Tema 3: Programación Lineal

Optimización de Sistemas (4º G. Ing. Software)

Pedro Luis Luque

16 de marzo de 2016

Índice

1. Ejercicios resueltos

1. RULISA produce cerveza rubia y negra. La cerveza rubia la vende por 5 $ el barril y la negra por 2 $. Para producir un barril de cerveza rubia necesitamos 2 Kgs de malta y 1 de cebada. Un barril de negra necesita 3 Kgs. de malta y 1 de cebada. Disponemos de 18 kgs. de malta y 7 de cebada. Formular el problema.

Solución:

Variables de decisión:

- x_1 =“número de barriles de cerveza rubia”
- x_2 =“número de barriles de cerveza negra”

Formulación:

$$\begin{array}{lrl} max & 5x_1 + 2x_2 & \\ s.a. & 2x_1 + 3x_2 & \leqq 18 \\ & x_1 + x_2 & \leqq 7 \\ & x_1, x_2 & \geqq 0 \end{array}$$

■

1.1. Resolviendo programación lineal con R

1.1.1. Con el paquete boot

```
library(boot)

## Warning: package 'boot' was built under R version 3.2.3
```

```
coef.z = c(5,2)
mat_A.menorigual = matrix(c(2,3,1,1),2,2,byrow=T)
coef.b = c(18,7)

# simplex(a, A1 = NULL, b1 = NULL, A2 = NULL, b2 = NULL, A3 = NULL,
#         b3 = NULL, maxi = FALSE, n.iter = n + 2 * m, eps = 1e-10)
#
# This function will optimize the linear function a%*%x
# subject to the constraints A1%*%x <= b1, A2%*%x >= b2,
# A3%*%x = b3 and x >= 0. Either maximization or minimization
# is possible but the default is minimization.

sol.simplex = simplex(coef.z,A1=mat_A.menorigual,b1=coef.b,maxi=TRUE)
sol.simplex

##
## Linear Programming Results
##
## Call : simplex(a = coef.z, A1 = mat_A.menorigual, b1 = coef.b, maxi = TRUE)
##
## Maximization Problem with Objective Function Coefficients
## x1 x2
##  5  2
##
##
## Optimal solution has the following values
## x1 x2
##  7  0
## The optimal value of the objective  function is 35.

names(sol.simplex)

##  [1] "soln"   "solved" "value"  "A"      "a"      "basic"  "maxi"
##  [8] "slack"  "obj"    "call"

sol.simplex$soln

## x1 x2
##  7  0

sol.simplex$value

##  b
## 35

sol.simplex$A  # Matriz de restricciones expresada en términos
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    0   -1    1    2
## [2,]    1   -1    0   -1

               # de variables no básicas
sol.simplex$a  # Coeficientes de Z con variables básicas

## [1] 0 3 0 5

               # con coeficientes igual a cero
sol.simplex$basic  # Los índices de las variables básicas

## [1] 3 1

                   # en la solución encontrada
sol.simplex$slack #Holgura de cada restricción <=

## [1] 4 0

sol.simplex$solved

## [1] 1

sol.simplex$maxi

## [1] TRUE

sol.simplex$obj

## x1 x2
##  5  2

sol.simplex$call

## simplex(a = coef.z, A1 = mat_A.menorigual, b1 = coef.b, maxi = TRUE)
```

