



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

RODOLFO ANDRÉ CARDOSO NEVES

**APROXIMAÇÕES NÃO HIPERBÓLICAS DO TEMPO DE
TRÂNSITO UTILIZANDO APROXIMANTES DE PADÉ**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

BELÉM-PARÁ

2017

RODOLFO ANDRÉ CARDOSO NEVES

**APROXIMAÇÕES NÃO HIPERBÓLICAS DO TEMPO DE
TRÂNSITO UTILIZANDO APROXIMANTES DE PADÉ**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Ribeiro Cruz

Belém-Pará

2017

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
Biblioteca do Instituto de Geociências/SIBI/UFPA

Neves, Rodolfo André Cardoso, 1992 -

Aproximações não-hiperbólicas do tempo de trânsito
utilizando aproximatantes de Padé / Rodolfo André Cardoso
Neves. – 2017.

114 f. : il. ; 30 cm

Inclui bibliografias

Orientador: João Carlos Ribeiro Cruz

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará,
Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em
Geofísica, Belém, 2017.

1. Prospecção sísmica. 2. Ondas sísmicas. 3. Método de
reflexão sísmica. I. Título.

CDD 22. ed. 622.1592

RODOLFO ANDRÉ CARDOSO NEVES

**APROXIMAÇÕES NÃO HIPERBÓLICAS DO TEMPO DE
TRÂNSITO UTILIZANDO APROXIMANTES DE PADÉ**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Data de Aprovação: 26/06/2017

Banca Examinadora:

Professor João Carlos Ribeiro Cruz - Orientador
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará – UFPA

Professor Paulo Eduardo Miranda Cunha - Membro
Doutor em Geofísica
Petrobrás

Professor Rubenvaldo Pereira - Membro
Doutor em Geofísica
Universidade Federal do Pará – UFPA

Dedico este trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. João Carlos pela orientação desta dissertação, e pela proposta do tema. Além do suporte e paciência em responder as minhas dúvidas, e das sugestões inteligentes na solução de problemas que foram aparecendo no caminho.

Agradeço ao professor Sergey Fomel, que apesar de não conhecer pessoalmente, produziu trabalhos que inspiraram o tema, e disponibilizou gratuitamente vários dos programas aqui utilizados nesta dissertação.

Agradeço à minha mãe Regina de Nazaré, à minha irmã Rebeca Cristina, à minha sobrinha Ágatha, e ao meu pai Ricardo Neves, por todo apoio e dedicação durante a árdua caminhada para a realização deste sonho!

E agradeço à amizade de amigos que conquistei durante o curso de Geofísica, e que de forma direta ou indireta me ajudaram na realização do trabalho: Leonardo Reis, Hugo Souza, Diogo Rezende, Antônio Rizimar e Raphael Di Carlo.

“Todas as coisas excelentes são tão difíceis quanto raras”.
(Baruch Spinoza)

RESUMO

As aproximações de tempo de trânsito são ferramentas indispensáveis para as etapas de empilhamento e migração de dados sísmicos. Com o intuito de aumentar a acurácia das aproximações hiperbólicas de tempo de trânsito, propomos a utilização dos aproximantes de Padé no desenvolvimento de novas aproximações de tempo de trânsito para o família de ponto médio comum e família de superfície de reflexão comum. As aproximações hiperbólicas de sobretempo normal e superfície de reflexão comum (SRC), são aproximações em série de Taylor segunda ordem do tempo de trânsito de reflexão. Os aproximantes de Padé surgem como alternativa à série de Taylor, pois como característica principal possuem raio de convergência maior e convergem mais rapidamente à função desejada. Além disso, podem ser obtidos através da própria série de Taylor da função aproximada. Essa nova aproximação é obtida através da aproximação de Padé [2/2] das Equação generalizada do sobretempo; e da aproximação de Padé [2/2] das expansões em série de Taylor quarta-ordem para a superfície SRC. Testamos a qualidade das aproximações comparando-as com a função tempo de trânsito exata para os modelos de variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade, pois para esses modelos o tempo de trânsito pode ser obtido analiticamente em uma expressão compacta que depende apenas de parâmetros da geometria de cada modelo. Testes numéricos foram realizados para o meio transversalmente isotrópico com eixo de simetria vertical (TIV), obtendo o tempo de trânsito de uma pilha de camadas plano horizontais com parâmetro de anisotropia η , através do traçamento de raios. E comparamos com o tempo de trânsito obtido através da aproximação de Padé [2/2] desenvolvida para o modelo TIV. Obtivemos numericamente a superfície de tempo de trânsito SRC para um refletor gaussiano e comparamos o tempo de trânsito exato obtido com as aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas para o família de superfície de reflexão comum. Comparamos a acurácia dos métodos SRC hiperbólico, SRC não hiperbólico e SRC quarta ordem. As aproximações de Padé produzidas para o domínio do ponto médio comum dependem apenas de um parâmetro a mais do que a equação do sobretempo normal e mantém a acurácia para maiores afastamentos. Os métodos SRC não hiperbólico, SRC quarta ordem e SRC Padé produziram melhores resultados que o método SRC convencional nos testes analíticos. No teste numérico o SRC quarta ordem aumentou a região de erro mínimo do método SRC hiperbólico e não hiperbólico.

Palavras-chave: Aproximantes de Padé. Aproximações não hiperbólicas do tempo de trânsito. Aproximações de Padé família de ponto médio comum. Família de superfície de reflexão comum.

ABSTRACT

Travelttime approximation is a fundamental tool of the stack and migration steps in seismic data processing. To increase the accuracy of these approximations, we propose new travelttime approximations based on Padé approximants, to CMP and CRS gathers. Hyperbolic approximations such as normal moveout (NMO) and comom reflection surface (CRS) are taylor series approximations of second order of the reflection travelttime. Padé approximants appear as an alternative to Taylor series, because they converge quickly to the desired function, and they have a major radius of convergence. Besides that, they can be obtained through the proper Taylor serie of the approximated function. This new approximation is obtained from the [2/2] Padé approximation of the generalized moveout Equation; and from [2/2] Padé approximation of the Taylor series expansions of fourth order of the CRS surface. We try the quality of those approximations comparing them with the exact travelttime function of Linear Velocity , Linear Sloth, circular refletor models, because to those models the exact travelttime is analitically given in a compact expression that depends only of each model parameters. We did numerical tests for VTI medium, the exact travelttime was obtained by ray tracing in a 1D horizontal stack layers model with anisotropy parameter η . We compared the exact travelttime with travelttime obtained using Padé [2/2] approximation for VTI medium. We obtained numerically the CRS travelttime surface for a gaussian reflector and compared the exact travelttime with the approximated travelttime obtained using Pade [2/2] approximations for CRS gather. The CMP Gather Padé aproximations are dependable of only one parameters beyond normal moveout equation, and keep acuracy for larger offsets. non hyperbolic CRS, CRS fourth order and CRS Padé had better result in analitical tests. CRS fourth order increased the minimun error area in numerical tests.

Keywords: Padé approximants. Non-hyperbolic travelttime aproximation. Padé aproximation CMP gather. Padé aproximation CRS gather.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Representação esquemática da propagação de um raio de reflexão em um meio formado por uma pilha de camadas planas horizontais, cada uma com espessura variável d_k . A velocidade intervalar da k -ésima camada é v_k , o tempo de trânsito vertical na camada é t_k , x é o afastamento, e o tempo de trânsito $t(x)$ é obtido pela série na Equação 2.2.	21
Figura 2 – Representação esquemática do modelo do refletor hiperbólico, utilizado para derivar a equação generalizada do sobretempo (Equação 2.18). Esta equação descreve o sobretempo de reflexão dados os parâmetros da geometria do modelo e as posições de fonte e receptor.	24
Figura 3 – Representação esquemática das frentes de ondas NIP e N : R é o ponto de reflexão do raio associado ao par fonte S e receptor G , β_0 é o ângulo de emergência do raio normal, h_i é o meio-afastamento e x_{mi} é a posição do ponto médio. Observe que a posição do ponto médio é diferente da posição de incidência do raio normal na superfície, X_0	32
Figura 4 – Representação esquemática das frentes de onda N e NIP : A onda NIP é gerada por uma fonte pontual na posição R (ponto PIN), a onda N é gerada por um elemento de reflexão sobre o refletor Σ na vizinhança de R . Os raios de curvatura das frentes de onda NIP e N são R_{NIP} e R_N , respectivamente.	33
Figura 5 – Representação esquemática do modelo do refletor circular em um meio de velocidade constante v_0 . m é a posição do ponto médio do par fonte s e receptor r , L é o comprimento do raio normal, β é ângulo de emergência do raio normal na superfície e R é o raio do refletor circular.	37
Figura 6 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.34), hipérbole deslocada (Equação 2.17), aproximação modelo TIV (Equação 2.35), aproximação generalizada (Equação 2.24) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.12 e 3.14), para o modelo variação linear de velocidade.	48
Figura 7 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.34), hipérbole deslocada (Equação 2.17), modelo TIV (Equação 2.35), aproximação generalizada (Equação 2.24) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.15 e 3.17), para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade.	50

Figura 8 – Distribuição do parâmetro de anisotropia η (anelipticidade) no Modelo Marmousi anisotrópico. O parâmetro η é uma quantidade adimensional que varia comumente no intervalo de 0 a 0.27.	51
Figura 9 – Distribuição da velocidade horizontal (Km/s) no Modelo Marmousi anisotrópico. A velocidade horizontal varia de 1.5 Km/s a 6 Km/s.	52
Figura 10 – Distribuição da velocidade vertical (Km/s) no Modelo Marmousi anisotrópico. A velocidade vertical varia de 1.5 Km/s a 6 Km/s.	52
Figura 11 – Distribuição da velocidade vertical (Km/s) no modelo TIV 1D. O tempo de trânsito exato $\psi(x)$ é obtido através do traçamento de raios.	52
Figura 12 – Curvas de tempo de trânsito de reflexão das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.34), hipérbole deslocada (Equação 2.17), modelo TIV (Equação 2.35), aproximação generalizada (Equação 2.24) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.18 e 3.19 para o modelo TIV 1D da Figura 11. Os pontos representam o tempo de trânsito exato $\psi(x)$ produzido através do traçamento de raios, as linhas contínuas as curvas de tempo de trânsito da aproximadas.	54
Figura 13 – Representação esquemática do experimento analítico para a produção da superfície SRC $\Psi(\alpha, \theta)$ para o refletor circular descrito na Seção 2.9. As letras (a), (b) e (c) representam os três experimentos realizados, cada um com uma posição do ponto médio central m_0 , escolhida para o cálculo dos parâmetros t_0 , R_N , R_{NIP} e β através das Equações 2.99-2.102, que serão utilizados nas aproximações da SRC. Variando os ângulos α e θ ; obtemos m , h e Ψ através das Equações paramétricas 2.96-2.98.	66
Figura 14 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.68) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.73), para o refletor circular descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado na origem.	68
Figura 15 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.68) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.73), para o refletor circular, descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado em 500m.	69
Figura 16 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.68) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.73), para o refletor circular, descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	70

Figura 17 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52, o ponto médio central m_0 é localizado na origem.	71
Figura 18 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado na origem.	72
Figura 19 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52, o ponto médio central m_0 é localizado em 500m.	73
Figura 20 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.	74
Figura 21 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52, o ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	75
Figura 22 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	76
Figura 23 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação 5.23 do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{ap}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado na origem.	77

Figura 24 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t^2(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t^2(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado está localizado na origem.	78
Figura 25 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.	79
Figura 26 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.	80
Figura 27 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	81
Figura 28 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	82
Figura 29 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 está localizado na origem. . .	83
Figura 30 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 está localizado na origem.	84

Figura 31 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série($t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP}$) ² , para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.	85
Figura 32 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para ($t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP}$) ² , expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para ($t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP}$) ² , expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.	86
Figura 33 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série($t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP}$) ² , para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	87
Figura 34 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para ($t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP}$) ² , expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para ($t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP}$) ² , expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.	88
Figura 35 – Refletor gaussiano com centro em 5Km imerso em um meio de variação linear do gradiente de velocidade, a velocidade varia de 1,5Km a 3,5Km.	90
Figura 36 – De cima para baixo: Cubo de dados sísmicos de reflexão e Superfície de Reflexão Comum (SRC) extraída a partir da modelagem de dados sísmicos de reflexão do refletor gaussiano da Figura 35. Os eixos são: h meio afastamento, ponto médio comum (PMC) e tempo de reflexão em segundos.	91
Figura 37 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico (Equação 2.68). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.	92
Figura 38 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico (Equação 2.68). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.	93

Figura 39 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC não hiperbólico (Equação 2.73). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.	94
Figura 40 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico de (FOMEL; KAZINNIK, 2013) (Equação 2.73). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.	95
Figura 41 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC quarta ordem (Equação 5.23). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.	97
Figura 42 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC quarta ordem (Equação 5.23). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.	98

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	20
2.1	Tempo de trânsito de reflexão para um modelo de camadas planohorizontais	20
2.2	Aproximação da hipérbole deslocada	23
2.3	Aproximação não-hiperbólica do tempo de trânsito	23
2.4	Modelos com variação linear do gradiente de velocidade	26
2.4.1	Modelo com variação linear de velocidade	27
2.4.2	Modelo com variação linear do quadrado da vagarosidade	28
2.5	Modelo transversalmente isotrópico (TIV)	29
2.6	O método da superfície de reflexão comum (SRC)	31
2.7	Superfície de reflexão comum não hiperbólica	33
2.8	Superfície de reflexão comum quarta ordem	35
2.9	Modelo do refletor circular	36
3	APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA UMA FAMÍLIA DE PONTO MÉDIO COMUM	39
3.1	Aproximação de Padé da equação generalizada	39
3.2	Aproximação de Padé do tempo de trânsito para o modelo de variação linear de velocidade	42
3.3	Aproximação de Padé do tempo de trânsito para o modelo de variação linear do quadrado da vagarosidade	43
3.4	Aproximação de Padé do tempo de trânsito para o modelo TIV	44
4	TESTE ANALÍTICO DAS APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA O DOMÍNIO DO PONTO MÉDIO COMUM	46
4.1	Modelo de variação linear de velocidade	46
4.2	Modelo de variação linear do quadrado da vagarosidade	49
4.3	Modelo transversalmente isotrópico (TIV)	51
5	APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA UMA FAMÍLIA DE SUPERFÍCIE DE REFLEXÃO COMUM (SRC)	55
5.1	Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $t(h, d)$, expansão de Padé em h	56
5.2	Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $t^2(h, d)$, expansão de Padé em h	58

5.3	Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem ($t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP}$) ² , expansão de Padé em h	60
5.4	Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $t(h, d)$, expansão de Padé em d	61
5.5	Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $t^2(h, d)$, expansão de Padé em d	62
5.6	Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem ($t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP}$) ² , expansão de Padé em d	63
6	TESTE ANALÍTICO DAS APROXIMAÇÕES DE PADÉ DA SUPERFÍCIE DE REFLEXÃO COMUM	65
6.1	Aproximações hiperbólica e não hiperbólica da superfície de reflexão comum	66
6.2	Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série $t(h, d)$	71
6.3	Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série $t^2(h, d)$	77
6.4	Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série quarta ordem ($t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP}$) ²	82
7	TESTE NUMÉRICO DA EXPANSÃO $t^2(h, d)$ DO SRC QUARTA ORDEM	89
8	RESULTADOS	100
9	CONCLUSÃO	103
	REFERÊNCIAS	104
	APÊNDICES	106
	APÊNDICE A – APROXIMANTES DE PADÉ	107
	APÊNDICE B – GENERALIZAÇÃO DO APROXIMANTE DE PADÉ [2/2] PARA UMA SÉRIE NA FORMA $t(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6)$	110
	APÊNDICE C – GENERALIZAÇÃO DO APROXIMANTE DE PADÉ [2/2] PARA UMA SÉRIE NA FORMA: $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$	112

1 INTRODUÇÃO

A imagem dos refletores em subsuperfície é produzida a partir das técnicas de processamento sísmico, vizando suprimir ruído aleatório e aumentar a razão sinal/ruído dos dados adquiridos. Dentre essas técnicas, uma das mais fundamentais é o empilhamento dos traços em configurações de ponto médio comum. Esta etapa é realizada ao longo de curvas de tempo de trânsito, e sua qualidade depende da acurácia das aproximações, de modo a incluir mais informação sobre os refletores.

A aproximação mais comumente utilizada é a aproximação sobretempo normal. Esta surgiu a partir de um modelo simplificado da subsuperfície, formada por uma pilha de camadas de velocidade intervalar v_k . Para esse modelo a curva de tempo de trânsito é uma expansão de k termos em série de Taylor do tempo de trânsito ao quadrado (TANER; KOEHLER, 1969).

Essa forma de empilhamento convencional através de hipérboles do tempo de reflexão é estendida além do domínio ponto médio comum através da técnica da Superfície de Reflexão Comum (SRC) (MÜLLER, 1998). De acordo com a qual obtem-se uma seção sísmica de afastamento fonte-receptor igual a zero a partir do registro em uma configuração arbitrária de posições das fontes e receptores. O tempo de trajeto do sinal é uma função da velocidade da camada superficial, que deve ser conhecida, os raios de curvatura da frente de onda N e NIP , e o ângulo de emergência do raio normal (JAGER et al., 2001).

A técnica SRC acrescenta mais informação ao empilhamento, pois além da soma de traços no domínio do afastamento o método estende o empilhamento convencional dos traços sísmicos sobre o afastamento para o empilhamento multidimensional sobre superfícies afastamento-ponto médio. Define-se um ponto médio comum central m_0 e é realizado o empilhamento nos afastamentos e nos pontos médios vizinhos definidos pela distância ao ponto médio central $d = m - m_0$.

As curvas de tempo de trânsito nos vários pontos médios vizinhos definem uma superfície de reflexão comum $\Psi(h, d)$ e o empilhamento é realizado através dela. Ambas as técnicas, sobretempo normal e o método SRC, empregam aproximações hiperbólicas do tempo de trânsito baseadas em uma aproximação em séries de Taylor até segunda ordem. A aproximação hiperbólica é justificada através do truncamento de uma série de Taylor do tempo de trânsito ao quadrado ao longo de um raio de referência. assim, é sempre acurada para pequenas variações do raio central. O aumento da região de convergência do método SRC é obtido com a expansão em série de Taylor da superfície SRC até quarta ordem (HÖCHT, 2002). Ou através da obtenção de uma superfície SRC não hiperbólica obtida através da equação do tempo de trânsito para o modelo do refletor hiperbólico em

um meio de velocidade constante (FOMEL; KAZINNIK, 2013).

O principal objetivo deste trabalho é formular uma aproximação de tempo de trânsito para longos afastamentos, quando a distância entre fonte e receptor é maior do que a profundidade dos refletores alvos em subsuperfície, e construir superfícies de tempo de trânsito SRC que possuam uma região de convergência maior no domínio do ponto médio comum e do afastamento, utilizando as aproximações do SRC não hiperbólico e SRC quarta ordem.

Os dados sísmicos adquiridos em grandes afastamentos iluminam a subsuperfície de maneira diferente dos dados sísmicos de afastamentos curtos, trazendo informação adicional sobre os refletores: No imageamento de flancos de domos de sal, planos de falhas, camadas reviradas (como em regiões de dobras), imageamento da base de domos de sal, para a obtenção de melhor cobertura na análise Amplitude versus offset (AVO), ambos requerem dados de longos afastamentos (LIN, 2003). Para tanto propomos a utilização dos aproximantes de Padé na obtenção das aproximações de tempo de trânsito para o sobretempo normal e para a superfície SRC. Esses aproximantes foram inicialmente desenvolvidos por Henrί Padé em 1892, e surgem como alternativa à série de Taylor, pois como característica principal possuem raio de convergência maior e convergem mais rapidamente à função desejada. Além disso, podem ser obtidos através da própria série de Taylor da função aproximada (NAVARRO et al., 1999).

No Capítulo 2 apresentamos o estado de arte das aproximações de tempo de trânsito e a equação não hiperbólica generalizada do tempo de trânsito (STOVAS; FOMEL, 2010). Esta equação é chamada generalizada pois pode ser particularizada para modelos arbitrários da subsuperfície e reduzida à aproximações bem conhecidas na literatura, como a equação do sobretempo normal (DIX, 1955), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988), aproximação para o meio transversalmente isotrópico (TIV) (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995), entre outras, através da escolha dos coeficientes A , B , e C da própria equação generalizada.

No final do Capítulo 2 apresentamos a particularização da equação generalizada para o caso do SRC. Esta equação é a generalização da aproximação hiperbólica da superfície SRC (JAGER et al., 2001). Também apresentamos as aproximações SRC quarta-ordem desenvolvidas com o intuito de aumentar a acurácia do método SRC para maiores afastamentos e distâncias entre os ponto médio comum's, são 3 expansões em série de Taylor quarta ordem para a superfície SRC (HöCHT, 2002).

No Capítulo 3 obtemos as aproximações de Padé do tempo de trânsito válidas para o domínio do ponto médio comum. Estas são aproximações do tempo de trânsito particularizadas para os modelos de variação linear da velocidade, variação linear do quadrado da vagarosidade e modelo TIV.

No Capítulo 4 comparamos as acurácia das aproximações de Padé com as aproximações da equação generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988), (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995), e sobretempo normal (DIX, 1955), utilizando o tempo de trânsito exato dos modelos de variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade obtidos analiticamente.

No Capítulo 5, obtemos a aproximação de Padé das 3 séries de Taylor do SRC quarta ordem; são produzidas ao todo 6 aproximações de Padé: 3 ao longo do meio-afastamento e 3 ao longo da separação entre os ponto médio comum's. Comparamos as aproximações com o tempo de trânsito exato, dado analiticamente para o modelo do refletor circular, os parâmetros do SRC, R_N , R_{NIP} e β também são dados analiticamente.

No Capítulo 6 geramos superfícies de erro relativo absoluto para cada aproximação de Padé do SRC. O erro relativo absoluto é um valor percentual que representa o quanto a aproximação difere do valor de tempo de trânsito exato da superfície SRC de referência.

No Capítulo 7 comparamos a acurácia dos métodos SRC hiperbólico, SRC não hiperbólico (FOMEL; KAZINNIK, 2013) e SRC quarta ordem. As aproximações são otimizadas através do método dos mínimos quadrados. A diferença entre o tempo de trânsito exato e o aproximado para um refletor gaussiano, utilizando cada uma das aproximações é apresentada e relacionada ao erro de aproximação.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Esse capítulo apresenta o estado de arte das aproximações de tempo de trânsito de reflexão para famílias de ponto médio comum e famílias de Superfície de Reflexão Comum (SRC). As aproximações de tempo de trânsito são fundamentais na estimativa de parâmetros importantes que descrevem o sobretempo em subsuperfície, como a distribuição de velocidades, tempo de reflexão e curvaturas, de modo a influenciar na qualidade das etapas subsequentes de processamento, como empilhamento e migração.

2.1 Tempo de trânsito de reflexão para um modelo de camadas plano-horizontais

A aproximação hiperbólica do tempo de trânsito é comumente usada no processamento sísmico em famílias de ponto médio comum. Essa equação, conhecida como aproximação sobretempo normal (DIX, 1955), é a versão truncada até termos de segunda ordem da equação geral do tempo de trânsito para um meio formado por uma pilha de camadas.

$$t_{sn}^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{V_{RMS}^2} \quad (2.1)$$

O modelo de camadas plano horizontais é representado esquematicamente na Figura 1, as camadas possuem velocidade intervalar v_k e espessura d_k , t_k é o tempo duplo de trânsito na camada k e x é o afastamento. A equação geral do tempo de trânsito para esse modelo é a expansão em série na Equação 2.2 (TANER; KOEHLER, 1969):

$$t^2 = C_1 + C_2x^2 + C_3x^4 + C_4x^6 + \dots \quad (2.2)$$

Os coeficientes C 's da Equação 2.2 são dados por:

$$C_1 = a_1^2 \quad (2.3)$$

$$C_2 = \frac{a_1}{a_2} \quad (2.4)$$

$$C_3 = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{4a_2^4} \quad (2.5)$$

Onde o termo a_m :

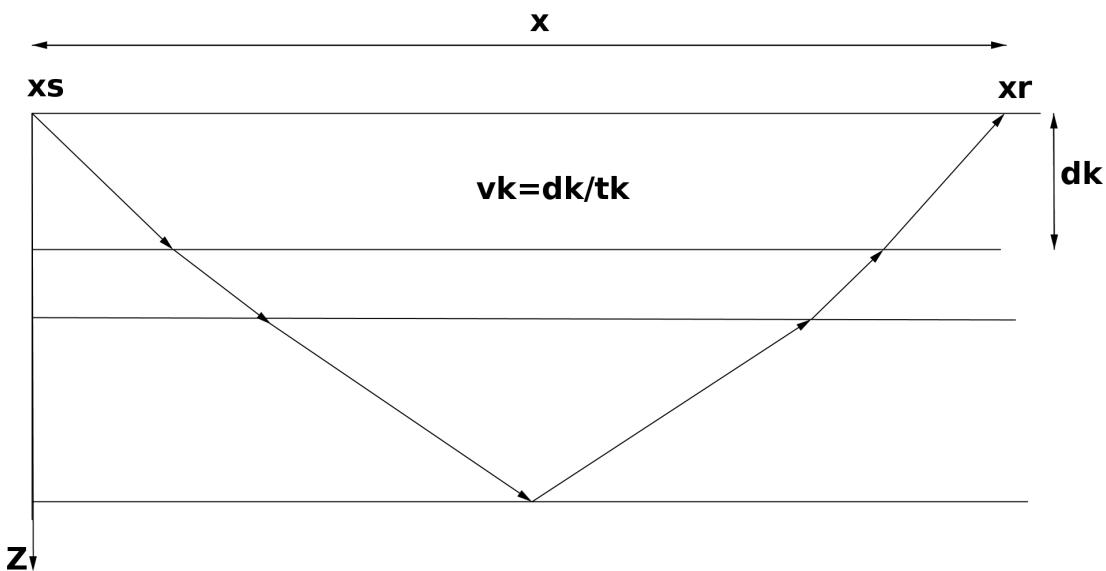
$$a_m = 2 \sum_k v_k^{2m-3} d_k \quad (2.6)$$

Ou, definindo a espessura da camada k como $d_k = v_k t_k$ (a partir da velocidade intervalar v_k , e do tempo de trânsito vertical t_k na camada):

$$a_m = 2 \sum_k v_k^{2m-2} t_k \quad (2.7)$$

Os coeficientes C_1 e C_2 tem um significado físico importante: $C_1 = t_0^2$ é o quadrado do tempo de reflexão para o afastamento nulo. $C_2 = 1/V_{RMS}^2$ é o inverso do quadrado da velocidade média quadrática, média ponderada dos quadrados das velocidades intervalares. O peso da ponderação é igual ao tempo vertical t_k da camada (TANER; KOEHLER, 1969).

Figura 1 – Representação esquemática da propagação de um raio de reflexão em um meio formado por uma pilha de camadas planas horizontais, cada uma com espessura variável d_k . A velocidade intervalar da k -ésima camada é v_k , o tempo de trânsito vertical na camada é t_k , x é o afastamento, e o tempo de trânsito $t(x)$ é obtido pela série na Equação 2.2.



Fonte: Do Autor.

Generalizando a Equação 2.2, a relação entre o tempo de reflexão é o afastamento pode ser representada por uma série de Taylor, na forma (HAKE; HELBIG; MESDAG,

1984):

$$t^2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x^2 - x_0^2)^k \quad (2.8)$$

x_0 é um afastamento arbitrário, x é o afastamento entre a fonte e o receptor e t é o tempo de reflexão. A série da Equação 2.8 deve ser utilizada até no máximo $k = 2$, pois para $k > 3$ a série começa a divergir do tempo de trânsito exato (GHOSH; KUMAR, 2002).

Os coeficientes C 's na Equação 2.2 são reescritos da seguinte forma (ROMANELLI, 2007):

$$C_1 = t_0^2 \quad (2.9)$$

$$C_2 = \frac{1}{V_{RMS}^2} \quad (2.10)$$

$$C_3 = \frac{-\alpha}{V_{RMS}^4} \quad (2.11)$$

Onde o termo α :

$$\alpha = \frac{1}{4t_0^2} \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{\mu_2^2} \quad (2.12)$$

Assim, define-se a aproximação de quarta-ordem dada por:

$$t^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{V_{RMS}^2} - \frac{\alpha x^4}{V_{RMS}^4} \quad (2.13)$$

A Equação 2.13 é uma aproximação capaz de incluir parcialmente o efeito da curvatura do raio em um meio de velocidade verticalmente variável, o que justifica o nome “aproximação do raio curvo” (ROMANELLI, 2007). Esta é uma versão truncada, até termos de quarta ordem, da Equação 2.2. E pode ser reescrita na forma:

$$t^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{V_{RMS}^2} \left(1 - \frac{\alpha x^2}{V_{RMS}^2} + \dots\right) \quad (2.14)$$

Para valores típicos de afastamento fonte-receptor, velocidade e tempo vertical, o módulo de $\alpha x^4/V_{RMS}^2$ é menor do que 1. O termo entre parênteses é tratado como uma expansão binomial, e pode ser transformado no inverso de um binômio:

$$t^2 = t_0^2 + \frac{x^2}{V_{RMS}^2 + \alpha x^2} \quad (2.15)$$

A Equação 2.15 pode ser modificada através do conceito de frações contínuas. Aplica-se a seguinte recursão, multiplicando-se a variável V_{RMS}^2 do termo entre parênteses mais interno por $1 + \alpha x^2/V_{RMS}^2$.

