Τεχνικές βελτιστοποίησης

Δεκέμβριος 2023

3η Εργαστηριακή Άσκηση

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

Καμπούρης-Μίχος Διόνυσος

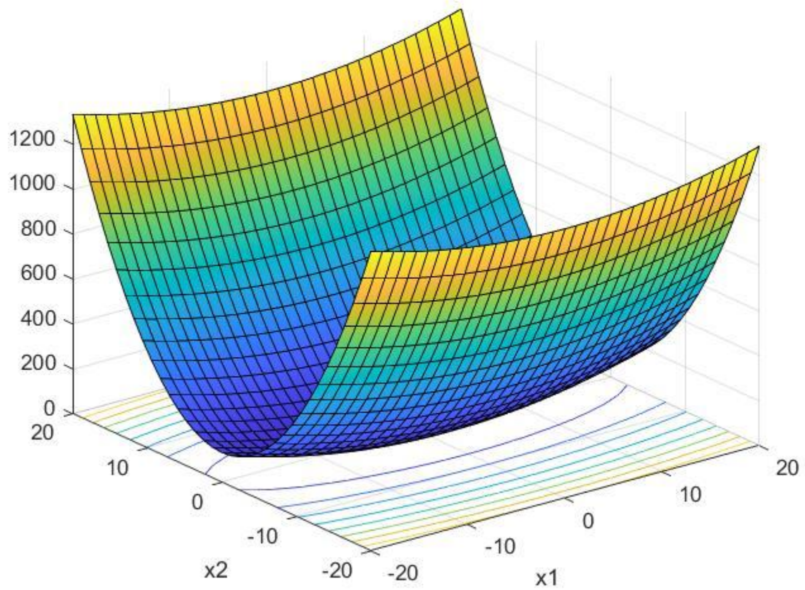
7691

Εισαγωγή

Η τρίτη εργασία έχει ως ζητούμενο την ελαχιστοποίηση της παρακάτω συνάρτησης αρχικά χωρίς περιορισμούς και στη συνέχεια με περιορισμούς καθώς και τη σύγκριση τον δύο μεθόδων για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^2 + 3y^2$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα:



Από το τύπο και από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι προφανές ότι το ελάχιστο είναι το *f(0,0)=0.*

<u>Θέμα 1:</u>

Στο πρώτο ερώτημα μας ζητείται με τη χρήση της μεθόδου Μέγιστης Καθόδου η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης με **ε=0.01** και i) **γ_κ=0.1** ii) **γ_κ=0.3** iii) **γ_κ=3** iv) **γ_κ=5**.

Στις δύο πρώτες από τις παραπάνω περιπτώσεις η μέθοδος συγκλίνει στο σωστό αποτέλεσμα ενώ στις άλλες τρείς όχι. Αυτό συμβαίνει λόγω του περιορισμού που οφείλουμε να πάρουμε για το **γ_κ** προκειμένου η μέθοδος να συγκλίνει. Το όριο για την τιμή του **γ_κ** προκύπτει ως εξής.

Αρχικά παίρνουμε το gradient της *f*.

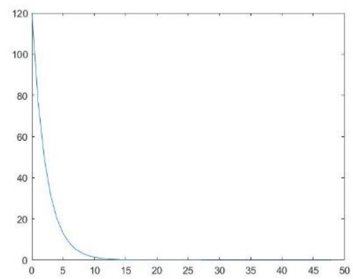
$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_{1k} \\ 6x_{2k} \end{bmatrix}$ και στη μέθοδο μας έχουμε $\begin{bmatrix} x_{1\ k+1} \\ x_{2\ k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \gamma_\kappa \begin{bmatrix} \frac{2}{3}x_{1k} \\ 6x_{2k} \end{bmatrix}$

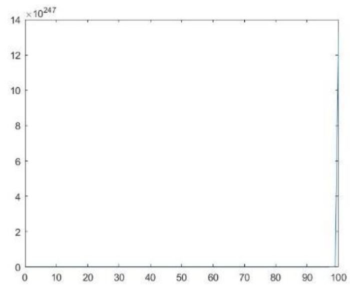
Από όπου προκύπτουν οι δύο εξισώσεις: $\begin{cases} x_{1\ k+1} \\ x_{2\ k+1} \end{cases} = \begin{cases} \left(1-\frac{2}{3}\gamma\right)x_{1k} \\ (1-6\gamma)x_{2k} \end{cases}$

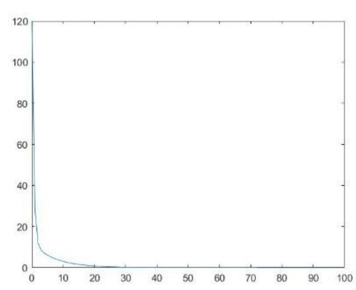
Και επειδή το ελάχιστο της συνάρτησης είναι το *f(0,0)=0* θα πρέπει για να συγκλίνει:

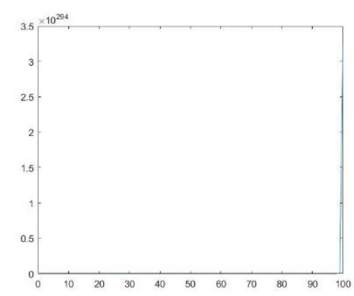
$\begin{cases} \left|1-\frac{2}{3}\gamma\right| < 1 \\ |1-6\gamma| < 1 \end{cases}$ από όπου τελικά παίρνουμε $0 < \gamma_\kappa < \frac{1}{3}$ για αυτό και στις δύο τελευταίες περιπτώσεις ο αλγόριθμος δε συγκλίνει.

