

REGRESORES ESTOCÁSTICOS Y VARIABLES INSTRUMENTALES¹

De acuerdo a la matriz \mathbf{X} , consideremos 2 posibilidades:

1. LAS X SON FIJAS.

Partimos de la expresión $\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{u}$

Fácilmente se prueba que $E(\hat{\beta}) = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'E(\mathbf{u})$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

Además,

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Y,

$$\begin{aligned} plim \hat{\beta} &= \beta + plim \left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} \right)^{-1} * plim \left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{u}}{n} \right) \\ plim \hat{\beta} &= \beta \end{aligned}$$

En resumen, si suponemos que los regresores son fijos en muestreos repetido, los estimadores de MCO serán insesgados, eficientes y consistentes (Como ya sabíamos). Pero, ¿qué sucede si ya no suponemos \mathbf{X} fijas?

2. LAS X SON ESTOCÁSTICAS.

Dentro de esta posibilidad tenemos tres casos:

2.1. Las X son estocásticas pero independientes de \mathbf{u} .

Seguiremos asumiendo que $E(\mathbf{u}/\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, lo que nos lleva directamente a:

$$E(\hat{\beta}/\mathbf{X}) = E[\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{u}/\mathbf{X}]$$

$$E(\hat{\beta}/\mathbf{X}) = \beta + E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{u}/\mathbf{X}]$$

$$E(\hat{\beta}/\mathbf{X}) = \beta + E[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'/\mathbf{X}] * E[\mathbf{u}/\mathbf{X}]$$

$$E(\hat{\beta}/\mathbf{X}) = \beta$$

Utilizando la Ley de esperanzas iteradas,

¹ El método de Variables Instrumentales fue propuesto originalmente por Philip G. Wright, un economista no muy conocido, en un apéndice de su obra "The Tariff on Animal and Vegetable Oils" de 1928.

$$E(\hat{\beta}) = E_X[E(\hat{\beta}/X)]$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

Es decir que aun cuando las X son estocásticas, esto no afecta la propiedad de insesgamiento de los estimadores de MCO.

Además, si $Var(\hat{\beta}/X) = \sigma^2(X'X)^{-1}$, la varianza incondicional se encuentra utilizando la expresión para la descomposición de la varianza.

$$Var(\hat{\beta}) = E_X[Var(\hat{\beta}/X)] + V_X[E(\hat{\beta}/X)]$$

$$Var(\hat{\beta}) = E_X[\sigma^2(X'X)^{-1}] + V_X(\beta)$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 E_X(X'X)^{-1}$$

En todo caso, este resultado implica que las X utilizadas en la muestra deben ser lo suficientemente representativa del promedio

Finalmente, como ya se demostró antes, $plim \hat{\beta} = \beta$

Esto quiere decir que aun cuando las X son estocásticas, pero independientes de las u , los estimadores de MCO siguen siendo insesgados, eficientes y consistentes.

2.2. X son estocásticas y dependientes contemporáneamente de u .

$$E(\hat{\beta}/X) = \beta + \underbrace{E_X[(X'X)^{-1} X'u/X]}_{sesgo}$$

$$plim \hat{\beta} = \beta + plim \left(\frac{X'X}{n} \right)^{-1} * plim \left(\frac{X'u}{n} \right)$$

$$plim \hat{\beta} = \beta + Q_{xx}^{-1} * plim \left(\frac{X'u}{n} \right)$$

En este caso los estimadores de MCO son sesgados e inconsistentes, es decir que el sesgo no desaparece aunque la muestra aumente indefinidamente.

2.3. X son estocásticas y dependen no contemporáneamente de u.

Este caso es común en modelos de series de tiempo, específicamente en modelos autorregresivos, y será estudiando oportunamente. Sin embargo, podemos adelantar su principal conclusión: *los estimadores de MCO serán sesgados pero consistentes*.

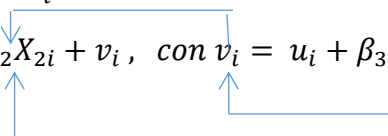
¿Bajo qué circunstancias es posible que se puede presentar una relación entre X y u, es decir que no sean independientes? (Problema de la endogeneidad)

Sin afán de ser exhaustivos, en esta sección revisaremos algunos casos, quizá los más comunes, donde se presenta el llamado problema de la endogeneidad.