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \left(1 + \frac{\alpha x^2}{V_{RMS}^2} \right) \left\{ 1 + \frac{\alpha x^2}{V_{RMS}^2} \left[1 + \frac{\alpha x^2}{V_{RMS}^2} \right]^{-1} \right\}^{-1} \quad (2.16)$$

As Equações 2.13, 2.15 e 2.16 acrescentam maior precisão para à aproximação hiperbólica (Equação 2.1) em meios $v(z)$ (ROMANELLI, 2007).

Na Equação 2.15, é como se a aproximação hiperbólica fosse aplicada com uma velocidade variável em função do afastamento fonte-receptor (Se substituimos $v(x)^2 = (v_{RMS}^2 + \alpha x^2)$ no denominador da fração na Equação 2.15; esta se torna equivalente à aproximação hiperbólica Equação 2.1. Porém agora v é função de x^2 ao invés de ser constante e igual à V_{RMS} . Ou seja, tudo funciona como se a velocidade fosse função do afastamento).

2.2 Aproximação da hipérbole deslocada

As Equações 2.13, 2.15 e 2.16 também podem ser expressas alternativamente como a Equação da hipérbole deslocada de (DE BAZELAIRE, 1988), também baseada na expansão na série do tempo de reflexão (Equação 2.2). Nesse caso a geometria de uma reflexão, em uma família de ponto médio comum qualquer, é descrita por uma hipérbole deslocada no tempo. Na forma:

$$t(x) = t_0 \left(1 - \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{s} \sqrt{t_0^2 + s \frac{x^2}{v^2}} \quad (2.17)$$

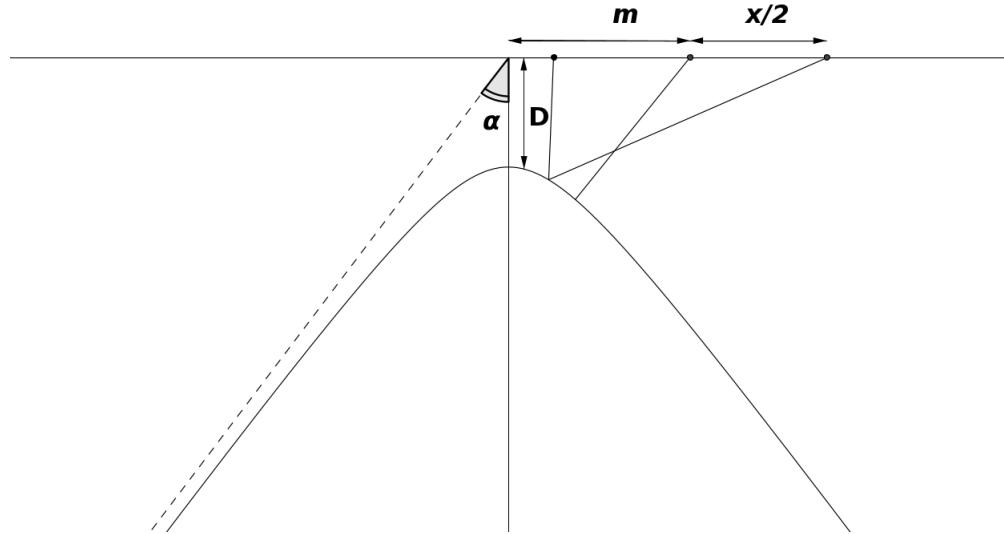
2.3 Aproximação não-hiperbólica do tempo de trânsito

A Figura 2 é a representação esquemática de um refletor hiperbólico cujo centro da hipérbole está localizado a uma profundidade D , a hipérbole possui assíntotas de inclinação α , o meio sobre o refletor possui velocidade v constante, m é a coordenada do ponto médio e x é o afastamento fonte-receptor .

Para uma trajetória de reflexão hipotética, dadas as posições de fonte e receptor, x_s e x_r , respectivamente. E conhecidos os parâmetros α e D do refletor a expressão do tempo de trânsito em função do afastamento fonte-receptor x é dada por (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$t^2(x) = (1 - \xi)(t_0^2 + ax^2) + \xi \sqrt{t_0^4 + 2bt_0^2 + cx^4} \quad (2.18)$$

Figura 2 – Representação esquemática do modelo do refletor hiperbólico, utilizado para derivar a equação generalizada do sobretempo (Equação 2.18). Esta equação descreve o sobretempo de reflexão dados os parâmetros da geometria do modelo e as posições de fonte e receptor.



Fonte: Do Autor.

Os parâmetros da Equação 2.18 são relacionados a geometria do refletor hiperbólico da seguinte forma:

$$t_0 = \frac{2\sqrt{D^2 + m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}}{v} \quad (2.19)$$

$$a = \frac{2 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{v^2} \quad (2.20)$$

$$b = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{v^2} \frac{D^2 - m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{D^2 + m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \quad (2.21)$$

$$c = \frac{\operatorname{sen}^4 \alpha}{v^4} \quad (2.22)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \quad (2.23)$$

A Equação 2.18 pode ser expressa também na forma:

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{Ax^4}{v^4(t_0^2 + B\frac{x^2}{v^2} + \sqrt{t_0^4 + 2Bt_0^2\frac{x^2}{v^2} + C\frac{x^4}{v^4}})} \quad (2.24)$$

A Equação 2.24 é semelhante à Equação 2.18, a relação entre os parâmetros é dada por:

$$a = \frac{AB + B^2 - C}{v^2(A + B^2 - C)} \quad (2.25)$$

$$b = \frac{B}{v^2} \quad (2.26)$$

$$c = \frac{C}{v^4} \quad (2.27)$$

$$\xi = \frac{A}{C - B^2} \quad (2.28)$$

A relação inversa é dada por:

$$v^2 = \frac{1}{a(1 - \xi) + b\xi} \quad (2.29)$$

$$A = \frac{\xi(c - b^2)}{[a(1 - \xi) + b\xi]^2} \quad (2.30)$$

$$B = \frac{b}{a(1 - \xi) + b\xi} \quad (2.31)$$

$$C = \frac{c}{[a(1 - \xi) + b\xi]^2} \quad (2.32)$$

A expansão em série de Taylor quarta ordem da Equação 2.24 somada a um erro de aproximação de sexta ordem, é:

$$t^2(x) \approx t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{A}{2} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \quad (2.33)$$

O parâmetro A na Equação 2.33 é dado na Equação 2.30, utilizando os parâmetros a, b, c e ξ dados nas Equações 2.25-2.28 para o refletor hiperbólico.

A Equação 2.24 é chamada Equação não-hiperbólica generalizada, esta se reduz a algumas aproximações conhecidas da literatura com determinada escolha dos parâmetros A, B , e C (STOVAS; FOMEL, 2010).

1. Escolhendo $A = 0$, A Equação 2.24 se reduz a aproximação hiperbólica clássica, equação do sobretempo normal.:

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \quad (2.34)$$

2. Pela escolha de $A = -4\eta$, $B = 1 + 2\eta$ e $C = (1 + 2\eta)^2$ na Equação 2.24, esta se reduz a aproximação para o modelo tranversalmente isotrópico (TIV) (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995).

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{2\eta x^4}{v^4[t_0^2 + (1 + 2\eta)\frac{x^2}{v^2}]} \quad (2.35)$$

3. A escolha $A = -2\gamma t_0^2 v^2$, $B = -A/2$ e $C = A^2/4$, reduz a Equação 2.24 à aproximação proposta por Blas, (2007).

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2(1 + \gamma x^2)} \quad (2.36)$$

4. Escolhendo $A = \frac{(1-s)}{2}$, $B = s/2$ e $C = 0$, a Equação 2.24 se reduz à Equação da hipérbole deslocada (Equação 2.17).

A aproximação generalizada não-hiperbólica (Equação 2.24) é uma forma geral da equação do tempo de trânsito; a partir da escolha dos parâmetros A , B e C , esta se reduz a aproximações bem conhecidas na literatura. A Equação 2.24 também pode ser particularizada para os modelos de variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade, bem como para o meio TIV homogêneo e refletor circular. Apresentaremos essas particularizações nas próximas Seções.

2.4 Modelos com variação linear do gradiente de velocidade

De acordo com observações de caráter empírico, a compactação dos sedimentos tende a induzir um comportamento linear para a distribuição de velocidades intervalares, ou instantâneas, em função da profundidade (SLOTNICK, 1959). Justifica-se assim, a importância de desenvolver aproximações de tempo de trânsito para esses modelos.

Existe solução analítica compacta para o tempo de trânsito de propagação em função do afastamento para um meio homogêneo e de distribuição linear de velocidades, em que a velocidade $v(z)$ cresce linearmente com a profundidade, com gradiente g , esse modelo é denominado de modelo com variação linear da velocidade.

Existe também uma solução analítica compacta do tempo de trânsito para o modelo de variação linear do gradiente do quadrado da vagarosidade. Nesse modelo, o quadrado da vagarosidade, $1/v^2$, cresce linearmente com a profundidade, com um gradiente G (CERVENÝ, 2001).

Em ambos os modelos é possível obter o tempo de trânsito analiticamente, e comparar aproximações de tempo de trânsito com o sobretempo exato (STOVAS; FOMEL,

2010). Os principais parâmetros que descrevem o tempo de trânsito, t_0 e v , também são dados analiticamente.

A Equação generalizada (Equação 2.24) pode ser particularizada para os modelos variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade, a partir da redefinição dos coeficientes A , B e C para cada modelo.

2.4.1 Modelo com variação linear de velocidade

No modelo variação linear da velocidade, a velocidade varia linearmente com a profundidade z em uma camada de espessura D sobre um refletor plano horizontal. O topo do modelo tem velocidade v_0 e o gradiente de velocidade é g . Esse modelo é definido por:

$$v(z) = v_0(1 + gz) \quad (2.37)$$

Para o modelo variação linear da velocidade, o tempo de trânsito de reflexão pode ser expresso analiticamente como função do afastamento (SLOTNICK, 1959):

$$t(x) = \frac{2D}{v_0(r-1)} \cosh^{-1} \left[1 + \frac{(r-1)^2}{2r} \left(1 + \frac{x^2}{4D^2} \right) \right] \quad (2.38)$$

Onde D é a profundidade do refletor, $r = \frac{v(D)}{v_0}$ razão entre a velocidade na base e no topo do modelo. Para esse modelo, os parâmetros da Equação 2.38 serão dados analiticamente por (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$t_0 = \frac{2D}{v_0} \frac{\ln r}{r-1} \quad (2.39)$$

$$v^2 = V_0^2 \frac{r^2 - 1}{2 \ln r} \quad (2.40)$$

$$A = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \ln r \right) \quad (2.41)$$

$$B = \frac{t_0^2(X - PTv^2)}{X(t_0^2 - T^2 + PTX)} - \frac{AX^2}{X^2 + v^2(t_0^2 - T^2)} \quad (2.42)$$

$$C = \frac{t_0^4(X - PTv^2)^2}{X^2(t_0^2 - T^2 + PTX)^2} + \frac{2Av^2t_0^2}{X^2 + v^2(t_0^2 - T^2)} \quad (2.43)$$

Onde T , X e P :

$$T = \frac{2D \cosh^{-1} r}{v_0} \quad (2.44)$$

$$X = 2D \sqrt{\frac{r+1}{r-1}} \quad (2.45)$$

$$P = \frac{X}{D} \frac{(r-1)}{2rv_0} \operatorname{sen} D^{-1} [1 + \frac{(r-1)^2}{2r} (1 + \frac{X^2}{4D^2})] \quad (2.46)$$

Substituindo os parâmetros A , B e C na Equação 2.41-2.43 na Equação 2.24 obtemos a aproximação do tempo de trânsito de reflexão para o modelo variação linear da velocidade. A expansão em série de Taylor da Equação 2.24 será dada por 2.33 com A dado por 2.41:

$$t^2(x) \approx t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2+1}{r^2-1} \ln r\right) \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \quad (2.47)$$

2.4.2 Modelo com variação linear do quadrado da vagarosidade

No modelo variação linear do quadrado da vagarosidade, $(1/v^2)$ varia linearmente com a profundidade z em uma camada de espessura D , sobre um refletor plano horizontal. O topo do modelo tem velocidade v_0 e o gradiente é G . Esse modelo é definido por:

$$\frac{1}{v^2(z)} = \frac{1}{v_0^2} (1 + Gz) \quad (2.48)$$

A Equação do tempo de trânsito, para esse modelo, é dada analiticamente por (CERVENÝ, 2001):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{x^4(r^2-1)^2(2Q+1)}{144Q^3D^2v^2(Q+1)^2} \quad (2.49)$$

Onde $r = v(D)/v_0$ é a razão entre a velocidade do topo e da base do modelo. E o coeficiente Q :

$$Q = \sqrt{1 - \frac{x^2(r^2-1)^2}{16r^2D^2}} \quad (2.50)$$

Os parâmetros da Equação 2.49 são dados por:

$$t_0 = \frac{4D}{v_0} \frac{1+r+r^2}{r(r+1)} \quad (2.51)$$

$$v^2 = v_0^2 \frac{3r^2}{1 + r + r^2} \quad (2.52)$$

Particularizando a equação generalizada do tempo de trânsito (Equação 2.24), para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade, definindo os coeficientes A , B e C da seguinte forma (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$A = -\frac{(r-1)^2}{6r} \quad (2.53)$$

$$B = -\frac{(r-1)^2(1+r+r^2)}{2r(r+2)(2r+1)} \quad (2.54)$$

$$C = -\frac{(r-1)^4(1+r+r^2)^2}{3r(r+2)(2r+1)^2} \quad (2.55)$$

A expansão em série de Taylor da Equação 2.24 será dada por 2.33 com A dado por 2.53:

$$t(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{(r-1)^2}{12r} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \quad (2.56)$$

2.5 Modelo transversalmente isotrópico (TIV)

Na Seção 2.1 adotou-se a premissa de que o comportamento não hiperbólico do sobretempo se deve a divergência entre as aproximações hiperbólicas utilizadas e o valor exato do tempo de trânsito para grandes afastamentos, sendo válida a aproximação do sobretempo normal para pequenos afastamentos.

Todavia, implicitamente outra premissa foi adotada, de que as propriedades elásticas do meio não dependem da direção de propagação. Adotar essa premissa tem como consequência prática a idéia de que a velocidade de propagação na direção vertical é igual à velocidade de propagação em qualquer outra direção (ROMANELLI, 2007).

Porém, para um meio anisotrópico, as propriedades físicas elásticas variam com a direção, mesmo em um meio homogêneo: A presença de anisotropia produz o sobretempo não hiperbólico mesmo em um meio formado por camadas homogêneas. Um meio transversalmente isotrópico com um eixo vertical de simetria (TIV) é uma aproximação razoável de um meio anisotrópico formado por camadas horizontais (SONG et al., 2016).

A importância do estudo e desenvolvimento de aproximações de tempo de trânsito para os meios anisotrópicos, principalmente o meio TIV, onde as propriedades elásticas dependem apenas da profundidade, e não da posição horizontal, se justifica de duas maneiras:

1. A aproximação de tempo de trânsito é essencial para determinar os parâmetros de anisotropia das camadas em um meio TIV (SONG et al., 2016).
2. Um bom exemplo de anisotropia TIV, são alguns folhelhos, um exemplo particularmente importante é o dos folhelhos geradores de petróleo, que correspondem na direção vertical, a uma pilha de intercalações entre minerais argilosos, ou carbonáticos, e matéria orgânica (ROMANELLI, 2007).

A aproximação compacta do tempo de trânsito para o meio TIV homogêneo (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{2\eta x^4}{v^2[t_0^2 v^2 + (1 + 2\eta)x^2]} \quad (2.57)$$

Onde o parâmetro η , anelipticidade é definido em função dos *parâmetros de Thomsen* por:

$$\eta = \frac{\varepsilon - \delta}{1 + 2\delta} \quad (2.58)$$

Onde δ e ε são dados em função das velocidades v_p (da onda p) , v_s (da onda s), e das velocidades de fase v_h e v_q medidas nas direções $\pi/2$ e $\pi/4$, respectivamente (THOMSEN, 1986):

$$\varepsilon = \frac{v_h^2 - v_p^2}{2v_p^2} \quad (2.59)$$

$$\delta = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{v_q^2 - v_p^2}{v_p^2} + \frac{\alpha - \varepsilon}{2} \right) - \frac{\alpha^2 + \varepsilon^2}{2\alpha} \quad (2.60)$$

onde:

$$\alpha = \frac{v_p^2 - v_s^2}{v_p^2} \quad (2.61)$$

A expansão em série de Taylor da aproximação de tempo de trânsito para o meio TIV (Equação 2.57), válida para pequenos afastamentos:

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} - \frac{2\eta x^4}{t_0^2 v^4} \quad (2.62)$$

Por comparação da Equação 2.62 com a expansão em série de taylor da equação generalizada (Equação 2.33), define-se:

$$A = -4\eta \quad (2.63)$$

Os coeficientes B e C da equação generalizada, para o meio TIV, são definidos como (STOVAS; FOMEL, 2010):

$$B = \frac{1 + 8\eta + 8\eta^2}{1 + 2\eta} \quad (2.64)$$

$$C = \frac{1}{(1 + 2\eta)^2} \quad (2.65)$$

A aproximação do tempo de trânsito para um modelo TIV é feita utilizando os parâmetros definidos em 2.63-2.65 na Equação 2.24. E substituindo na Equação 2.33 o coeficiente A , dado na Equação 2.63, obtemos a expansão em série de Taylor do tempo de trânsito para o meio TIV:

$$t^2(x) \approx t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{-4\eta}{2} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \quad (2.66)$$

2.6 O método da superfície de reflexão comum (SRC)

O método da Superfície de Reflexão Comum (SRC) estende o empilhamento convencional dos traços sísmicos sobre o afastamento para o empilhamento multidimensional sobre superfícies afastamento-ponto médio (FOMEL; KAZINNIK, 2013). O empilhamento SRC assume a seguinte forma:

$$S(t_0, m_0) = \int \int P(t(h, d = m - m_0; t_0) dh dm \quad (2.67)$$

Onde a integral na Equação 2.67 ao redor de m é realizada ao longo de uma vizinhança limitada de um ponto médio central arbitrário m_0 . A superfície SRC $t(h, d)$ é uma função do tempo de trânsito, em que $d = m_0 - m$, é a distância entre o ponto médio central m_0 e um ponto médio m na vizinhança; $h = x/2$ é metade do afastamento entre a fonte e o receptor.

A aproximação SRC hiperbólica pode ser justificada como uma expansão em série de Taylor, até segunda ordem, do quadrado do tempo de trânsito ao longo de um raio normal de referência (FOMEL; KAZINNIK, 2013). Para esse raio de referência, fonte e receptor estão em teoria na mesma posição em superfície, por isso este método de empilhamento é dito SRC de afastamento nulo. A aproximação do SRC hiperbólico (JAGER et al., 2001):

$$\theta_{SRC}(h, d; t_0) = \sqrt{F(d) + b_2 h^2} \quad (2.68)$$

Onde:

$$F(d) = (t_0 + a_1 d)^2 + a_2 d^2 \quad (2.69)$$

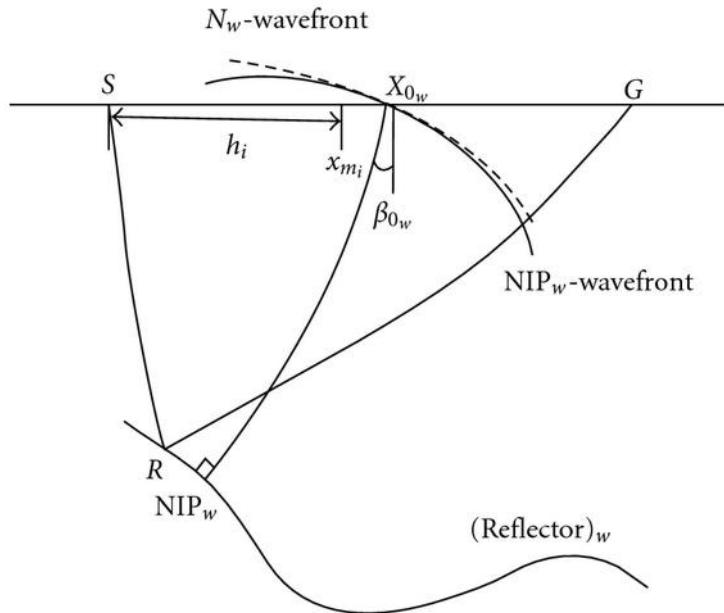
$$a_1 = \frac{2\sin(\beta)}{v_0} \quad (2.70)$$

$$a_2 = \frac{2\cos^2(\beta)K_N t_0}{v_0} \quad (2.71)$$

$$b_2 = \frac{2\cos^2(\beta)K_{NIP} t_0}{v_0} \quad (2.72)$$

Considerando um refletor alvo em profundidade, bem como um ponto fixo central X_0 na linha sísmica, considerado a localização coincidente do par $S_0 = G_0 = X_0$. O raio de afastamento nulo parte de X_0 , atinge o refletor em um ponto R_0 , conhecido como ponto de incidência normal (PIN).

Figura 3 – Representação esquemática das frentes de ondas NIP e N : R é o ponto de reflexão do raio associado ao par fonte S e receptor G , β_0 é o ângulo de emergência do raio normal, h_i é o meio-afastamento e x_{mi} é a posição do ponto médio. Observe que a posição do ponto médio é diferente da posição de incidência do raio normal na superfície, X_0 .



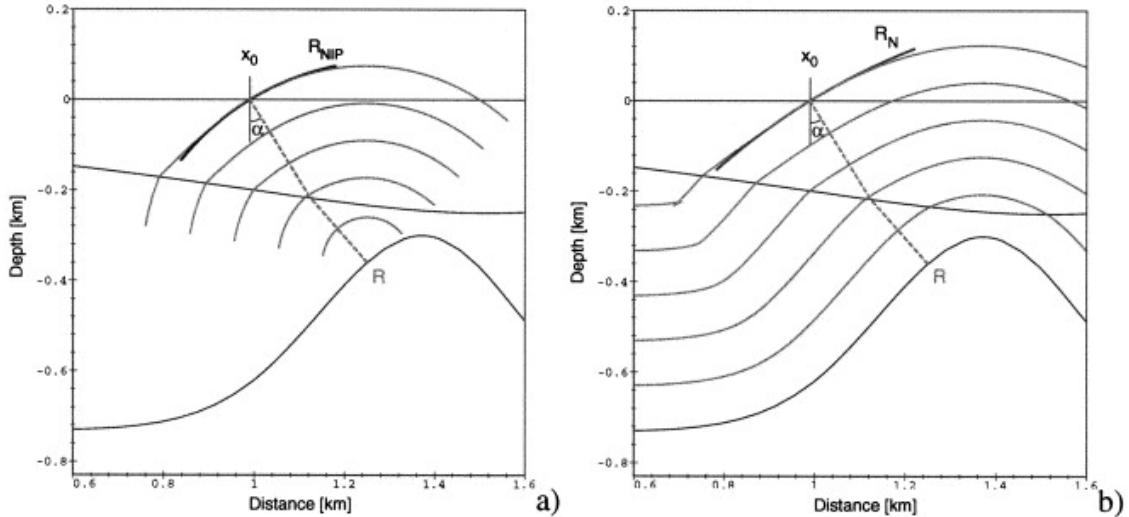
Fonte: Adaptado de (TYGEL; SANTOS; SCHLEICHER, 1999).

Os quatro parâmetros v_0 , R_N , R_{NIP} e β tem um claro significado físico em termos de frentes de onda e geometria do raio (GELCHINSKY; BERKOVITCH; KEYDAR,

1999a). v_0 representa a velocidade na superfície, assumida constante ao longo do raio central. β_0 é o ângulo de emergência do raio de afastamento nulo; R_N e R_{NIP} são os raios de curvatura de duas frentes de onda hipotéticas (representadas na Figura 3), as ondas N e NIP (HUBRAL, 1983). Estas ondas hipotéticas são definidas da seguinte maneira (TYGEL; SANTOS; SCHLEICHER, 1999):

1. A onda N é gerada em uma frente de onda que coincide com o refletor alvo, propagando para cima com metade da velocidade do meio e chega ao ponto central X_0 no tempo t_0 .
2. A onda NIP é gerada no refletor alvo como uma fonte pontual no ponto NIP , propagando para cima com metade da velocidade do meio, e chega ao ponto X_0 também no tempo t_0 .

Figura 4 – Representação esquemática das frentes de onda N e NIP : A onda NIP é gerada por uma fonte pontual na posição R (ponto PIN), a onda N é gerada por um elemento de reflexão sobre o refletor Σ na vizinhança de R . Os raios de curvatura das frentes de onda NIP e N são R_{NIP} e R_N , respectivamente.



Fonte: Adaptado de (JAGER et al., 2001).

