Τεχνικές βελτιστοποίησης

Νοέμβριος 2023

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών χωρίς περιορισμούς με χρήση παραγώγων

Καμπούρης-Μίχος Διόνυσος

7691

Εισαγωγή

Η δεύτερη εργασία έχει ως ζητούμενο την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης χωρίς περιορισμούς:

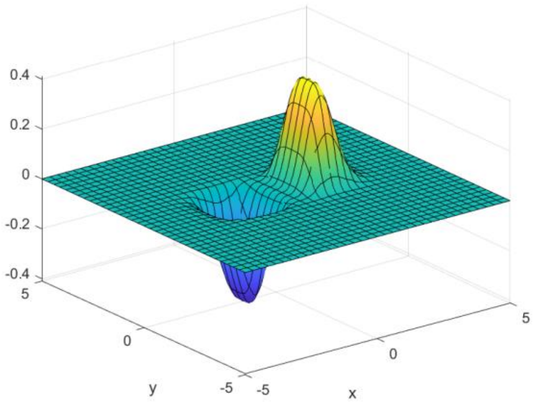
- $f(x) = x^3 e^{-x^2-y^4}$

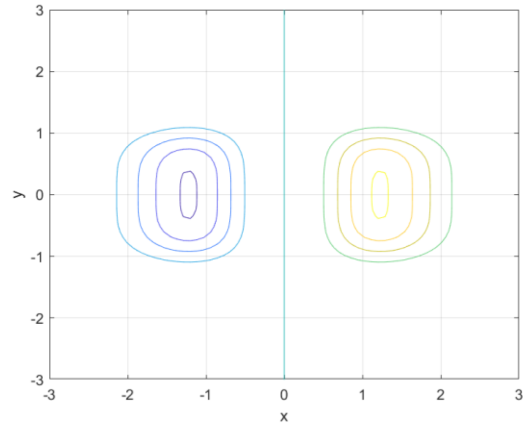
Για την αναζήτηση του ελαχίστου θα χρησιμοποιηθούν με τη σειρά οι τρεις παρακάτω μέθοδοι:

- Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου (Steepest Descent)
- Μέθοδος Newton
- Μέθοδος Levenberg - Marquardt

Θέμα 1:

Στο πρώτο ερώτημα ζητείται η σχεδίαση της συνάρτησης *f.* Δημιουργήσαμε δύο γραφικές παραστάσεις για την *f,* στην πρώτη βλέπουμε την απεικόνιση της *f* στον τρισδιάστατο χώρο, ενώ στο δεύτερο τις ισοϋψείς καμπύλες της συνάρτησης.





Από τις γραφικές παραστάσεις μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η *f* παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για αρνητικά **x** και **y** κοντά στο μηδέν, ολικό μέγιστο για θετικά **x** και **y** κοντά στο μηδέν αλλά και ένα σαγματικό σημείο κοντά στο (0,0).

Θέμα 2:

Σε αυτό το ερώτημα χρησιμοποιούμε την μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου για την ελαχιστοποίηση της *f.* Για την επιλογή του βήματος γ_κ επιλέχθηκαν τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις:

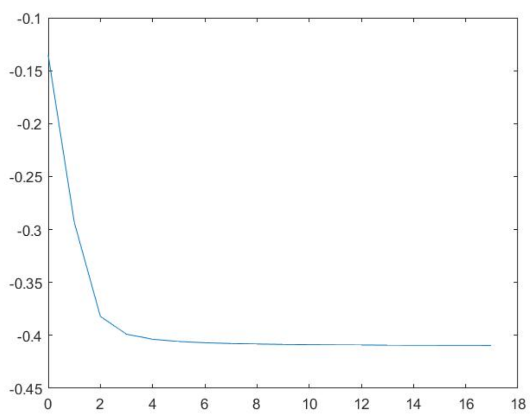
- σταθερό (γ_κ=0.5)
- τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_\kappa + \gamma_\kappa d_\kappa)$
- σύμφωνα με τον κανόνα Armijo

