

DESIGUALDADES LINEALES MATRICIALES EN EL DISEÑO INTEGRADO DE PROCESOS

Omar Pérez, Williams Colmenares
Dpto. Procesos y Sistemas, Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela.
email: operez@usb.ve

Pastora Vega, Mario Sutil
Dpto. Informática y Automática, Universidad de Salamanca, Salamanca, España.
email: pvega@usal.es

Resumen

En este trabajo se presenta una metodología de diseño de procesos que toma en cuenta ciertas condiciones de controlabilidad de la planta a Lazo Abierto basados en Desigualdades Lineales Matriciales LMIs. Para esto se resuelve un problema de optimización que considera las ecuaciones dinámicas de la planta, las restricciones de operación y las condiciones de controlabilidad basadas en Desigualdades Lineales Matriciales LMIs. El problema se ataca como uno no-lineal para la optimización con el modelo de la planta y las restricciones de operación, y como uno lineal, linealizando en cada iteración alrededor del punto de operación óptimo calculado, resolviendo las restricciones tipo LMI impuestas. Condiciones multiobjetivo basados en normas, rechazo a perturbación y ubicación de polos son implementados en la etapa lineal. La metodología es probada sobre un proceso físico de naturaleza hidráulica, donde se verifica el cumplimiento de las restricciones, especialmente las impuestas con las LMIs.

Palabras Claves: Optimización, Diseño de Procesos, Convexidad, Desigualdades Lineales Matriciales.

1 DISEÑO DE PROCESOS

El diseño clásico de los procesos, en general, persigue la determinación de las condiciones de operación de cada una de las unidades de proceso y de las dimensiones que se requieren para lograr un objetivo de producción. Los ingenieros de procesos determinan las estructuras necesarias, las condiciones de operación y calculan los parámetros físicos de la planta. El objetivo general se asocia a la optimización económica, evaluando las diferentes alternativas posibles. En esta etapa no se le brinda mucha importancia a condiciones de controlabilidad dinámica del proceso.

El concepto de controlabilidad no es nuevo y su influencia sobre la operación de los procesos ha pasado a ser un elemento cada vez más relevante. Las primeras ideas sobre introducir la controlabilidad en el diseño fueron planteadas por Nishida e Ichikawa [11], [12]. La evaluación sobre la controlabilidad en modelos en estado estacionario fue presentada por Fisher [3], quien describe un procedimiento sistemático para evaluar la controlabilidad del proceso en las etapas de diseño. En los últimos años se ha potenciado la incorporación de condiciones de controlabilidad en el diseño de procesos, extendiéndose hasta el concepto de diseño integrado [9], [10], técnica en la cual se persigue la obtención de los parámetros de la planta y de su sistema de control, en las primeras etapas de diseño. Este problema se traduce en la resolución de un problema de optimización no-lineal multiobjetivo, con restricciones y consideraciones económicas y de control.

2 DESIGUALDADES LINEALES MATRICIALES LMIs

2.1 INTRODUCCIÓN

Una Desigualdad Lineal Matricial [1] (LMI) es una restricción de la forma:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_N F_N < 0 \quad (1)$$

donde

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ es un vector de escalares desconocidos (variables de optimización o de decisión).

F_0, F_1, \dots, F_N son matrices simétricas conocidas.

'< 0' indica la condición de "negativa definida", es decir, que el mayor autovalor de $F(x)$ es negativo.

Una LMI define un problema convexo sobre la variable \mathbf{x} , el cual se puede resolver numéricamente con la garantía de encontrar una solución, si existe alguna. Un sistema basado en múltiples LMIs puede ser considerado como un conjunto de LMIs simples, lo que permite que se mantenga la condición de convexidad.

2.2 CONDICIONES LMI

Múltiples condiciones para el análisis y diseño de sistemas de control se han desarrollado utilizando LMIs [8], [4]. Criterios de estabilidad asintótica, de minimización de tiempos de respuesta (o ubicación de polos) y de rechazo a perturbaciones basados en normas, son comunes en la bibliografía reciente. Las utilizadas en este trabajo son las relacionadas con la estabilidad asintótica, el rechazo a perturbaciones medido con la norma H_∞ y la ubicación de polos en regiones estables LMI.

