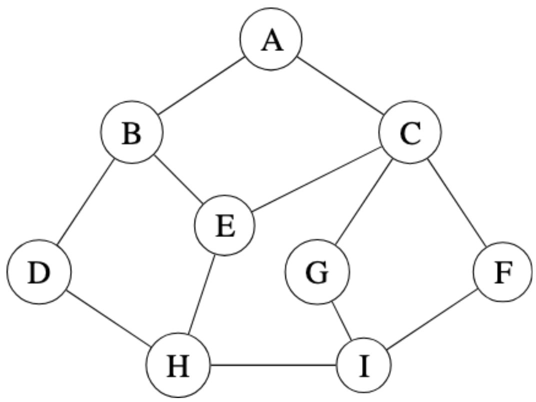
# TD ALGO n°4
# Graphes

## Partie I

## Exercice 1

On considère le graphe ci -dessous.




1) Comment est représenté ce graphe
   a) Si *E* est stocké dans une matrice d'adjacence ?
   b) SI *E* est stocké dans table de listes d'adjacence ?
2) Quelle est la distance entre les nœuds *A* et *E* ? entre les nœuds *D* et *G* ?
3) Quel est le diamètre du graphe ?
4) On explore ce graphe à partir du nœud *A*.
   a) Dans quel ordre seront explorés les nœuds si on utilise un parcours en largeur d'abord ?
   b) Dans quel ordre seront explorés les nœuds si on utilise un parcours en profondeur d'abord ?

## Exercice 2

Un graphe simple est un graphe sans boucle, ni arête multiple.

Donner un algorithme permettant de vérifier sur la matrice d'adjacence qu'un graphe est simple.

# Exercice 3

Un graphe G non orienté est dit biparti si et seulement si il existe une partition de V(G) en deux sous-ensembles A et B tels que les sous-graphes induits GA et GB ne contiennent aucune arête.

1) Soit un graphe représenté par une liste d'adjacence, trouver un algorithme permettant de vérifier si le graphe est biparti.
2) Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles de longueur impaire.
3) Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement s'il est coloriable en deux couleurs.
4) Imaginez un algorithme qui détermine si un graphe est coloriable en deux couleurs en utilisant un algorithme d'exploration en profondeur d'abord.

# Exercice 4

Imaginons un groupe de septs amis : Rachel, Monica, Ross, Chandler, Janice, Joe, et Phoebe. Ils habitent New York et projettent de louer deux voitures pour aller passer des vacances en Floride. Toutefois, passer ensemble les 18 heures que dure le trajet peut s'avérer problématique si les passagers des deux véhicules ne sont pas soigneusement choisis.

En effet, il faut savoir que :

- Rachel et Ross viennent de rompre, il ne serait donc pas judicieux qu'ils voyagent ensemble.
- Joe a fait des propositions à Rachel, il y a donc des tensions entre lui et Ross.
- Mais Phoebe semble tenter d'attirer l'attention de Joe, ce qui a jeté un froid entre elle et Rachel.
- Chandler vient juste de piquer à Joe la place de capitaine de l'équipe de foot, il en résulte un certain ressentiment.
- Monica et Chandler sont jaloux de Janice, parce qu'elle attend un bébé et qu'ils ne réussissent pas à en faire un.
- Enfin, Monica pense que Joe est un crétin.

Formulez ce problème en termes de graphe et donnez une solution pour ce cas particulier.

# Exercice 5

On considère un graphe $G = (V, E)$. Un des problèmes classiques sur les graphes est de trouver le plus court chemin d'un point $A \in V$ du graphe à un point $B \in V$ du graphe.

1) Ecrivez un algorithme naif, qui énumère toutes les solutions, pour résoudre ce problème.
2) Quelle est sa complexité ?