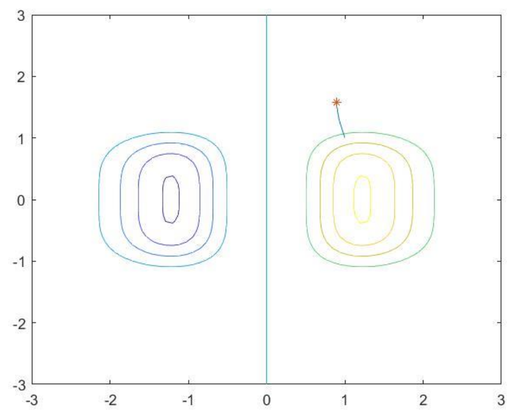
Για την κάθε προσέγγιση εξήγαμε δύο διαφορετικά διαγράμματα, στο ένα φαίνεται η τιμή της f συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων ενώ στο άλλο βλέπουμε την πορεία του ζεύγους συντεταγμένων (x,y) μέχρι τον τερματισμό του αλγορίθμου.

Μας δόθηκαν τρία διαφορετικά σημεία εκκίνησης του αλγορίθμου (0,0), (1,1) και (-1,-1). Στο σημείο (0,0) όλες οι μέθοδοι εγκλωβίζονται καθώς η κλίση της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο είναι μηδέν.

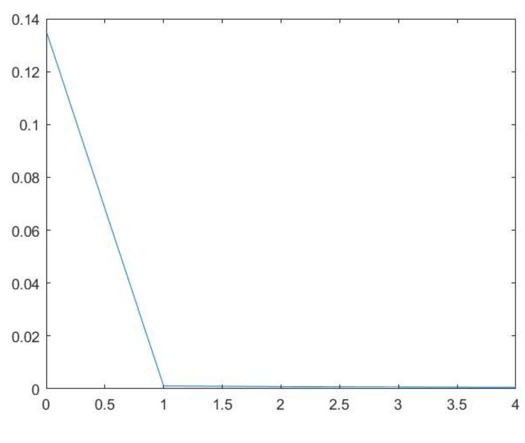
<u>Σημείο εκκίνησης (1,1)</u>

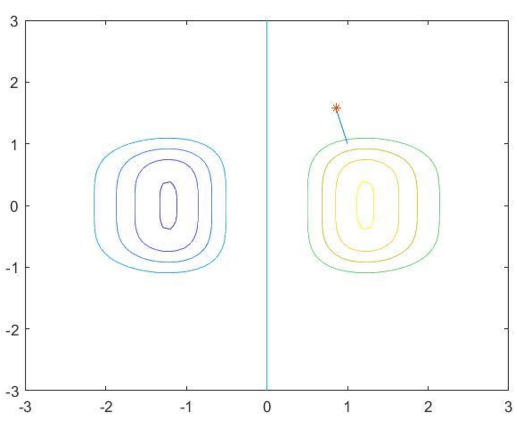
Βήμα σταθερό (γ_κ=0.5)



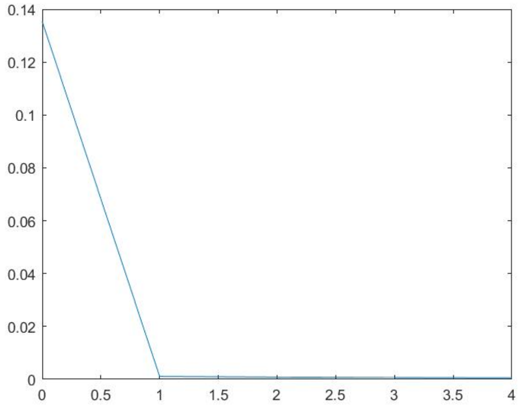


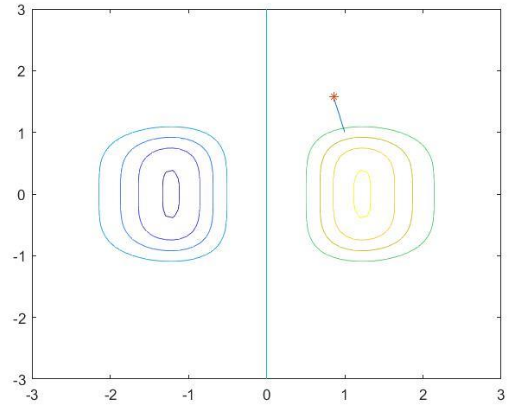
Βήμα τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_\kappa + \gamma_\kappa d_\kappa)$