2.7 Superfície de reflexão comum não hiperbólica

A seguinte modificação da Equação 2.68 é proposta com o intuito de melhorar sua acurácia para grandes afastamentos e separação entre os pontos médios (FOMEL; KAZINNIK, 2013):

$$\Phi_{SRC}(h, d; t_0) = \sqrt{\frac{F(d) + ch^2 + \sqrt{F(d-h)F(d+h)}}{2}} \quad (2.73)$$

A Equação 2.73 é chamada equação do SRC não hiperbólico. A expansão em série de Taylor 2D da Equação 2.73 ao redor de $d = 0$ e $h = 0$ é equivalente à Equação 2.68. A Equação 2.73 é generalizada para o método SRC, utilizando os parâmetros a_1 , a_2 e b_2 do SRC hiperbólico definidos nas Equações 2.70-2.72, os parâmetros da Equação 2.73:

$$c = 2b_2 + a_1^2 - a_2 \quad (2.74)$$

$$F(d - h) = (t_0 + a_1(d - h))^2 + a_2(d - h)^2 \quad (2.75)$$

$$F(d + h) = (t_0 + a_1(d + h))^2 + a_2(d + h)^2 \quad (2.76)$$

A Equação do SRC não hiperbólico é produzida, da mesma forma que a equação generalizada (Equação 2.24), a partir do modelo do refletor hiperbólico em função dos parâmetros do refletor. A Equação 2.73 pode ser particularizada para outros modelos com a seguinte definição de parâmetros, onde z_0 é a profundidade mínima do refletor e v é a velocidade do meio sobrejacente (FOMEL; KAZINNIK, 2013):

1. Refletor Hiperbólico, inclinação α :

$$t_0 = \frac{2\sqrt{m_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + z_0^2}}{v} \quad (2.77)$$

$$R_{NIP} = \sqrt{m_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + z_0^2} \quad (2.78)$$

$$R_N = R_{NIP} \frac{m_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) \cos^2(\alpha) + z_0^2 + z_0^2}{z_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)} \quad (2.79)$$

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{m_0 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{\sqrt{m_0^2 \operatorname{sen}^2(\alpha) + z_0^2}} \quad (2.80)$$

2. Refletor Plano inclinado, inclinação α :

$$t_0 = \frac{2m_0 \operatorname{sen}(\alpha)}{v} \quad (2.81)$$

$$R_{NIP} = z_0 \quad (2.82)$$

$$R_N = 0 \quad (2.83)$$

$$\operatorname{sen}(\beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \quad (2.84)$$

3. Refletor Plano ($\alpha = 0$):

$$t_0 = \frac{2z_0}{v} \quad (2.85)$$

$$R_{NIP} = \frac{1}{z_0} \quad (2.86)$$

$$R_N = 0 \quad (2.87)$$

$$\operatorname{sen}(\beta) = 0 \quad (2.88)$$

4. Ponto Difrator ($\alpha = \pi/2$):

$$t_0 = \frac{2\sqrt{m_0^2 + z_0^2}}{v} \quad (2.89)$$

$$R_{NIP} = \frac{1}{\sqrt{m_0^2 + z_0^2}} \quad (2.90)$$

$$R_N = R_{NIP} \quad (2.91)$$

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + z_0^2}} \quad (2.92)$$

2.8 Superfície de reflexão comum quarta ordem

O método SRC hiperbólico é estendido a partir de 3 expansões em série de Taylor quarta ordem para a superfície SRC: $t(h, d)$, $t^2(h, d)$ e $(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$. Chamado SRC quarta ordem, essas aproximações dependem dos mesmos parâmetros v_0 , R_N , R_{NIP} e β do SRC hiperbólico, porém acrescentam mais termos e qualidade à aproximação (HöCHT, 2002).

$$\begin{aligned} t(h, d) &= t_0 + \frac{2\operatorname{sen}(\beta)}{v_0} d + \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_N} d^2 + \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}} h^2 \\ &\quad - \frac{\operatorname{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_N^2} d^3 - \frac{\operatorname{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}^2 R_N} (2R_{NIP} + R_N) dh^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\cos^2(\beta)}{2v_0 R_{NIP}^3 R_N^2} [R_{NIP}^2 (8 \cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP} R_N (5 \cos^2(\beta) - 4) \\
& \quad - 2R_N^2 \sin^2(\beta)] h^2 d^2 - \frac{\cos^2(\beta) (5 \cos^2(\beta) - 4)}{4v_0 R_N^3} d^4 \\
& \quad + \frac{\cos^2(\beta) (4R_{NIP} \sin^2(\beta) - R_N \cos^2(\beta))}{4v_0 R_{NIP}^3 R_N} h^4
\end{aligned} \quad (2.93)$$

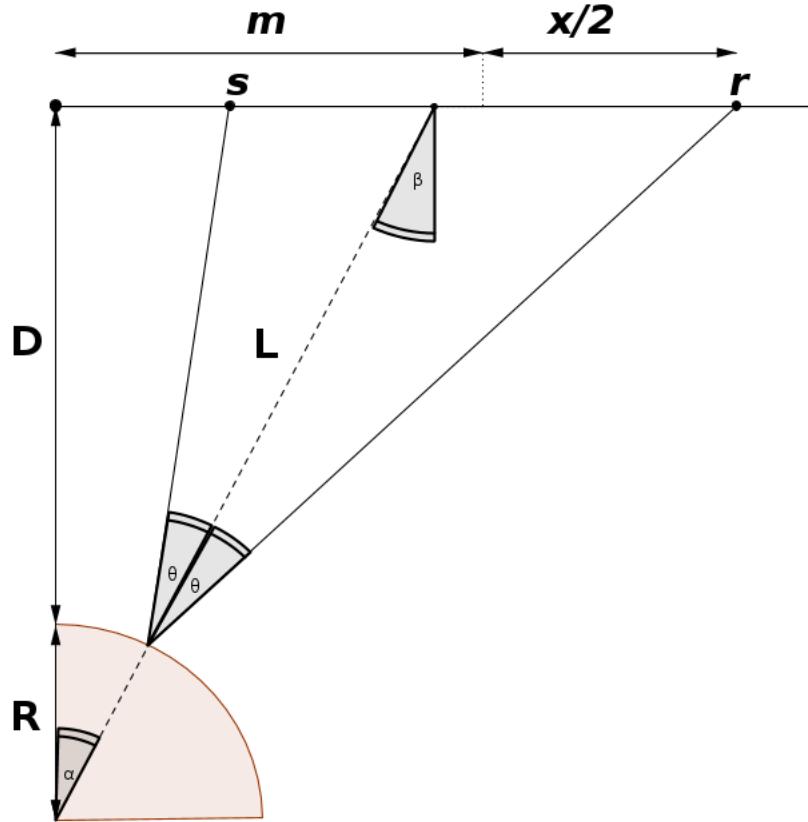
$$\begin{aligned}
t^2(d, h) = & t_0^2 + \frac{4t_0 \sin(\beta)}{v} d + 2 \frac{vt_0 \cos^2(\beta) + 2R_N \sin^2(\beta)}{v^2 R_N} d^2 + \frac{2t_0 \cos^2(\beta)}{v R_{NIP}} h^2 \\
& + \frac{2 \sin(\beta) \cos^2(\beta) (2R_N - vt_0)}{v^2 R_N^2} d^3 \\
& + \frac{2 \sin(\beta) \cos^2(\beta) (2R_{NIP} R_N - 2vt_0 R_{NIP} - vt_0 R_N)}{v^2 R_{NIP}^2 R_N} dh^2 \\
& + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_{NIP}^3 R_N^2} [vt_0 R_{NIP}^2 (6 - 8 \cos^2(\beta)) + vt_0 R_{NIP} R_N (4 - 5 \cos^2(\beta))] \\
& + 2vt_0 R_N^2 \sin^2(\beta) - 4R_{NIP} R_N^2 \sin^2(\beta) + R_{NIP}^2 R_N (10 \cos^2(\beta) - 8)] d^2 h^2 \\
& + \frac{\cos^2(\beta) (R_N (10 \cos^2(\beta) - 8) + vt_0 (4 - 5 \cos^2(\beta)))}{2v^2 R_N^3} d^4 \\
& + \frac{\cos^2(\beta) (4vt_0 R_{NIP} \sin^2(\beta) - vt_0 R_N \cos^2(\beta) + 2R_{NIP} R_N \cos^2(\beta))}{2v^2 R_{NIP}^3 R_N} h^4
\end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned}
(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP})^2 = & (\frac{2}{v} R_{NIP})^2 + \frac{8R_{NIP} \sin(\beta)}{v^2} d + 4 \frac{R_{NIP} \cos^2(\beta) + R_N \sin^2(\beta)}{v^2 R_N} d^2 \\
& + \frac{4 \cos^2(\beta)}{v^2} h^2 + \frac{4 \sin(\beta) \cos^2(\beta) (R_N - R_{NIP})}{v^2 R_N^2} d^3 - \frac{8 \sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v^2 R_N} dh^2 \\
& + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2 R_N^3} [R_N (5 \cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP} (4 - 5 \cos^2(\beta))] d^4 + \frac{4 \cos^2(\beta) (3 - 4 \cos^2(\beta))}{v^2 R_N^2} d^2 h^2 \\
& + \frac{4 \cos^2(\beta) \sin^2(\beta)}{v^2 R_{NIP} R_N} h^4
\end{aligned} \quad (2.95)$$

2.9 Modelo do refletor circular

No caso do refletor circular, representado esquematicamente na Figura 5, em um meio homogêneo de velocidade v , a solução analítica fechada é complicada, pois envolve uma solução de uma equação polinomial de alta ordem (LANDA et al., 1999). No entanto, a superfície de tempo de trânsito de reflexão pode ser descrita analiticamente por relações paramétricas (GLAESER, 1999).

Figura 5 – Representação esquemática do modelo do refletor circular em um meio de velocidade constante v_0 . m é a posição do ponto médio do par fonte s e receptor r , L é o comprimento do raio normal, β é ângulo de emergência do raio normal na superfície e R é o raio do refletor circular.



Fonte: Do Autor.

As coordenadas do ponto médio e do meio-afastamento $h = x/2$ são expressas paramétricamente por:

$$m = R \operatorname{sen}(\alpha) + (D + R - R \cos(\alpha)) \frac{\cos(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\alpha)} \quad (2.96)$$

$$h = (D + R - R \cos(\alpha)) \frac{\cos(\theta) \cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\alpha)} \quad (2.97)$$

E o tempo de reflexão é expresso como:

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{D + R - R \cos(\alpha)}{v_0} \left[\frac{1}{\cos(\alpha - \theta)} + \frac{1}{\cos(\alpha + \theta)} \right] \\ &= 2 \frac{D + R - R \cos(\alpha)}{v_0} \frac{\cos(\alpha) \cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\alpha)} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Onde v_0 é a velocidade do meio. A relação com os parâmetros do SRC é dada analiticamente, em função dos paâmetros do modelo, por:

$$t_0 = \frac{2(\sqrt{m_0^2 + L^2} - R)}{v_0} \quad (2.99)$$

$$R_{NIP} = \sqrt{m_0^2 + L^2} - R \quad (2.100)$$

$$R_N = \sqrt{m_0^2 + L^2} \quad (2.101)$$

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + L^2}} \quad (2.102)$$

As Equações 2.96-2.98 definem a superfície de tempo de reflexão $\Psi(h, d)$ pela dependência paramétrica $\{m(\alpha, \theta), h(\alpha, \theta), \Psi(\alpha, \theta)\}$. Onde L é o comprimento do raio normal, v_0 é a velocidade do meio, β é ângulo de emergência do raio normal, e m_0 é o ponto médio central.

3 APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA UMA FAMÍLIA DE PONTO MÉDIO COMUM

Nessa Capítulo são desenvolvidas aproximações de Padé para as séries de Taylor quarta ordem obtidas nas Seções 2.4.1, 2.4.2 e 2.5. Estas expansões em série de Taylor do tempo de trânsito são dadas para os modelos: variação linear da velocidade (Equação 2.47), variação linear do quadrado da vagarosidade (Equação 2.56) e modelo TIV (Equação 2.66).

Para o modelo variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade a equação do tempo de trânsito é dada analiticamente em função dos parâmetros do modelo. Para o modelo TIV homogêneo a aproximação de Padé do tempo de trânsito depende do parâmetro η (anelipticidade). As aproximações de Padé do tempo de trânsito em função do afastamento, obtidas neste Capítulo, são válidas para o domínio do ponto médio comum.

3.1 Aproximação de Padé da equação generalizada

Para obtenção dos aproximantes de Padé das expansões em série de Taylor, utilizamos a forma geral dos aproximantes de Padé, desenvolvida no Apêndice B, para uma série na forma:

$$t^2(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6) \quad (3.1)$$

Para uma série de Taylor quarta ordem descrita pela Equação 3.1, o aproximante de Padé será:

$$[2/2] = \zeta_1 + \frac{x^2 \zeta_2}{1 + \zeta_3 x^2} \quad (3.2)$$

Onde:

$$\zeta_1 = \lambda_0 \quad (3.3)$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 \quad (3.4)$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \quad (3.5)$$

A Equação 3.2 é uma generalização do aproximante de Padé para uma série de Taylor que possa ser expressa na forma da Equação 3.1. De modo que para obter o aproximante de Padé da série de Taylor quarta ordem, basta substituir os coeficientes λ 's da série de Taylor (Equação 3.1) na Equação 3.2.

A expressão geral do aproximante de Padé para uma série na forma descrita pela Equação 3.1, é a divisão de dois polinômios $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$ e $Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2$, cujos coeficientes p 's e q 's serão os coeficientes do aproximante de Padé.

Utilizando a expansão em série de Taylor da equação generalizada (Equação 2.33) na condição de existência para os aproximantes de Padé (Equação A.7):

$$(p_0 + p_1x + p_2x^2) = \left(t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} + \frac{A}{2} \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + O(x^6) \right) (q_0 + q_1x + q_2x^2) \quad (3.6)$$

Sem perda de generalidade escolhe-se o valor de $q_0 = 1$. O lado esquerdo de 3.6 é o polinômio $P(x)$, o lado direito é a multiplicação da série de Taylor (Equação 2.33) com o polinômio $Q(x)$. Essa multiplicação resulta em:

$$(p_0 + p_1x + p_2x^2) = t_0^2 + t_0^2 q_1 x + t_0^2 q_2 x^2 + \frac{x^2}{v^2} + q_1 \frac{x^3}{v^2} + q_2 \frac{x^4}{v^2} + \frac{A}{2} q_1 \frac{x^4}{v^4 t_0^2} + \dots$$

Organizando as igualdades a partir das potências de x :

$$\begin{aligned} x^0 : p_0 &= t_0^2 \\ x^1 : p_1 &= q_1 t_0^2 \\ x^2 : p_2 &= q_1 t_0^2 \\ x^3 : 0 &= \frac{q_1}{v^2} \\ x^4 : 0 &= \frac{q_2}{v^2} \frac{A}{2 v^4 t_0^2} \end{aligned}$$

Dessas expressões surge que:

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \\ p_1 &= 0 \\ q_2 &= \frac{-A}{2v^2 t_0^2} \\ p_2 &= \frac{1}{v^2} \left[1 - \frac{A}{2} \right] \end{aligned}$$

Então, substituindo os coeficientes q 's e p 's na Equação 3.6 e após algumas simplificações, a expressão para o aproximante de Padé será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \frac{1}{1 + g_e x^2} \quad (3.7)$$

Onde o coeficiente g_e é dado por:

$$g_e = \frac{-A}{2t_0^2 v^2} \quad (3.8)$$

Outra forma de obter o a aproximante de Padé para o refletor hiperbólico, é utilizar a Equação 3.2 desenvolvida no Apêndice B. Primeiro, comparamos a série de Taylor (Equação 2.33) com a Equação 3.1. Por comparação estabelecemos as constantes λ 's como:

$$\lambda_0 = t_0^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{A}{2v^4 t_0^2}$$

Substituindo os λ 's nas Equações 3.3-3.5:

$$\zeta_1 = \lambda_0 = t_0^2$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{-A}{2t_0^2 v^2}$$

Substituindo os coeficientes ζ 's na Equação 3.2, a aproximação de Padé da equação generalizada (Equação 2.24) será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2(1 + \frac{-A}{2t_0^2 v^2} x^2)} \quad (3.9)$$

A Equação 3.9 é semelhante à Equação 2.36 desenvolvida por Blias (2007). Se escolhemos $A = -2\gamma t_0^2 v^2$, $B = -A/2$ e $C = A^2/4$; e substiuímos esses valores na Equação 2.24, teremos:

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \frac{1}{1 + \gamma x^2} \quad (3.10)$$

Que é a Equação 2.36 proposta por Blias (2007). Onde γ é dado por:

$$\gamma = \frac{-A}{2t_0^2 v^2} \quad (3.11)$$

A Equação 3.9 é equivalente à Equação 2.36, ou seja, a Equação 2.36 é a aproximação de Padé para a Equação generalizada (Equação 2.24).

3.2 Aproximação de Padé do tempo de trânsito para o modelo de variação linear de velocidade

A expansão em série de Taylor do tempo de trânsito no modelo variação linear da velocidade é expressa na Equação 2.47. Comparando a Equação 2.47 com a Equação 3.1, estabelecemos as constantes λ 's como:

$$\lambda_0 = t_0^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \ln r\right) \frac{1}{v^4 t_0^2}$$

Substituindo os λ 's nas Equações 3.3-3.5:

$$\zeta_1 = \lambda_0 = t_0^2$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \ln r\right) \frac{1}{v^2 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes ζ 's na Equação 3.2, a aproximação de Padé será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{V^2} \frac{1}{1 + \Omega_v x^2} \quad (3.12)$$

Onde:

$$\Omega_v = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r^2 + 1}{r^2 - 1} \ln r \right) \frac{1}{v^2 t_0^2} \quad (3.13)$$

r é definido como a razão entre a velocidade na base e no topo do modelo. Para melhorar a acurácia da aproximação de Padé 3.12, utilizamos o conceito de frações contínuas apresentado na Seção 2.1. A fração, do lado direito da aproximação de Padé 3.12, pode ser representada como o primeiro termo de uma série recursiva de frações contínuas (semelhante premissa foi utilizada para obter a Equação 2.16 na Seção 2.1):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} (1 + \Omega_v x^2 \{1 + \Omega_v x^2 [1 + \Omega_v x^2]^{-1}\}^{-1})^{-1} \quad (3.14)$$

3.3 Aproximação de Padé do tempo de trânsito para o modelo de variação linear do quadrado da vagarosidade

A expansão em série de Taylor do tempo de trânsito no modelo variação linear do quadrado da vagarosidade é expressa na Equação 2.56. Comparando a Equação 2.56 com a Equação 3.1, estabelecemos as constantes λ 's como:

$$\lambda_0 = t_0^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{(r-1)^2}{12r} \frac{1}{v^4 t_0^2}$$

Substituindo os λ 's nas Equações 3.3-3.5:

$$\zeta_1 = \lambda_0 = t_0^2$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{(r-1)^2}{12r} \frac{1}{v^2 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes ζ 's na Equação 3.2, a aproximação de Padé para o modelo do refletor circular será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{V^2} \frac{1}{1 + \Omega_s x^2} \quad (3.15)$$

Onde:

$$\Omega_s = \frac{(r - 1)^2}{12r} \frac{1}{v^2 t_0^2} \quad (3.16)$$

r é definido como a razão entre a velocidade na base e no topo do modelo. Para melhorar a acurácia da aproximação de Padé 3.15, utilizamos o conceito de frações contínuas apresentado na Seção 2.1. A fração, do lado direito da aproximação de Padé 3.15, pode ser representada como o primeiro termo de uma série recursiva de frações contínuas (semelhante premissa foi utilizada para obter a Equação 2.16 na Seção 2.1):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} (1 + \Omega_s x^2 \{1 + \Omega_s x^2 [1 + \Omega_s x^2]^{-1}\}^{-1})^{-1} \quad (3.17)$$

3.4 Aproximação de Padé do tempo de trânsito para o modelo TIV

A expansão em série de Taylor do tempo de trânsito para o modelo TIV é expressa na Equação 2.62. Comparando a Equação 2.62 com a Equação 3.1, estabelecemos os coeficientes λ 's:

$$\lambda_0 = t_0^2$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2\eta}{v^4 t_0^2}$$

Substituindo os λ 's nas Equações 3.3-3.5:

$$\zeta_1 = \lambda_0 = t_0^2$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 = \frac{1}{v^2}$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2\eta}{v^2 t_0^2}$$

Substituindo os coeficientes ζ 's na Equação 3.2, a aproximação de Padé para o modelo TIV será:

$$[2/2] = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} \frac{1}{1 + \frac{2\eta}{t_0^2 v^2} x^2} \quad (3.18)$$

Para melhorar a acurácia da aproximação de Padé 3.18, utilizamos o conceito de frações contínuas apresentado na Seção 2.1. A fração, do lado direito da aproximação de Padé 3.18, pode ser representada como o primeiro termo de uma série recursiva de frações contínuas (semelhante premissa foi utilizada para obter a Equação 2.16 na Seção 2.1):

$$t^2(x) = t_0^2 + \frac{x^2}{v^2} (1 + \Omega_{tiv} x^2 \{1 + \Omega_{tiv} x^2 [1 + \Omega_{tiv} x^2]^{-1}\}^{-1})^{-1} \quad (3.19)$$

Onde:

$$\Omega_{tiv} = \frac{2\eta}{v^2 t_0^2} \quad (3.20)$$

4 TESTE ANALÍTICO DAS APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA O DOMÍNIO DO PONTO MÉDIO COMUM

O erro relativo absoluto $erro\%$ é o módulo da diferença entre a aproximação do tempo de trânsito $t_{aprox}(x)$ utilizada e o tempo de trânsito exato $\psi(x)$, dividida pelo tempo de trânsito exato $\psi(x)$ (Equação 4.1). O resultado é um valor percentual que representa o erro da aproximação de tempo de trânsito, sendo próximo de zero quando o erro de aproximação é pequeno.

$$erro\% = 100 \times \frac{|t_{aprox}(x) - \psi(x)|}{\psi(x)} \quad (4.1)$$

Testamos a acurácia das aproximações de Padé do tempo de trânsito desenvolvidas no Capítulo 3 e das aproximações: generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010) (Equação 2.24), sobretempo normal (DIX, 1955) (Equação 2.34), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988) (Equação 2.17) e (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995) (Equação 2.35), nos modelos de variação linear de velocidade, variação linear do quadrado da vagarosidade e modelo TIV.

Os programas utilizados para a realização dos testes foram desenvolvidos e disponibilizados por Sergey Fomel na plataforma MADAGASCAR¹.

4.1 Modelo de variação linear de velocidade

O tempo de trânsito exato para o modelo variação linear de velocidade é dado pela Equação 2.38, em função de parâmetros do modelo. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 4.1: A aproximação do tempo de trânsito $t_{aprox}(x)$ utilizada é comparada com a Equação de referência $\psi(x)$ do tempo de trânsito para o modelo variação linear de velocidade (Equação 2.38). x/D (abcissas) é o afastamento fonte-receptor sobre a profundidade do refletor; $V(D)/V_0$ (ordenadas), é a razão entre a velocidade da base e do topo do modelo, relacionada ao gradiente de velocidade.

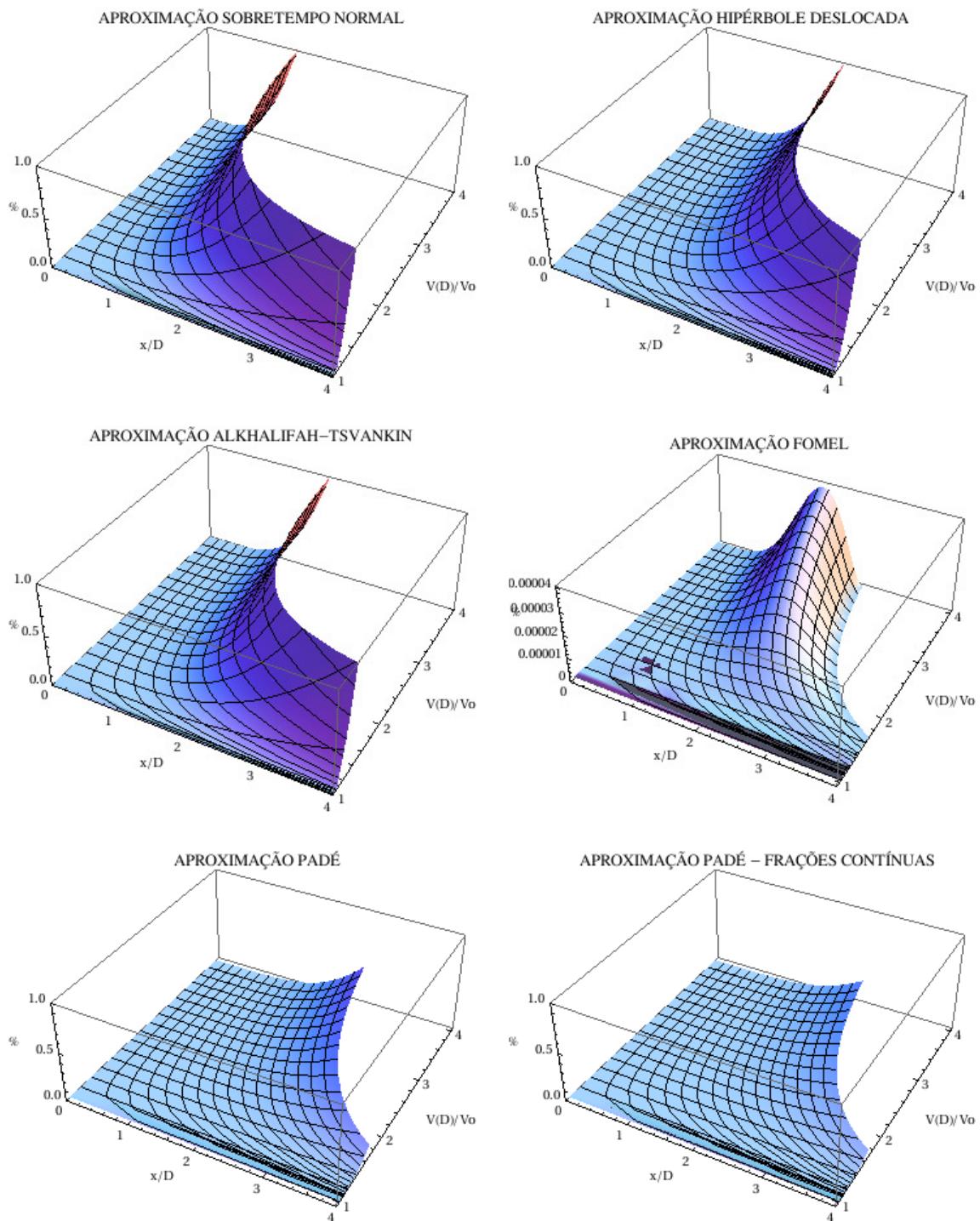
Construímos as superfícies de erro absoluto relativo $erro\%$ para o modelo de variação linear da velocidade, a partir da Equação 4.1, para as aproximações de tempo de trânsito: generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010) (Equação 2.24), sobretempo normal (DIX, 1955) (Equação 2.34), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988) (Equação 2.17), (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995) (Equação 2.35) e a aproximação de Padé dada pela Equação 3.12.

¹ Madagascar é um pacote de software aberto para análise multidimensional de dados e reprodução de experimentos computacionais.

A aproximação de Padé consegue aumentar a acurácia da aproximação hiperbólica de tempo de trânsito, sobretempo normal, e diverge mais suavemente que as outras aproximações (Figura 6). A acurácia da aproximação de Padé pode ser melhorada com o auxílio das frações contínuas, suavizando ainda mais a divergência da superfície de erro da aproximação.

A aproximação de Padé é inferior à aproximação que a originou, equação generalizada. Porém, a aproximação de Padé apresenta uma vantagem, essa a aproximação e a aproximação de Padé com frações contínuas necessitam apenas do parâmetro A , e desde que haja uma expansão em série de Taylor do tempo de trânsito para o modelo, a aproximação de Padé, Equação 3.12, pode ser utilizada.

Figura 6 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.34), hipérbole deslocada (Equação 2.17), aproximação modelo TIV (Equação 2.35), aproximação generalizada (Equação 2.24) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.12 e 3.14), para o modelo variação linear de velocidade.



Fonte: Do Autor.

4.2 Modelo de variação linear do quadrado da vagarosidade

O tempo de trânsito exato $\psi(x)$ para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade é dado pela Equação 2.49 (CERVENÝ, 2001), em função de parâmetros do modelo.

Construímos as superfícies de erro absoluto relativo $erro\%$, a partir da Equação 4.1, para as aproximações de tempo de trânsito: generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010) (Equação 2.24), sobretempo normal (DIX, 1955) (Equação 2.34), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988) (Equação 2.17), (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995) (Equação 2.35) e a aproximação de Padé dada pela Equação 3.15.

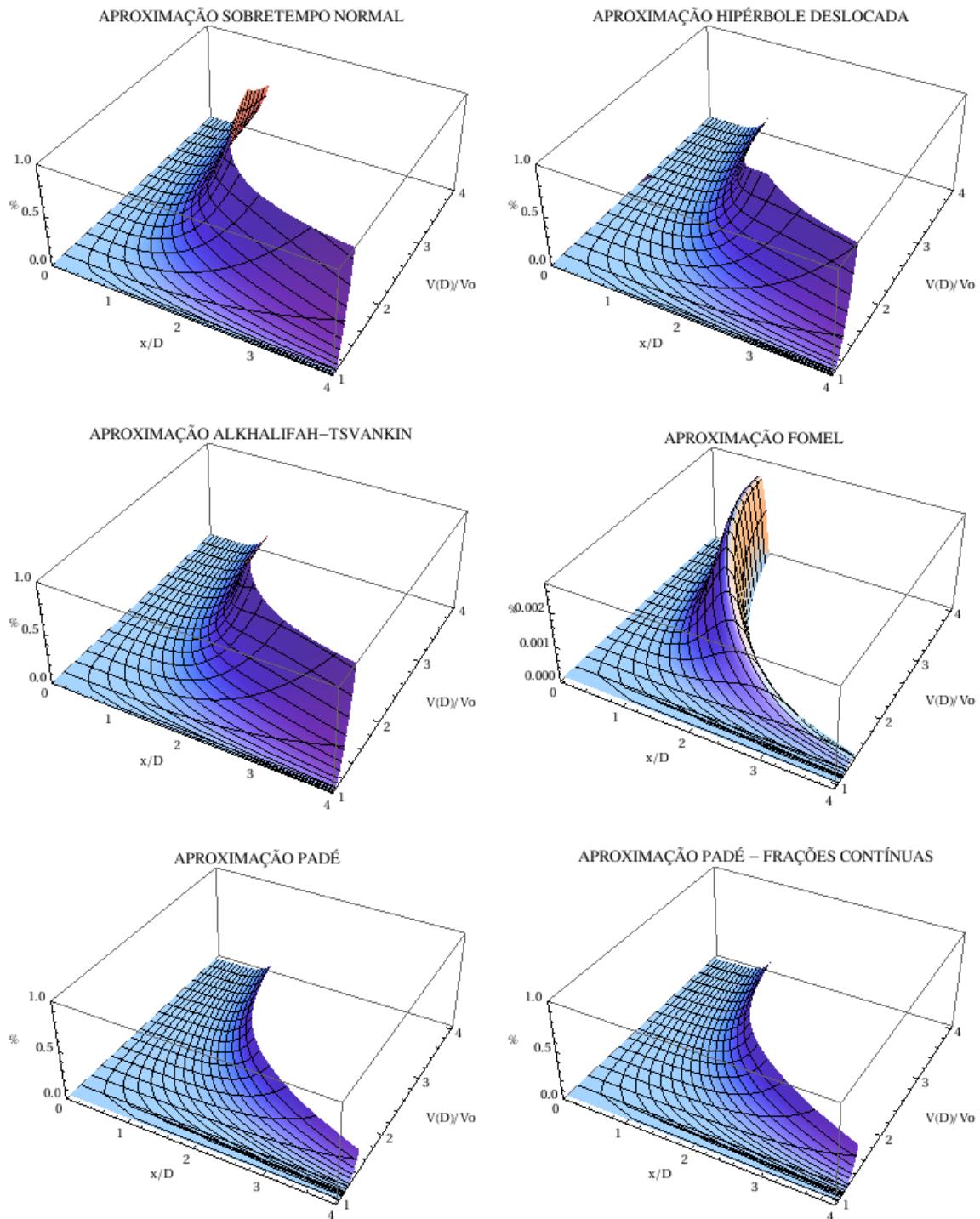
O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 4.1: A aproximação do tempo de trânsito $t_{aprox}(x)$ utilizada é comparada com a Equação de referência $\psi(x)$ do tempo de trânsito para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade (Equação 2.49). x/D (abcissas) é o afastamento fonte-receptor sobre a profundidade do refletor; $V(D)/V_0$ (ordenadas), é a razão entre a velocidade da base e do topo do modelo, relacionada ao gradiente da vagarosidade.

As aproximações de Padé aumentam a região de erro mínimo, quando comparadas com as aproximações sobretempo normal, hipérbole deslocada e a aproximação do modelo TIV, as aproximações de Padé divergem mais suavemente na região apresentada (Figura 7).