2.2.1 Estabilidad Asintótica

Para el sistema autónomo dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{t})\mathbf{x} \quad (2)$$

la condición de estabilidad asintótica [5] puede expresarse como una Desigualdad Lineal Matricial de la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P} & 0 \\ 0 & -\mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{P} \end{pmatrix} > 0 \quad (3)$$

cuya solución está asociada a que la LMI dada por la expresión (3) sea factible.

2.2.2 Rechazo a Perturbación con Norma H_∞

Dado el sistema LTI:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (4)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ es el vector de estados del sistemas, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$ es el vector de entradas, \mathbf{w} es el vector de perturbaciones y $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ es el vector de salidas medibles del sistema. \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{B}_1 , \mathbf{C} son matrices constantes de dimensiones apropiadas. Si la función de transferencia de la perturbación esta dada por:

$$\mathbf{G}_d(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{W}(s)} \quad (5)$$

Este sistema (4) presenta un rechazo a la perturbación dado por la condición [4]:

$$\|\mathbf{G}_d(s)\|_\infty < \gamma_d \quad (6)$$

si para un valor dado $\gamma_d < 1$, existe una matriz $\mathbf{P} > 0$ tal que la siguiente Desigualdad Lineal Matricial es factible:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \gamma_d^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T & \mathbf{P}\mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}\mathbf{P} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (7)$$

2.2.3 Regiones LMI

Las denominadas Regiones LMI se presenta en [2]. Las condiciones de interés en este trabajo se fundamentan en las dos regiones que se detallan a continuación.

Semiplano a la izquierda de $-\alpha_0$

Esta región garantiza que el sistema presenta un tiempo de respuesta máximo determinado, que esta asociado al valor de la parte real de los polos dominantes.

En la figura 1 se observa la región donde se desea que los polos se encuentren, que define el área a la izquierda del eje dibujado en α_0 .

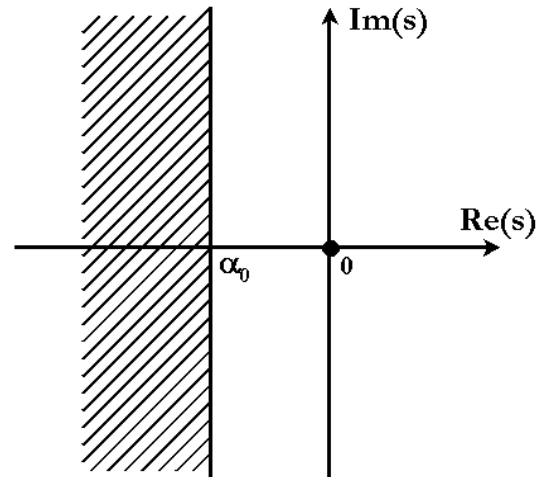


Figura 1: Polos a la izquierda del eje imaginario desplazado α_0

Para el caso del sistema lineal autónomo dado por la expresión $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, se puede asegurar que los autovalores de \mathbf{A} pertenecen a la región mostrada si se cumple la siguiente condición [2]:

$$\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + 2\alpha_0\mathbf{P} < 0 \quad (8)$$

En la que se debe encontrar una matriz $\mathbf{P} > 0$, tal que esta expresión sea factible.

Cono centrado en el origen, con ángulo θ

Esta región garantiza el amortiguamiento del sistema, debido a la restricción de la parte imaginaria de los polos del sistema. En la figura 2 se presenta esta región.

Dado el sistema $\dot{x} = Ax$, se asegura que los autovalores de la matriz A pertenecen a dicho cono si existe matriz $P > 0$, tal que la siguiente expresión sea factible [2].

$$\begin{pmatrix} \sin\theta(AP + PA^T) & \cos\theta(AP - PA^T) \\ \cos\theta(-AP + PA^T) & \sin\theta(AP + PA^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (9)$$