- i) Cuando existen variable(s) relevante(s) omitida(s) correlacionadas con alguna(s) variable(s) incluida(s) en el modelo. Analicemos el siguiente ejemplo

Modelo Verdadero: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$

Modelo con variable X_{3i} omitida: $Y_i = b_1 + b_2 X_{2i} + v_i$, con $v_i = u_i + \beta_3 X_{3i}$



- ii) Modelo autorregresivo con autocorrelación

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \alpha_1 Y_{t-1} + u_t, \text{ con } u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

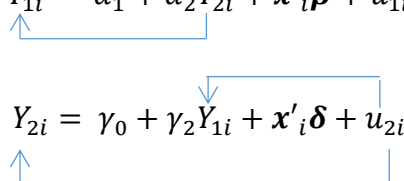
Es fácil ver que en este caso el shock rezagado afecta tanto a u_t como a Y_{t-1}

- iii) Problema de la simultaneidad

Considere el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas

$$Y_{1i} = \alpha_1 + \alpha_2 Y_{2i} + \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + u_{1i}$$

$$Y_{2i} = \gamma_0 + \gamma_2 Y_{1i} + \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\delta} + u_{2i}$$



¿Cuál el proceso que genera el problema de endogeneidad?

iv) Sesgo de selección.

$$\begin{aligned} W_i &= \alpha_1 + \alpha E_i + \mathbf{x}'_i \boldsymbol{\beta} + u_i \\ E_i &= \gamma_1 + \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\delta} + v_i \end{aligned}$$

En este ejemplo W representa el nivel de salarios de un individuo y E sus años de educación. \mathbf{x} y \mathbf{z} son vectores de regresores, que pueden de hecho, compartir muchas variables. La idea fundamental es que existe un conjunto de atributos no observables del individuo, tales como habilidades, destrezas, inteligencia, entre otros, que seguramente afectan tanto a su salario como a su nivel de educación. Estos atributos estarán incluidos en u_i y en v_i . Debería quedar claro a estas alturas que $Cov(v_i, u_i) \neq 0$ y que finalmente, u_i y E están relacionadas.

v) Variables medidas con error (Tema de exposición)

¿CÓMO SE ENFRENTA EL PROBLEMA DE LA ENDOGENEIDAD? EL MÉTODO DE VARIABLES INSTRUMENTALES

En general se suele utilizar el Método de Variables Instrumentales (VI). VI consiste en utilizar una matriz $\mathbf{Z}_{(n \times r)}$, que contiene a todas las variables de \mathbf{X} que no están correlacionadas con el error, además de un conjunto de variables, llamadas instrumentos, en un número al menos igual a los regresores correlacionados con el error.

La idea básica de este método es que:

$$\text{plim} \left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} \right) = \Sigma_{ZX} < \infty \quad (1)$$

$$\text{plim} \left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{u}}{n} \right) = \mathbf{0} \text{ (Z es ortogonal a u)} \quad (2)$$

Partimos del modelo $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$, con $Cov(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \neq 0$ (Endogeneidad).

Suponiendo que \mathbf{Z} cumple (1) y (2), pre multiplicamos el modelo por \mathbf{Z}' :

$\mathbf{Z}'\mathbf{Y} = \mathbf{Z}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}'\mathbf{u}$, dividiendo por “n”

$$\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Y}}{n} \right) = \left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{X}}{n} \right) \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{u}}{n} \right),$$

Dados (1) y (2), tenemos que, asintóticamente:

$$\hat{\beta}^{VI} = \left(\frac{Z'X}{n} \right)^{-1} * \left(\frac{Z'Y}{n} \right)$$

Que es el estimador de variables instrumentales.

Nótese que este estimador requiere que el número de instrumentos debe ser igual al número de regresores endógenos, es decir que $r = k$ (¿Por qué?)