Da mesma forma que no experimento anterior, a acurácia das aproximações de Padé é intermediária entre as aproximações de tempo de trânsito supracitadas e a aproximação generalizada. E a mesma vantagem, a favor das aprroximações de Padé, se mantém pois mesmo para o modelo de variação linear da vagarosidade, essas aproximações dependerão apenas do parâmetro A .

Essa vantagem pode facilitar a construção de algorítimos de inversão, onde seria invertido apenas um parâmetro além da velocidade do meio. A partir da aproximação de Padé inverte-se um modelo geológico que servirá de base para a utilização da Equação generalizada completa, com os três parâmetros A , B e C , sendo os dois últimos encontrados através do traçamento de raio no modelo (STOVAS; FOMEL, 2010).

Figura 7 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.34), hipérbole deslocada (Equação 2.17), modelo TIV (Equação 2.35), aproximação generalizada (Equação 2.24) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.15 e 3.17), para o modelo variação linear do quadrado da vagarosidade.



Fonte: Do Autor.

4.3 Modelo transversalmente isotrópico (TIV)

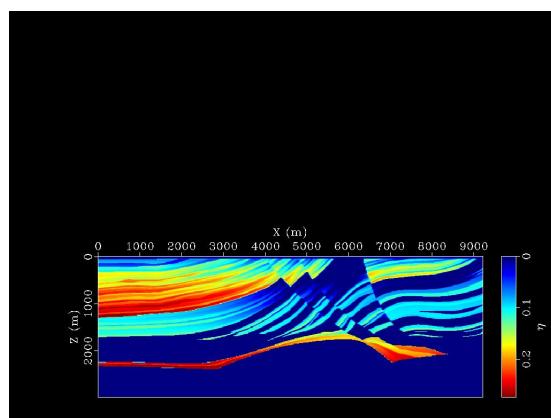
Realizamos um teste numérico para as aproximações de Padé de tempo de transito em um meio Transversalmente isotrópico com eixo de simetria vertical (TIV) utilizando o modelo anisotrópico Marmousi: Neste modelo, η varia no intervalo de 0 a 0.27, que são valores comumente observados na prática (ALKHALIFA, 1997).

O modelo Marmousi anisotrópico foi criado a partir de dados de um perfil ao norte de Benguela atravessando a bacia de Kwanza em Angola, simula uma região de drift continental, com numerosas e extensas falhas normais criadas por causa do drift (VERSTEEG, 1993). A zona alvo é o reservatório localizado a 2500m. O modelo contém muitos refletores, falhas inclinadas, e forte variação de velocidade em ambas as direções, vertical e horizontal (variando de 1500m/s para 5500m/s) (ALKHALIFA, 1997).

Extraindo a primeira coluna à esquerda do modelo Marmousi anisotrópico, e a partir dessa coluna produzindo um modelo unidimensional TIV, formado por uma pilha de camadas plano horizontais com parâmetro de anisotropia η (STOVAS; FOMEL, 2010).

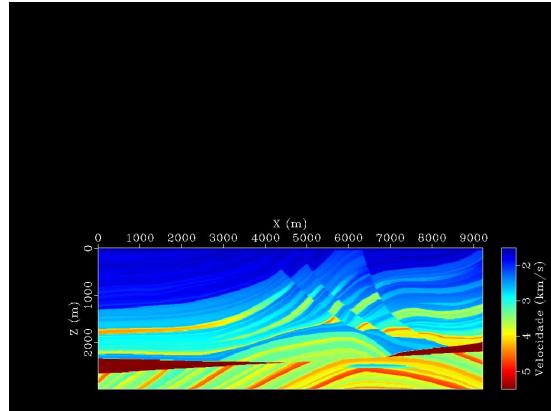
O tempo de reflexão exato é obtido através do traçamento de raios. Comparamos o tempo de trânsito exato com as aproximações de Padé do tempo de trânsito e as aproximações de tempo de trânsito: para o modelo TIV (ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995), hipérbole deslocada (DE BAZELAIRE, 1988) e equação generalizada (STOVAS; FOMEL, 2010) (Equação 2.24).

Figura 8 – Distribuição do parâmetro de anisotropia η (anelipticidade) no Modelo Marmousi anisotrópico. O parâmetro η é uma quantidade adimensional que varia comumente no intervalo de 0 a 0.27.



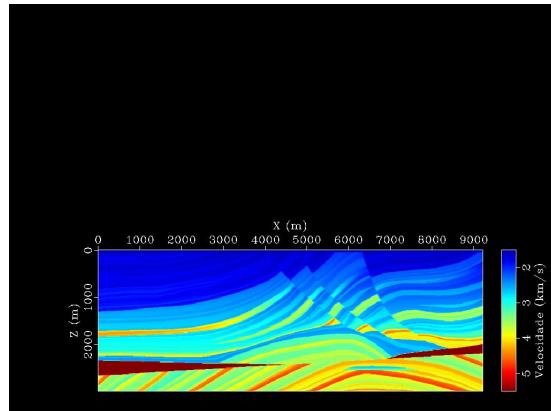
Fonte: Adaptado de (STOVAS; FOMEL, 2010).

Figura 9 – Distribuição da velocidade horizontal (Km/s) no Modelo Marmousi anisotrópico. A velocidade horizontal varia de 1.5 Km/s a 6 Km/s.



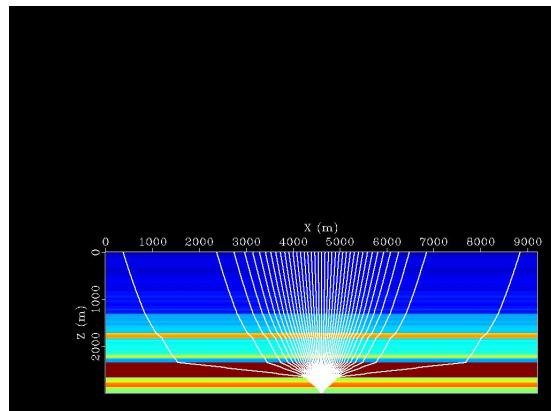
Fonte: Adaptado de (STOVAS; FOMEL, 2010).

Figura 10 – Distribuição da velocidade vertical (Km/s) no Modelo Marmousi anisotrópico. A velocidade vertical varia de 1.5 Km/s a 6 Km/s.



Fonte: Adaptado de (STOVAS; FOMEL, 2010).

Figura 11 – Distribuição da velocidade vertical (Km/s) no modelo TIV 1D. O tempo de trânsito exato $\psi(x)$ é obtido através do traçamento de raios.

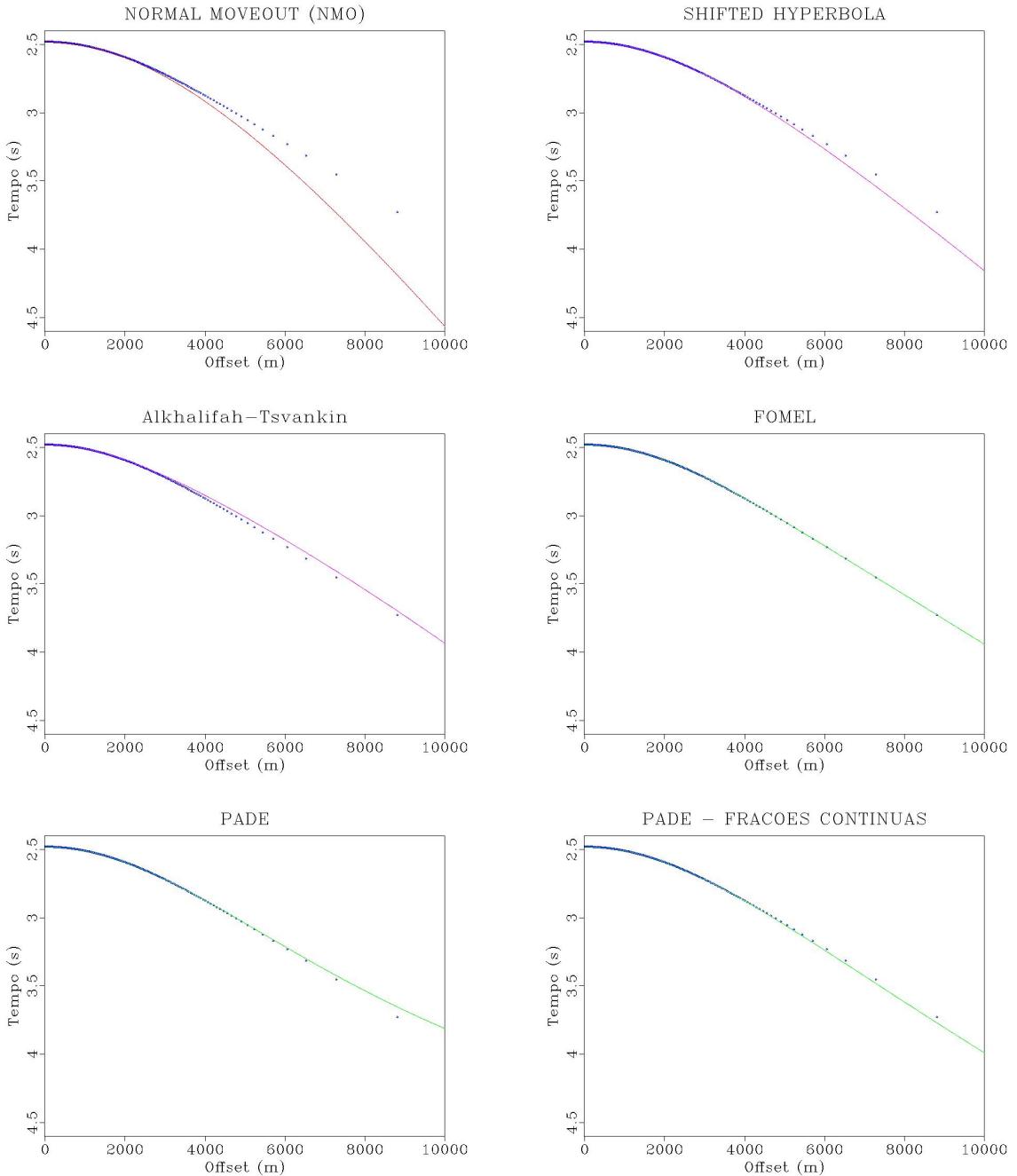


Fonte: Adaptado de (STOVAS; FOMEL, 2010).

A aproximação de Padé para o modelo TIV produz resultados melhores que a aproximação hiperbólica do tempo de trânsito, sobretempo normal, que começa a divergir a partir de 3000m. As aproximações de Padé e Padé frações contínuas mantém a sua acurácia até 6500m, superando inclusive a aproximação convencional do modelo TIV (Equação 2.35) e a aproximação hipérbole deslocada, estas começam a divergir do valor exato a partir de 4000m.

A equação generalizada é exata até 10000m, produzindo o melhor resultado de todas as aproximações. No caso do meio TIV os parâmetros da aproximação generalizada são dados diretamente pelas Equações 2.63-2.65, sendo apenas necessário o conhecimento do parâmetro η do meio.

Figura 12 – Curvas de tempo de trânsito de reflexão das aproximações (da esquerda para direita e de cima para baixo): sobretempo normal (Equação 2.34), hipérbole deslocada (Equação 2.17), modelo TIV (Equação 2.35), aproximação generalizada (Equação 2.24) e aproximações de Padé [2/2] desenvolvidas no Capítulo 3 (Equações 3.18 e 3.19 para o modelo TIV 1D da Figura 11. Os pontos representam o tempo de trânsito exato $\psi(x)$ produzido através do traçamento de raios, as linhas contínuas as curvas de tempo de trânsito da aproximadas.



Fonte: Do Autor.

5 APROXIMAÇÕES DE PADÉ DO TEMPO DE TRÂNSITO PARA UMA FAMÍLIA DE SUPERFÍCIE DE REFLEXÃO COMUM (SRC)

No Apêndice B desenvolvemos a forma generalizada do aproximante de Padé [2/2] para uma série de Taylor na forma $t^2(h) \approx \lambda_0 + \lambda_1 h^2 + \lambda_2 h^4 + O(h^6)$. No Apêndice C desenvolvemos a forma generalizada do aproximante de Padé [2/2] para uma série de Taylor na forma $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$. Esses resultados serão úteis para definirmos os aproximantes de Padé [2/2] para as aproximações em séries de Taylor quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002). Apresentadas previamente na Seção 2.8, basta definir os coeficientes λ 's para cada série de Taylor e substituir na forma generalizada correspondente.

Para uma série de Taylor na forma; os coeficientes λ 's são constantes e h é variável:

$$t^2(h) \approx \lambda_0 + \lambda_1 h^2 + \lambda_2 h^4 + O(h^6) \quad (5.1)$$

O aproximante de Padé [2/2] será dado por:

$$[2/2] = \zeta_1 + \frac{h^2 \zeta_2}{1 + \zeta_3 h^2} \quad (5.2)$$

Onde:

$$\zeta_1 = \lambda_0 \quad (5.3)$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 \quad (5.4)$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \quad (5.5)$$

Se a série de Taylor é expressa na forma da Equação 5.1, o aproximante de Padé [2/2] desta série de Taylor será dado pela Equação 5.2.

Para uma série de Taylor na forma; os coeficientes λ 's são constantes e d é variável:

$$t^2(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4 \quad (5.6)$$

O aproximante de Padé [2/2] será:

$$[2/2] = \frac{p_0 + p_1 d + p_2 d^2}{q_0 + q_1 d + q_2 d^2} \quad (5.7)$$

Onde:

$$q_1 = \frac{-\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \lambda_1}{\lambda_2^2 - \lambda_3 \lambda_1} \quad (5.8)$$

$$q_2 = \frac{-\lambda_4 - \lambda_3 q_1}{\lambda_2} \quad (5.9)$$

$$p_0 = \lambda_0 \quad (5.10)$$

$$p_1 = \lambda_1 + \lambda_0 q_1 \quad (5.11)$$

$$p_2 = \lambda_0 q_2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 \quad (5.12)$$

O aproximante de Padé [2/2] da Equação 5.6 não possui uma forma compacta como a Equação 5.2. No entanto, é dado pela Equação 5.7 em função dos coeficientes p 's e 'q's nas Equações 5.8-5.12 que dependem dos coeficientes da própria série de taylor aproximada (coeficientes λ 's).

5.1 Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $t(h, d)$, expansão de Padé em h

A aproximação $t(h, d)$ em série de Taylor quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\begin{aligned} t(h, d) = t_0 &+ \frac{2\sin(\beta)}{v_0}d + \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_N}d^2 + \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}}h^2 \\ &- \frac{\sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_N^2}d^3 - \frac{\sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}^2 R_N}(2R_{NIP} + R_N)dh^2 \\ &- \frac{\cos^2(\beta)}{2v_0 R_{NIP}^3 R_N^2}[R_{NIP}^2(8\cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP}R_N(5\cos^2(\beta) - 4) \\ &\quad - 2R_N^2 \sin^2(\beta)]h^2 d^2 - \frac{\cos^2(\beta)(5\cos^2(\beta) - 4)}{4v_0 R_N^3}d^4 \\ &+ \frac{\cos^2(\beta)(4R_{NIP}\sin^2(\beta) - R_N \cos^2(\beta))}{4v_0 R_{NIP}^3 R_N}h^4 \end{aligned} \quad (5.13)$$

A variável onde será realizada a aproximação de Padé é o meio-afastamento $h = x/2$, d é mantido constante, e a aproximação de Padé [2/2] é realizada somente em h . Definindo os coeficientes λ 's na forma:

$$\lambda_0 = t_0 + \frac{2\sin(\beta)}{v_0}d + \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_N}d^2 - \frac{\sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_N^2}d^3 - \frac{\cos^2(\beta)(5\cos^2(\beta) - 4)}{4v_0 R_N^3}d^4 \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}} - \frac{\sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}^2 R_N} (2R_{NIP} + R_N)d \\ &- \frac{\cos^2(\beta)}{2v_0 R_{NIP}^3 R_N^2} [R_{NIP}^2(8\cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP} R_N(5\cos^2(\beta) - 4) - 2R_N^2 \sin^2(\beta)]d^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos^2(\beta)(4R_{NIP}\sin^2(\beta) - R_N \cos^2(\beta))}{4v_0 R_{NIP}^3 R_N} \quad (5.16)$$

$$\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{1}{2} \frac{Q_1}{Q_2} \quad (5.17)$$

Onde:

$$Q_1 = 4R_{NIP}R_N\sin^2(\beta) - R_N^2 \cos^2(\beta) \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= 2R_{NIP}^2 R_N^2 - 2R_{NIP} R_N (2R_{NIP} + R_N) \sin(\beta)d \\ &- [R_{NIP}^2(8\cos^2(\beta) - 6) + R_{NIP} R_N(5\cos^2(\beta) - 4) - 2R_N^2 \sin^2(\beta)]d^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Definindo os coeficientes *lambda*'s dessa forma, a Equação 5.13 se torna semelhante a Equação 5.1. Portanto, o aproximante de Padé [2/2] da Equação 5.13 será dado também pela Equação 5.2.

Substituimos os coeficientes λ 's definidos em 5.14-5.17 na definição dos coeficientes ζ 's nas Equações 5.3-5.5:

$$\zeta_1 = \lambda_0 = t_0 + \frac{2\sin(\beta)}{v_0}d + \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_N}d^2 - \frac{\sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_N^2}d^3 - \frac{\cos^2(\beta)(5\cos^2(\beta) - 4)}{4v_0 R_N^3}d^4 \quad (5.20)$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 = \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}} - \frac{\sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}^2 R_N} (2R_{NIP} + R_N)d$$

$$-\frac{\cos^2(\beta)}{2v_0R_{NIP}^3R_N^2}[R_{NIP}^2(8\cos^2(\beta)-6)+R_{NIP}R_N(5\cos^2(\beta)-4)-2R_N^2\sin^2(\beta)]d^2 \quad (5.21)$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{1}{2}\frac{Q_1}{Q_2} \quad (5.22)$$

O aproximante de Padé [2/2] para a série de Taylor quarta ordem $t(h, d)$ será dado pela Equação 5.1, utilizando os coeficientes ζ 's definidos nas Equações 5.20-5.22, obtidos a partir dos coeficientes *lambda*'s definidos nas Equações 5.14-5.17.

5.2 Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $t^2(h, d)$, expansão de Padé em h

A aproximação $t^2(h, d)$ em série de Taylor quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\begin{aligned} t^2(d, h) = & t_0^2 + \frac{4t_0\sin(\beta)}{v}d + 2\frac{vt_0\cos^2(\beta) + 2R_N\sin^2(\beta)}{v^2R_N}d^2 + \frac{2t_0\cos^2(\beta)}{vR_{NIP}}h^2 \\ & + \frac{2\sin(\beta)\cos^2(\beta)(2R_N - vt_0)}{v^2R_N^2}d^3 \\ & + \frac{2\sin(\beta)\cos^2(\beta)(2R_{NIP}R_N - 2vt_0R_{NIP} - vt_0R_N)}{v^2R_{NIP}^2R_N}dh^2 \\ & + \frac{\cos^2(\beta)}{v^2R_{NIP}^3R_N^2}[vt_0R_{NIP}^2(6 - 8\cos^2(\beta)) + vt_0R_{NIP}R_N(4 - 5\cos^2(\beta)) \\ & + 2vt_0R_N^2\sin^2(\beta) - 4RNIPR_N^2\sin^2(\beta) + R_{NIP}^2R_N(10\cos^2(\beta) - 8)]d^2h^2 \\ & + \frac{\cos^2(\beta)(R_N(10\cos^2(\beta) - 8) + vt_0(4 - 5\cos^2(\beta)))}{2v^2R_N^3}d^4 \\ & + \frac{\cos^2(\beta)(4vt_0R_{NIP}\sin^2(\beta) - vt_0R_N\cos^2(\beta) + 2R_{NIP}R_N\cos^2(\beta))}{2v^2R_{NIP}^3R_N}h^4 \end{aligned} \quad (5.23)$$

A variável onde será realizada a aproximação é meio afastamento $h = x/2$, d é mantido constante, e a aproximação de Padé [2/2] é realizada somente em h . Definindo os coeficientes λ 's na forma:

$$\begin{aligned} \lambda_0 = & t_0^2 + \frac{4t_0\sin(\beta)}{V}d + 2\frac{Vt_0\cos^2(\beta) + 2R_N\sin^2(\beta)}{V^2R_N}d^2 \\ & + \frac{2\sin(\beta)\cos^2(\beta)(2R_N - Vt_0)}{V^2R_N^2}d^3 \\ & + \frac{\cos^2(\beta)(R_N(10\cos^2(\beta) - 8) + Vt_0(4 - 5\cos^2(\beta)))}{2V^2R_N^3}d^4 \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{2t_0 \cos^2(\beta)}{VR_{NIP}} + \frac{2\sin(\beta) \cos^2(\beta)(2R_{NIP}R_N - 2Vt_0R_{NIP} - Vt_0R_N)}{V^2R_{NIP}^2R_N}d \\ &\quad + \frac{\cos^2(\beta)}{V^2R_{NIP}^3R_N^2}[Vt_0R_{NIP}^2(6 - 8\cos^2(\beta)) + Vt_0R_{NIP}R_N(4 - 5\cos^2(\beta)) \\ &\quad + 2Vt_0R_N^2\sin^2(\beta) - 4R_{NIP}R_N^2\sin^2(\beta) + R_{NIP}^2R_N(10\cos^2(\beta) - 8)]d^2 \quad (5.25)\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = \frac{\cos^2(\beta)(4Vt_0R_{NIP}\sin^2(\beta) - Vt_0R_N\cos^2(\beta) + 2R_{NIP}R_N\cos^2(\beta))}{2V^2R_{NIP}^3R_N} \quad (5.26)$$

$$[-\lambda_2/\lambda_1] = \frac{-R_NQ_3}{2} \frac{1}{(2Vt_0R_{NIP}^2R_N^2 + 2R_{NIP}R_NQ_1\sin(\beta)d + Q_2d^2)} \quad (5.27)$$

Os coeficientes geométricos Q 's na Equação 5.27 são:

$$Q_1 = 2R_{NIP}R_N - 2Vt_0R_{NIP} - Vt_0R_N \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}Q_2 &= Vt_0R_{NIP}^2(6 - 8\cos^2(\beta)) + Vt_0R_{NIP}R_N(4 - 5\cos^2(\beta)) \\ &\quad + 2Vt_0R_N^2\sin^2(\beta) - 4R_{NIP}R_N^2\sin^2(\beta) + R_{NIP}^2R_N(10\cos^2(\beta) - 8) \quad (5.29)\end{aligned}$$

$$Q_3 = 4Vt_0R_{NIP}\sin^2(\beta) - Vt_0R_N\cos^2(\beta) + 2R_{NIP}R_N\cos^2(\beta) \quad (5.30)$$

Definindo os coeficientes λ 's dessa forma, a Equação 5.23 se torna semelhante a Equação 5.1. Portanto, o aproximante de Padé [2/2] da Equação 5.23 será dado também por 5.2.

Substituimos os coeficientes λ 's definidos nas Equações 5.25-5.27 na definição dos coeficientes ζ 's em 5.3-5.5:

$$\begin{aligned}\zeta_1 = \lambda_0 &= t_0^2 + \frac{4t_0\sin(\beta)}{V}d + 2\frac{Vt_0\cos^2(\beta) + 2R_N\sin^2(\beta)}{V^2R_N}d^2 \\ &\quad + \frac{2\sin(\beta)\cos^2(\beta)(2R_N - Vt_0)}{V^2R_N^2}d^3 \\ &\quad + \frac{\cos^2(\beta)(R_N(10\cos^2(\beta) - 8) + Vt_0(4 - 5\cos^2(\beta)))}{2V^2R_N^3}d^4 \quad (5.31)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2 = \lambda_1 &= \frac{2t_0 \cos^2(\beta)}{VR_{NIP}} + \frac{2\sin(\beta) \cos^2(\beta)(2R_{NIP}R_N - 2Vt_0R_{NIP} - Vt_0R_N)}{V^2R_{NIP}^2R_N}d \\ &+ \frac{\cos^2(\beta)}{V^2R_{NIP}^3R_N^2}[Vt_0R_{NIP}^2(6 - 8\cos^2(\beta)) + Vt_0R_{NIP}R_N(4 - 5\cos^2(\beta)) \\ &+ 2Vt_0R_N^2\sin^2(\beta) - 4R_{NIP}R_N^2\sin^2(\beta) + R_{NIP}^2R_N(10\cos^2(\beta) - 8)]d^2 \quad (5.32)\end{aligned}$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{-R_NQ_3}{2} \frac{1}{(2Vt_0R_{NIP}^2R_N^2 + 2R_{NIP}R_NQ_1\sin(\beta)d + Q_2d^2)} \quad (5.33)$$

O aproximante de Padé [2/2] para a série de Taylor quarta ordem $t^2(h, d)$ será dado pela Equação 5.2, utilizando os coeficientes ζ 's definidos nas Equações 5.31-5.33, obtidos a partir dos coeficientes λ 's definidos nas Equações 5.24-5.27.

5.3 Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v}R_{NIP})^2$, expansão de Padé em h

A aproximação $(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v}R_{NIP})^2$ em série de Taylor quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\begin{aligned}(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v}R_{NIP})^2 &= (\frac{2}{v}R_{NIP})^2 + \frac{8R_{NIP}\sin(\beta)}{v^2}d + 4\frac{R_{NIP}\cos^2(\beta) + R_N\sin^2(\beta)}{v^2R_N}d^2 \\ &+ \frac{4\cos^2(\beta)}{v^2}h^2 + \frac{4\sin(\beta)\cos^2(\beta)(R_N - R_{NIP})}{v^2R_N^2}d^3 - \frac{8\sin(\beta)\cos^2(\beta)}{v^2R_N}dh^2 \\ &+ \frac{\cos^2(\beta)}{v^2R_N^3}[R_N(5\cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP}(4 - 5\cos^2(\beta))]d^4 + \frac{4\cos^2(\beta)(3 - 4\cos^2(\beta))}{v^2R_N^2}d^2h^2 \\ &+ \frac{4\cos^2(\beta)\sin^2(\beta)}{v^2R_{NIP}R_N}h^4 \quad (5.34)\end{aligned}$$

A variável onde será realizada a aproximação é meio afastamento $h = x/2$, d é mantido constante, e a aproximação de Padé [2/2] é realizada somente em h . Definindo os coeficientes λ 's na forma:

$$\begin{aligned}\lambda_0 = (\frac{2}{v_0}R_{NIP})^2 &+ \frac{8R_{NIP}\sin(\beta)}{v_0^2}d + 4\frac{R_{NIP}\cos^2(\beta) + R_N\sin^2(\beta)}{v_0^2R_N}d^2 \\ &+ \frac{4\sin(\beta)\cos^2(\beta)(R_N - R_{NIP})}{v_0^2R_N^2}d^3 \\ &+ \frac{\cos^2(\beta)}{v_0^2R_N^3}[R_N(5\cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP}(4 - 5\cos^2(\beta))]d^4 \quad (5.35)\end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{4 \cos^2(\beta)}{v_0^2} - \frac{8 \operatorname{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0^2 R_N} d + \frac{4 \cos^2(\beta)(3 - 4 \cos^2(\beta))}{v_0^2 R_N^2} d^2 \quad (5.36)$$

$$\lambda_2 = \frac{4 \cos^2(\beta) \operatorname{sen}^2(\beta)}{v_0^2 R_{NIP} R_N} \quad (5.37)$$

$$[-\lambda_2/\lambda_1] = -\frac{R_N \operatorname{sen}^2(\beta)}{R_{NIP}} \frac{1}{R_N^2 - 2R_N \operatorname{sen}(\beta)d + (3 - 4 \cos^2(\beta))d^2} \quad (5.38)$$

Definindo os coeficientes λ 's dessa forma, a Equação 5.34 se torna semelhante a Equação 5.1. Portanto, o aproximante de Padé [2/2] da Equação 5.34 será dado também pela Equação 5.2.

Substituimos os coeficientes λ 's definidos em 5.35-5.38 na definição dos coeficientes ζ 's nas Equações 5.3-5.5:

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \lambda_0 &= \left(\frac{2}{v_0} R_{NIP}\right)^2 + \frac{8 R_{NIP} \operatorname{sen}(\beta)}{v_0^2} d + 4 \frac{R_N I P \cos^2(\beta) + R_N \operatorname{sen}^2(\beta)}{v_0^2 R_N} d^2 \\ &\quad + \frac{4 \operatorname{sen}(\beta) \cos^2(\beta)(R_N - R_{NIP})}{v_0^2 R_N^2} d^3 \\ &\quad + \frac{\cos^2(\beta)}{v_0^2 R_N^3} [R_N(5 \cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP}(4 - 5 \cos^2(\beta))] d^4 \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 = \frac{4 \cos^2(\beta)}{v_0^2} - \frac{8 \operatorname{sen}(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0^2 R_N} d + \frac{4 \cos^2(\beta)(3 - 4 \cos^2(\beta))}{v_0^2 R_N^2} d^2 \quad (5.40)$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = -\frac{R_N \operatorname{sen}^2(\beta)}{R_{NIP}} \frac{1}{R_N^2 - 2R_N \operatorname{sen}(\beta)d + (3 - 4 \cos^2(\beta))d^2} \quad (5.41)$$

O aproximante de Padé [2/2] para a série de Taylor quarta ordem $(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v} R_{NIP})^2$ será dado pela Equação 5.2, utilizando os coeficientes ζ 's definidos nas Equações 5.39-5.41, a partir dos coeficientes λ 's definidos em 5.35-5.38.

