何重数=λ的代数重数

(3)不同的特征空间相互正交

(4)A可正交对角化

对称矩阵的谱分解

设u是R^n中的单位向量，则

(1)uu^T的秩为1

(2)uu^T是正交投影矩阵(P是正交投影矩阵若$P^2=P$,$P^T=P$)

(3)uu^Tx是$x\in R^n$在$Span\{u\}$上的正交投影

二次型

定义

定义 n元多项式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= {} & a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ & +a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ & \cdots \\ & +a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为二次型

若二次型中的系数都是实数，称为实二次型

注记 平方项、混合项

二次型是 n元二次齐次多项式

二次型的矩阵表示 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^T Ax$

二次型的矩阵 A （n阶实对称阵）

二次型的秩 $R(A)$

二次型 $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 二次型的矩阵

$$f(x_1,x_2\ldots.x_n)$$

$$=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\triangleq x^T Ax$$

标准型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^T Ax$$

可逆线性变换

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$ 或 $x=Cy$

$$=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$ **标准形**

变量代换

配方法

情况1：有平方项

例 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$

解 先对x_1配方，消去所有含x_1的项

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2-4x_2x_3-2x_3^2$

再对x_3配方，消去所有含x_3的项

$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_2+x_3)^2+2x_2^2$

作线性变换 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=x_2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_1=y_1-y_2 \\ x_2=y_3 \\ x_3=y_2-y_3 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

故所作的线性变换可逆，且标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-2y_2^2+2y_3^2$

情况2：无平方项

例 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$

解 先作 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 \\ &=2(y_1-y_3)^2-2y_2^2+8y_2y_3-2y_3^2 \\ &=2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2 \end{aligned}$$

作线性变换 $\begin{cases} z_1=y_1-y_3 \\ z_2=y_2-2y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} y_1=z_1+z_3 \\ y_2=z_2+2z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases}$

合并，得线性变换 $\begin{cases} x_1=z_1+z_2+3z_3 \\ x_2=z_1-z_2-z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

故所作的线性变换可逆，标准形为 $f(x_1,x_2,x_3)=2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$

任何实二次型可由可逆线性变换化为标准形

任何实对称阵合同于一个对角阵即存在可逆阵C，使得$C^TAC=\Lambda$（对角阵）

主轴定理

任意二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，存在正交变换 $x=Qy$，

使得 f 化为标准形 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

其中 $\begin{cases} Q\text{的列是}A\text{的单位正交的特征向量} \\ \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\text{是}A\text{的对应}Q\text{的列的特征值} \end{cases}$

$\mathbb{R}^n$的标正基

Q 的列称为该二次型的主轴

↓

新的坐标系

分析 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx \quad =k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$ **标准形**

$$\| $$

$$(y_1\ \ y_2\ \ \cdots\ \ y_n)\begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=y^T\Lambda y$$

$$f=x^TAx = (Cy)^TA(Cy) = y^T(C^TAC)y = y^T\Lambda y$$

令 $x=Cy$ (可逆线性变换)

问题 何时 $C^TAC=\Lambda$?

此时的C=Q

惯性定理

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$$

$$=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2 \quad \text{标准形} \quad \text{（不唯一）}$$

$$=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2\cdots-z_r^2 \quad \text{规范形} \quad \text{（唯一）}$$

二次型的秩$R(f)\triangleq R(A)=r$

$=$标准形中非0平方项的个数

$=A$的非0特征值的个数

定义

正惯性指数 $p\triangleq$ 标准形中正平方项的个数 $=A$的正特征值的个数

负惯性指数 $r-p\triangleq$ 标准形中负平方项的个数 $=A$的负特征值的个数

事实 任何实对称阵合同于

惯性定理的矩阵语言

$$\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

即，存在可逆阵C，使得 $C^TAC=\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

推论 设 n阶实对称阵A和B，则

A和B合同 $\Leftrightarrow$ A,B有相同的秩和正惯性指数

引例 讨论下列二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的正负性

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2+z_3^2$ 正定

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2$ 半正定

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=-z_1^2-z_2^2-z_3^2$ 负定

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=-z_1^2-z_2^2$ 半负定

(5) $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2-z_3^2$ 不定

正定矩阵

定义 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 称为正定二次型,若对任何 $x\neq 0$，有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx>0$$

此时 A 称为正定阵.

定理 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，以下命题等价：

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 为正定二次型

(2) A 为正定阵

(3) 正惯性指数 $p=n$

(4) A 和 I 合同

(5) A 的特征值全大于0

(6) 所有主子式 $\Delta_k>0, k=1,2,\cdots,n$

正定阵必是可逆、对称阵

证明见本节PPT附录

负定矩阵

定义 二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$称为负定二次型,若对任何$x\neq 0$，有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx<0$$

此时A称为负定阵.

定理 设二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，以下命题等价：

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$ 为负定二次型

(2) A为负定阵

(3) 负惯性指数$r-p=n$

(4) A和$-I$ 合同

(5) A的特征值全小于0

(6) 奇数阶主子式$\Delta_k<0$, 偶数阶主子式$\Delta_k>0$, $k=1,2,\cdots,n$