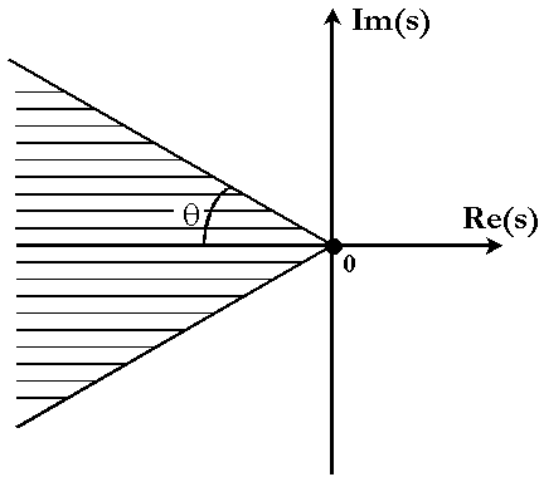


Figura 2: Región definida por un cono centrado en el origen, con un ángulo θ

2.3 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO

Para lograr la incorporación de las Desigualdades Lineales Matriciales en el problema de diseño de la planta, se debe plantear una linealización del modelo de forma de utilizar las condiciones tipo LMI en el problema de optimización. Los pasos principales se resumen a continuación:

- ❶ Se define el problema de optimización del diseño de la planta, considerando su modelo en un punto de operación, las cotas de los valores del sistema y las restricciones lineales y no lineales.
- ❷ Luego de cada iteración del problema de optimización, se toman los últimos valores óptimos calculados y se realiza la linealización del modelo alrededor del punto de operación (también óptimo).
- ❸ Con el sistema linealizado (A,B,C) se resuelve el problema basado en las Desigualdades Lineales Matriciales que se plantee en cada caso. La

existencia o no de una solución del problema con LMIs se transmite al optimizador del diseño de la planta, para que en función de lo ocurrido tome las acciones correspondientes para seguir buscando un resultado óptimo.

- ❹ Este proceso se realiza repetidamente hasta obtener un diseño óptimo x_{opt} , que cumpla todas las condiciones impuestas, tanto lineales (LMI) como no-lineales.

La implementación de este algoritmo se realiza utilizando el Toolbox de Optimización y el de Desigualdades Lineales Matriciales de MATLAB.

3 SISTEMA HIDRÁULICO

3.1 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO

Para probar el diseño tal como se ha planteado, se utiliza un sistema dinámico constituido por dos depósitos tal como se muestra en la figura 3, que se desea dimensionar. Los depósitos están conectados entre si a través de sus bases, existiendo un flujo de alimentación en el depósito 1 que es considerado como la señal de control $u(t)$ y otro flujo sobre el depósito 2, que es considerado como una perturbación $f_d(t)$. Las válvulas v_1 y v_2 son de apertura variable. El objetivo final del sistema es controlar el nivel del tanque 2, manipulando el flujo de entrada q_{in} .

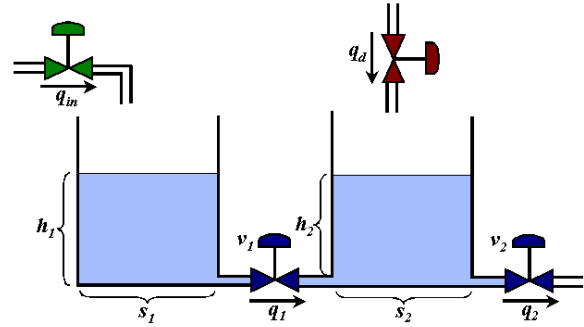


Figura 3: Sistema Hidráulico

3.2 MODELO DEL PROCESO

Para este sistema, haciendo un balance de masas se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - q_1 \quad (10)$$

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 + q_d - q_2 \quad (11)$$

donde

$$q_1 = k_1 a_1 \sqrt{h_1 - h_2} \quad (12)$$

$$q_2 = k_2 a_2 \sqrt{h_2} \quad (13)$$

$$q_d = f_d / 8 \quad (14)$$

$$q_{in} = u(t) \quad (15)$$

k_1 , k_2 son las constantes de las válvulas y a_1 , a_2 son sus aperturas. f_d es el flujo de la perturbación y q_d es la forma como esta influye sobre el nivel del segundo tanque. S_1 y S_2 son las superficies de los depósitos 1 y 2, h_1 y h_2 son los respectivos niveles.

Sustituyendo se obtiene:

$$S_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - k_1 a_1 \sqrt{h_1 - h_2} \quad (16)$$

$$S_2 \frac{dh_2}{dt} = k_1 a_1 \sqrt{h_1 - h_2} + \frac{f_d}{8} - k_2 a_2 \sqrt{h_2} \quad (17)$$

3.3 RESTRICCIONES DE OPERACIÓN

En algunos procesos de almacenamiento es necesario garantizar una cantidad de producto o la permanencia del mismo un tiempo determinado para que se cumplan ciertas condiciones, tales como suministro mínimo a otras etapas de la planta, reacciones, etc.