Este estimador no es válido en muestras pequeñas, ya que en ese caso no necesariamente se cumple que $\left(\frac{Z'u}{n} \right) = \mathbf{0}$

CONSISTENCIA DEL ESTIMADOR DE VI

$$\hat{\beta}^{VI} = \left(\frac{Z'X}{n} \right)^{-1} * \left(\frac{Z'(X\beta + u)}{n} \right)$$

$$\hat{\beta}^{VI} = \underbrace{\left(\frac{Z'X}{n} \right)^{-1} \left(\frac{Z'X}{n} \right)}_I \beta + \left(\frac{Z'X}{n} \right)^{-1} \left(\frac{Z'u}{n} \right)$$

$$\hat{\beta}^{VI} = \beta + \left(\frac{Z'X}{n} \right)^{-1} \left(\frac{Z'u}{n} \right)$$

Nótese que el segundo término a la derecha representa el sesgo del estimador de VI en muestras finitas.

Obteniendo el *plim*:

$$plim \hat{\beta}^{VI} = \beta + plim \left(\frac{Z'X}{n} \right)^{-1} * plim \left(\frac{Z'u}{n} \right)$$

Dado el supuesto (2)

$$plim \hat{\beta}^{VI} = \beta + \Sigma_{ZX}^{-1} * \mathbf{0}$$

$$plim \hat{\beta}^{VI} = \beta$$

DISTRIBUCION ASINTÓTICA DEL ESTIMADOR VI

Partimos de la expresión

$\hat{\beta}^{VI} = \beta + \left(\frac{Z'X}{n}\right)^{-1} \left(\frac{Z'u}{n}\right)$. Reordenando términos y multiplicando por \sqrt{n}

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}^{VI} - \beta) = \left(\frac{Z'X}{n}\right)^{-1} \left(\frac{Z'u}{\sqrt{n}}\right)$$

Utilizando el teorema de Mann – Wold, tenemos que

$$\left(\frac{Z'u}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{d} N(0; \sigma^2 \Sigma_{ZZ})$$

Donde:

$$\Sigma_{ZZ} = \text{plim} \left(\frac{Z'Z}{n}\right)$$

Entonces

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}^{VI} - \beta) \xrightarrow{d} \Sigma_{ZX}^{-1} N(0; \sigma^2 \Sigma_{ZZ})$$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}^{VI} - \beta) \xrightarrow{d} N(0; \sigma^2 \Sigma_{ZX}^{-1} \Sigma_{ZZ} \Sigma_{XZ}^{-1})$$

$$\hat{\beta}^{VI} \xrightarrow{a} N\left(\beta; \frac{\sigma^2}{n} \Sigma_{ZX}^{-1} \Sigma_{ZZ} \Sigma_{XZ}^{-1}\right)$$

En la práctica se utiliza $\widehat{AsyVar}(\hat{\beta}^{VI}) = \hat{\sigma}^2 (Z'X)^{-1} (Z'Z) (X'Z)^{-1}$ como estimador de la varianza asintótica.

Donde $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n}$

MÁS INSTRUMENTOS QUE REGRESORES ENDÓGENOS

¿Qué sucede si el número de instrumentos es igual o mayor al número de regresores endógenos ($r \geq k$)? Nótese que en este caso, si ($r > k$) entonces $Z'X$ no es invertible (No es una matriz cuadrada).

Dada la expresión $Z'Y = Z'X\beta + Z'u$, sea $v = Z'u$

Entonces $E(vv') = E(Z'uu'Z) = Z'E(uu')Z$

$$E(vv') = \sigma^2 \underbrace{Z'Z}_{\Omega}$$

Aplicando MCG (Ω conocido) obtenemos el estimador de VI para ($r \geq k$)

$$\hat{\beta}^{VI} = [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}[X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y]$$

Sea $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$ una matriz de proyección (simétrica e idempotente).

$$\begin{aligned} P_Z' &= P_Z \\ P_Z^2 &= P_Z \\ P_Z'P_Z &= P_Z \end{aligned}$$

Entonces:

$$\hat{\beta}^{VI} = [X'P_ZX]^{-1}[X'P_ZY]$$

$$\hat{\beta}^{VI} = [X'P_Z'P_ZX]^{-1}[X'P_Z'Y]$$

Ya que $P_ZX = \hat{X}$, la matriz de pronósticos de X utilizando Z como regresores

$$\hat{\beta}^{VI} = [\hat{X}'\hat{X}]^{-1}\hat{X}'Y,$$

Que es el estimador de Variables Instrumentales, expresado como un estimador de MCO de Y con respecto a \hat{X} , donde \hat{X} son los pronósticos de la regresión por MCO entre X y Z . Es por esta razón que a este estimador se lo conoce también como el **Estimador de Mínimos Cuadrados en 2 Etapas (MC2E)**

