Лекция 16: Образ и ядро линейного оператора

Б.М.Верников

Уральский федеральный университет,
Институт математики и компьютерных наук,
кафедра алгебры и дискретной математики

В этой лекции мы завершаем изучение линейных операторов. С каждым линейным оператором в векторном пространстве V связыны два важных множества векторов — образ и ядро оператора. После определения этих понятий мы проверим, что образ и ядро любого оператора являются подпространствами в V, докажем теорему о связи между их размерностями и приведем алгоритмы нахождения базисов образа и ядра, в том числе алгоритм Чуркина их одновременного нахождения.

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. *Образом* оператора $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{y} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{x} \in V$. *Ядром* оператора $\mathcal{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{x} \in V$ таких, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Образ оператора $\mathcal{A}$ обозначается через $\operatorname{Im} \mathcal{A}$, а его ядро — через $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Отметим, что каждое из множеств $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ и $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ непусто. Для первого из них это очевидно, а для второго вытекает из замечания 1 в лекции 14.

Замечание 1

Образ и ядро линейного оператора, действующего в пространстве V, являются подпространствами в V.

Доказательство. Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, а t — произвольное число. Тогда существуют векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ такие, что $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1$ и $\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$. Следовательно,

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \text{и} \quad t\mathbf{y}_1 = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1).$$

Это означает, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x}_1 \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ — подпространство в V.

Далее, пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, а t — вновь произвольное число. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}(t\mathbf{x}_1) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}_1) = t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Это означает, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, t\mathbf{x}_1 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$, и потому $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ — подпространство в V. $\square$

Замечание 1 позволяет говорить о размерности и базисе образа и ядра оператора $\mathcal{A}$. В следующей теореме указана связь между размерностями этих подпространств, а из ее доказательства легко извлекается способ нахождения их базисов.

Теорема 1

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. Тогда сумма размерностей образа и ядра оператора $\mathcal{A}$ равна размерности V.

Доказательство. Положим $\dim V = n$ и зафиксируем произвольный базис $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ пространства V. Обозначим матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе через A, а ее ранг — через r. Пусть $\mathbf{x} \in V$, а $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(t_1\mathbf{f}_1 + t_2\mathbf{f}_2 + \cdots + t_n\mathbf{f}_n) = t_1\mathcal{A}(\mathbf{f}_1) + t_2\mathcal{A}(\mathbf{f}_2) + \cdots + t_n\mathcal{A}(\mathbf{f}_n).$$

Поскольку пространство $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ состоит из векторов вида $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, мы получаем, что набор векторов $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1), \mathcal{A}(\mathbf{f}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{f}_n)$ является системой образующих этого пространства. Следовательно, размерность $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ равна размерности подпростанства, порожденного указанным набором векторов. Учитывая, что столбцы матрицы A суть в точности столбцы координат векторов $\mathcal{A}(\mathbf{f}_1), \mathcal{A}(\mathbf{f}_2), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{f}_n)$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, мы получаем, что размерность $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ равна рангу A по столбцам, т. е. $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = r$.

Связь между размерностями образа и ядра (2)

Далее, пусть $\mathbf{x} \in V$, а X — столбец координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Ясно, что $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $AX = O$, где O — нулевой столбец. Иными словами, пространство $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ совпадает с пространством решений однородной системы линейных уравнений $AX = O$. В силу теоремы 2 из лекции 13 $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = n - r$. Следовательно, $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = r + (n - r) = n$. $\square$

Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе. Как видно из доказательства теоремы 1, пространство $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ совпадает с пространством, порожденным векторами-столбцами матрицы A или, что то же самое, с пространством, порожденным векторами-строками матрицы $A^\top$. Учитывая алгоритм нахождения базиса подпространства, изложенный в лекции 9, мы получаем следующий

Алгоритм нахождения базиса и размерности образа линейного оператора

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ задан в некотором базисе матрицей A. Чтобы найти базис подпространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$, надо привести к ступенчатому виду матрицу $A^\top$. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом пространства $\operatorname{Im} \mathcal{A}$, а число этих строк — его размерностью.