1.1.2. Con el paquete linprog

El paquete linprog da bastante información sobre la resolución del problema lineal.

```
library(linprog)

## Loading required package: lpSolve

coef.z = c(5,2)
mat_A.menorigual = matrix(c(2,3,1,1),2,2,byrow=T)
coef.b = c(18,7)
```

```
sol.linprog = solveLP(coef.z,coef.b,mat_A.menorigual,maximum = T)
str(sol.linprog)

## List of 12
##  $ status    : num 0
##  $ opt       : num 35
##  $ iter1     : num 0
##  $ iter2     : num 1
##  $ allvar    :'data.frame': 4 obs. of  6 variables:
##   ..$ opt     : num [1:4] 7 0 4 0
##   ..$ cvec    : num [1:4] 5 2 0 0
##   ..$ min.c   : num [1:4] 2 -Inf -3 -Inf
##   ..$ max.c   : num [1:4] Inf 5 2.5 5
##   ..$ marg    : num [1:4] NA -3 0 -5
##   ..$ marg.reg: num [1:4] NA 4 NA 7
##  $ basvar    : num [1:2, 1] 7 4
##   ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
##   .. ..$ : chr [1:2] "1" "S 1"
##   .. ..$ : chr "opt"
##  $ solution  : Named num [1:2] 7 0
##   ..- attr(*, "names")= chr [1:2] "1" "2"
##  $ con       :'data.frame': 2 obs. of  6 variables:
##   ..$ actual  : num [1:2] 14 7
##   ..$ dir     : Factor w/ 1 level "<=": 1 1
##   ..$ bvec    : num [1:2] 18 7
##   ..$ free    : num [1:2] 4 0
##   ..$ dual    : num [1:2] 0 5
##   ..$ dual.reg: num [1:2] 4 7
##  $ maximum   : logi TRUE
##  $ lpSolve   : logi FALSE
##  $ solve.dual: logi FALSE
##  $ maxiter   : num 1000
##  - attr(*, "class")= chr "solveLP"
```

Resaltar aquí que se obtienen los valores de las variables duales (dual) para las restricciones. Esos valores indican cuanto cambiará la función objetivo si las restricciones se cambian una unidad. Aumentar el lado derecho de la segunda restricciónm (la cantidad de cebada) es lo más beneficioso (dual = 5).

```
coef.b = c(18,8)  # de 7 a 8 (aumento de una unidad)
solveLP(coef.z,coef.b,mat_A.menorigual,maximum = T)

##
##
## Results of Linear Programming / Linear Optimization
```

```
##
## Objective function (Maximum): 40
##
## Iterations in phase 1: 0
## Iterations in phase 2: 1
## Solution
##   opt
## 1   8
## 2   0
##
## Basic Variables
##     opt
## 1     8
## S 1   2
##
## Constraints
##   actual dir bvec free dual dual.reg
## 1      16  <=   18    2    0        2
## 2       8  <=    8    0    5        8
##
## All Variables (including slack variables)
##     opt cvec min.c max.c marg marg.reg
## 1     8    5     2   Inf   NA       NA
## 2     0    2  -Inf   5.0   -3        2
## S 1   2    0    -3   2.5    0       NA
## S 2   0    0  -Inf   5.0   -5        8
```

Vemos que el valor objetivo ha aumentado en 5 unidades, de 35 a 40.

1.1.3. Con el paquete lpSolve

```
library(lpSolve)
coef.z = c(5,2)
mat_A.menorigual = matrix(c(2,3,1,1),2,2,byrow=T)
coef.b = c(18,7)
dir.rest = c("<=","<=")
sol.lp = lp("max",coef.z,mat_A.menorigual,dir.rest,coef.b)
sol.lp

## Success: the objective function is 35

names(sol.lp)

##  [1] "direction"        "x.count"          "objective"
##  [4] "const.count"      "constraints"      "int.count"
```

```
##  [7] "int.vec"          "bin.count"        "binary.vec"
## [10] "num.bin.solns"    "objval"           "solution"
## [13] "presolve"         "compute.sens"     "sens.coef.from"
## [16] "sens.coef.to"     "duals"            "duals.from"
## [19] "duals.to"         "scale"            "use.dense"
## [22] "dense.col"        "dense.val"        "dense.const.nrow"
## [25] "dense.ctr"        "use.rw"           "tmp"
## [28] "status"
```

```
str(sol.lp)
```

```
## List of 28
##  $ direction       : int 1
##  $ x.count         : int 2
##  $ objective       : num [1:2] 5 2
##  $ const.count     : int 2
##  $ constraints     : num [1:4, 1:2] 2 3 1 18 1 1 1 7
##   ..- attr(*, "dimnames")=List of 2
##   .. ..$ : chr [1:4] "" "" "const.dir.num" "const.rhs"
##   .. ..$ : NULL
##  $ int.count       : int 0
##  $ int.vec         : int 0
##  $ bin.count       : int 0
##  $ binary.vec      : int 0
##  $ num.bin.solns   : int 1
##  $ objval          : num 35
##  $ solution        : num [1:2] 7 0
##  $ presolve        : int 0
##  $ compute.sens    : int 0
##  $ sens.coef.from  : num 0
##  $ sens.coef.to    : num 0
##  $ duals           : num 0
##  $ duals.from      : num 0
##  $ duals.to        : num 0
##  $ scale           : int 196
##  $ use.dense       : int 0
##  $ dense.col       : int 0
##  $ dense.val       : num 0
##  $ dense.const.nrow: int 0
##  $ dense.ctr       : num 0
##  $ use.rw          : int 0
##  $ tmp             : chr "Nobody will ever look at this"
##  $ status          : int 0
##  - attr(*, "class")= chr "lp"
```

```
sol.lp$solution
```

```
## [1] 7 0

sol.lp$objval

## [1] 35
```