DEMOSTRACIONES

1. Demuestre que $\hat{\beta}^{VI} = [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}[X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y]$ es igual a lo anterior cuando $r=K$, es decir a $\hat{\beta}^{VI} = \left(\frac{Z'X}{n}\right)^{-1} \left(\frac{Z'Y}{n}\right)$.

$$\hat{\beta}^{VI} = [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}[X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Y]$$

$$\hat{\beta}^{VI} = (Z'X)^{-1}(Z'Z) \underbrace{(X'Z)^{-1}(X'Z)}_I (Z'Z)^{-1}(Z'Y)$$

$$\hat{\beta}^{VI} = (Z'X)^{-1} \underbrace{(Z'Z)(Z'Z)^{-1}}_I (Z'Y)$$

$$\hat{\beta}^{VI} = (Z'X)^{-1}(Z'Y)$$

Dividiendo y multiplicando para n

$$\hat{\beta}^{VI} = \left(\frac{Z'X}{n} \right)^{-1} \left(\frac{Z'Y}{n} \right)$$

2. Demuestre la Consistencia y Distribución Asintótica del estimador de VI con $r \geq k$

Consistencia

$$\hat{\beta}^{VI} = [X' P_Z X]^{-1} [X' P_Z Y]$$

$$\hat{\beta}^{VI} = [X' P_Z X]^{-1} [X' P_Z (X\beta + u)]$$

$$\hat{\beta}^{VI} = [X' P_Z X]^{-1} [X' P_Z X] \beta + [X' P_Z X]^{-1} [X' P_Z u]$$

$$\hat{\beta}^{VI} = \beta + [X' Z (Z' Z)^{-1} Z' X]^{-1} [X' Z (Z' Z)^{-1} Z' u].$$

$$\hat{\beta}^{VI} = \beta + \left[\left(\frac{X' Z}{n} \right) \left(\frac{Z' Z}{n} \right)^{-1} \left(\frac{Z' X}{n} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{X' Z}{n} \right) \left(\frac{Z' Z}{n} \right)^{-1} \left(\frac{Z' u}{n} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{plim } \hat{\beta}^{VI} &= \beta + \left[\text{plim} \left(\frac{X' Z}{n} \right) * \text{plim} \left(\frac{Z' Z}{n} \right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. * \text{plim} \left(\frac{Z' X}{n} \right) \right]^{-1} \left[\text{plim} \left(\frac{X' Z}{n} \right) * \text{plim} \left(\frac{Z' Z}{n} \right)^{-1} * \text{plim} \left(\frac{Z' u}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{plim } \hat{\beta}^{VI} = \beta + [\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}]^{-1} * [\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad 0]$$

$$\text{plim } \hat{\beta}^{VI} = \beta$$

Distribución Asintótica

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}^{VI} - \beta) = \left[\left(\frac{X' Z}{n} \right) \left(\frac{Z' Z}{n} \right)^{-1} \left(\frac{Z' X}{n} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{X' Z}{n} \right) \left(\frac{Z' Z}{n} \right)^{-1} \left(\frac{Z' u}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

Aplicando Mann – Wald

$$\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{u}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}; \sigma^2 \Sigma_{ZZ})$$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{VI} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} [\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}]^{-1} \Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} N(\mathbf{0}; \sigma^2 \Sigma_{ZZ})$$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{VI} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N\left\{ \mathbf{0}; \sigma^2 \left\{ [\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}]^{-1} \Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \underbrace{\Sigma_{ZZ} \Sigma_{ZZ}^{-1}}_I \Sigma_{ZX} [\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}]^{-1} \right\} \right\}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{VI} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N\left\{ \mathbf{0}; \sigma^2 \left\{ \underbrace{[\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}]^{-1} \Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}}_I [\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}]^{-1} \right\} \right\}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{VI} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N\left\{ \mathbf{0}; \sigma^2 [\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}]^{-1} \right\}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{VI} \xrightarrow{a} N\left\{ \boldsymbol{\beta} ; \frac{\sigma^2}{n} [\Sigma_{XZ} \quad \Sigma_{ZZ}^{-1} \quad \Sigma_{ZX}]^{-1} \right\}$$

En la práctica trabajamos con:

$$\widehat{Var\,Asy} = \hat{\sigma}^2 [(\mathbf{X}'\mathbf{Z})(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{X})]^{-1}$$

Dónde:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{VI})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}^{VI})}{n}$$

¿Qué sucede si el modelo original es $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$, con $E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \sigma^2 \boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ diagonal?

