Εργασία 2 P3200262 Δικαίος Ρηγάτος

(1) Εργασίες : $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
Χρόνοι : $E=\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$

$\forall\ v_i\ \exists\ V_i \subseteq V$: κάθε $v_j \in V_i$ να έχει ολοκληρωθεί πριν αρχίσει η v_i

α) Εαν μπορούμε να εκφράσουμε τις διεργασίες V σαν DAG σε τοπολογική διάταξη παρατηρούμε ότι το V είναι εφικτό.

Αναλυτικότερα, λόγω της ιδιότητας του DAG ότι δεν έχει κύκλους, λόγω ότι $v_i \notin V_i$ (δεν γίνεται μία εργασία να απαιτεί να έχει εκτελεστεί ο εαυτός της) και ότι η v_i επίσης δεν θα είναι προαπαιτούμενη για καμμία εργασία του V_i.

Επομένως κάθε εργασία v_i θα έχει ένα σύνολο απο προαπαιτούμενες διεργασίες V_i, στις οποίες σίγουρα η ίδια δεν θα ανήκει στα προαπαιτούμενά τους V_j και η v_i είτε θα ανήκει σε κάποιο σύνολο V_k όπου $v_k \notin V_i$ και $v_k \notin V_j$ για κάθε $j \in V_i$, είτε θα είναι τελική, άρα καμμία δεν θα βασίζεται πάνω της, άρα $V_i=\Gamma^-(v_i)$ και $\forall v \in \Gamma^+(v_i), v_i \in V_k$, ή $\Gamma^+(v_i)=\emptyset$ αν τελική.
Άρα είναι αδύνατο κάποιου είδους ατέρμων βρόγχος και επομένως <u>κάθε</u> $v \in V$ μπορεί να ολοκληρωθεί αφού με απλά λόγια: η εκτέλεση πάει πάντα "μπροστά" (βέλη στο DAG), εφόσον το γράφημα είναι άκυκλο.

β) Ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης του V είναι ο χρόνος του longest path στο DAG, και αφού είναι topologically sorted (έστω με DFS και post ordering) μπορούμε να επωφεληθούμε απο τον παραλληλισμό.

Έστω F το σύνολο των εργασιών με $deg(\Gamma^+)=0$, άρα τελικές εργασίες που δεν είναι προαπαιτούμενες πουθενά. Επειτα ψάχνουμε το $\max_{v_i \in F}\{dist(v_i)\}$, που είναι ο ελάχιστος χρόνος ολοκλήρωσης όλων των εργασιών (με παραλληλισμό)

Αν δεν θέλουμε/μπορούμε να παίξουμε με γειτονιές, απλά με DP υπολογίζουμε το πόσος χρόνος χρειάζεται για να ολοκληρωθεί ένα task και κρατάμε το max.

$MIN\_TIME = \max_{v_i \in V}\{dist(v_i)\}$ όπου $dist(v_i) = \max\{d_i + dist(u)\}$ όπου $u \in V_i$

(2) Έστω G ο αρχικός γράφος. Σπάμε τον G σε δύο υπογραφήματα έτσι ώστε $R=\{$περιέχει μόνο κόκκινες ακμές$\}$* και $B=\{$μόνο μπλε ακμές$\}$*. Αφού δεν υπάρχουν μονοχρωματικοί κύκλοι, R κ' B είναι DAGs.

Απο εκφώνηση θέλουμε το 1^o μέρος του μονοπατιού να είναι μπλε και το 2^o μέρος κόκκινο, άρα $s \in B$ και $t \in R$ χωρίς βλάβη της γενικότητας. (αγνοούμε άλλες περιπτώσεις αφού δεν μας ενδιαφέρουν.)
Έστω C το σύνολο κόμβων που ανήκουν στο R και στο B, άρα $C = (V_R \cap V_B) - \{t\} - \{s\}$.

Αντιστρέφουμε τη φορά των ακμών του R.

Για κάθε κόμβο $v \in C$ τρέχουμε DP SP αλγόριθμο από s σε v και από t σε v (για αυτό αντιστρέψαμε) και διαλέγουμε την μικρότερη διαδρομή (η ελαφρύτερο μονοπάτι), συνολικά, δηλαδή $w(s,v) + w(t,v)$.

Άρα:

$$SPRB(s,t) = \min_{v_i \in C} \{ SP_B(v_i) + SP_R(v_i) \}$$

όπου $SP(v) = \min_{u \in \Gamma^-(v)} \{ w(u,v) + SP(u) \}$

όπου ξεκινάει από τον S στο B και απ' τον t στο R.