5.4 Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $t(h, d)$, expansão de Padé em d

A variável onde será realizada a expansão é $d = m - mo$ distância entre o ponto médio central da superfície SRC e um ponto médio na vizinhança, para tanto h é mantido constante e a aproximação de Padé [2/2] é realizada somente em d . Se definirmos os coeficientes λ 's na Equação 5.14 de modo que esta se torne semelhante a Equação 5.6, o aproximante de Padé [2/2] da Equação 5.14 será dado pela Equação 5.7. Definindo os

coeficientes λ 's da aproximação $t(h, d)$ em série de Taylor quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\lambda_0 = t_0 + \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}} h^2 + \frac{\cos^2(\beta)(4R_{NIP}\sin^2(\beta) - R_N \cos^2(\beta))}{4v_0 R_{NIP}^3 R_N} h^4 \quad (5.42)$$

$$\lambda_1 = \frac{2\sin(\beta)}{v_0} - \frac{\sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_{NIP}^2 R_N} (2R_{NIP} + R_N) h^2 \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \frac{\cos^2(\beta)}{v_0 R_N} - \frac{\cos^2(\beta)}{2v_0 R_{NIP}^3 R_N^2} [R_{NIP}^2 (8 \cos^2(\beta) - 6) \\ + R_{NIP} R_N (5 \cos^2(\beta) - 4) - 2R_N^2 \sin^2(\beta)] h^2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\lambda_3 = -\frac{\sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0 R_N^2} \quad (5.45)$$

$$\lambda_4 = -\frac{\cos^2(\beta)(5 \cos^2(\beta) - 4)}{4V_0 R_N^3} \quad (5.46)$$

O aproximante de Padé será dado pela Equação 5.7: Os coeficientes dos polinômios $p(d)$ e $q(d)$ são obtidos por meio de 5.8-5.12, utilizando os coeficientes λ 's definidos nas Equações 5.42-5.46.

5.5 Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $t^2(h, d)$, expansão de Padé em d

A variável onde será realizada a expansão é $d = m - mo$ distância entre o ponto médio central da superfície SRC e um ponto médio na vizinhança, para tanto h é mantido constante e a aproximação de Padé é realizada somente em d . Se definimos os coeficientes λ 's na Equação 5.23 de modo que esta se torne semelhante à 5.6, o aproximante de Padé [2/2] da Equação 5.23 será dado por 5.7. Definindo os coeficientes λ 's da aproximação $t^2(h, d)$ em série de Taylor quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\begin{aligned} \lambda_0 = t_0^2 + \frac{2h^2 t_0 \cos^2(\beta)}{VR_{NIP}} \\ + \frac{h^4 \cos^2(\beta)(4Vt_0 R_{NIP} \sin^2(\beta) - Vt_0 R_N \cos^2(\beta) + 2R_{NIP} R_N \cos^2(\beta))}{2V^2 R_{NIP}^3 R_N} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\lambda_1 = \frac{4t_0 \sin(\beta)}{V} + \frac{2\sin(\beta) \cos^2(\beta)(2R_{NIP} R_N - 2Vt_0 R_{NIP} - Vt_0 R_N) h^2}{V^2 R_{NIP}^2 R_N} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 = & \frac{2(Vt_0 \cos^2(\beta) + 2R_N \sin^2(\beta))}{V^2 R_N} \\ & + \frac{\cos^2(\beta)}{V^2 R_{NIP}^3 R_N^2} [Vt_0 R_{NIP}^2 (6 - 8 \cos^2(\beta)) + Vt_0 R_{NIP} R_N (4 - 5 \cos^2(\beta)) \\ & + 2Vt_0 R_N^2 \sin^2(\beta) - 4R_{NIP} R_N^2 \sin^2(\beta) + R_{NIP}^2 R_N (10 \cos(\beta) - 8)] h^2\end{aligned}\quad (5.49)$$

$$\lambda_3 = \frac{2 \sin(\beta) \cos^2(\beta) (2R_N - Vt_0)}{V^2 R_N^2} \quad (5.50)$$

$$\lambda_4 = \frac{\cos^2(\beta) (R_N (10 \cos^2(\beta) - 8) + Vt_0 (4 - 5 \cos^2(\beta)))}{2V^2 R_N^3} \quad (5.51)$$

O aproximante de Padé [2/2] será dado pela Equação 5.7: Os coeficientes dos polinômios $p(d)$ e $q(d)$ são obtidos por meio das Equações 5.8-5.12, utilizando os coeficientes λ 's definidos nas Equações 5.47-5.51.

5.6 Aproximação de Padé para a série de Taylor quarta ordem $(t(h, d) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão de Padé em d

A variável onde será realizada a expansão é $d = m - mo$ distância entre o ponto médio central da superfície SRC e um ponto médio na vizinhança, para tanto h é mantido constante e a aproximação de Padé é realizada somente em d . Se definimos os coeficientes λ 's na Equação 5.34 de modo que esta se torne semelhante a Equação 5.6, o aproximante de Padé [2/2] da Equação 5.34 será dado por 5.7. Definindo os coeficientes λ 's da aproximação $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$ em série de Taylor quarta ordem da superfície SRC (HöCHT, 2002):

$$\lambda_0 = \left(\frac{2}{v_0} R_{NIP}\right)^2 + \frac{4 \cos^2(\beta)}{v_0^2} h^2 + \frac{4 \cos^2(\beta) \sin^2(\beta)}{v_0^2 R_{NIP} R_N} h^4 \quad (5.52)$$

$$\lambda_1 = \frac{8 R_{NIP} \sin(\beta)}{v_0^2} - \frac{8 \sin(\beta) \cos^2(\beta)}{v_0^2 R_N} h^2 \quad (5.53)$$

$$\lambda_2 = 4 \frac{R_{NIP} \cos^2(\beta) + R_N \sin^2(\beta)}{v_0^2 R_N} + \frac{4 \cos^2(\beta) (3 - 4 \cos^2(\beta))}{v_0^2 R_N^2} h^2 \quad (5.54)$$

$$\lambda_3 = \frac{4 \sin(\beta) \cos^2(\beta) (R_N - R_{NIP})}{v_0^2 R_N^2} \quad (5.55)$$

$$\lambda_4 = \frac{\cos^2(\beta)}{v_0^2 R_N^3} [R_N (5 \cos^2(\beta) - 4) + R_{NIP} (4 - 5 \cos^2(\beta))] \quad (5.56)$$

O aproximante de Padé [2/2] será dado pela Equação 5.7: Os coeficientes dos polinômios $p(d)$ e $q(d)$ são obtidos por meio das Equações 5.8-5.12, utilizando os coeficientes λ 's definidos nas Equações 5.52-5.56.

6 TESTE ANALÍTICO DAS APROXIMAÇÕES DE PADÉ DA SUPERFÍCIE DE REFLEXÃO COMUM

Para o modelo do refletor circular na Seção 2.6, a superfície de tempo de reflexão $\Psi(h(\alpha, \theta), d(\alpha, \theta))$ é dada a partir da relação paramétrica 2.52. A variável $h(\alpha, \theta)$ é obtida pela parametrização 2.51; $d = m - m_0$ é obtido calculando-se m a partir de 2.50 para um m_0 fixo. Os parâmetros do SRC, R_N , R_{NIP} e β , são dados analiticamente em função dos parâmetros da geometria do refletor circular a partir de 2.54-2.57. Todavia, esses parâmetros irão depender da localização do ponto médio comum central m_0 , ou seja, os valores dos raios de curvatura R_N e R_{NIP} e o ângulo de emergência do raio zero-afastamento β irão depender da posição do ponto médio comum central m_0 , e isso irá influenciar a qualidade das aproximações, como veremos adiante.

Os mesmos parâmetros obtidos em 2.54-2.57 são utilizados nas aproximações SRC-Padé, SRC quarta ordem (HöCHT, 2002), SRC hiperbólico (JAGER et al., 2001) e SRC não hiperbólico (FOMEL; KAZINNIK, 2013), para obter a aproximação do tempo de trânsito de reflexão para o refletor circular.

O erro relativo absoluto $erro\%$ é o módulo da diferença entre o valor do tempo de trânsito da aproximação SRC $t_{aprox}(h, d)$ utilizada e o tempo de trânsito da superfície SRC $\Psi(h, d)$ obtido analiticamente, dividido pelo próprio tempo de trânsito $\Psi(h, d)$ da superfície SRC Equação 6.1. O resultado é um valor percentual que representa a diferença entre o tempo de trânsito da aproximação e o valor exato, sendo próximo a zero quando o erro de aproximação é pequeno.

$$erro\% = 100 \times \frac{|t_{aprox}(h, d) - \Psi(h, d)|}{\Psi(h, d)} \quad (6.1)$$

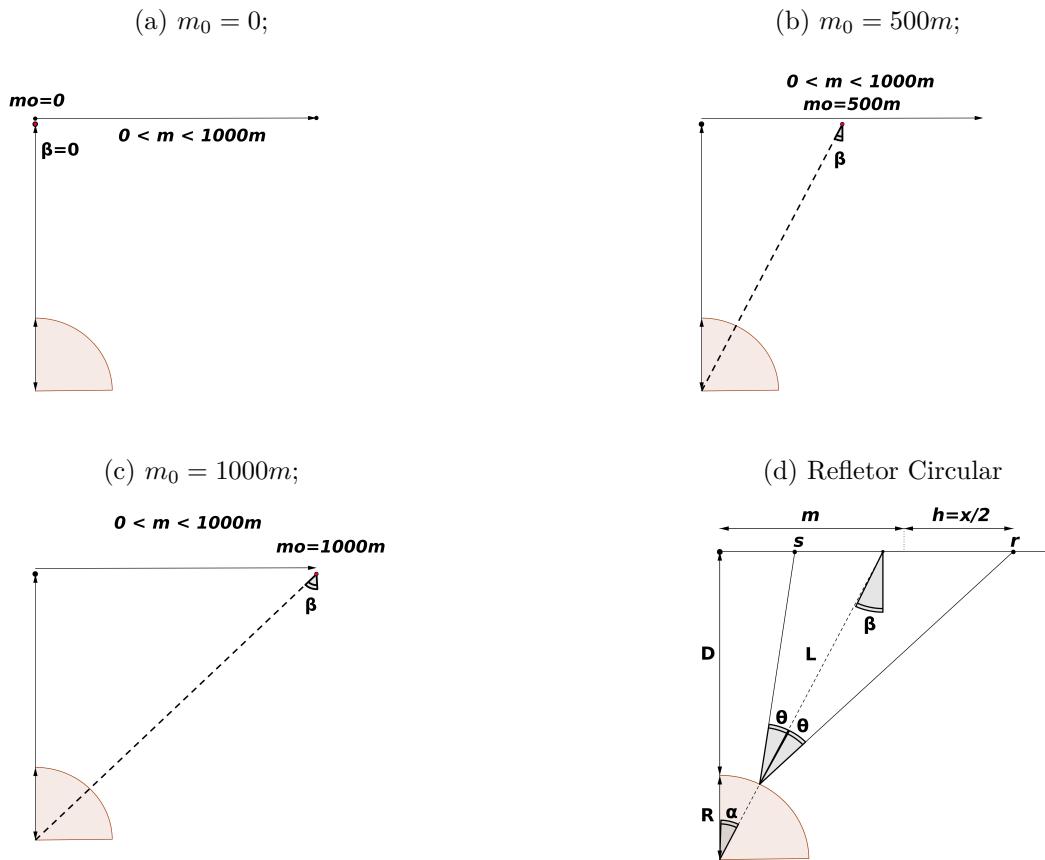
Para testar a qualidade das aproximações utilizando 6.1, simulamos um experimento no modelo do refletor circular na Figura 2. A profundidade mínima do refletor circular D é fixa e igual a 1000m. Fixamos m_0 em 0m, e calculamos os parâmetros do SRC a partir de 2.54-2.57. m_0 não precisa estar localizado na origem, como veremos depois, a localização de m_0 irá influenciar no cálculos de R_N e R_{NIP} e na qualidade da aproximação. Variando α e θ , obtemos a superfície $\Psi(h(\alpha, \theta), d(\alpha, \theta))$, para cada posição de m_0 . E da mesma forma, obtemos $h(\alpha, \theta)$ e $m(\alpha, \theta)$.

Utilizando os valores de $h(\alpha, \theta)$ e $d = m(\alpha, \theta) - m_0$ nas aproximações do SRC quarta ordem, SRC-Padé, SRC hiperbólico e não hiperbólico, e os parâmetros do SRC, obtivemos as superfícies de tempo de trânsito de reflexão aproximadas.

Substituindo as superfícies aproximadas e o tempo de trânsito exato $\Psi(h, d)$, em 6.1, obtemos as superfícies de erro relativo absoluto $erro\%(h, d)$. O erro relativo absoluto

é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é comparada com a Equação de referência $\Psi(h, d)$, expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular Equação 2.52. h/D é o meio-afastamento sobre a profundidade mínima do refletor; d/D , é a razão entre a separação dos pontos médios comuns sobre a profundidade mínima do refletor. Por conveniência apresentamos a superfície de erro relativo absoluto, com os eixos h e d normalizados, dividindo-os por D (profundidade mínima do refletor circular).

Figura 13 – Representação esquemática do experimento analítico para a produção da superfície SRC $\Psi(\alpha, \theta)$ para o refletor circular descrito na Seção 2.9. As letras (a), (b) e (c) representam os três experimentos realizados, cada um com uma posição do ponto médio central m_0 , escolhida para o cálculo dos parâmetros t_0 , R_N , R_{NIP} e β através das Equações 2.99-2.102, que serão utilizados nas aproximações da SRC. Variando os ângulos α e θ ; obtemos m , h e Ψ através das Equações paramétricas 2.96-2.98.



Fonte: Do Autor.

6.1 Aproximações hiperbólica e não hiperbólica da superfície de reflexão comum

As Figuras 14-15 são o erro relativo absoluto do SRC hiperbólico, aproximação é apresentada na Equação 2.40 (JAGER et al., 2001), e o erro relativo absoluto da Equação 2.73 do SRC não hiperbólico (FOMEL; KAZINNIK, 2013).

O erro relativo absoluto produzido pela aproximação do SRC não hiperbólico é menor em comparação a aproximação hiperbólica, esta é sempre acurada para pequenos desvios ao longo do raio central, porém perde sua acurácia para grandes afastamentos e distâncias de separação entre os pontos médios comuns (FOMEL; KAZINNIK, 2013).

Um resultado teórico importante surge ao analisar a Figura 14: A diferença na acurácia das aproximações do SRC aumenta quando a razão d/D (distância entre os pontos médios sobre a profundidade do refletor) cresce. Isso significa que ao realizar o empilhamento a aberturas de empilhamento utilizadas irão influenciar na qualidade da seção empilhada resultante.

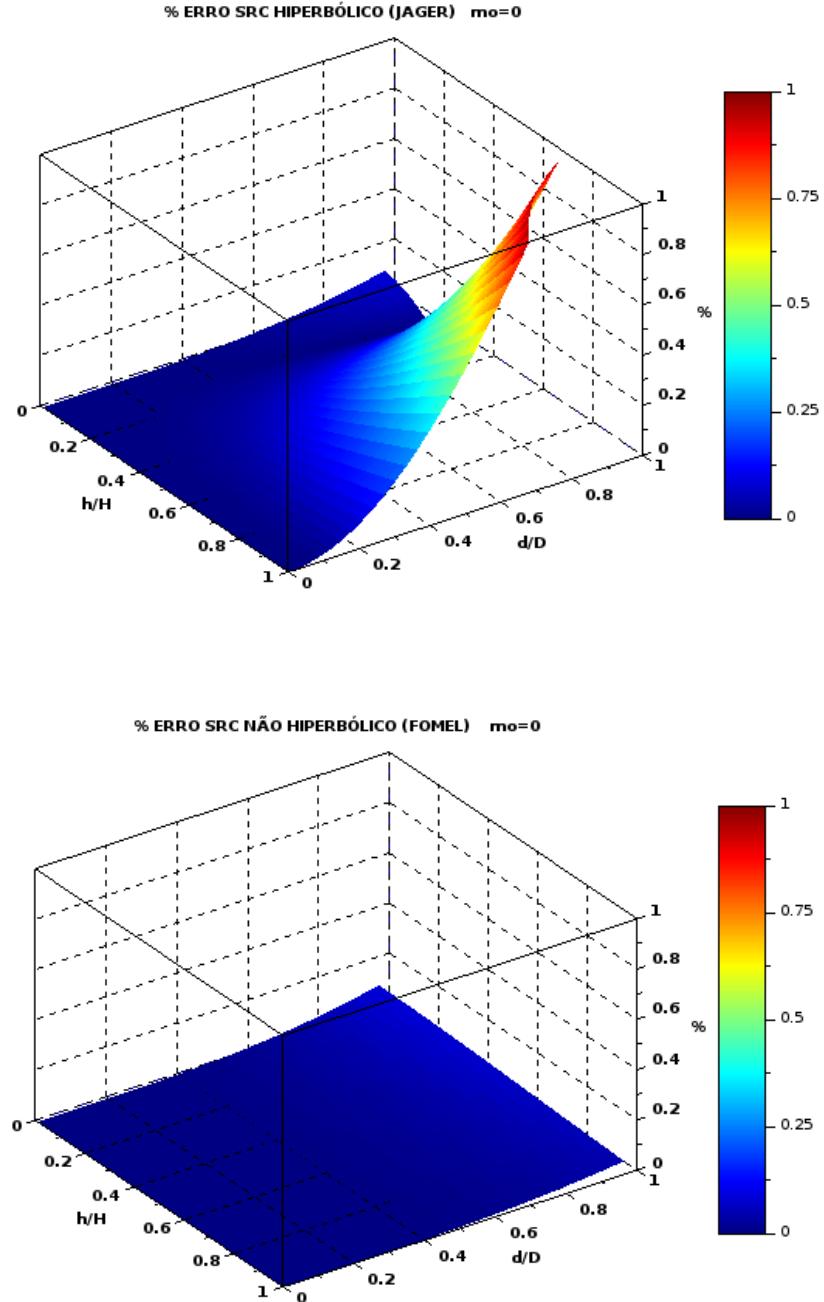
Ou seja, não haverá diferença significativa entre a seção empilhada produzida a partir da aproximação do SRC hiperbólico e a seção produzida a partir da aproximação so SRC não hiperbólico, se as aberturas utilizadas em $d = m - m_0$ forem estreitas¹.

Na Figura 15, escolhermos $m_0 = 500m$, o comportamento das aproximações é o oposto, porém a mesma análise é válida. A aproximação do SRC hiperbólico passa a divergir rapidamente para h/D , meio afastamento sobre a profundidade do refletor, maior que 0.4. A aproximação do SRC não hiperbólico possui uma região de erro mínimo azul maior, não passando de 0,2% de erro absoluto relativo máximo.

Em $m_0 = 1000m$, na Figura 16, a aproximação do SRC hiperbólico possui uma faixa estreita de erro mínimo em azul, até $h/D=0.4$ e $d/D=0.2$. O erro do SRC não hiperbólico, apesar de inferior ao SRC hiperbólico, possui uma faixa estreita de erro mínimo até $d/D=0.2$, divergindo a partir daí.

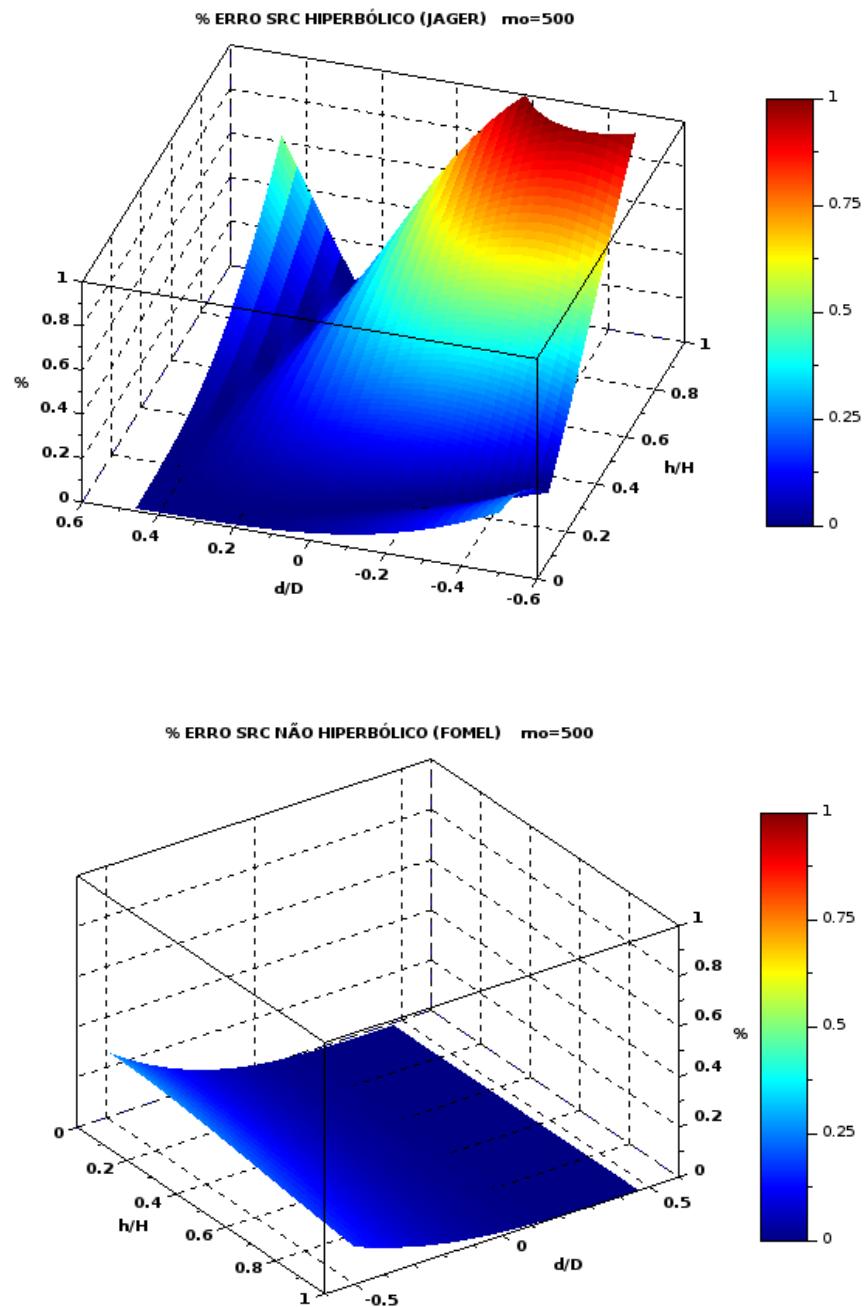
¹ entende-se “estreita” de acordo com a razão d/D , ou seja a aberturas depende da profundidadedo refletor e da distância entre os pontos médios

Figura 14 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.68) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.73), para o refletor circular descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado na origem.



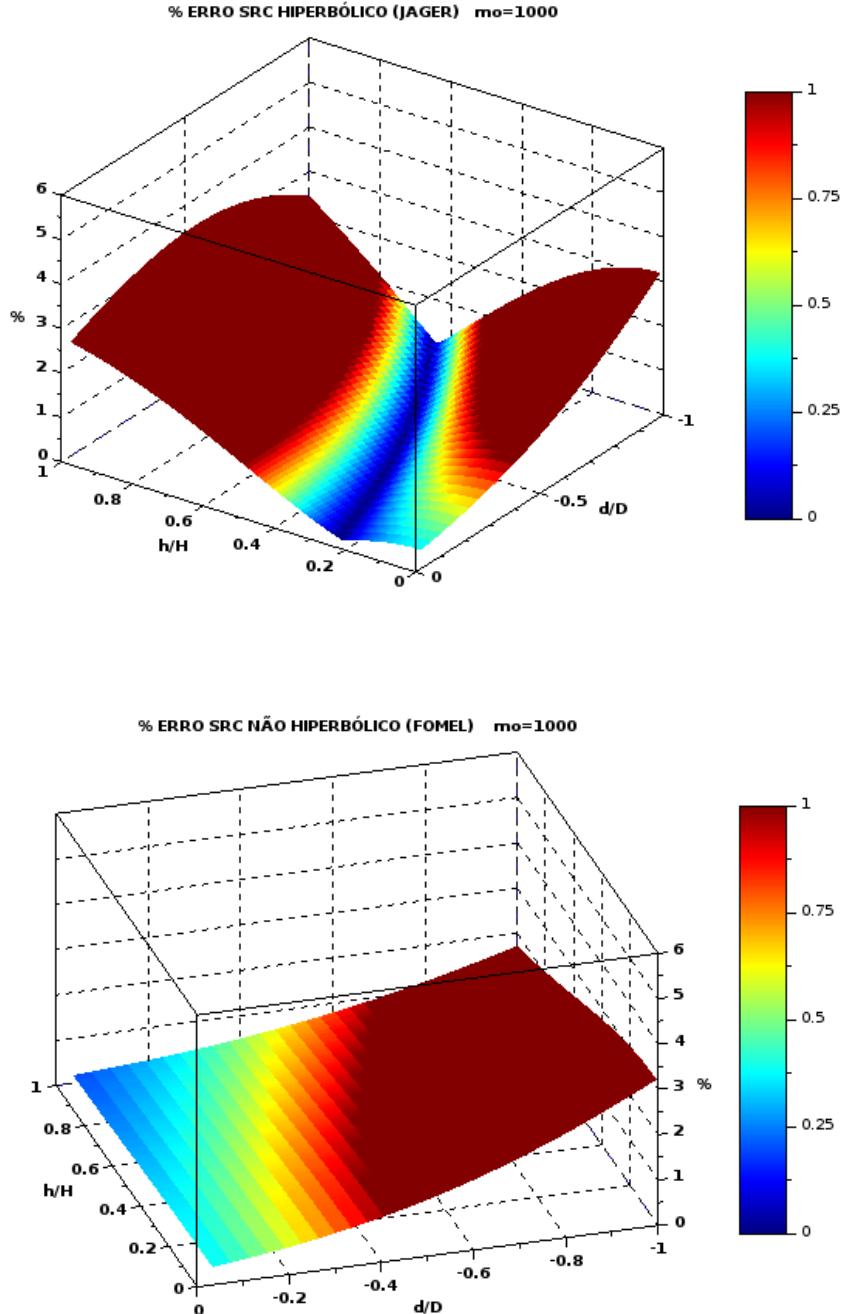
Fonte: Do Autor.

Figura 15 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.68) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.73), para o refletor circular, descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado em 500m.



Fonte: Do Autor.

Figura 16 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): SRC hiperbólico de (Equação 2.68) e SRC não hiperbólico de (Equação 2.73), para o refletor circular, descrito na Seção 2.9, o ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.



Fonte: Do Autor.

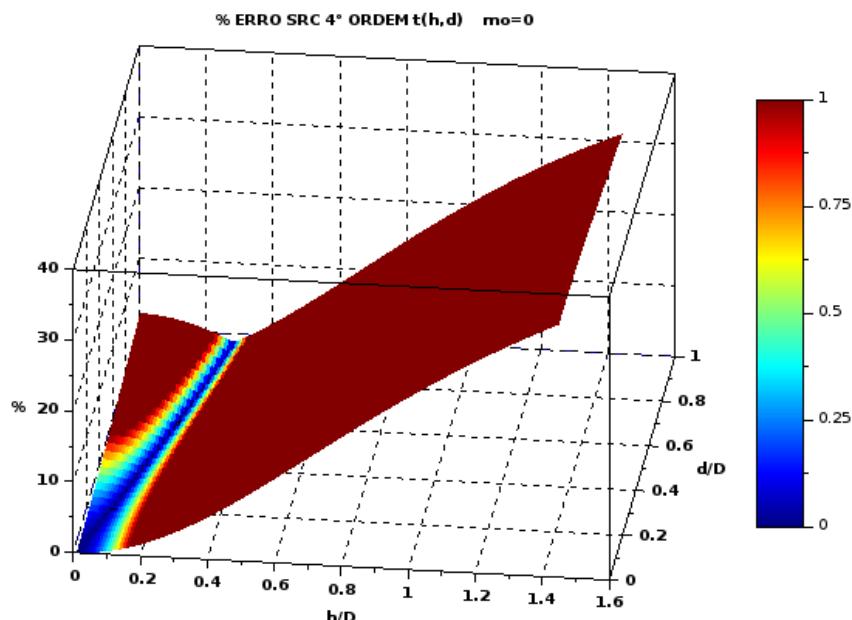
6.2 Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série $t(h, d)$

A Figura 17 é o erro relativo absoluto da aproximação 5.1 do SRC quarta ordem para $t(h, d)$ (HöCHT, 2002). A aproximação possui erro mínimo ao longo de uma faixa estreita (região azul) e diverge muito rapidamente para grandes afastamentos e separação dos pontos médios.

No entanto, ao realizar a aproximação de Padé da SRC [2/2] em 5.1, o raio de convergência da aproximação aumenta, assim como a região de erro mínimo (azul). Compare as Figuras 19 e 20 com 18.