Se recomienda en este caso obtener estimadores robustos de las varianzas-covarianzas. En este caso:

$$\widehat{Var\,Asy}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^{VI}) = \sigma^2 [\mathbf{X}'\mathbf{P}_z\mathbf{X}]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Z})(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\hat{\mathbf{S}}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{X})[\mathbf{X}'\mathbf{P}_z\mathbf{X}]^{-1}$$

$$\text{Dónde: } \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{n} \sum \hat{u}_i^2 \mathbf{z}_{(i)} \mathbf{z}_{(i)}'$$

Comparación entre las varianzas del estimador de Variables Instrumentales y el estimador de MCO

Nótese que en el caso de la regresión simple $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ podemos escribir:

$$VarAsy(\hat{\beta}_2^{VI}) = \frac{\sigma^2}{n} * \frac{\sigma_Z^2}{[Cov(X, Z)]^2}$$

$$VarAsy(\hat{\beta}_2^{VI}) = \frac{\sigma^2}{n} * \frac{\sigma_Z^2}{\rho_{XZ}^2 \sigma_X^2 \sigma_Z^2}$$

$$VarAsy(\hat{\beta}_2^{VI}) = \frac{\sigma^2}{n \rho_{XZ}^2 \sigma_X^2}$$

Compárese con la varianza asintótica del estimador de MCO: (Lo que es útil hacer cuando X y u no se relacionan)

$$VarAsy(\hat{\beta}_2^{MC}) = \frac{\sigma^2}{n \sigma_X^2}$$

Ya que $\rho_{XZ}^2 \leq 1$, siempre se cumplirá que

$$VarAsy(\hat{\beta}_2^{VI}) \geq VarAsy(\hat{\beta}_2^{MC})$$

EJEMPLO:

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 edu_i + \beta_3 hab_i + u_i$$

Donde " W " representa los salarios nominales del individuo i -ésimo

" edu " = variable que recoge el efecto de la educación

" hab " = variable que recoge las habilidades y destrezas del individuo

1. Utilizamos " iq_i " (coeficiente intelectual) como proxy de " hab ", entonces tenemos:

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 edu_i + \beta_3 iq_i + u_i$$

2. Si no disponemos datos de la variable “ iq_i ” el modelo es:

$$\ln W_i = \beta_1 + \beta_2 edu_i + v_i \quad \text{donde } v_i = u_i + \beta_3 hab_i$$

Cuando hablamos de Instrumentos debemos pensar en dos cosas:

- i. Correlacionado con “edu” (RELEVANCIA)
- ii. No correlacionado con “hab” (VALIDEZ)

Considere, por ejemplo los siguientes instrumentos, indique los pros y los contras de cada uno de ellos

Instrumento 1 = Número del último dígito de la cédula

Instrumento 2= Coeficiente Intelectual

Instrumento 3= Educación Padre (Madre).

INFERENCIA

Relacionados con el problema de endogeneidad existen tres grupos de test que podemos aplicar:

1. Test de Endogeneidad, entre los que tenemos al test de Hausman y al test Durbin-Wu-Hausman
2. Test de restricciones sobreidentificadas (Validez de los instrumentos), donde encontramos el test de Hansen-Sargan
3. Test para diagnosticar instrumentos débiles (Relevancia de los instrumentos). Para ello tenemos el test de Stock y Yogo, entre otros

Endogeneidad: Test de Hausman

Este test es para detectar si existe o no un problema de endogeneidad. Hausman plantea dos estados (escenarios) posibles suponiendo que se tienen dos estimadores alternativos: $\hat{\theta}$ y $\tilde{\theta}$.