Estudio de la sensibilidad con la función lp():

```
sol.lp2 = lp("max",coef.z,mat_A.menorigual,dir.rest,coef.b,compute.sens = TRUE)
sol.lp2

## Success: the objective function is 35
```

El estudio de la sensibiliadd de los coeficientes de la función objetivo se obtienen:

```
sol.lp2$sens.coef.from

## [1]  2e+00 -1e+30

sol.lp2$sens.coef.to

## [1] 1e+30 5e+00
```

Nos permiten obtener el análisis de dualidad:

```
sol.lp2$duals

## [1]  0  5  0 -3
```

Donde sí tengo "n" variables y "m" restricciones, los primeros m valores corresponden a los valores duales de las restricciones y los siguientes n valores a los duales de las actuales variables de decisión. Puedo ver la sensibilidad de los duales también:

```
sol.lp2$duals.from

## [1] -1.000000e+30 -8.881784e-16 -1.000000e+30 -1.000000e+30

sol.lp2$duals.to

## [1] 1e+30 9e+00 1e+30 4e+00
```

No me devuelve las holguras, pero las puedo calcular a mano. Primero devuelvo la matriz de las restricciones:

```
sol.lp2$constraints

##                  [,1] [,2]
##                     2    1
```

```
##                     3    1
## const.dir.num       1    1
## const.rhs          18    7
```

La matriz se devuelve transpuesta (es la forma en que lpSolve trabaja internamente). La primera columna es la primera restricción, la segunda es la segunda restricción. La última fila representa a los términos independientes, la anteúltima son referencias al sentido de las restricciones (2 es $\geq$, 1 es $\leq$ y 3 $=$) y los primeros valores los coeficientes de las restricciones. Entonces, podemos hacer:

```
sum(sol.lp2$constraints[1:2,1] * sol.lp2$solution) - sol.lp2$constraints[4,1]

## const.rhs
##        -4

sum(sol.lp2$constraints[1:2,2] * sol.lp2$solution) - sol.lp2$constraints[4,2]

##     const.rhs
## -8.881784e-16
```

Supongamos que de las dos variables queremos hacer que la segunda sea entera:

```
sol.lp3 = lp("max",coef.z,mat_A.menorigual,dir.rest,coef.b,
             compute.sens = TRUE,int.vec = c(2))
sol.lp3

## Success: the objective function is 35
```

Con el parámetro "int.vec" puedo pasarle a lp un vector con los índices de las variables enteras. Si quiero ver cuáles eran las variables enteras:

```
sol.lp3$int.count #Me devuelve la cantidad de variables enteras

## [1] 1

sol.lp3$int.vec # Devuelve los índices de las variables enteras

## [1] 2

sol.lp3$solution[sol.lp3$int.vec] # Devuelvo los valores de las variables enteras

## [1] 0
```

Si quiero que la primera variable sea binaria, entonces uso el parámetro “binary.vec”:

```
sol.lp4 = lp("max",coef.z,mat_A.menorigual,dir.rest,coef.b,
             compute.sens = TRUE,int.vec = c(2),binary.vec = c(1))
sol.lp4
```

```
## Success: the objective function is 15

sol.lp4$solution

## [1] 1 5

sol.lp4$bin.count

## [1] 1

sol.lp4$binary.vec

## [1] 1

sol.lp4$solution[sol.lp4$binary.vec]

## [1] 1
```