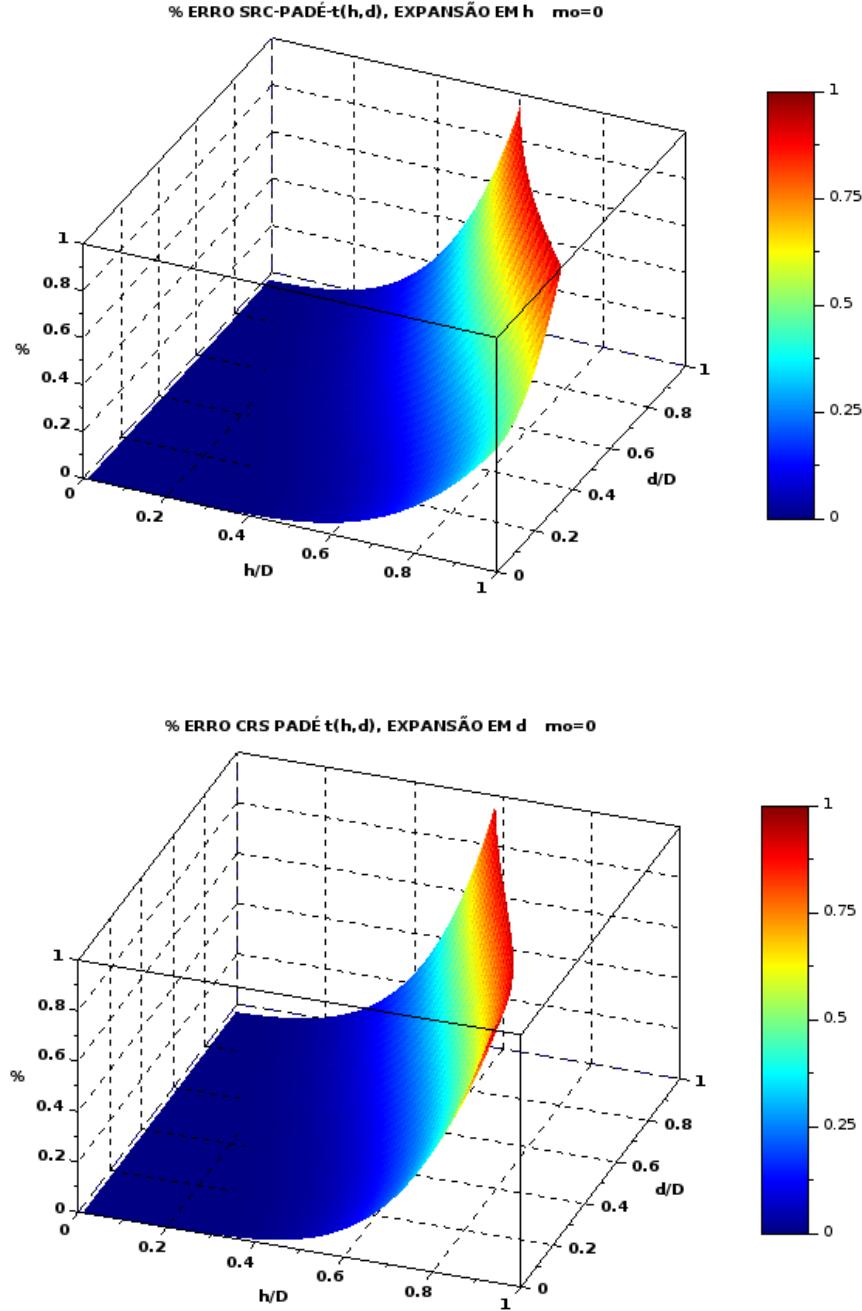
As aproximações de Padé [2/2], expansão em h e expansão em d para a série $t(h, d)$ são dadas nas seções 5.1 e 5.4, respectivamente.

Figura 17 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52, o ponto médio central m_0 é localizado na origem.



Fonte: Do Autor.

Figura 18 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado na origem.



Fonte: Do Autor.

O comportamento assíntótico da superfície de erro absoluto relativo nas Figuras 19 e 20, evidencia a diminuição da qualidade da aproximação quando as razões d/D e h/D tendem para 1, a superfície de erro absoluto relativo diverge. Porém, as aproximações

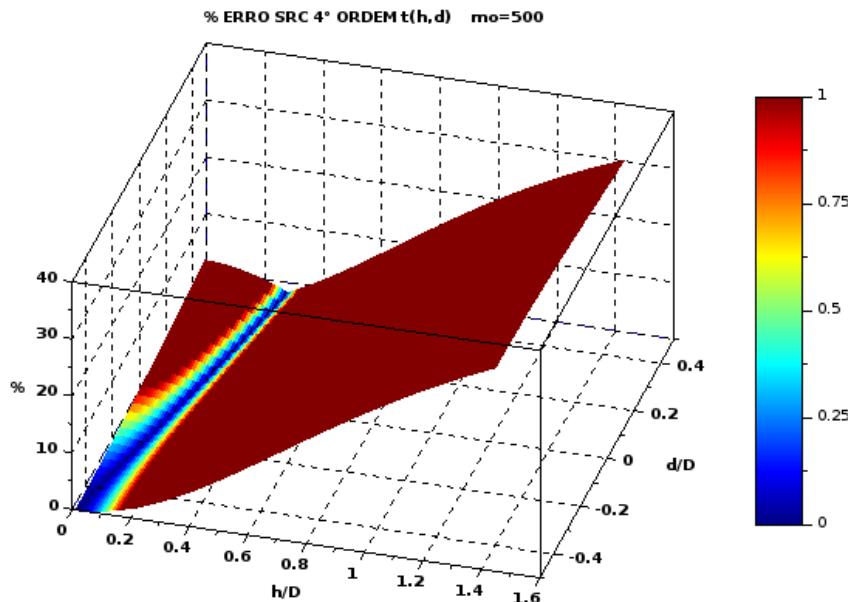
de Padé ampliaram a região de erro mínimo da aproximação do SRC quarta ordem para $t(h, d)$.

A qualidade da aproximação de Padé da SRC [2/2] depende da posição de m_0 , pois a partir de m_0 são calculados os valores dos parâmetros do SRC t_0 , R_N , R_{NIP} e β , a partir das Equações 2.99-2.102.

Nas Figuras 20 e 22, refizemos as superfícies de erro absoluto relativo para duas posições de m_0 : 500m e 1000m.

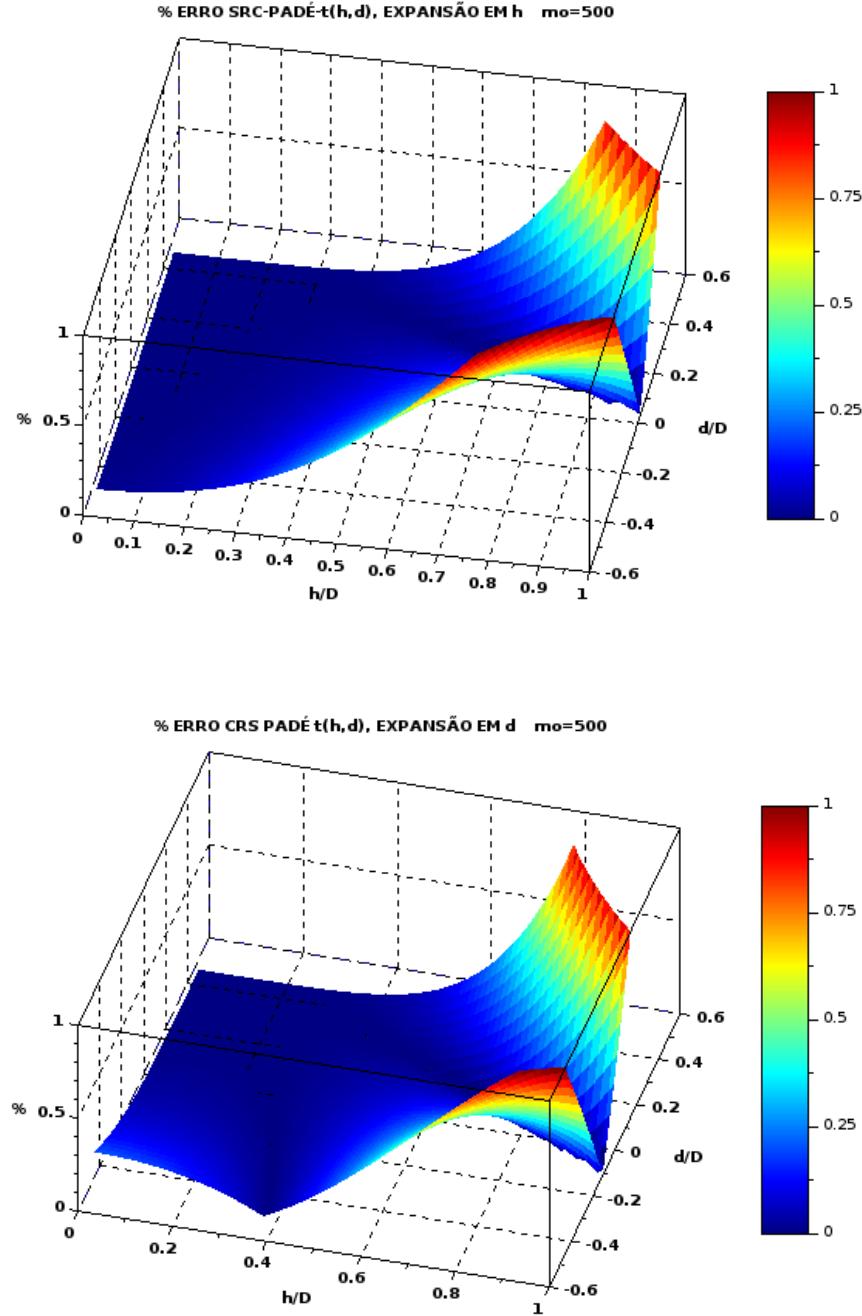
O erro relativo absoluto cresce para as razões d/D maiores que -0,5 e 0,5 (Figuras 19 e 20), quando $m_0 = 500m$; para $m_0 = 1000m$ a superfície de erro absoluto diverge muito rapidamente para pequenas variações das razões h/D e d/D (Figuras 21 e 22).

Figura 19 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52, o ponto médio central m_0 é localizado em 500m.



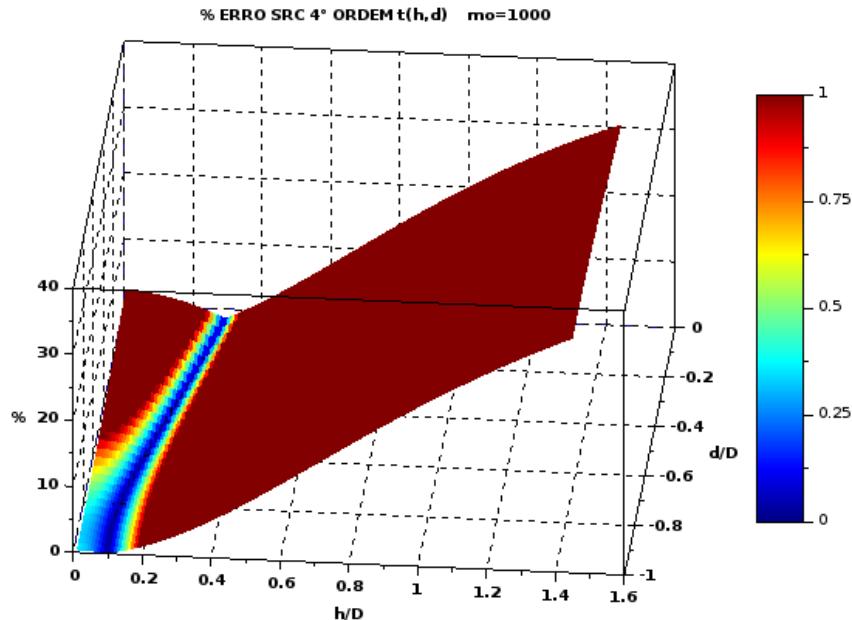
Fonte: Do Autor.

Figura 20 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.



Fonte: Do Autor.

Figura 21 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.13 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52, o ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.



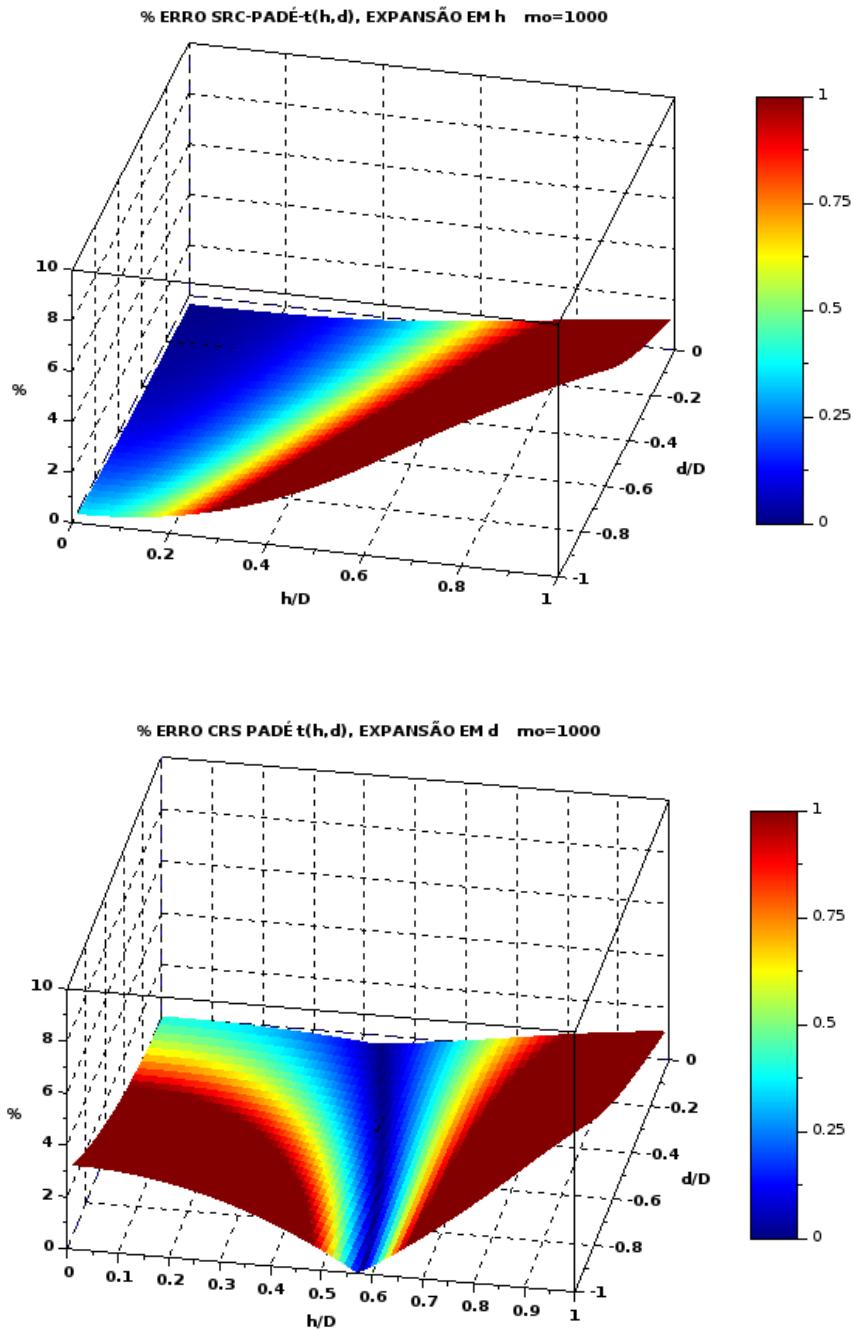
Fonte: Do Autor.

Para a expansão $t(h, d)$ em série de Taylor quarta ordem da superfície SRC, a aproximação de Padé aumentou significativamente a região de convergência da aproximação do SRC.

A superfície gerada pela aproximação de Padé SRC também diverge mais devagar para grandes afastamentos h e distâncias de ponto médio $d = m - m_0$. A vantagem de utilizar as aproximações de Padé dessa forma conciste que essas aproximações são apenas a reorganização dos coeficientes da expansão em série de Taylor original.

A pior superfície de erro relativo absoluto das aproximações de Padé da SRC foi produzida quando $m_0 = 1000m$, porém essa é também superior a aproximação do SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$. A expansão de Padé do SRC em h possui melhor resultado do que a expansão em d , sobretudo para razões h/D , afastamento sobre a profundidade do refletor, menores ou iguais a 0,2 (ver Figura 22).

Figura 22 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.1 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.4, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.

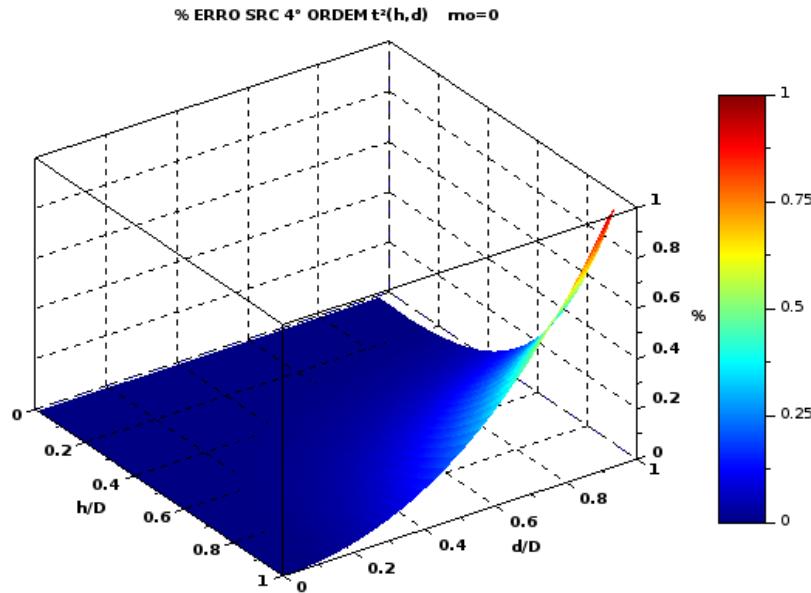


Fonte: Do Autor.

6.3 Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série $t^2(h, d)$

A Figura 23 é erro relativo absoluto da aproximação 5.23 do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$. Na Figura 24 apresentamos as superfícies de erro relativo absoluto das aproximações de Padé [2/2], expansão em h e expansão em d , dadas nas seções 5.2 e 5.5, respectivamente.

Figura 23 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação 5.23 do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{ap}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado na origem.

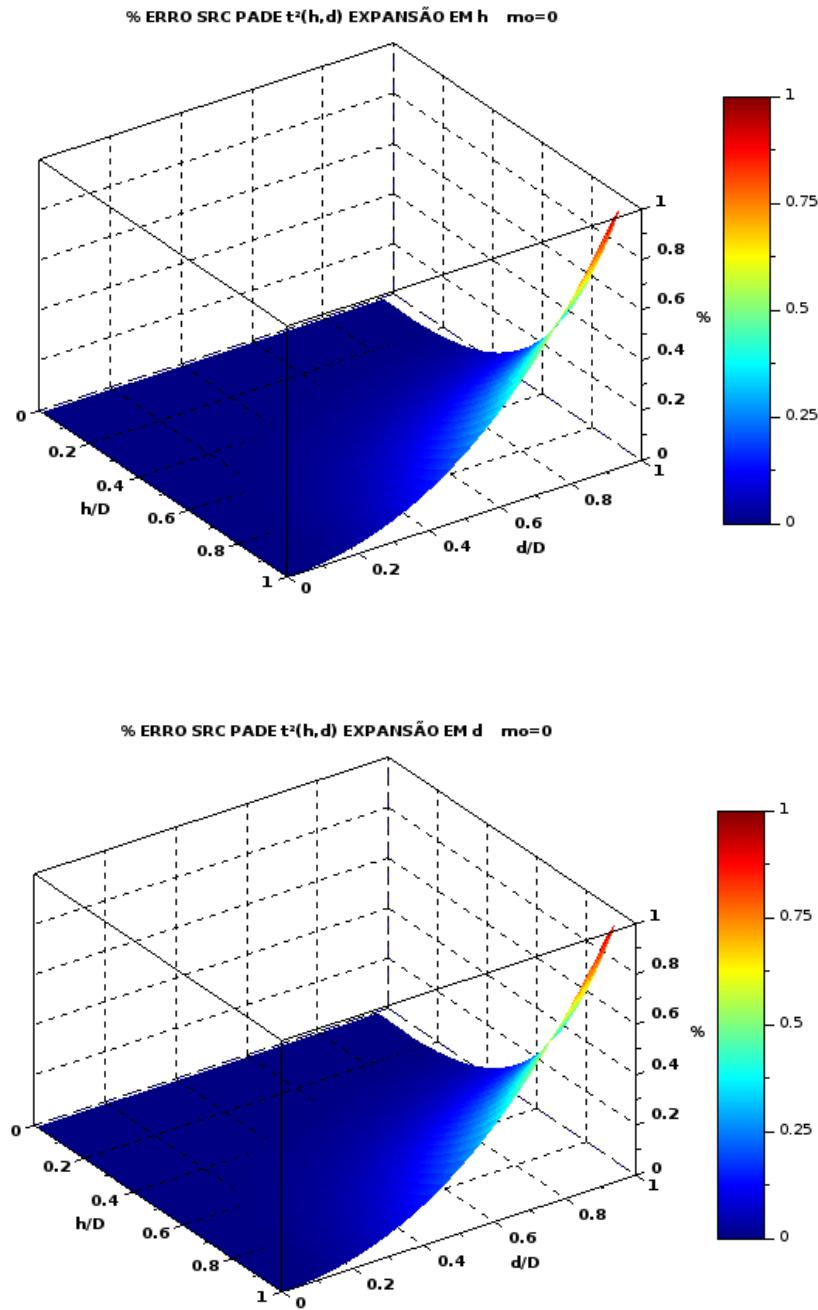


Fonte: Do Autor.

As aproximações SRC quarta ordem e SRC Padé produzem o mesmo resultado, a mesma região de erro mínimo e o mesmo comportamento assintótico para grandes separações entre os ponto médios (razão d/D); basta comparar as Figuras 23 e 24.

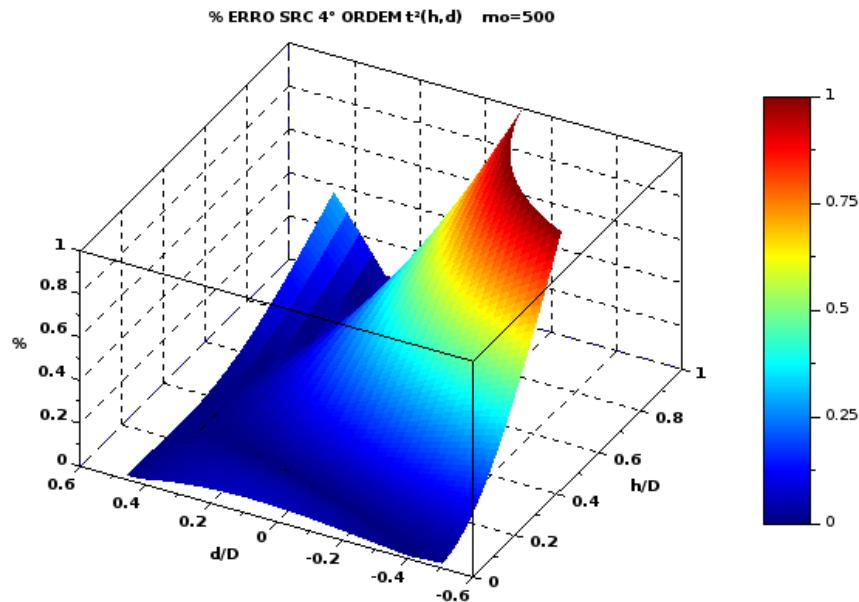
refazendo as superfícies de erro relativo absoluto para duas posições de m_0 , 500m e 1000m: As superfícies de erro relativo absoluto das aproximações SRC quarta ordem para $t^2(h, d)$ e SRC Padé expansão em h (Figura 25), divergem para razões h/D tendendo para 1, quando $m_0 = 500m$; a aproximação de Padé da SRC com expansão em d diverge mais suavemente para grandes afastamentos (Figura 27). Quando $m_0 = 1000m$, as aproximações divergem muito rapidamente, para pequenas variações da razão h/D (Figuras 28 e 27).

Figura 24 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t^2(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t^2(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado está localizado na origem.



Fonte: Do Autor.

Figura 25 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.



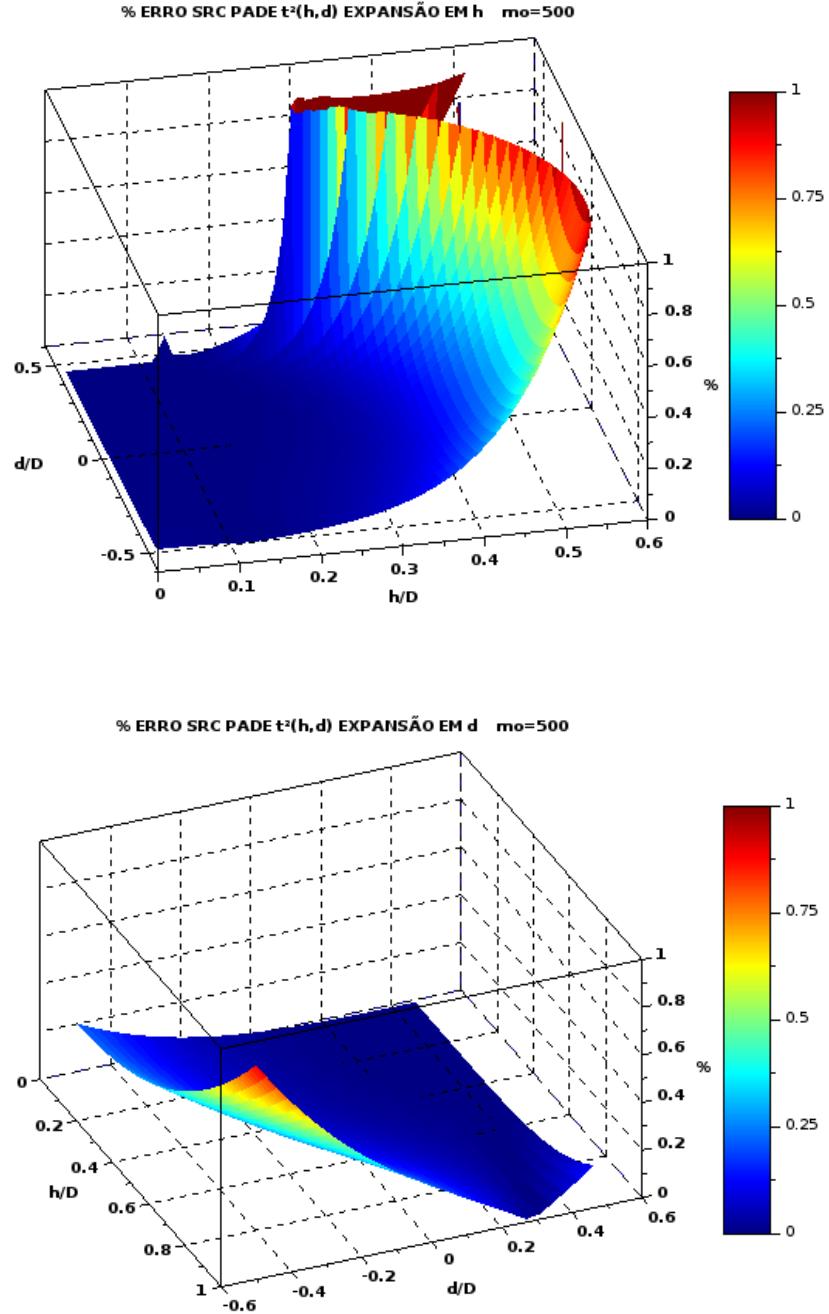
Fonte: Do Autor.

Escolhendo $m_0 = 500m$ a aproximação do SRC quarta ordem passa a divergir muito mais rápido para razões h/D maiores que 0.2 da mesma forma que a aproximação do SRC hiperbólico. O mesmo ocorre com a aproximação de Padé do SRC expansão em h .

A aproximação de Padé do SRC com expansão em d é a que produz a maior região de erro mínimo, sendo inclusive melhor que a aproximação do SRC hiperbólico.