Παρακάτω βλέπουμε τα διαγράμματα της τιμής της *f* συναρτήσει των επαναλήψεων και για τις τέσσερεις περιπτώσεις.





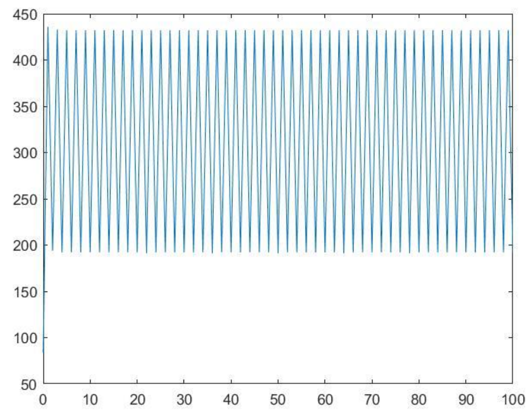




Θέμα 2:

Στα επόμενα ερωτήματα υλοποιούμε την μέθοδο καθόδου με προβολή καθώς έχουμε περιορισμό για τα x,y της συνάρτησης. Στη μέθοδο με προβολή έχουμε $\gamma'_\kappa=\gamma_\kappa s_k$ με τον περιορισμό του πρώτου ερωτήματος να ισχύει τώρα για το γ'_κ.

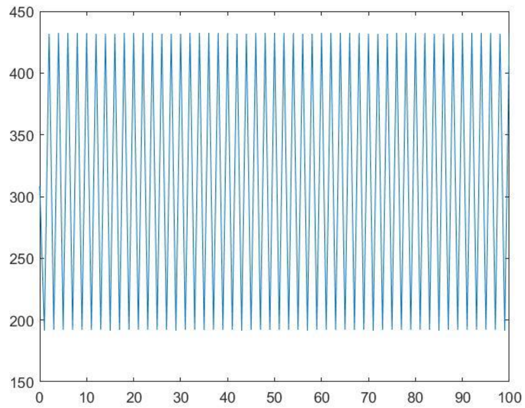
Στο δεύτερο ερώτημα μας δίνονται τα γ_κ=0,5 s_κ=5 και σημείο εκκίνησης το (5,-5), άρα έχουμε $\gamma'_\kappa=\gamma_\kappa s_k=2.5>0.33$ άρα δε περιμένουμε η μέθοδος να συγκλίνει όπως και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα όπου παρατηρείται ταλάντωση της τιμής της *f* μεταξύ δύο τιμών.



Αυτό συμβαίνει λόγω του περιορισμού στις τιμές των (x,y) και αποτελεί και τη βασική διαφορά με τη μέθοδο του πρώτου ερωτήματος όπου η τιμή της *f* κατέληγε στο άπειρο μετά από αρκετές κλήσεις.

Θέμα 3:

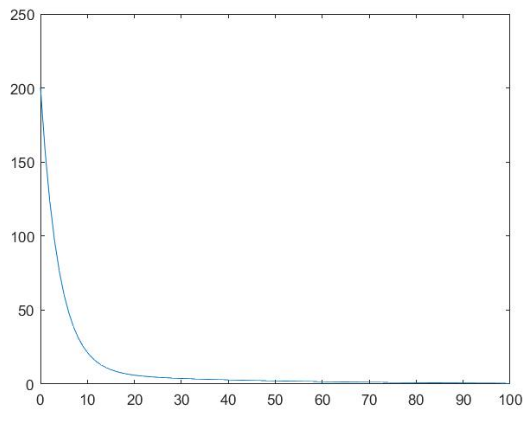
Στο τρίτο ερώτημα μας δίνονται τα $\gamma_\kappa=0,1$ $s_\kappa=15$ και σημείο εκκίνησης το (-5,10), άρα έχουμε $\gamma'_\kappa=\gamma_\kappa s_k=1.5>0.33$ και εδώ όπως και στο προηγούμενο ερώτημα δε περιμένουμε η μέθοδος να συγκλίνει όπως και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα όπου έχουμε ξανά ταλάντωση της τιμής της *f* μεταξύ δύο τιμών.



Προκείμενου να συγκλίνει η μέθοδος μπορούμε απλά να πειράξουμε μία από τις δυο σταθερές γ_κ ή s_k ώστε το γινόμενό τους $\gamma'_\kappa<0.33$.

Θέμα 4:

Στο τελευταίο ερώτημα μας δίνονται τα $\gamma_\kappa=0.2$ $s_\kappa=0.1$ και σημείο εκκίνησης το (8,-10), άρα έχουμε $\gamma'_\kappa=\gamma_\kappa s_k=0.02<0.33$ και εδώ αντίθετα με τα προηγούμενα ερωτήματα περιμένουμε η μέθοδος να συγκλίνει όπως και φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Η μόνη παρατήρηση που θα μπορούσαμε να κάνουμε εδώ είναι ότι το σημείο εκκίνησης βρίσκεται εξ αρχής εκτός των ορίων για αυτό και η εκκίνηση του αλγορίθμου γίνεται από το σημείο (5,-8) δηλαδή από τα όρια του χορίου που μας.