向量函数的微分学

向量函数的极限与连续

向量函数

$$设D \subset R^n, F为D \to R^m的映射，记为:$$

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1.x_2.\dots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1.x_2,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

$$则称F(\vec{x})为向量函数，D为F的定义域，f_i为分量函数$$

例如:

$$F(x) = (\sin x, \cos x, x\sin x), R \to R^3$$

向量与矩阵函数

向量范数

$$设||\cdot||是定义在向量空间R^n的函数，满足:$$

$$正定性: ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$齐次性: ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall \lambda \in R$$

$$三角不等式: ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in R^n$$

$$则称||\cdot||为向量空间R^n上的范数$$

矩阵范数

$$设||\cdot||是定义在R^{n\times m}上的函数，满足:$$

$$正定性: ||A|| \geq 0, ||A|| = 0 \Leftrightarrow A = O$$

$$齐次性: ||\lambda A|| = |\lambda| \cdot ||A||, \forall \lambda \in R$$

$$三角不等式: ||A+B|| \leq ||A|| + ||B||, \forall A, B \in R^{n\times m}$$

$$则称||\cdot||为R^{n\times m}上的矩阵范数$$

常用的矩阵范数

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|，为A的行范数或者无穷范数$$

$$||A||_1=\max_{1\le j\le m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\text{为矩阵}A\text{的列范数或1范数}$$

$$||A||_2=\sqrt{\rho(A^TA)}\text{为矩阵}A\text{的2范数，}\rho(A^TA)\text{为}A^TA\text{的最大特征值}$$

矩阵相容

$$\text{设}A\in R^{n\times m},\text{满足式}||A||=\max_{||x||=1}||A\vec{x}||,\forall\vec{x}\in R^m$$

$$\text{则称}||A||\text{和}||x||\text{是相容的}$$

性质

$$\text{设}A\in R^{n\times m},\text{则由式}||A||=\max_{||x||=1}||A\vec{x}||.\forall\vec{x}\in R^m$$

$$\text{则}||A\vec{x}||\le||A||\cdot||\vec{x}||$$

$$\text{同理，对于任意的}AB\in R^{n\times m}\text{有}||AB||\le||A||\cdot||B||$$

结论：用不同范数度量{x_k}所得敛散性是一样的

向量函数的极限

向量函数的复合运算

$$\text{设}D\subset R^l,F:D\to R^m,G:F(D)\to R^n$$

$$\text{其中}F(D)=\{F(x)|x\in D\}\text{为}F\text{的像集合}$$

$$F=\begin{pmatrix}f_1(x_1,x_2,\dots,x_l)\\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_l)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_m(x_1,x_2,\dots,x_l)\end{pmatrix},G=\begin{pmatrix}g_1(t_1,t_2,\dots,t_m)\\ g_2(t_1,t_2,\dots,t_m)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ g_n(t_1,t_2,\dots,t_m)\end{pmatrix}$$

$$\text{则复合函数为}G\cdot F=\begin{pmatrix}g_1(f_1,f_2,\dots,f_m)\\ g_2(f_1,f_2,\dots,f_m)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ g_n(f_1,f_2,\dots,f_m)\end{pmatrix}$$

函数的极限

$$\text{设}D\subset R^n,F:D\to R^m,a\text{为}D\text{聚点},\text{若存在}l\in R^m\text{，对任意}\xi>0$$

$$\text{存在}\delta>0,\text{使得：}\forall x\in D,0<||x-a||<\delta:||F(x)-l||<\xi$$

$$\text{则称}x\to a\text{时，}F(x)\text{的极限记为}\lim_{x\to a}F(x)=l$$

性质

$$设D \subset R^m, F: D \to R^m, a为D的聚点，F(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

$$l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$$

$$则\lim_{x \to a} F(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_i = l_i, i = 1, 2, \dots, n$$

局部有界定理

$$设D \subset R^m, F: D \to R^m, a为D的聚点, \lim_{x \to a} F(x) = l$$

$$则存在U^0(a;\delta), 使得F(x)在U^0(a;\delta) \cap D内有界$$

柯西准则

$$设D \subset R^n, F: D \to R^m, a为D的聚点，则\lim_{x \to a} F(x) = l等价于$$

$$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0. \forall x_1, x_2 \in D, ||x_1 - a|| < \delta, ||x_2 - a|| < \delta:$$

$$||F(x_1) - F(x_2)|| < \xi$$

海涅原理

$$设D \subset R^n, F: D \to R^m, a为D的聚点，则\lim_{x \to a} F(x) = l等价于$$

$$\forall \{x_n\} \in D, \lim_{x \to \infty} x_n = a, \lim_{n \to \infty} F(x) = l$$

向量函数的极限和一致连续

向量函数连续

$$设D \subset R^n, F: D \to R^m, , a \in D,$$

$$\lim_{x \to a} F(x) = (\lim_{x \to a} f_1(x), f_2(x), \dots, F_n(x)^T = F(a)$$

$$则称向量函数F在a点连续$$

向量函数连续

$$设D \subset R^n, F: D \to R^m，对于\forall \xi > 0, 存在与\xi有关的实数\delta(\xi) > 0$$

$$使得对\forall x_1, x_2 \in D, 当||x_1 - x_2|| < \delta时有||F(x_1) - F(x_2)|| < \xi$$

$$则称F在D上一致连续$$

推论：F在D上一致连续等价于F的分量函数都在D上一致连续

推论：设D时有界闭集，F在D上连续，则F在D上一致连续且为有界闭集

向量函数的压缩映射

$$设D\subset R^n为闭区域，F:\to R^n满足：$$

$$F(D)\subset D$$

$$存在0<q<1对于任意x_1,x_2\in D,||F(x_1)-F(x_2)||\le q||x_1-x_2||$$

$$则存在唯一的不动点x^*\in D,F(x^*)=x^*$$

向量函数的微分

向量函数的导数与微分、

向量函数可微的定义

$$设F:D\subset R^n\to R^m,D为开集，x_0=(x_1^0,x_2^0.\dots,x_n^0)\in D$$

$$若F(x)-F(x_0)=A_{m\times n}(x-x_0)+R(x,x_0)$$

$$其中矩阵A_{m\times n}仅与x_0有关\lim_{x\to x_0}\frac{||R(x,x_0)||}{||x-x_0||}=0,则称F在x_0处可微$$

$$F'(x_0)=A_{m\times n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots\\ \dots & \dots & \dots\end{pmatrix}，F为雅可比行列式$$

结论：F在D中可微，则F的每个分量函数都在x_0处可微

向量函数导数的计算

$$(cF)'(x_0)=cF'(x_0),(F\pm G)'(x_0)=F'(x_0)\pm G'(x_0),c为常数$$

$$(F^TG)'=F^TG'+G^TF'$$

复合函数求导法则

$$(G\cdot F)'(x_0)=(G'(y_0))_{l\times m}(F'(x_0))_{m\times n}$$