E1 = En este escenario $\hat{\theta}$ y $\tilde{\theta}$ son consistentes, sin embargo $\hat{\theta}$ es más eficiente que $\tilde{\theta}$.

De hecho se asume que $\hat{\theta}$ cumple con la Cota de Cramer-Rao.

E2 = Acá, el estimador $\tilde{\theta}$ es consistente, mientras que $\hat{\theta}$ no es consistente.

Intuitivamente el test de Hausman compara los dos estimadores obteniendo $(\tilde{\theta} - \hat{\theta})$

Formalmente:

$H_0: \text{plim}(\tilde{\theta} - \hat{\theta}) = \mathbf{0}$ Exogeneidad

$H_a: \text{plim}(\tilde{\theta} - \hat{\theta}) \neq \mathbf{0}$ Endogeneidad

El estadístico de prueba es:

$$H = (\tilde{\theta} - \hat{\theta})' [V(\tilde{\theta} - \hat{\theta})]^{-1} (\tilde{\theta} - \hat{\theta}) \sim \chi^2$$

Con grados de libertad = $\dim(\tilde{\theta} - \hat{\theta})$

Hausman demuestra que bajo ciertas condiciones (básicamente que el estimador $\hat{\theta}$ es un estimador eficiente bajo la hipótesis nula de exogeneidad)

$$V(\tilde{\theta} - \hat{\theta}) = V(\tilde{\theta}) - V(\hat{\theta})$$

Siendo así:

$$H = (\tilde{\theta} - \hat{\theta})' [V(\tilde{\theta}) - V(\hat{\theta})]^{-1} (\tilde{\theta} - \hat{\theta})$$

En el caso de que $\tilde{\theta}$ y $\hat{\theta}$ sean escalares, entonces:

$$H = \frac{(\tilde{\theta} - \hat{\theta})^2}{V(\tilde{\theta}) - V(\hat{\theta})} \sim \chi^2(1 \text{ gl})$$

Aplicando este test en el problema de regresión que nos compete, comparamos el estimador de MCO con el estimador de VI, en el modelo $Y = X\beta + u$, con $E(uu') = \sigma^2 I$

El estadístico correspondiente es:

$$H = (\hat{\beta}^{VI} - \hat{\beta}^{MCO})' [Var.Asy(\hat{\beta}^{VI}) - Var.Asy(\hat{\beta}^{MCO})]^{-1} (\hat{\beta}^{VI} - \hat{\beta}^{MCO})$$

¿Qué sucede si $E(uu') = \sigma^2 \Omega$?

En este caso puede utilizar test alternativos, tal como el test de **Durbin-Wu-Hausman (DWH)**. (Se deja la revisión del test al estudiante)

Test para verificar restricciones sobreidentificadas

Lastimosamente, la validez de un instrumento no puede ser testeada en un modelo exactamente identificado (es decir en un modelo con $r = k$). Sin embargo, si es posible testear la validez de instrumentos sobreidentificados en modelos sobreidentificados, siempre y cuando los parámetros del modelo hayan sido estimados mediante el método generalizado de momentos (GMM). No entraremos en este curso a analizar la teoría detrás del método generalizado de momentos, pero podemos aplicarlo en STATA e interpretar sus resultados.

Instrumentos débiles

Sea \mathbf{Z} una matriz $n \times r$ de instrumentos.

1. \mathbf{Z} sea independiente de \mathbf{u} (Validez de los instrumentos).
2. \mathbf{Z} esté correlacionada con \mathbf{X} (Relevancia de los instrumentos).
3. Si \mathbf{Z} está débilmente correlacionada con \mathbf{X} , decimos que los instrumentos son débiles (Weak Instruments).

Los resultados que hemos obtenido para los estimadores de VI (consistencia, insesgamiento asintótico, normalidad asintótica, etc.) son resultados asintóticos. El problema es que en la práctica los tamaños de muestra con los que generalmente trabajamos distan mucho de ser muy grandes. En este sentido el estimador de VI puede tener sesgo y su distribución real puede diferir de su distribución asintótica.

Además de todo esto, el problema alcanza su clímax si trabajamos con instrumentos débiles. El detalle de los test para evaluar si tenemos instrumentos débiles quedará para otro momento, por ahora solo veremos su aplicación.