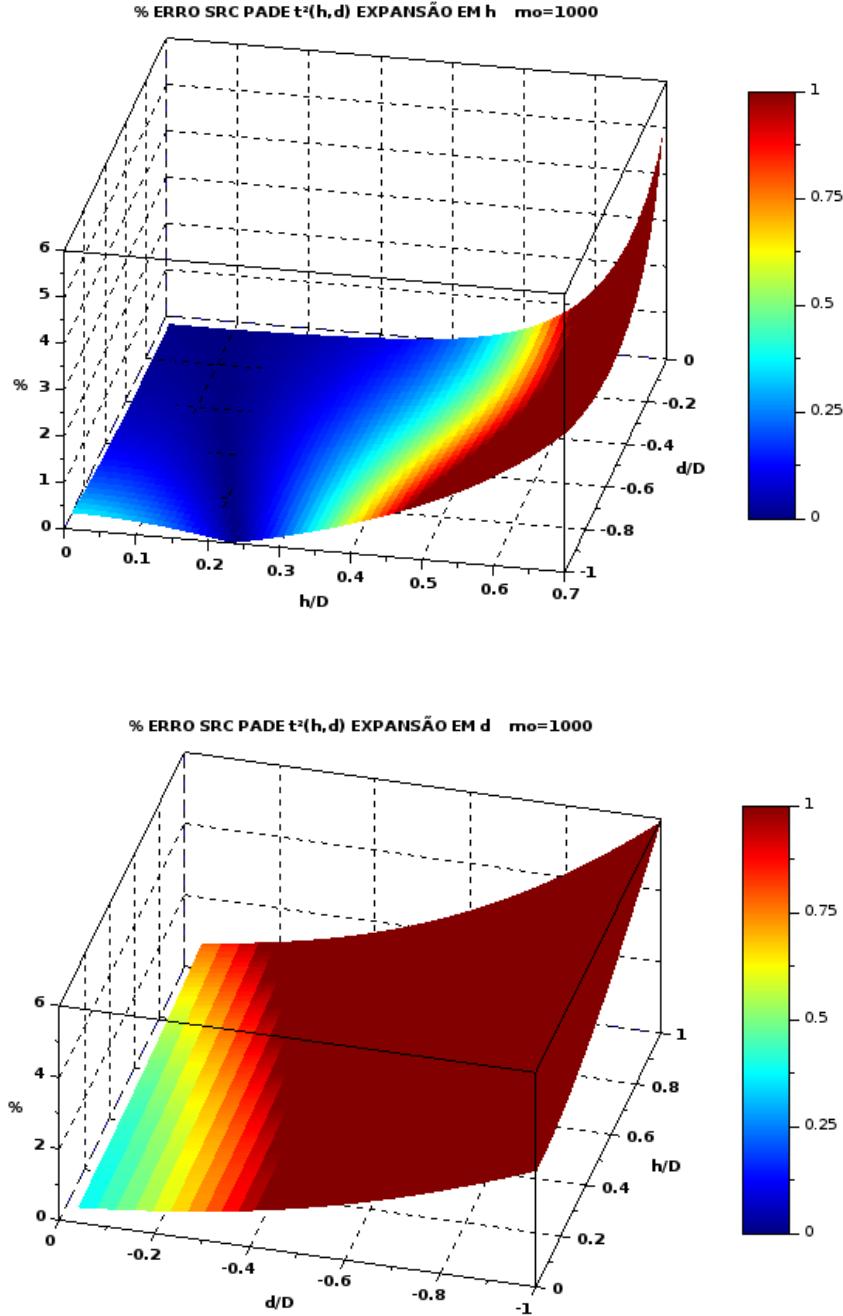
O mesmo não ocorre ao escolhermos $m_0 = 100m$, as aproximações divergem a partir de razões h/D maiores que 0.2, sendo a aproximação de Padé SRC com expansão em d a que produz o pior resultado. Apesar disso as aproximações de Padé produzem resultado superior a aproximação do SRC (ver Figura 16).

Figura 26 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.



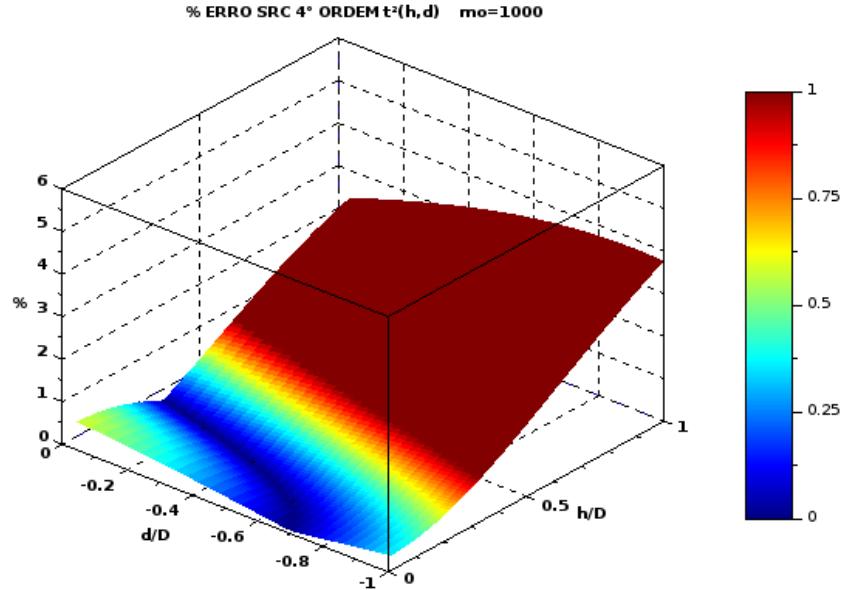
Fonte: Do Autor.

Figura 27 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.2 e aproximação de Padé da SRC para $t(h, d)$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.5, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.



Fonte: Do Autor.

Figura 28 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.23 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.



Fonte: Do Autor.

6.4 Aproximação de Padé do SRC obtida da expansão em série quarta ordem $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$

A Figura 29 é o erro relativo absoluto da aproximação 5.21 do SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$ desenvolvida por (HöCHT, 2002). As aproximações de Padé [2/2], expansão em h e expansão em d , Figura 30, são dadas nas seções 5.3 e 5.6, respectivamente.

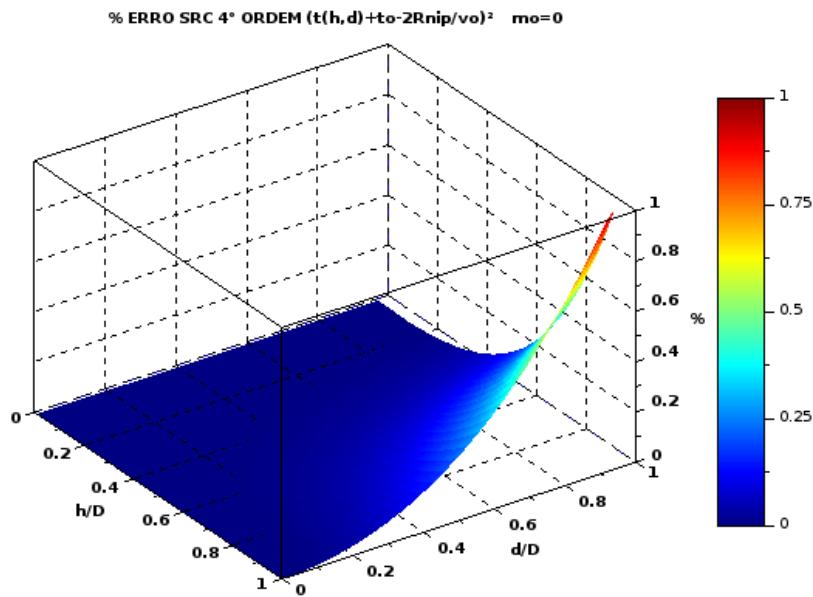
O erro relativo absoluto da aproximação do SRC quarta ordem de (HöCHT, 2002) é semelhante ao erro da aproximação de Padé do SRC. Ou seja, para a expansão em série de Taylor da superfície SRC, $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, a aproximação de Padé não resulta em melhora na acurácia da aproximação original.

O mesmo ocorre para a escolha de $m_0 = 500m$, as aproximações do SRC quarta ordem e aproximação de Padé do SRC, expansão em h , produzem a mesma superfície de erro relativo absoluto. A aproximação de Padé SRC, com expansão em d apresenta a pior acurácia das três aproximações divergindo ligeiramente para d/D tentendo a -0.5.

Ao escolher $m_0 = 1000m$ o erro relativo absoluto aumenta para as três aproximações,

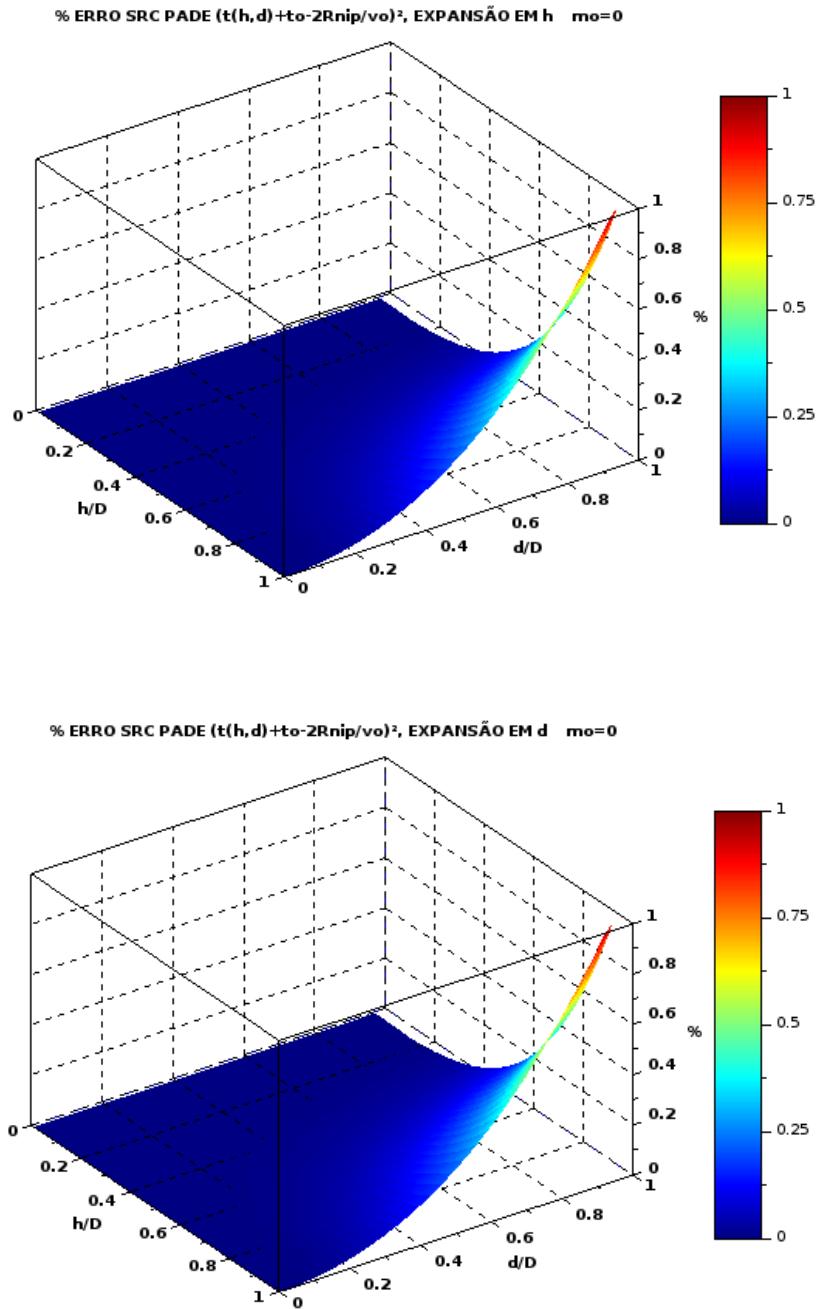
porém a aproximação de Padé SRC, com expansão em d produz a pior das três superfícies de erro relativo absoluto divergindo rapidamente para d/D tendendo para -1.

Figura 29 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 está localizado na origem.



Fonte: Do Autor.

Figura 30 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 está localizado na origem.

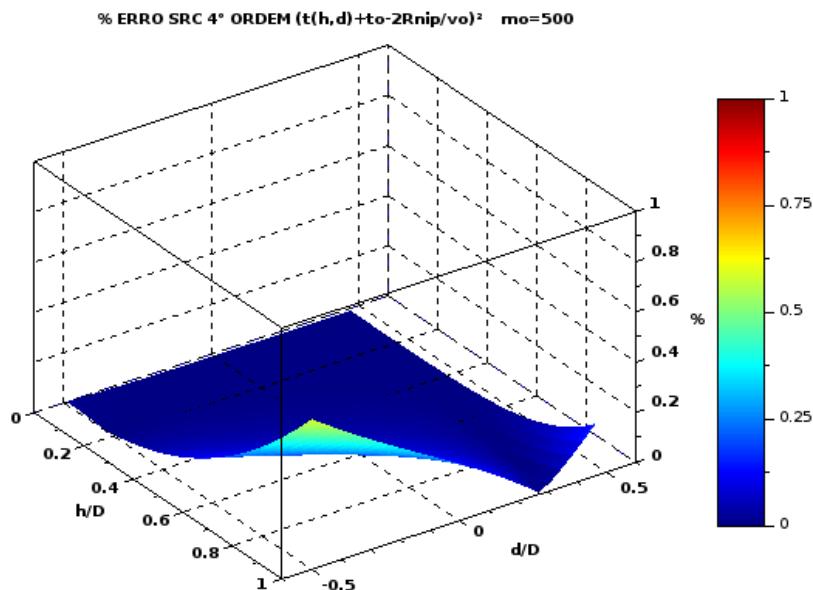


Fonte: Do Autor.

refazendo as superfícies de erro absoluto relativo para duas posições de m_0 , 500m e 1000m: Para $m_0 = 500m$, o erro relativo absoluto das aproximações SRC quarta ordem

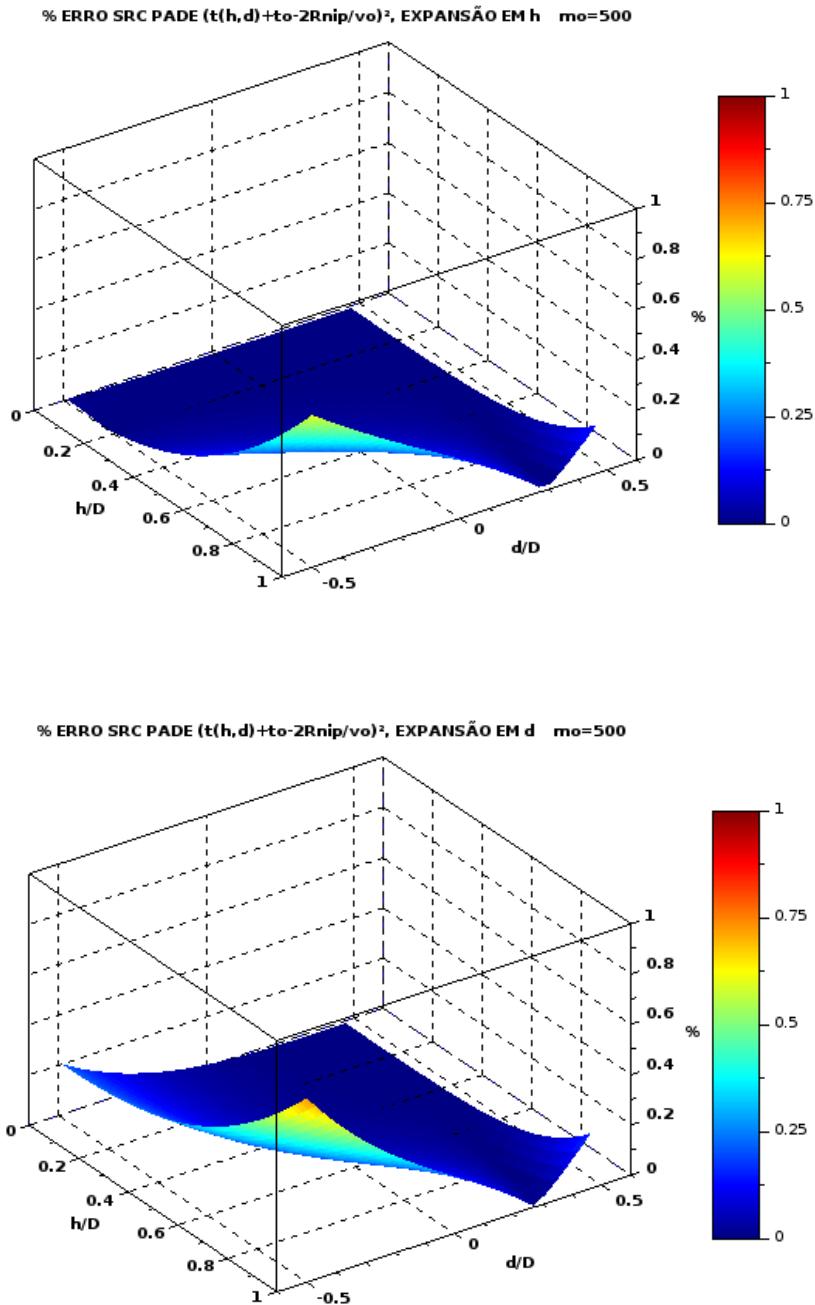
para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$ e SRC-Padé expansão em h e expansão em d é semelhante (Figuras 31-??), apesar de a aproximação de Padé da SRC com expansão em d divergir um pouco mais quando a razão d/D tende a -0.5. Quando $m_0 = 100m$, as aproximações SRC quarta ordem para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$ e SRC-Padé expansão em h apresentam resultados semelhantes (Figuras 33 e 34); Todavia, a expansão em d do SRC-Padé diverge para pequenas variações da razão d/D (Figura ??).

Figura 31 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.



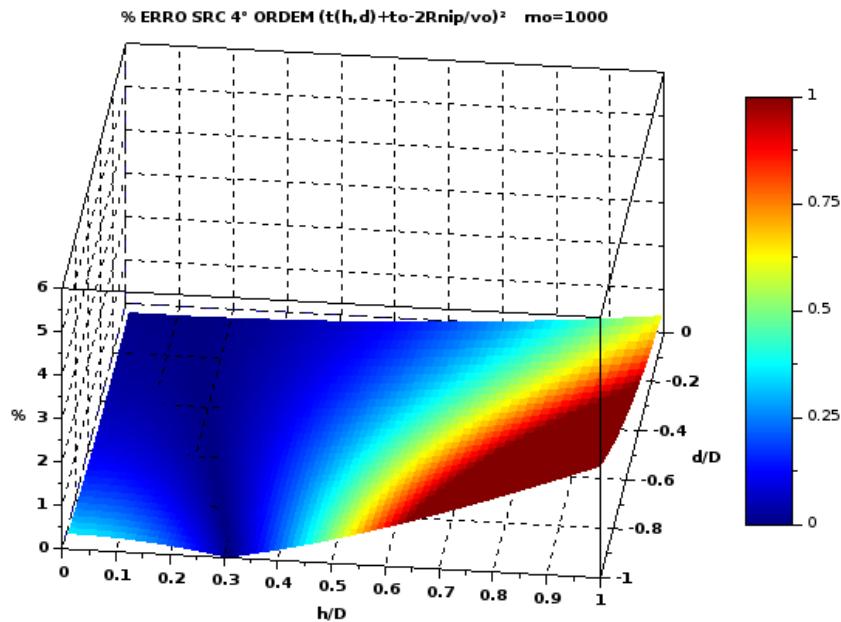
Fonte: Do Autor.

Figura 32 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 500m.



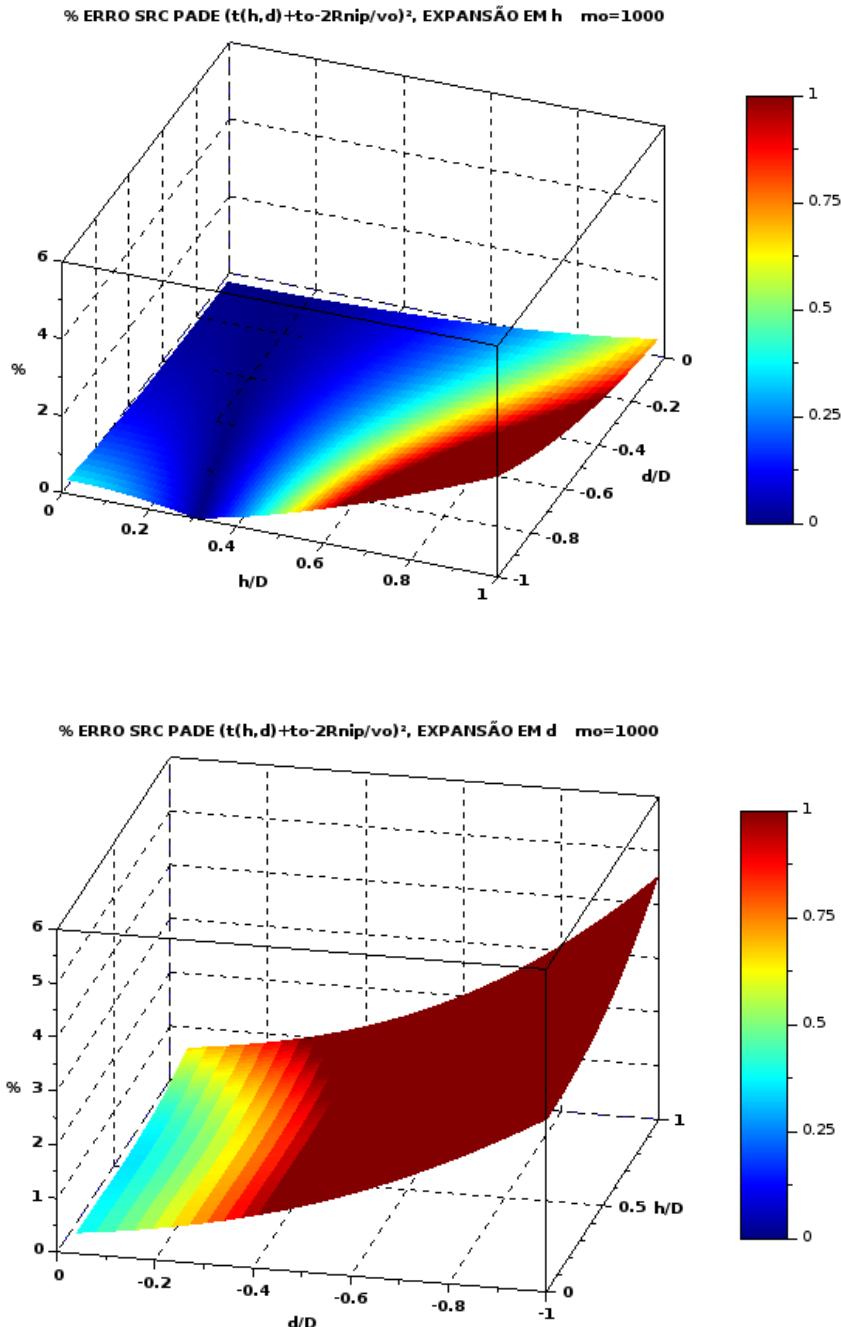
Fonte: Do Autor.

Figura 33 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) da aproximação SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, para o refletor circular. O erro relativo absoluto é produzido a partir da Equação 6.1: A aproximação $t_{aprox}(h, d)$ utilizada é a Equação 5.34 e a Equação de referência $\Psi(h, d)$ é a expressão analítica do tempo de trânsito para o modelo do refletor circular 2.52. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.



Fonte: Do Autor.

Figura 34 – Amplitude do Erro relativo absoluto (%) das aproximações (de cima para baixo): aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em h desenvolvida na Seção 5.3 e aproximação de Padé da SRC para $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$, expansão em d desenvolvida na Seção 5.6, para o refletor circular. O ponto médio central m_0 é localizado em 1000m.



Fonte: Do Autor.

7 TESTE NUMÉRICO DA EXPANSÃO $t^2(h, d)$ DO SRC QUARTA ORDEM

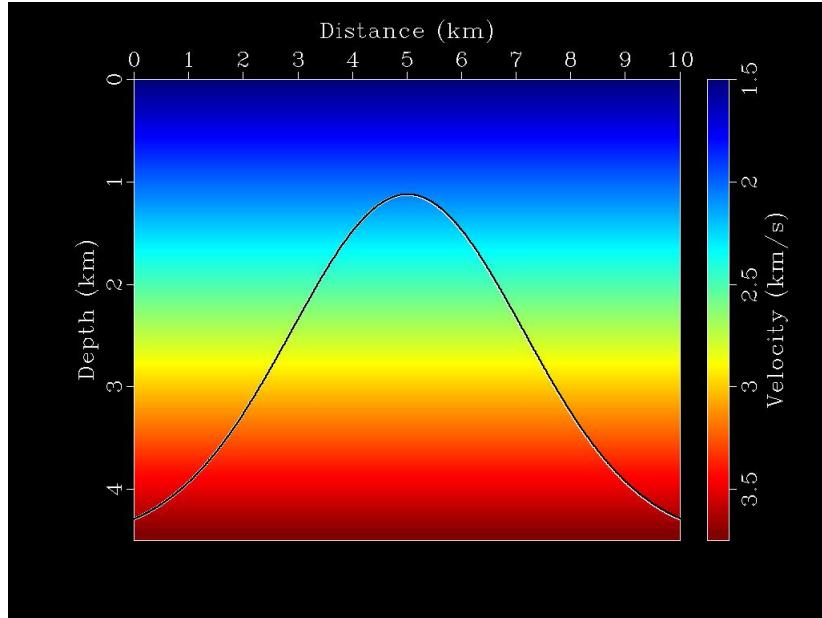
Neste Capítulo realizaremos um experimento numérico com um algoritmo de otimização por mínimos quadrados utilizando as aproximações do SRC hiperbólico, SRC não hiperbólico e SRC quarta ordem. Nosso objetivo é produzir o melhor ajuste possível da superfície SRC aproximada em relação a uma superfície SRC extraída a partir dos dados de uma aquisição sísmica simulada de um modelo de um refletor gaussiano. Utilizaremos os programas de modelagem (*sfkirmod*) e inversão (*sflsfit*) disponibilizados através da plataforma MADAGASCAR¹. A metodologia utilizada:

1. A superfície SRC $\Psi(h, d)$ é gerada através da modelagem Kirchhoff dos dados sísmicos de reflexão, a partir do modelo do refletor gaussiano em que a velocidade varia linearmente com a profundidade (Figura 35). O gradiente de variação de velocidade vertical no modelo é igual a 0,5; e a velocidade inicial é 1,5km/s. O programa responsável pela modelagem, SFKIRMOD, gera um cubo de dados já organizados em famílias de ponto médio comum (Figura 36). Os parâmetros do levantamento simulado são: frequência pico do pulso sísmico é 10 Hz, 161 receptores espaçados de 25m, 401 fontes espaçadas de 25m e 1001 amostras com um intervalo de amostragem no tempo de 4ms somando no total 4s de levantamento.
2. A superfície SRC extraída dos dados modelados é utilizada para ajustar as aproximações da superfície SRC através da otimização por mínimos quadrados. O programa SFLSFIT tem como entrada a diferença entre a superfície SRC modelada e a superfície SRC aproximada (resíduo) e os coeficientes da aproximação SRC a serem ajustados. A saída é um novo valor dos coeficientes da superfície SRC aproximada, utilizando esses novos coeficientes é gerada uma nova superfície SRC aproximada. O processo se repete até que o resíduo seja mínimo ou que o máximo de iterações seja atingido.

Após a otimização dos coeficientes da aproximação da SRC, é produzida as superfícies de erro relativo. Essa superfície é produzida através do valor absoluto da diferença entre a superfície de reflexão comum extraída dos dados modelados e a superfície aproximada utilizando os coeficientes otimizados através do método dos mínimos quadrados. Essa diferença representa o quanto a superfície aproximada difere da superfície de reflexão modelada.

¹ Os programas *sfkirmod* e *sflsfit* foram desenvolvidos e disponibilizados para uso livre por Sergey Fomel no site [ww.ahay.org](http://www.ahay.org).

Figura 35 – Refletor gaussiano com centro em 5Km imerso em um meio de variação linear do gradiente de velocidade, a velocidade varia de 1,5Km a 3,5Km.



Fonte: Adaptado de (FOMEL; KAZINNIK, 2013).