Из доказательства теоремы 1 непосредственно вытекает также следующий

Алгоритм нахождения базиса и размерности ядра линейного оператора

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ задан в некотором базисе матрицей A. Чтобы найти базис подпространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, надо найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой есть A. Она и будет базисом пространства $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, а число векторов в ней — его размерностью.

В заключение лекции приведем еще один алгоритм нахождения базисов и размерностей образа и ядра оператора $\mathcal{A}$. Его преимуществом является то, что он позволяет найти базисы образа и ядра *одновременно*. Алгоритм это был придуман совсем недавно — в 1991 г. Его автором является новосибирский математик В. А. Чуркин.

Алгоритм одновременного нахождения базисов и размерностей образа и ядра линейного оператора (алгоритм Чуркина)

Пусть оператор $\mathcal{A}$ имеет в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ матрицу A. Составим матрицу B порядка $n \times 2n$ следующим образом. В левой половине (т. е. в первых n столбцах) этой матрицы запишем матрицу $A^\top$, а в ее правой половине (в последних n столбцах) — единичную матрицу. Элементарными преобразованиями всей матрицы B приведем ее левую половину к ступенчатому виду. Полученную матрицу обозначим через C, ее левую половину — через C_1, а ее правую половину — через C_2. Тогда:

(i) ненулевые строки матрицы C_1 образуют базис образа оператора $\mathcal{A}$;

(ii) строки матрицы C_2, которые являются продолжениями нулевых строк матрицы C_1, образуют базис ядра оператора $\mathcal{A}$.

Утверждение (i) немедленно вытекает из описанного ранее алгоритма нахождения базиса образа и того факта, что в процессе преобразований левая и правая части матрицы не «перемешиваются».

Обоснуем утверждение (ii). Заметим, что вектор $\mathbf{f}_i$ имеет в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ координаты $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где 1 стоит на i-м месте. Поэтому можно считать, что единичная матрица, стоящая в правой части матрицы B, есть матрица, в которой по строкам записаны координаты векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ в базисе, составленном из этих векторов. Вспоминая определение матрицы оператора, получаем, что в левой половине i-й строки матрицы B стоят координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{f}_i)$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$. Итак, матрица B обладает следующим свойством: если в правой части какой-то строки этой матрицы стоят координаты некоторого вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$, то в левой части этой строки стоят координаты вектора $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ в том же базисе. Нетрудно проверить, что это свойство сохраняется при элементарных преобразованиях матрицы. Поскольку матрица C получена из B элементарными преобразованиями, она также обладает указанным свойством. Обозначим через $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ строки матрицы C_2, являющиеся продолжениями нулевых строк матрицы C_1. В силу сказанного выше $\mathcal{A}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$, т. е. $\mathbf{x}_i \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ для всякого $i = 1, 2, \dots, k$. Далее, можно проверить, что векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ линейно независимы. Из утверждения (i) вытекает, что $k + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n$. По теореме 1 $k = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Итак, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ — линейно независимый набор векторов из $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, число векторов в котором равно размерности этого подпространства. В силу замечания 8 из лекции 8 эти векторы образуют базис $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

В качестве примера найдем базисы и размерности образа и ядра линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного матрицей матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Действуя по указанному выше алгоритму, имеем

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Для наглядности мы провели в последней матрице горизонтальную черту, которая в левой части матрицы ограничивает снизу базис образа, а в правой части ограничивает сверху базис ядра. Итак, векторы $(2, 1, -1, 1)$ и $(0, 5, 5, 1)$ образуют базис образа оператора $\mathcal{A}$, а векторы $(2, 0, 2, 2)$ и $(0, 1, 0, 0)$ — базис его ядра. Ясно, что размерности образа и ядра равны 2.