# 多变量函数的极限与连续

## 欧几里得空间

### 集合

#### 定义

开集

$$U(a:r)=\{x|\quad ||x-a||<r(x,a\in R^n)\}$$

闭集

$$U(a:r)=\{x|\quad ||x-a||\leq r(x,a\in R^n)\}$$

#### 有界

$$设集合E\subset R^n,若存在r>0,使得E\subset U(a:r)$$
$$则称集合E有界$$

#### 运算性质

$$设集合\{E_\alpha,\alpha\in I\}为一开区间簇,$$
$$则\cup_{\alpha\in I}E_\alpha为开集，I为指标集合$$

---

$$设集合\{E_\alpha,\alpha\in I\}为一开区间簇,$$
$$则\cap_{\alpha\in I}E_\alpha为开集，I为指标集合$$

**闭区间簇同理**

### 聚点

$$设集合E\subset R^n,若对于任意r>0,U^0(a:r)中总有E中异于a的点$$
$$则称a为E的聚点$$

#### 导集和闭包

$$集合E\subset R^b中所有聚点的集合称为E的导集，记为E'$$
$$集合E\cup E'称为E的闭包，记为\bar{E}$$
$$集合E\subset R^n为闭集的充分必要条件为E'\subset E$$

**一个集合可以既不是开集也不是闭集**

# 欧几里得空间中点列的极限

## 定义

$$设x \in R^n, x_m \in R^n, m = 1, 2, 3, \ldots, 若$$
$$\forall \xi > 0, \exists N(\xi) \in N^*, \forall m > N : ||x_m - x|| < \xi$$
$$则称\{x_m\}的极限为x，记为\lim_{m \to \infty} x_m = x$$

## 性质

$$若点列\{x_i\}, \{y_i\}是R^n中点列，则$$

- $$若点列\{x_i\}极限存在，则极限唯一$$
- $$若点列\{x_i\}极限存在，则\{x_i\}有界$$
- $$\lim_{m \to \infty} x_m = a, \lim_{m \to \infty} y_m = b, 则\lim_{m \to \infty} (x_m \pm y_m) = a \pm b$$
- $$若\lim_{m \to \infty} x_m = a, 则\lim_{m \to \infty} \lambda x_m = \lambda a, \lambda \in R$$

## 基本列

$$如果点列\{x_i\} \in R^n满足$$
$$\forall \xi > 0, \exists N(\xi) \in N^*, \forall m > k > N : ||x_m - x_k|| < \xi$$
$$则称\{x_i\}为R^n中的基本列$$

## 致密性定理

$$R^n中的有界点列必有收敛子列（可用闭区间套定理证明）$$

## 柯西定理

$$R^n中点列\{x_m\}收敛的充要条件是\{x_m\}是基本列$$

## 紧集(等价于有界闭集)

$$设集合E \subset R^n, 如果E中任何点列都有收敛于E中点的子列$$

$$\text{则称}E\text{是}R^n\text{中的紧集，即任意}\{x_n\}\subset E\Longrightarrow\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\alpha\in E$$

### 引理

$$\text{集合}E\subset R^n\text{为紧集充要条件是}E\text{中的任何收敛点列的极限属于}E$$

$$a\text{是}E\text{的聚点等价于}E\text{中有互异点列}\{x_m\}\text{收敛到}a$$

## 有限覆盖定理

$$\text{设集合\$}E\subset R^n\text{\$是有界闭集，若开集簇}\{W_\alpha,\alpha\in I\}\text{\$覆盖\$}E\text{，}$$

$$\text{则从中选出有限个开集覆盖}E$$

# 多元函数的极限

## 多元函数的定义

$$\text{设}D\subset R^n,f:D\to R,\text{称}f\text{为}n\text{元函数，}D\text{为}f\text{的定义域}$$

$$f(D)=\{z|z=f(x),x\in D\}$$

## 多元函数极限的定义

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in D,0<||x-a||<\delta:|f(x)-l|<\epsilon$$

$$\text{则称当}x\to a\text{时}f(x)\text{的极限存在记为}\lim_{x\to a}f(x)=l,\text{称为重极限}$$

# 多元连续函数

## 多元连续函数

### 定义

$$\text{设}D\subset R^n,f:D\to R,x_0\in D$$

$$\forall\xi>0,\exists\delta>0,||x-x_0||<\delta:|f(x)-f(x_0)|<\xi$$

$$\text{即}\lim_{x\to x_o}f(x)=f(x_0),\text{则称}f\text{关于集合}D\text{在}x_0\text{处连续}$$

## 全增量

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$\text{如果}\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}\Delta z=0,\text{则函数在点}(x_0,y_0)\text{处连续}$$

## 偏增量

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$$

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\text{如果} \lim_{x \to 0} \Delta_x z = 0, \text{则} f(x,y) \text{关于} x \text{为偏连续}$$

**f(x,y)关于y偏连续同理**
**篇连续不一定能推出重连续**

## 注意

**在定义域的孤立点处函数是连续的**

## 复合函数的连续性

$$\text{设} f(x,y) \text{在} x_0, y_0 \text{处都连续，且} a(u_0, n_0) = x_0, b(u_0, n_0) = y_0,$$

$$\text{则} f(a(u,n), b(u,n)) \text{在点} (u_0, n_0) \text{连续}$$

## 多元函数的一致连续性

## 一致连续定义

$$\forall \xi > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in D, ||x_1 - x_2|| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \xi$$

## 不一致连续定义

$$\exists \xi_0 > 0, \forall \delta > 0. \exists x_1, x_2 \in D, ||x_1 - x_2|| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \xi_0$$

## 偏连续和全连续

- 对其中一个变量满足利普希茨条件（L为常数）
  - $|f(x, y_1) - f(x, y_2| \leq L|y_1 - y_2|, \forall (x, y_1), (x, y_2) \subset D$
- $f(x,y)$对$x$一致连续(关于$y$)

$$\text{设} f(x,y) \text{定义在} U(o,r), o(0,0), \text{定义} F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\text{如果} F \text{关于} r \text{连续，对} \theta \text{关于} r \text{一致连续，则} f(x,y) \text{在原点连续}$$

## 性质

$$\text{设} D \subset R^n, f : D \to R \text{在} D \text{上连续，如果} D \text{为紧集，则} f \text{在} D \text{上一致连续}$$

$$\text{设} D \subset R^n, f : D \to R \text{在} D \text{上连续，若} D \text{为紧集，则} f(D) \text{为紧集}$$

**紧集=有界闭集**

$$\text{设} D \subset R^n, f : D \to R \text{在} D \text{上一致连续，若} D \text{为紧集，}$$

$$\text{则} f \text{在} D \text{上有最大值和最小值}$$

设$D \subset R^n$为有界闭区域，$f: D \rightarrow R$在$D$上连续

则对于任意$a, b \in D, f(a) < r < f(b)$, 存在$c \in D, f(c) = r$