这个 Darwin 项可以粗略地解释为来源于一个虚的电子-正电子对产生中的量子涨落.初始的电子与这个对中的正电子湮灭,如图 23.1 所示.在用不确定性关系估算出的一个虚粒子对的寿命 $\Delta t \sim \hbar/\Delta E \sim \hbar/(mc^2)$ 之内,这个粒子对的组分能够移动一段量级约为电子的 Compton 波长的距离,$\xi \sim c\Delta t \sim \hbar/(mc) = \lambda_C$.在该初始电子湮灭以后,剩下的电子从原来的位置被移动 $\sim \lambda_C$.这意味着非相对论势场 U 不可能严格地定域化,必须对量子涨落的体积 $\sim \lambda_C^3$ 求平均.由于涨落的电子位置 $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\xi}$,作用在电子上的有效势被弥散到一个小的区域:

$$U(\boldsymbol{r}) \Rightarrow U(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\xi}) \approx U(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla U(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}\xi_i\xi_j\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}U(\boldsymbol{r}) \tag{23.38}$$

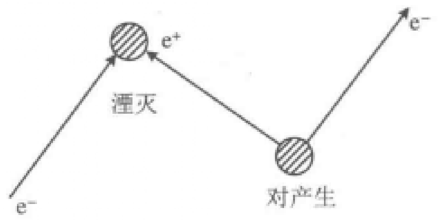

图 23.1 伴随一个电子-正电子对产生的量子涨落

通过把这个势对涨落求平均(我们用上画线表示这个平均)并且考虑到沿不同方向的位移是无关联的:

$$\overline{\xi} = 0, \quad \overline{\xi_i\xi_j} = \frac{1}{3}\overline{\xi^2}\delta_{ij} \tag{23.39}$$

我们得到

$$\overline{U(\boldsymbol{r}+\xi)} = U(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{6}\overline{\xi^2}\nabla^2 U(\boldsymbol{r}) \tag{23.40}$$

这个平均的结果可以处理成一个小的静态微扰:

$$\delta U \sim \frac{1}{6}\overline{\xi^2}\nabla^2 U(\boldsymbol{r}) \sim \frac{1}{6}\lambda_C^2\nabla^2 U = \frac{\hbar^2}{6m^2c^2}\nabla^2 U \tag{23.41}$$

这仅仅稍微不同于(23.35)式中第二级的精确结果.

二级项的全部贡献保持 j 为一个好量子数.在具有核电荷 Z 的类氢原子中非相对论能级的移动(以 Rydberg 为单位)为

$$\Delta E_{nj} = -\frac{\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n}\right)\text{Ry} \tag{23.42}$$