Βήμα σύμφωνα με τον κανόνα Armijo

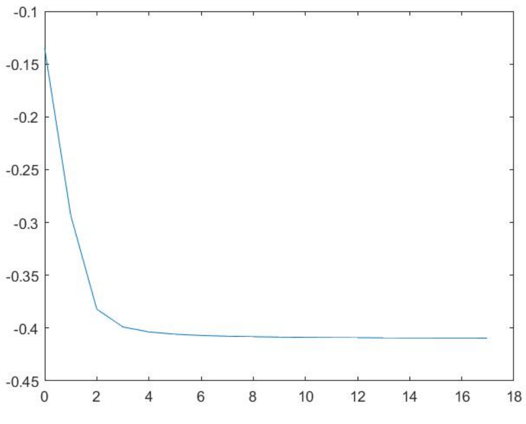


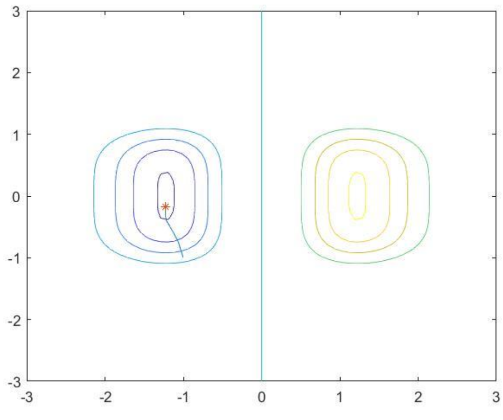


Για σημείο εκκίνησης το (1,1) παρατηρούμε παρόμοιο πρόβλημα με το σημείο (0,0) μόνο που σε αυτή τη περίπτωση το σημείο τερματισμού του αλγορίθμου είναι τοπικό ελάχιστο της *f*. Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείτε και στις υπόλοιπες μεθόδους οπότε τα διαγράμματα με σημείο εκκίνησης το (1,1) παραλείπονται όπως και αυτά του (0,0).

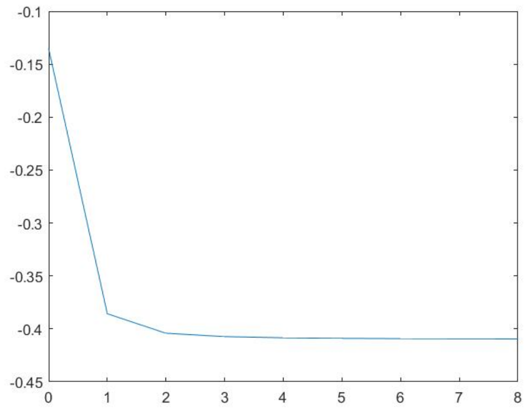
<u>Σημείο εκκίνησης (-1,-1)</u>

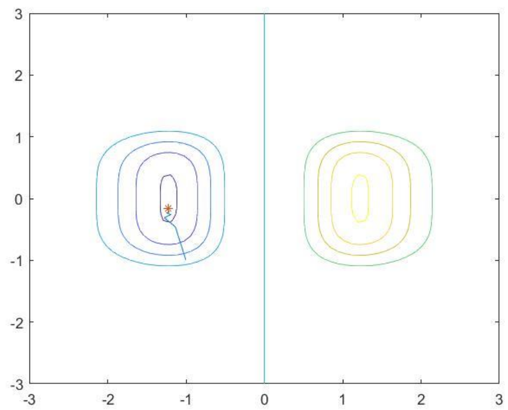
Βήμα σταθερό (γ_κ=0.5)