Para este sistema se imponen restricciones sobre el tiempo de residencia del líquido dentro de cada depósito dados por:

Depósito 1:

$$\frac{V_1}{q_1} = \frac{S_1 h_1}{k_1 a_1 \sqrt{h_1 - h_2}} \geq Tr_1 \Rightarrow Tr_1 k_1 a_1 \sqrt{h_1 - h_2} - s_1 h_1 \leq 0$$

Depósito 2:

$$\frac{V_2}{q_2} = \frac{S_2 h_2}{k_2 a_2 \sqrt{h_2}} \geq Tr_2 \Rightarrow Tr_2 k_2 a_2 - s_2 \sqrt{h_2} \leq 0$$

donde Tr_1 y Tr_2 son los tiempos de residencia.

Observación: Por condiciones en el modelo, se impone que $h_1 > h_2$.

4 OPTIMIZACIÓN DEL SISTEMA

Para el diseño del sistema se deben cumplir las siguientes condiciones:

✓ **Para el optimizador no-lineal:**

Se resuelve un problema de optimización no-lineal con la siguiente función objetivo:

$$f(x) = \eta_1^*(R_1)^2 + \eta_2^*(R_2)^2 + \eta_3^*(h_1)^2 + \eta_4^*(h_2)^2 + \eta_5^*(S_1)^2 + \eta_6^*(S_2)^2$$

tomando en cuenta los siguiente elementos:

1.- El modelo no-lineal debe cumplirse en estado estacionario, así como las restricciones de operación. El estado estacionario cambia en cada iteración del optimizador, debido a los cambios en las variables que se calculan. Para esto se hace:

$$Residuo\ 1 = R_1 = q_{in} - k_1 a_1 \sqrt{h_1 - h_2} \quad (18)$$

$$Residuo\ 2 = R_2 = k_1 a_1 \sqrt{h_1 - h_2} + \frac{f_d}{8} - k_2 a_2 \sqrt{h_2} \quad (19)$$

y se pretende que:

$$R_1, R_2 \rightarrow 0$$

2.- Las alturas de los depósitos deben ser lo más pequeñas posibles, por lo que h_1 y h_2 deben ser minimizados. Desde el punto de vista de la estructura del tanque, se podría imponer que la altura de cada deposito esta dada por $1,5h_i$ $i=1,2$, de forma de garantizar un rango de trabajo sobre el punto de operación óptimo a calcularse. Esto es

$$\begin{aligned} H_1 &= 1,5h_1 \text{ con } h_1 \rightarrow h_{1opt} \\ H_2 &= 1,5h_2 \text{ con } h_2 \rightarrow h_{2opt} \end{aligned}$$

3.- Las superficies del tanque deben ser minimizadas:

$$\begin{aligned} S_1 &\rightarrow S_{1opt} \\ S_2 &\rightarrow S_{2opt} \end{aligned}$$

4.- Las aperturas de las válvulas están acotadas entre cero y uno:

$$0 < a_1, a_2 < 1$$

✓ **Para el problema de factibilidad LMI:**

Para las condiciones basadas en Desigualdades Lineales Matriciales, se imponen de forma simple o combinada (multiobjetivo) las siguientes condiciones en la solución del problema lineal con restricciones LMIs:

- ✓ Estabilidad
- ✓ Regiones Estables LMIs
 - Eje Imaginario desplazado
 - Cono
- ✓ Rechazo a perturbación con Norma H_∞

5 RESULTADOS

5.1 DISEÑO NO-LINEAL

En este primer caso se presenta el diseño utilizando solo las restricciones no-lineales, que están dadas por el modelo de la planta y las restricciones de operación. En este problema no se incorporan restricciones tipo LMI. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla N° 1.

Residuo R_1	Residuo R_2
0.00000000517148	-0.00000001055143
Altura h_1	Altura h_2
2.84561394923148	1.78873102431188
Area S_1	Area S_2
6.67730673214957	3.83704425258219
Apertura a_1	Apertura a_2
0.97271710245128	0.74770017362659

Tabla 1: Resultados del diseño no lineal

El modelo no-lineal de la planta con los valores obtenidos para este caso, se simula sometiendo al proceso a una señal tipo salto en su señal de entrada $u(t)$. La respuesta obtenida muestra en la figura 4.