3) En notant $T$ (ou $T^{(1)}$) la matrice des transitions possibles entre les noeuds du graphes (c'est à dire: $T[i, j]$ est égal à 1 si $(e_i, e_j) \in E$ , et $T[i, j] = 0$ sinon), déterminez comment calculer la matrice de transitions $T^{(2)}$ des transitions possibles "en deux étapes", où $T^{(2)}(i, j) = 1$ si $\exists k\ t.q.\ (e_i, e_k)\ et\ (e_k, e_j) \in E$, et $T^{(2)}(i, j) = 0$ sinon.
4) Quelle est la complexité du calcul de $T^{(2)}$ si *E* est stocké à l'aide d'un matrice d'adjacence ? Idem si *E* est représenté sous forme de liste d'adjacence.
5) Déduire du 3) une matrice $C^{(2)}$ qui contient le coût (1 ou 2 ou infini) pour aller d'un noeud *i* quelconque à un noeud *j* quelconque en deux étapes maximum (si il n'y a pas de chemin de coût $\leq 2$, alors $C^{(2)}(i, j) = \infty$ )
6) De façon analogue exprimez le calcul $T^{(k)}$ et de de $C^{(k)}$ .

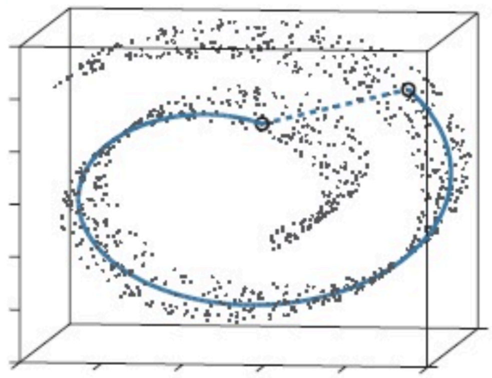
# Exercice 6

La fermeture transitive d'un graphe $G = (V, E)$ est un graphe $G' = (V, E')$ tel qu'il existe une connexion entre deux noeuds *i* et *j* dans $G'$ si il existe un chemin de longueur finie entre *i* et *j* dans *G*.

Comment pouvez vous utiliser les résultats de l'exercice 1 pour écrire un algorithme qui détermine la fermeture transitive d'un graphe *G*?

# Exercice 7

De nombreuses méthodes de traitement de données multidimensionelles reposent sur la distance euclidienne entre les données. Par exemple, lorsque l'on veut visualiser des données de grande dimension $X = \{x^i \in R^d,\ i = 1..n\}$, on passe par des techniques de réduction de dimension et on souhaite trouver des nouvelles coordonnées (en dimension 2) des données originelles pour les visualiser. Souvent les méthodes visent à conserver une information de "distance" entre les points de $X$ et utiliser la distance euclidienne n'est adapté. C'est le cas lorsque les données de $X$ "vivent" dans un sous espace non linéaire de dimension $p < d$ de $R^d$, qu'on appelle une variété. C'est le cas par exemple des données de la figure ci dessous qui vivent dans une variété de dimension 2 plongée dans un espace de $R^3$ (c'est un exemple classique connu sous le nom de Swissroll).



Le swissroll:  Les données (points) vivent sur une variété de dimension 2 (un “swissroll”) plongée dans un espace de dimension 3. Intuitivement la distance entre les deux points identifiés sur la figure devrait être grande et devrait refléter le chemin pour aller de proche en proche entre ces deux points le long de la variété (c’est à dire en restant sur le ruban), ce qui est différent de la distance Euclidienne (= à vol d’oiseau) entre ces deux points.

Dans le cas de données vivant sur une variété, on peut réaliser une visualisation plus pertinente en calculant les distances géodésiques en amont d’une technique de réduction de dimension. Pour calculer les distances géodésiques, on utilise l’hypothèse que pour deux points qui sont très proches sur la variété la “distance sur la variété” entre ces deux points est proche de la distance Euclidienne entre ces deux points. Proposez une façon de calculer les distances géodésiques entre deux points quelconques de $X$.