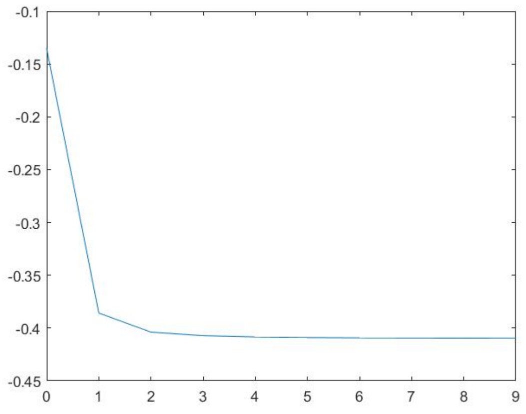


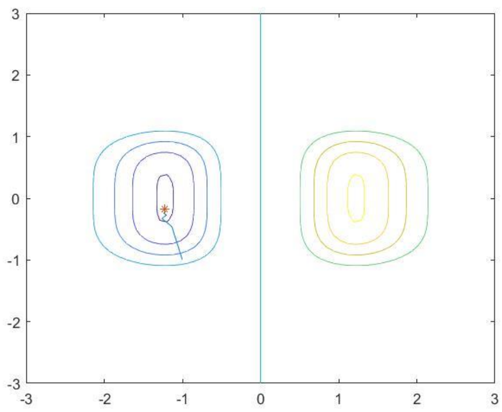
Βήμα τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_\kappa + \gamma_\kappa d_\kappa)$





Βήμα σύμφωνα με τον κανόνα Armijo





Από τα διαγράμματα συμπεραίνουμε ότι η δεύτερη και τρίτη προσέγγιση για το βήμα γ_κ είναι εμφανέστατα καλύτερες από την πρώτη, με τη προσέγγιση που ελαχιστοποιεί την $f(x_\kappa + \gamma_\kappa d_\kappa)$ να «κερδίζει» για μία επανάληψη. Σίγουρα η αποδοτικότητα των προσεγγίσεων επηρεάζεται, στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης από τον αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε, στην περίπτωση μας ο αλγόριθμος του χρυσού τομέα από την πρώτη εργασία και στην προσέγγιση με βάση τον κανόνα Armijo από τις σταθερές που επιλέχθηκαν (α=0.001 και β=0.03).

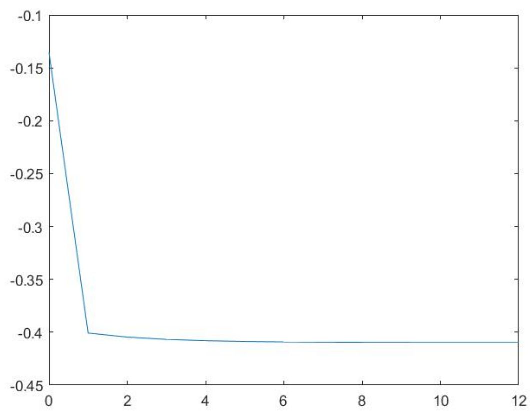
Θέμα 3:

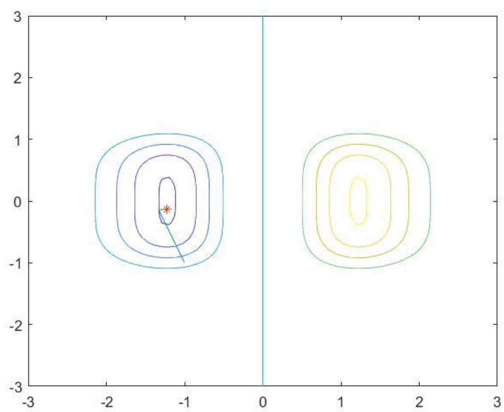
Στη μέθοδο Newton η αναζήτηση του ελαχίστου γίνεται προς την κατεύθυνση $d_k= -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \times \nabla f(x_k)$. Όπου ο εσσιανός πίνακας πρέπει να είναι θετικά ορισμένος. Στη περίπτωση μας όμως και όταν το σημείο εκκίνησης είναι το (-1,-1) αλλά και το (1,1) ο πίνακας έχει αρνητική ιδιοτιμή λ=-0.7656 άρα ο αλγόριθμος δε μπορεί να συνεχίσει στο επόμενο βήμα.