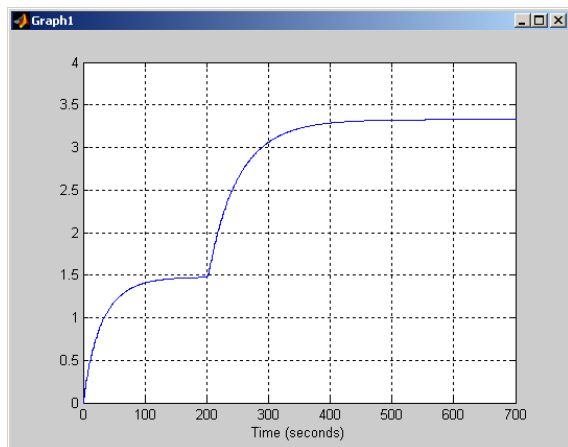


Figura 4: Respuesta del sistema ante señal tipo salto.

Para evaluar el comportamiento del proceso obtenido ante las perturbaciones, se simula el efecto de una perturbación tipo pulso. La respuesta ante esta señal se muestra en la figura 5.

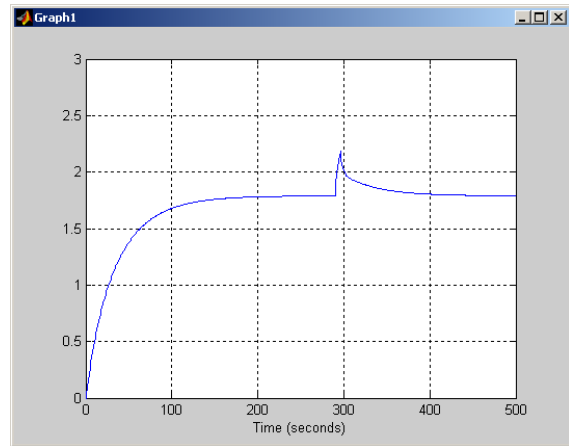


Figura 5: Respuesta ante perturbación tipo pulso.

5.2 DISEÑO NO-LINEAL CON ESTABILIDAD ASINTÓTICA

Para este segundo caso se resuelve el problema de diseño con la condición de estabilidad asintótica. Los valores obtenidos para los parámetros de diseño se muestran en la tabla N° 2.

Residuo R_1	Residuo R_2
0.00000000893293	0.00000000590371
Altura h_1	Altura h_2
7.94336185815146	5.91548038865712
Area S_1	Area S_2
3.12223339850537	3.04822253535273
Apertura a_1	Apertura a_2
0.70222891914753	0.41115443628599

Tabla 2: Resultados del diseño no lineal con estabilidad asintótica.

Los valores de la tabla 2 se simulan en el modelo no-lineal bajo las mismas condiciones del caso anterior. La respuesta se muestra en la figura 6.

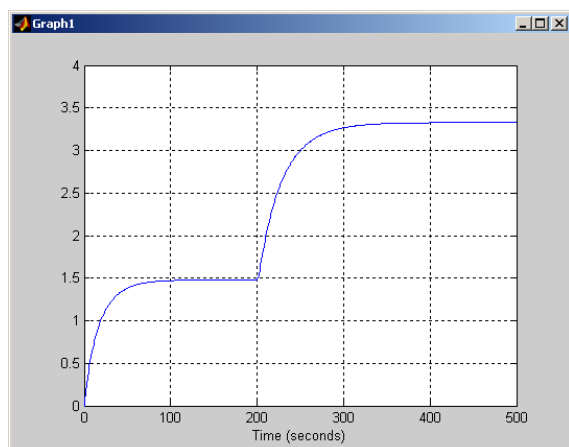


Figura 6: Respuesta del sistema optimizado con condición de estabilidad asintótica.

Igualmente se simula la respuesta del sistema ante una perturbación tipo pulso, como se hizo anteriormente. La respuesta obtenida se muestra en la figura 7.