Si tengo todas mis variables enteras, puedo reemplazar int.vec por "all.int=TRUE":

```
sol.lp5 = lp("max",coef.z,mat_A.menorigual,dir.rest,coef.b,
             compute.sens = TRUE,all.int = T)
sol.lp5

## Success: the objective function is 35

sol.lp5$solution

## [1] 7 0
```

Y si son todas binarias, uso "all.bin=TRUE":

```
sol.lp6 = lp("max",coef.z,mat_A.menorigual,dir.rest,coef.b,
             compute.sens = TRUE,all.bin = T)
sol.lp6

## Success: the objective function is 7

sol.lp6$solution

## [1] 1 1
```

Nota: El paquete lpSolve supone que todas las variables son no negativas ($x_i \geq 0$). Si queremos utilizar variables libres (sin restricción de signo), es necesario hacer la siguiente transformación sobre cada variable libre: $x_i = x_i^A - x_i^B$, donde x_i^A y x_i^B son no negativas. Con estas transformaciones el problema se convertiría en un problema con variables no negativas y podría resolverse con lpSolve.

2. Un empacador de nueces dispone de 150 Kgs. de cacahuetes, 100 de nueces y 50 de almendras. El empacador vende tres tipos de mezclas que contienen:

1)	80 %	cacahuetes,	10 %	nueces y	10 %	almendras
2)	50 %	cacahuetes,	30 %	nueces y	20 %	almendras
3)	20 %	cacahuetes,	50 %	nueces y	30 %	almendras

La venta la hace preferiblemente en cajas de 10 kilos, aunque vende por kilos las sobrantes. Las cajas las vende a 20, 30 y 50 u.m. dependiendo de la mezcla. ¿Cómo ha de ser la producción óptima?

Solución:

Variables de decisión: x_i =“número de cajas de mezcla i-ésima (10 kg)”, $i = 1, 2, 3$.

Formulación:

$$\begin{array}{lrl}
max & 20x_1 + 30x_2 + 50x_3 & \\
s.a. & 0.8 \times 10x_1 + 0.5 \times 10x_2 + 0.2 \times 10x_3 & \leqq 150 \\
 & 0.1 \times 10x_1 + 0.3 \times 10x_2 + 0.5 \times 10x_3 & \leqq 100 \\
 & 0.1 \times 10x_1 + 0.2 \times 10x_2 + 0.3 \times 10x_3 & \leqq 50 \\
 & x_i & \geqq 0,\ i = 1, 2, 3
\end{array}$$

■

2. Ejercicios propuestos

3. El granjero Juan Luis tiene dos granjas en las que puede plantar trigo o maíz. La tabla de rendimientos y costo por Ha. plantada viene dada por:

	GRANJA 1	GRANJA 2
REND/HA/MAIZ	500	650
COSTO/HA/MAIZ	100	120
REND/HA/TRIGO	400	350
COSTO/HA/TRIGO	90	80

Cada granja tiene 100 Has y debemos producir 11.000 Kgs. de trigo y 7.000 de maíz. Encontrar la producción óptima que minimiza los costos.

4. LATASA fabrica 2 tipos de acero en tres fábricas distintas. Durante un mes cualquiera cada fábrica dispone de 200 horas de altos hornos. El tiempo y costo de producción de una tonelada de acero en cada fábrica se expresa en la tabla siguiente

	ACER0 1		ACERO 2	
	COSTO	TIEMPO	COSTO	TIEMPO
FABRICA 1	10	20	11	22
FABRICA 2	12	24	9	18
FABRICA 3	14	28	10	30

Cada mes LATASA ha de fabricar al menos 500 toneladas de acero 1 y 600 de acero 2. Encontrar la planificación óptima.

5. Un vinatero compra uvas a un agricultor para fabricar dos tipos de vinos A y B. Gasta 80 u.m. en comprar las uvas necesarias para fabricar una botella de vino de tipo A y 70 u.m. para una de tipo B y al menos el 40 % pero no más del 70 % del vino fabricado debe ser del tipo A.