Θέμα 4:

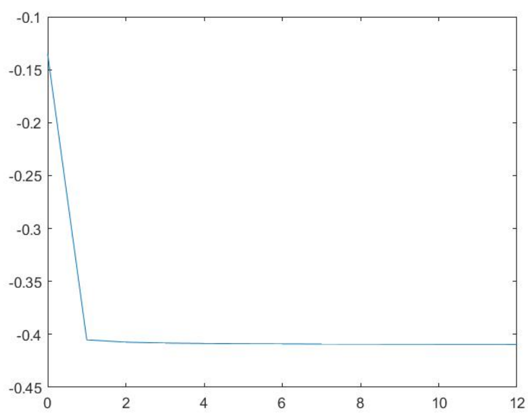
Λύση στο πρόβλημα που προκύπτει στη μέθοδο Newton μας δίνει η μέθοδος Leveneberg-Marquqardt. Η οποία αποτελεί μια τροποποίηση της μεθόδου Newton όπου επιλέγεται $d_k = [\nabla^2 f(x_k) + \mu_\kappa \cdot I]^{-1}$ με $\mu_\kappa>0$ έτσι ώστε ο πίνακας $[\nabla^2 f(x_k) + \mu_\kappa \cdot I]$ να είναι θετικά ορισμένος. Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα που προκύπτουν με τη χρήση της μεθόδου Leveneberg-Marquqardt και για σημείο εκκίνησης το (-1,-1).

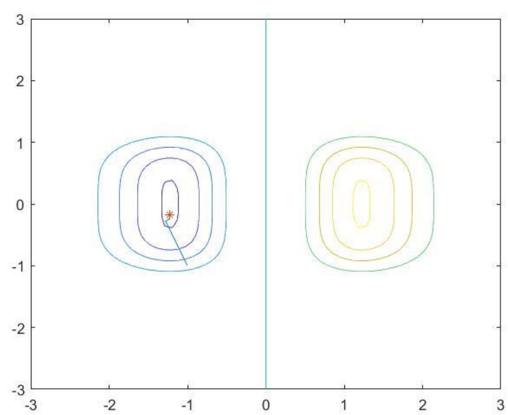
Βήμα σταθερό (γ_κ=0.5)



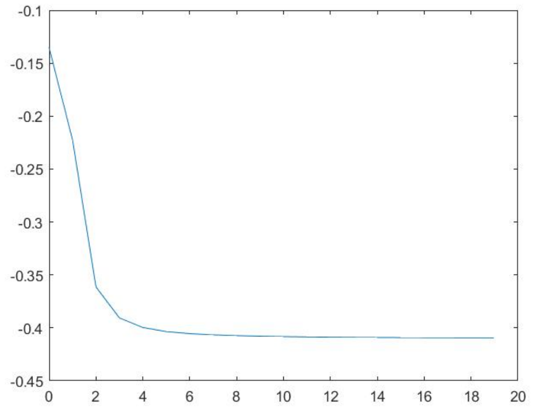


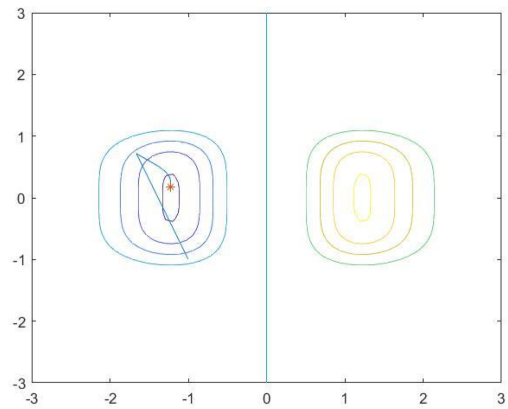
Βήμα τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την $f(x_\kappa + \gamma_\kappa d_\kappa)$





Βήμα σύμφωνα με τον κανόνα Armijo





Από τα αποτελέσματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στην περίπτωση μας και με τις επιλογές αρχικοποίησης που κάναμε η μέθοδος της Μέγιστης Καθόδου δίνει ελαφρώς ταχύτερα αποτελέσματα αν και η μέθοδος Leveneberg-Marquqardt φαίνεται να συγκλίνει γρηγορότερα στη τελική τιμή για το ελάχιστο. Σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι ο αριθμός τον επαναλήψεων της μεθόδου Leveneberg-Marquqardt επηρεάζεται άμεσα από τη επιλογή του μ_κ=0.3. Ενδεικτικά παρουσιάζονται τα διαγράμματα για μ_κ=0.4 και βήμα σύμφωνα με τον κανόνα Armijo όπου βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει σε 14 επαναλήψεις σε αντίθεση με τις 19 όταν μ_κ=0.3.