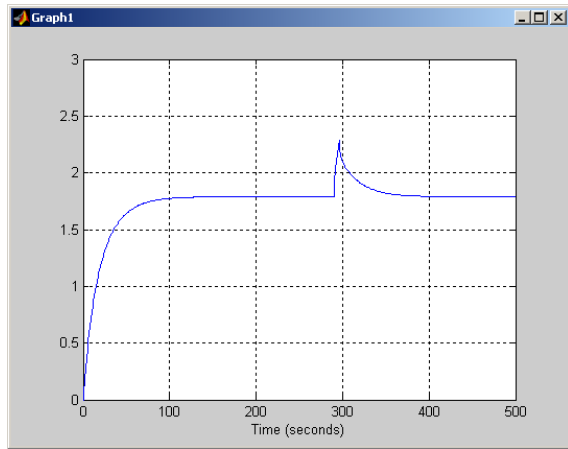


Figura 7: Respuesta del sistema ante perturbación tipo pulso.

La matriz P obtenida en la parte lineal del problema de optimización LMI esta dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 1.10915764804352 & -0.04674962641966 \\ -0.04674962641966 & 1.12898570882682 \end{bmatrix}$$

la cual cumple la condición de ser positiva definida:

Autovalores de $P = (1.071282395, 1.1668609614)$

5.3 DISEÑO NO-LINEAL CON UBICACIÓN DE POLOS Y RECHAZO A PERTURBACIÓN

En este tercer caso se resuelve el problema imponiendo la condición de que los polos del sistema linealizado se encuentren en la región definida por el lado izquierdo del eje imaginario desplazado hasta $\alpha_0 = -0.035$ y dentro de un cono centrado en el origen con ángulo $\pi/7$. También se impone que se obtenga un rechazo a la perturbación medida por su Norma $H_\infty \leq \gamma_d$, con $\gamma_d = 0.5625$.

Residuo R_1	Residuo R_2
-0.00000000747697	-0.00000000358803
Altura h_1	Altura h_2
2.09093442060715	1.03348267484108
Area S_1	Area S_2
4.84045960447927	3.97083708543862
Apertura a_1	Apertura a_2
0.97245548126551	0.98366769921824

Tabla 3: Resultados del diseño no lineal con ubicación de polos y rechazo a perturbaciones.

En la tabla N° 3 se muestran los resultados obtenidos en este caso.

Los valores obtenidos se simularon bajo las mismas condiciones de los dos casos anteriores. En la figura 8 se muestra la respuesta ante la señal tipo salto en la entrada $u(t)$ y en la figura 9 se tiene el comportamiento del sistema ante la perturbación tipo pulso.

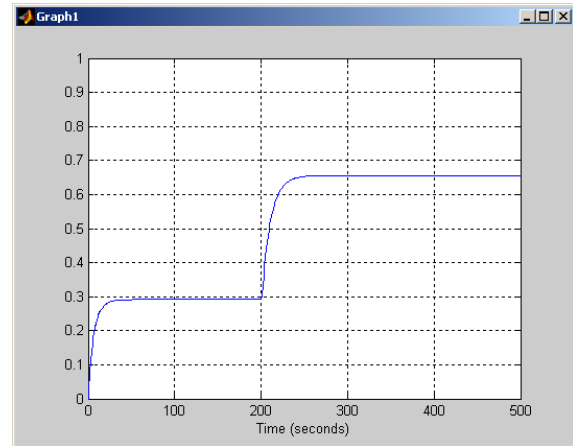


Figura 8: Respuesta del sistema optimizado con ubicación de polos y rechazo a perturbación.

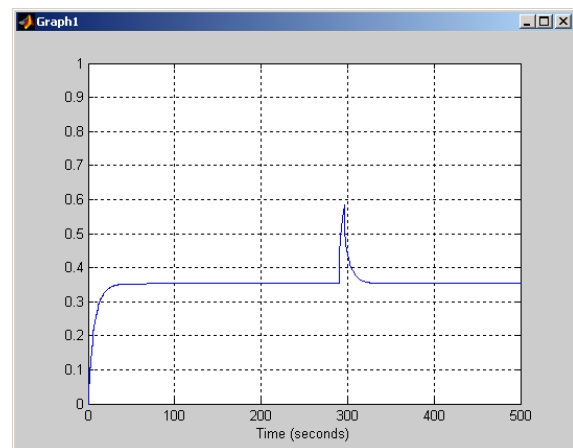


Figura 9: Respuesta del sistema ante perturbación tipo pulso.