Se estima que la demanda del vino de tipo A se incrementa en 5 botellas por cada 100 u.m. usadas en promover el vino de tipo A, y la demanda de tipo B se incrementa en 8 botellas por cada 100 u.m. usadas en su promoción. El vino de tipo A se vende a 125 u.m. la botella y el tipo B a 105 u.m. El vinatero dispone de un millón de u.m. para comprar uvas y anunciar sus productos.

Formular el problema en orden a obtener la cantidad de vino a producir de los tipos A y B para maximizar la ganancia.

6. Un jugador participa en un juego que requiere dividir el dinero apostado entre cuatro opciones diferentes. El juego tiene tres resultados. La tabla que sigue indica la ganancia (o pérdida) correspondiente por unidad monetaria depositada en cada una de las cuatro opciones de los tres resultados.

	Ganancia (o pérdida) por unidad monetaria deposita en la opción dada			
Resultado	1	2	3	4
1	-3	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	-8

Supóngase que el jugador tiene un total de 500$, que puede jugar sólo una vez. El resultado exacto del juego no se conoce con anticipación, y afrontando esta incertidumbre el jugador decidió hacer la asignación que maximizaría el ingreso mínimo. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

7. Determine, si es posible, una solución factible del sistema de inecuaciones

$$\begin{aligned} \ln(x_1 + x_2 - x_3 + 1) - \ln(2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2) &\leqq 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &\leqq 1 \\ -x_2 + x_3 &\leqq -1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

8. Se considera la familia F formada por cada cuadrado contenido en el primer cuadrante que contiene a los puntos (1,2) y (2,3), tiene los lados paralelos a los ejes coordenados y su esquina superior derecha pertenece a la recta $y = 2x - 4$. Hallar el cuadrado de F que tiene mínimo perímetro.

9. Una pequeña compañía fabricante de refrescos conoce que las predicciones de demanda para los próximos 3 meses serán $d_i,\ i = 1, 2, 3$. En cualquier mes puede producir un máximo de D litros con un costo de b u.m. por litro. Los empleados pueden trabajar horas extras, si fuese necesario, para incrementar la producción coste unitario c u.m. $(c > b)$. La compañía puede almacenar el producto de un mes a otro con un costo de s u.m. por litro y mes.

Formular el problema de Programación Lineal que determina la solución que satisface las demandas mensuales con un costo total de producción y almacenado menor.

10. El consejo de accionistas de un banco dispone de 1.5 millones de dólares para invertir en un período de 3 años. Actualmente sólo consideran tres posibles inversiones de interés: A, B y C. La inversión A produce un beneficio anual del 7 %, B produce un 5 % el primer año y un 8 % los años sucesivos; por último la inversión C da lugar a un beneficio del 20 % al final del tercer año, pero sólo pueden comprarse acciones de C en el primer año. El consejo conoce una nueva inversión que saldrá al mercado a principios del segundo año (inversión D) y se sabe que dará unos beneficios del 16 % a finales del tercer año. Modelar como un problema de Programación Lineal el problema de determinar cuánto y cuándo debe invertirse en cada posible alternativa para maximizar el beneficio total.

11. Una agencia de planificación gubernamental pretende determinar las fuentes de suministro de gasoil para su uso en n plantas. Existen m puntos de suministro de interés. Supongamos que la cantidad máxima ofertada por el centro de suministro i es a_i litros y que la demanda de la planta j es b_j litros. Sea c_{ij} el costo unitario de transporte del gasoil desde el centro i a la planta j.

(a) Formular el problema que minimiza el costo total de transporte.

(b) Supongamos que se incorpora un descuento en el coste unitario de transporte c_{ij} cuando la cantidad pedida sobrepasa un cierto nivel α. ¿Cómo incorporaría esta información al modelo desarrollado en la parte anterior?

12. Un tribunal de Selectividad está planificando la valoración que se hará de las tres partes de que consta el examen: Lengua, Ciencias e Idiomas. Quieren dar valoraciones sobre 10, de forma que la de Ciencias sea mayor o igual a la de Lengua más la de Idiomas. Además ninguna de las valoraciones puede ser inferior a 2. Formular el problema de determinar aquella planificación factible que conceda una mayor valoración a la parte de Idiomas.