* κόμβους που συνδέονται από αυτό το χρώμα, με τις συνδέσεις τους

③ $G = (V, E, w)$ γράφος με MST $T = (V, E', w')$ με $E' \subseteq E$ και $w' \subseteq w$.

- Για κάθε βήμα, έστω e η ακμή που προστέθηκε/αφαιρέθηκε.
- Αν γίνει αφαίρεση ακμής και $e \notin E'$ αλλά $e \in E$, δεν κάνουμε τίποτα.
- Αν γίνει αφαίρεση ακμής και $e \in E'$, τότε καταλήγουμε με 2 MST's T_1 και T_2 όπου $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Επικαλούμαστε το cut property και διαλέγουμε την ελάχιστου βάρους ακμή e' από το σύνολο $C = E - E_{T_1} E_{T_2}$ έτσι ώστε $e' = (u,v)$ με $u \in V_{T_1}$ και $v \in V_{T_2}$.

- Αν γίνει πρόσθεση ακμής e στον G, ελέγχουμε $\forall e' \in E'$ ότι $w(e') \leq w(e)$. Επικαλούμαστε το cycle property, αφού η e θα δημιουργήσει κύκλο στο G. Έστω $e' \in C$, όπου C κύκλος που δημιουργήθηκε.
- Αν $w(e') \leq w(e)$ ισχύει $\forall e' \in E'$, δεν κάνουμε τίποτα
- Αν $w(e') > w(e)$ για κάποιο $e' \in E'$ αντικαθιστούμε το $\max_{e' \in E'}\{w(e')\}$ με την e που δημιουργησε τον κύκλο και μπορεί να ανήκει στο MST του G, καθώς αν η παραπάνω συνθήκη ισχύει, το T δεν είναι πια πια MST, άρα πρέπει να το κατασκευάσουμε.

4) Για να δείξουμε ότι το πρόβλημα Π= "Δύο-κλίκες" είναι NP-complete πρέπει:
1) $\Pi \in NP$
2) $\Pi' \leq_p \Pi$ όπου $\Pi' \in$ NP-Complete.

Άρα:

1) Έχουμε επαληθευτή E που παίρνει ως είσοδο το $\langle G, k \rangle$ ($G=(V,E)$) και ελέγχει εάν: Υπάρχουν 2 άγνωστα μεταξύ τους υποσύνολα του V, μεγέθους k, όπου κάθε $v_i \in V_1$ είναι συνδεδεμένο με κάθε άλλο $v_j \in V_1$, $i \neq j$, όμοια για V_2, κάτι που εύκολα ελέγχουμε σε πολ/κο χρόνο.

2) Θα ανάγουμε το ΚΛΙΚΑ στο ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ.
ΚΛΙΚΑ $\leq_p$ ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ και ξέρουμε ότι 3SAT $\leq_p$ ΚΛΙΚΑ, άρα ΚΛΙΚΑ $\in$ NP-Complete.

Έστω G το γράφημα της εκφώνησης. Προσθέτουμε μία κ-κλίκα στο G, χωρίς να την συνδέσουμε με τους αρχικούς κόμβους του G και έχουμε το νέο γράφημα T.

- Αν G $\in$ ΚΛΙΚΑ τότε T $\in$ ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ:
→ Αφού το G $\in$ ΚΛΙΚΑ και προσθέσαμε μία κ-κλίκα στο G για να παράγουμε το T, έχουμε στο T τουλάχιστον δύο κ-κλίκες που είναι ξένες μεταξύ τους, άρα T $\in$ ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ αν G $\in$ ΚΛΙΚΑ.

- Αν T $\in$ ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ τότε G $\in$ ΚΛΙΚΑ:
→ Αφού T $\in$ ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ και ξέρουμε ότι υπάρχει κ-κλίκα στο T*, ξένη του G, άρα την αφαιρέσουμε τότε το G πρέπει να περιέχει τουλάχιστον 1 κ-κλίκα, άρα G $\in$ ΚΛΙΚΑ.

* Και G υπογράφημα T, αφού T = G + κ-κλίκα ξένη.

Άρα ΚΛΙΚΑ $\leq_p$ ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ και ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ $\in$ NP, επομένως ΔΥΟ-ΚΛΙΚΕΣ $\in$ NP-COMPLETE.

□