la matriz P obtenida en la parte lineal del problema de optimización LMI esta dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.59012037458740 & -0.34257170755897 \\ -0.34257170755897 & 0.85087162312840 \end{bmatrix}$$

que igualmente cumple la condición de ser positiva definida:

Autovalores de $P = (0.3539538072, 1.0870381904)$

6 CONCLUSIONES

El procedimiento planteado en este trabajo permite verificar la influencia de las condiciones de controlabilidad basadas en Desigualdades Lineales Matriciales en el problema de diseño de procesos. Las respuestas de los tres casos presentados muestran como se mejoran los comportamientos dinámicos, respecto a la velocidad de respuesta y al rechazo de las perturbaciones, a medida que se imponen condiciones mas exigentes desde el punto de vista dinámico. En el análisis de las figuras presentadas, es importante verificar las escalas de los ejes, debido a que los valores en cada caso son diferentes.

El problema resuelto garantiza una adecuación completa al modelo no-lineal y a las restricciones de operación, debido a las exigencias impuestas en la función a optimizar. La linealización del modelo en cada iteración permite resolver el problema con restricciones LMI en el punto óptimo calculado, lo que asegura que la solución final garantiza las condiciones de controlabilidad en el mejor punto de operación obtenido.

La estrategia presentada en este trabajo puede complementarse con otras restricciones tipo LMI existentes en la bibliografía y por la forma de presentarse este problema, la incorporación de incertidumbre poliédrica es directa y la solución garantiza robustez del sistema. En algunos casos, la incertidumbre puede utilizarse para compensar el efecto de la pérdida de información que se desprende de la linealización, ya que en definitiva el sistema que se tiene es no-lineal.

La metodología puede extenderse sin mayores complicaciones para el diseño de sistemas a lazo cerrado, con estrategias de control como la realimentación de estado [7] o la realimentación de la salida con compensadores dinámicos [6].

Agradecimientos

Los autores desean agradecer la financiación recibida de la CICYT a través del proyecto DPI2000-0665-C02-02.

Referencias

[1] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V., (1994) "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory", *SIAM Studies in Applied Mathematics*, Vol. 15.

[2] Chilali M., Gahinet P., (1996) "H_∞ Design with pole placement constraints: an Lmi approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.41, No. 3, pp 358-367.

[3] Fisher, W. R., Doherty, M. F., Douglas, J. M., (1988) "The Interface Between Design and Control. 1. Process Controllability", *Ind. Eng. Chem. Res.*, **27**, pp. 597-605.

[4] Gahinet P., Apkarian P., (1994) "A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 4, pp. 421-448.

[5] Gahinet P., Nemirovski A., Luab A., Chillali M., (1995) "LMI control toolbox", *The MathWorks Inc.*

[6] Garcia, G., Arzelier, D., Bernussou, J., (1992) "Stabilization of Uncertain Linear Dynamic Systems by State and Output Feedback : a Quadratic Stabilizability Approach", *Rapport Interne du LAAS*, Toulouse, France.

[7] Garcia, G., Bernussou, J., (1995) "Pole Assignment for Uncertain Systems in a Specied Disk by State Feedback", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 40, No. 1.

[8] Geromel, J., De Souza, C., Skelton R., (1994) "LMI Numerical Solution for Output Feedback Stabilization", *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore.

[9] Luyben, M. L., Floudas, C. A., (1994) "Analyzing the interaction of Design and Control-1. A Multiobjective framework and application to Binary Distillation Synthesis", *Comp. Chem. Eng.*, **18**, pp. 933-969.

[10] Narraway, L., Perkins, J. D., (1994) "Selection of Process Control Structure based on Economics", *Computers Chem. Engng.*, **18**, pp s511-s515.

[11] Nishida, N., Ichikawa, A., (1975) "Synthesis of Optimal Dynamic Process Systems by a Gradient Method", *Ind. Eng. Chem. Proc. Des. Dev.*, **13**, pp.236-242.

[12] Nishida, N., Liu, Y. A., Ichikawa, A., (1976) "Studies in Chemical Process Design and Síntesis II. Optimal Synthesis of Dynamic Process Systems with Uncertainty", *AIChE J.*, **22**, pp. 539-549.