13. Una sociedad siderúrgica dispone de tres cadenas de laminadoras A,B y C. Se pueden utilizar estas cadenas de laminadoras con vistas a producir 4 clases de láminas ($\frac{4}{10}$,$\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$ y $\frac{7}{10}$ de mm. de espesor). Se supone que las cantidades totales de recursos utilizados y el coste total de producción son funciones lineales homogéneas de las cantidades de productos obtenidas. La fábrica para el periodo examinado debe satisfacer una demanda que corresponde a unos pedidos para cada categoría de láminas. El periodo de producción examinado es el mes. Los datos están reunidos en las tablas siguientes:

Costes de fabricación de una tonelada de lámina en pesetas

lámina	4/10	5/10	6/10	7/10
Cadena A	60	50	50	45
Cadena B	80	70	75	70
Cadena C		60	60	

Capacidades límites(mes)

Cadena A	Cadena B	Cadena C
600 horas	540 horas	360 horas

Tiempo de fabricación en horas de una tonelada de lámina

	4/10	5/10	6/10	7/10
A	2/5	3/10	3/10	1/4
B	4/5	3/5	7/10	3/5
C		1/2	2/5	

Tabla de demanda de láminas a satisfacer al mes

4/10	5/10	6/10	7/10
500 Tm	1200 Tm	1500 Tm	300 Tm

Hallar la producción para minimizar el coste total.

14. Según el convenio del sector, los empleados de una tienda de electrodomésticos trabajan 5 días consecutivos y descansan dos días consecutivos.

Se desea determinar cuál es el menor número de empleados que haría falta tener en plantilla, si se sabe que se necesitan, de Lunes a Domingo, 17, 13, 15, 19, 14, 16, 11, trabajadores.

(a) Formular el problema que determina el número óptimo de trabajadores en plantilla.

(b) Ídem si cada trabajador puede trabajar un día más, a un sueldo equivalente al de 1.3 trabajadores/día.

15. **Problema de la dieta.** En un centro de nutrición se desea obtener la dieta de coste mínimo con unos determinados requisitos vitamínicos para un grupo de niños que van a asistir a campamentos de verano. El especialista estima que la dieta debe contener entre 26 y 32 unidades de vitamina A, al menos 25 unidades de vitamina B y 30 de C, y, a lo sumo, 14 de vitamina D. La tabla nos da el número de unidades de las distintas vitaminas por unidad de alimento consumido para seis alimentos elegidos, denominados 1,2,3,4,5,6, así como su coste por unidad:

	Vitaminas				Coste por
Alimentos	A	B	C	D	unidad
1	1	1	0	1	10
2	1	2	1	0	14
3	0	1	2	0	12
4	3	1	0	1	18
5	2	1	2	0	20
6	1	0	2	1	16

Se desea construir un modelo de programación lineal para conocer la cantidad de cada alimento que hay que preparar y que satisfaga los requisitos propuestos con coste mínimo.

16. Elaboración de zumos. Una empresa de alimentación produce zumos de pera, naranja, limón, tomate, manzana, además de otros dos tipos denominados H y G que son combinados de algunos de los anteriores. La disponibilidad de fruta para el periodo próximo, así como los costes de producción y los precios de venta para los zumos, vienen dados en la tabla

Fruta	Disponibilidad máxima (kg)	Coste (u.m./kg)	Precio venta (u.m./l)
Naranja (N)	32000	94	129
Pera (P)	25000	87	125
Limón (L)	21000	73	110
Tomate (T)	18000	47	88
Manzana (M)	27000	68	97

Las especificaciones y precios de venta de los combinados vienen dados en la tabla

Combinado	Especificación	Precio venta (u.m./l)
	No más del 50 % de M	
H	No más del 20 % de P	100
	No menos del 10 % de L	
	40 % de N	
G	35 % de L	120
	25 % de P	

La demanda de los distintos zumos es grande, por lo que se espera vender toda la producción. Por cada kg de fruta, se produce un litro del correspondiente zumo. Determinar los niveles de producción de los siete zumos, de manera que se tenga beneficio máximo en el periodo entrante.