A estratégia de otimização conciste em encontrar para um dado experimental, os coeficientes κ_i que minimizem a função erro quadrático $f(\kappa)$, Equação 7.1 (FOMEL; KAZINNIK, 2013):

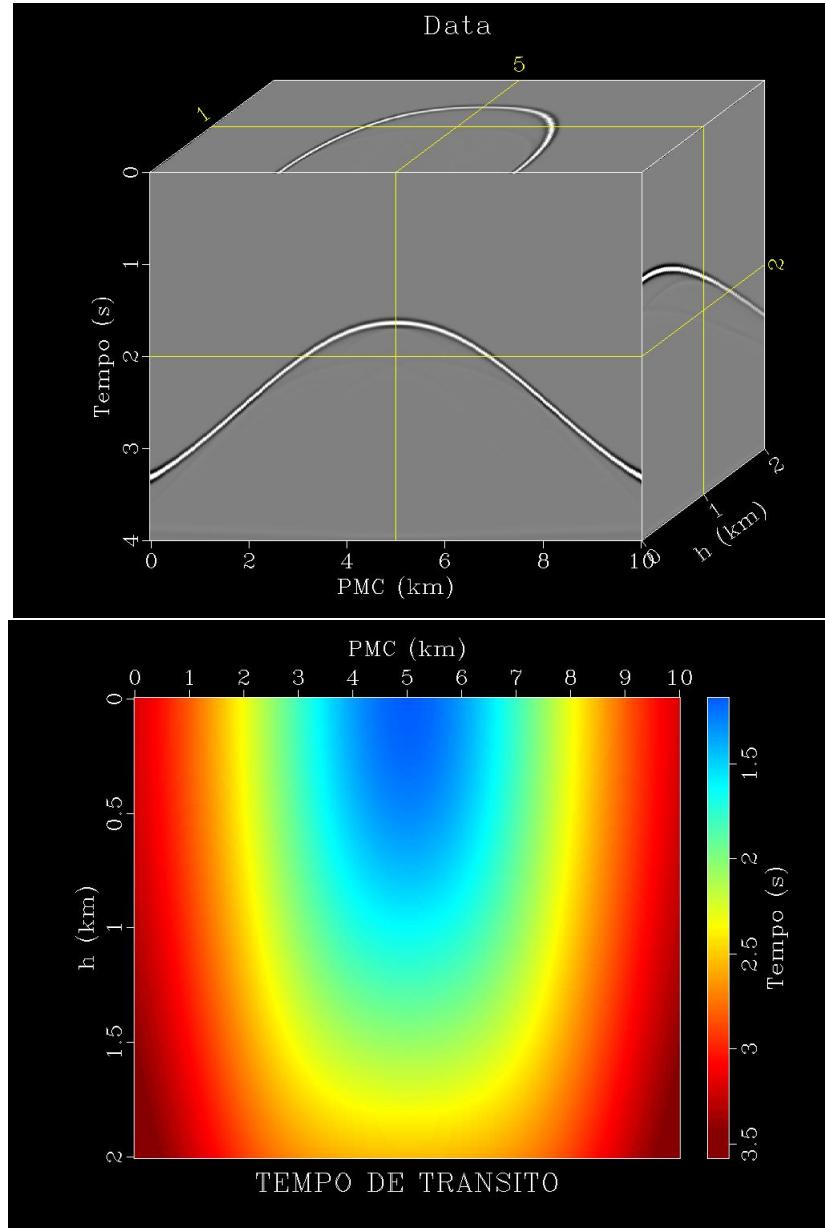
$$f(\kappa) = \frac{1}{2} \sum_d \sum_h |t_{ap}(h, d) - \Psi(h, d)|^2 \quad (7.1)$$

O gradiente da função objeto (FOMEL; KAZINNIK, 2013):

$$\frac{\partial f}{\partial \kappa_i} = \sum_d \sum_h |t_{ap}(h, d) - \Psi(h, d)| \frac{\partial t_{ap}}{\partial \kappa_i} \quad (7.2)$$

A Equação 7.2 descreve o funcionamento do programa SFLSFIT, seu objetivo é encontrar o mínimo da função $f(\kappa)$ através de encontrar os valores de κ_i que tornem a Equação nula. Para tanto, o programa precisa do resíduo, diferença entre a superfície SRC aproximada $t_{ap}(h, d)$ e a superfície SRC modelada $\Psi(h, d)$; e das derivadas parciais da superfície SRC aproximada em relação aos coeficientes.

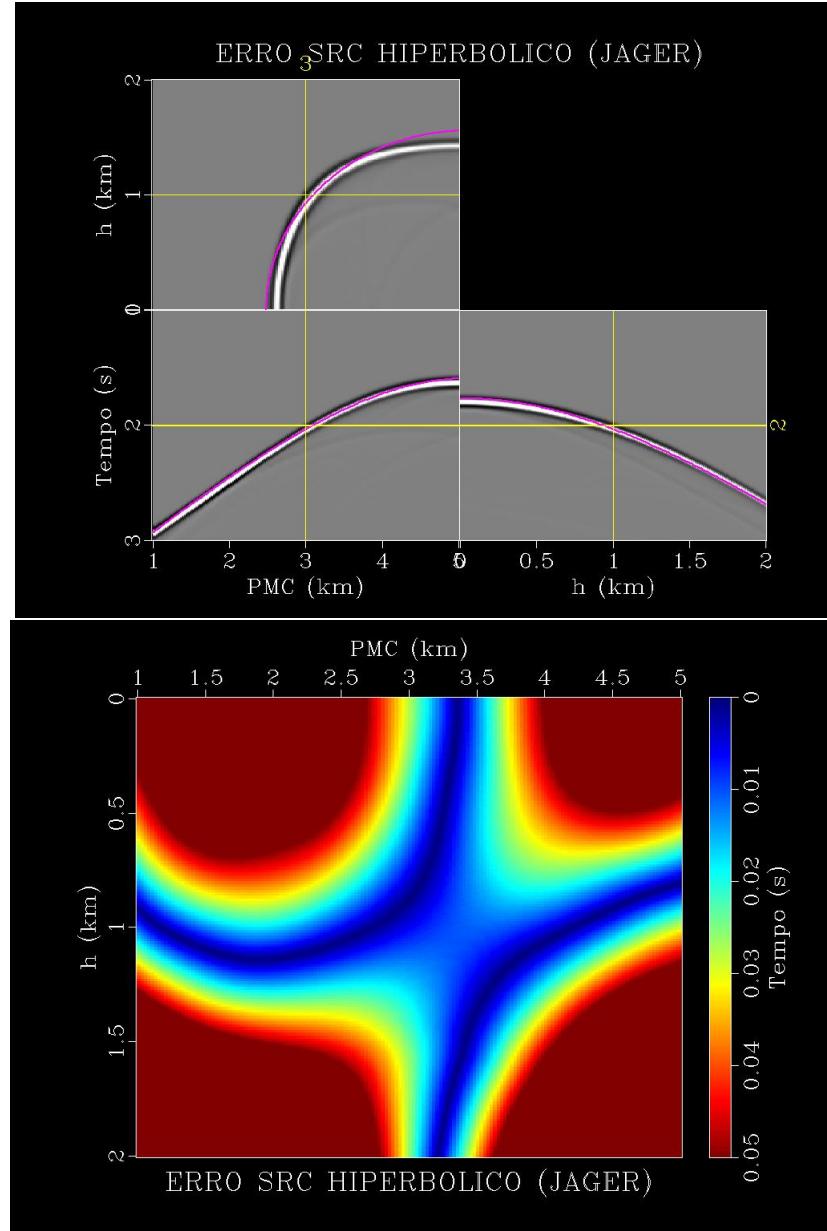
Figura 36 – De cima para baixo: Cubo de dados sísmicos de reflexão e Superfície de Reflexão Comum (SRC) extraída a partir da modelagem de dados sísmicos de reflexão do refletor gaussiano da Figura 35. Os eixos são: h meio afastamento, ponto médio comum (PMC) e tempo de reflexão em segundos.



Fonte: Do Autor.

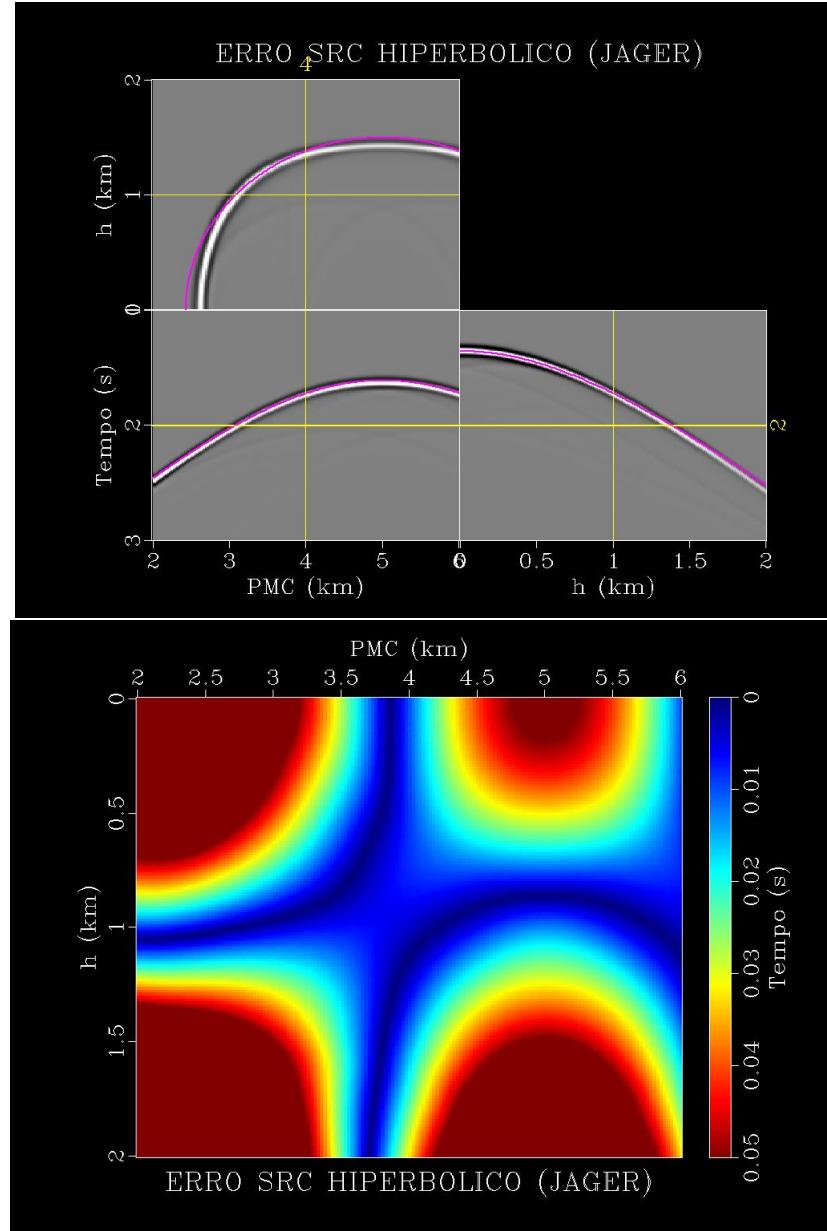
As aberturas em h e $d = m - m_0$ são iguais a 2km, obtivemos as figuras 37-40. Para essas Figuras m_0 foi escolhido igual a 3Km e 4Km, o meio afastamento h varia de 0 a 2Km.

Figura 37 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico (Equação 2.68). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.



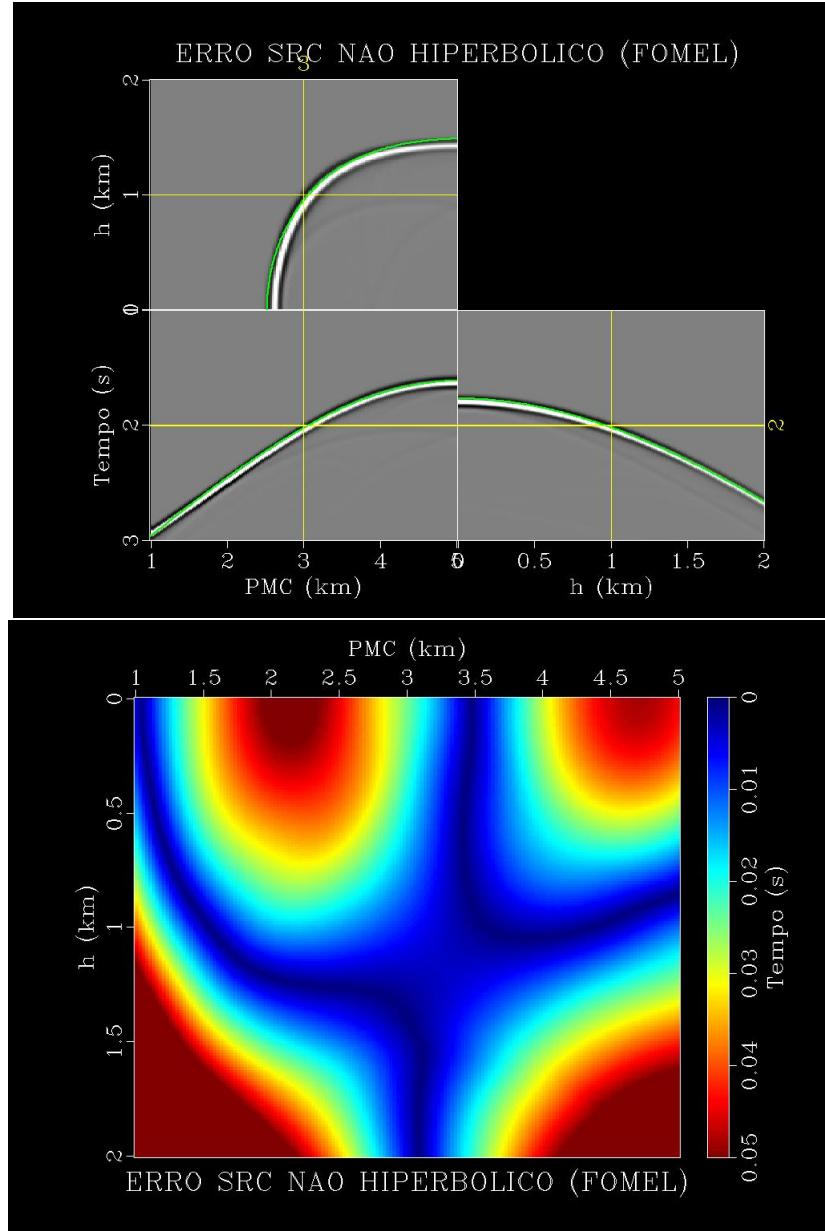
Fonte: Do Autor.

Figura 38 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico (Equação 2.68). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.



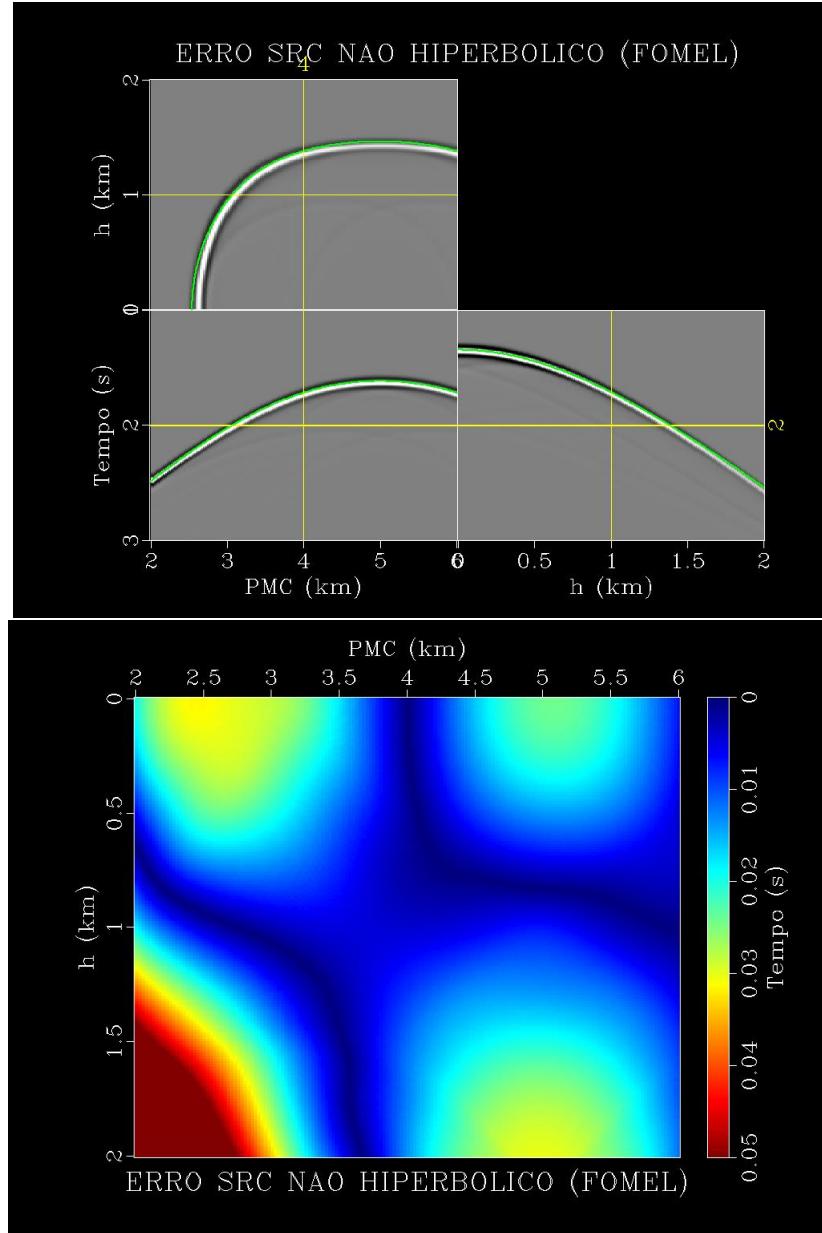
Fonte: Do Autor.

Figura 39 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC não hiperbólico (Equação 2.73). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.



Fonte: Do Autor.

Figura 40 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC hiperbólico de (FOMEL; KAZINNIK, 2013) (Equação 2.73). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.



Fonte: Do Autor.

A aproximação do SRC não hiperbólico é mais acurada do que a aproximação do SRC hiperbólico, pois, como pode ser visto nas Figuras 37-40, a região de erro mínimo em azul aumenta, sobretudo em m_0 localizado em 4Km, mais próximo do ápice do refletor gaussiano, onde há menor influência da variação de velocidade e da inclinação do refletor.

Utilizamos a aproximação do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$, pois o cálculo dos coeficientes das derivadas em 7.2 são facilmente calculados como potências de d e h . Podemos representar a expansão em série de Taylor quarta ordem do tempo de trânsito

para a série $t^2(h, d)$ (Equação 5.23) da seguinte forma:

$$t_{ap}^2(h, d) = \kappa_0 + \kappa_1 d + \kappa_2 d^2 + \kappa_3 h^2 + \kappa_4 d^3 + \kappa_5 dh^2 + \kappa_6 h^2 d^2 + \kappa_7 d^4 + \kappa_8 h^4 \quad (7.3)$$

Onde os coeficientes κ_i representam os coeficientes constantes da Equação 5.23 que dependem apenas dos parâmetros R_N , R_{NIP} , β , t_0 e v_0 . As derivadas da Equação 7.3 em relação ao coeficiente serão:

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_0} = 1 \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_1} = d \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_2} = d^2 \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_3} = h^2 \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_4} = d^3 \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_5} = dh^2 \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_6} = h^2 d^2 \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_7} = d^4 \quad (7.11)$$

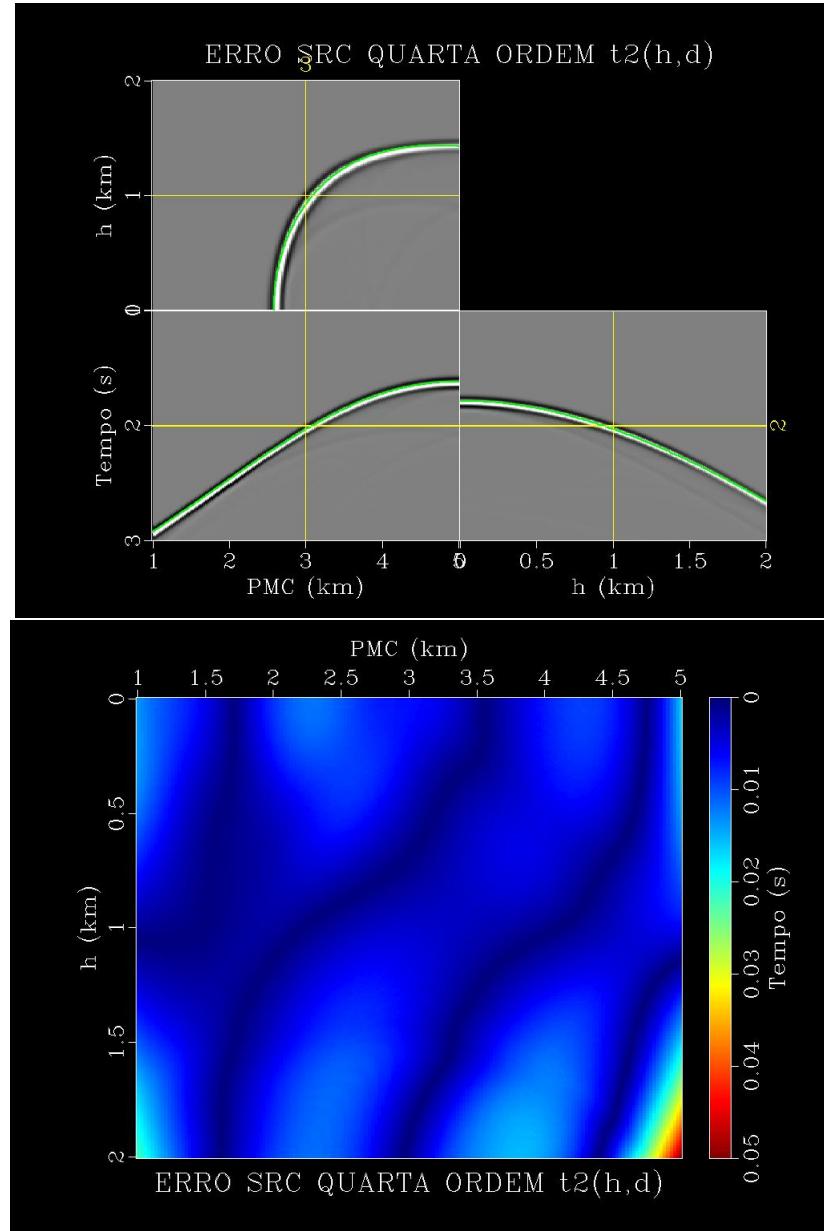
$$\frac{\partial t_{ap}^2(h, d)}{\partial \kappa_8} = h^4 \quad (7.12)$$

Assim podemos realizar a inversão utilizando a Equação 7.2 que depende do erro relativo entre a superfície SRC aproximada e a superfície SRC extraída dos dados e das derivadas parciais da aproximação em relação aos coeficientes. A Equação 7.2 na realidade representa um grupo de 9 Equações, uma para cada coeficiente a ser otimizado. Como as derivadas parciais das aproximações SRC utilizadas são funções contínuas. Poderemos utilizar os métodos de minimização clássicos para encontrar um mínimo local (BJORC,

1996). As aproximações de Padé do SRC não podem ser utilizadas nesse processo de inversão, pois as derivadas parciais dependerão dos próprios coeficientes que se deseja inverter, ou seja, a dependência não será linear.

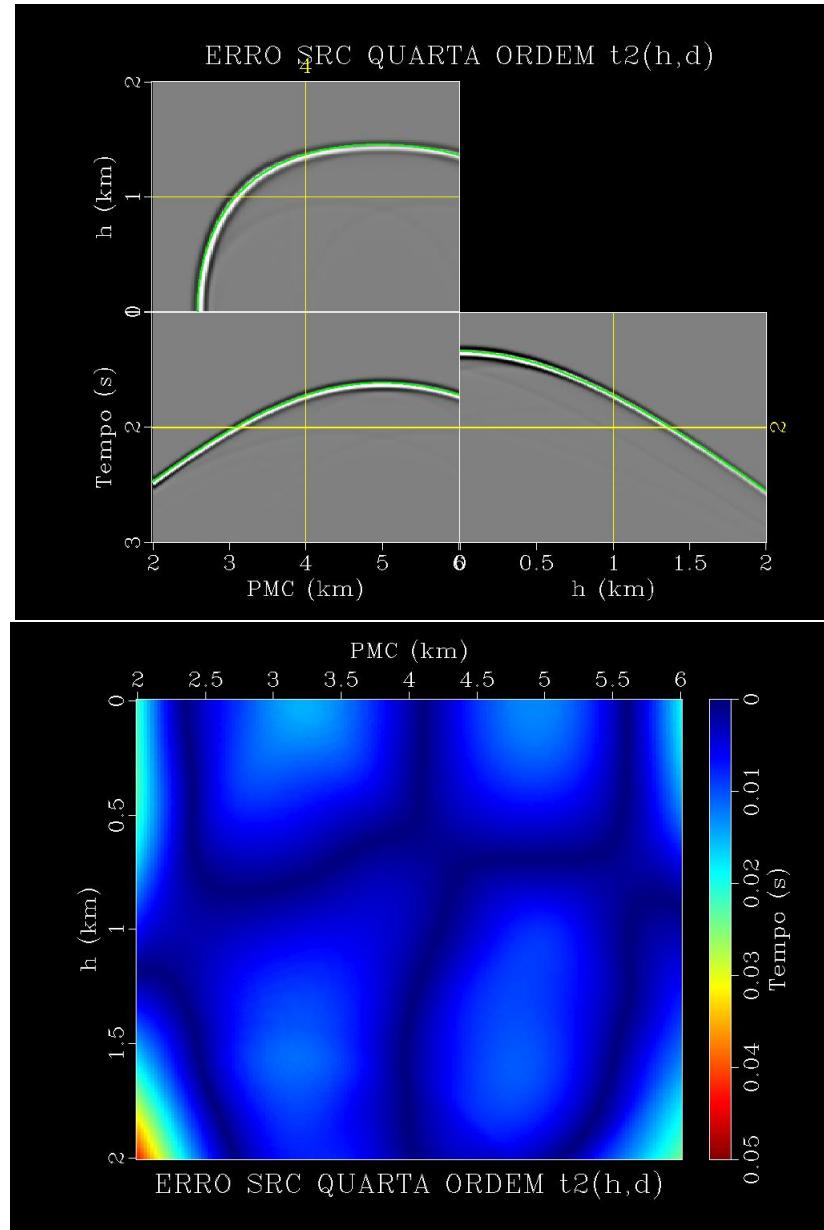
Modificamos o programa de inversão disponibilizados na plataforma MADAGASCAR, inserindo a aproximação na Equação 7.3, e as derivadas nas Equações 7.4-7.12. Assim, produzimos as Figuras 41 e 42.

Figura 41 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC quarta ordem (Equação 5.23). O ponto médio central m_0 é localizado em 3Km.



Fonte: Do Autor.

Figura 42 – De cima para baixo: Curva ajustada (colorida) sobreposta aos dados modelados e superfície de erro relativo da aproximação do SRC quarta ordem (Equação 5.23). O ponto médio central m_0 é localizado em 4Km.



Fonte: Do Autor.

A aproximação do SRC quarta ordem amplia a região de erro mínimo em azul das outras aproximações do SRC hiperbólico e SRC não hiperbólico, produzindo resultados acurados até para aberturas da ordem de 2Km tanto em h , quanto em $d = m - m_0$. O custo computacional, porém é alto. Para realizar a inversão dos métodos SRC hiperbólico e não hiperbólico há apenas 4 coeficientes a inverter, dados pelas Equações 2.70-2.72, e consequentemente 4 derivadas parciais em relação a cada um dos coeficientes.

Porém, na aproximação SRC quarta ordem precisamos inverter 9 coeficientes da Equação 7.3, consequentemente calculamos as 9 derivadas dadas pelas Equações 7.4-7.12.

Além disso Utilizamos o parâmetro de regularização disponível no programa de otimização por mínimos quadrados SFLSFIT, esse regularizador é um número natural adicionado ao operador matricial de inversão de modo a evitar singularidades.

8 RESULTADOS

As aproximações de Padé no domínio do ponto médio comum apresentam como vantagem a necessidade de apenas um parâmetro de aproximação A além da velocidade v do meio e do tempo duplo de trânsito t_0 comuns a todas as aproximações. A é um parâmetro que depende apenas do raio de afastamento nulo é para encontrá-lo basta apenas comparar a Equação 2.33 com a expansão em série de Taylor do tempo de trânsito do modelo (STOVAS; FOMEL, 2010), método utilizado nas Seções 2.4.1, 2.4.2 e 2.5.

A equação generalizada do tempo de trânsito (STOVAS; FOMEL, 2010) depende de 3 parâmetros além de v e t_0 ; estes são os parâmetros A , B e C . Para a determinação dos parâmetros B e C necessitamos so traçamento de um raio de afastamento não nulo, os parâmetros serão dados a partir das Equações 2.42 e 2.43, dependentes do tempo de chegada $t(X) = T$ e $P = dt/dX$ desse raio de afastamento não nulo.

Por isso, as aproximações de Padé para o domínio do ponto médio comum são mais simples de serem utilizadas do que a aproximação generalizada. A acurácia das aproximações de Padé para o domínio do ponto médio comum, descritas genericamente pela Equação 3.10, é aumentada com o auxílio do conceito de frações contínuas, resultando nas Equações 3.14, 3.17 e 3.19.

Nos testes analíticos no domínio do ponto médio comum, a aproximação de Padé é mais robusta do que as aproximações convencionais da literatura: sobretempo normal (Equação 2.34), hipérbole deslocada (Equação 2.17) e aproximação para o modelo TIV (Equação 2.35). As aproximações de Padé apresentam regiões de erro mínimo maiores para os modelos de variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade (Figuras 6 e 7), além divergirem mais suavemente do que as aproximações convencionais.

Como a aproximação de Padé é uma aproximação que surge a partir da Equação generalizada, esta possui erro maior do que a equação original. O erro da Equação generalizada é várias ordens de magnitude inferior (10^{-5}) do que qualquer uma das aproximações para os modelos variação linear da velocidade e variação linear do quadrado da vagarosidade.

Para os testes envolvendo o modelo TIV, a aproximação de Padé e aproximação de Padé com Frações Contínuas também apresentaram melhor resultado do que as aproximações convencionais. A aproximação apresenta erro mínimo em afastamentos até $6000m$, enquanto que a aproximação para o modelo TIV, já começa a divergir a partir de $3000m$. Todavia, a aproximação generalizada ainda é superior a todas as aproximações, inclusive à aproximação de Padé produzida a partir dela. O erro desta aproximação é desprezível até afastamentos de $10000m$ (Afastamento máximo utilizado no Teste).

Assim, a aproximação de Padé para o tempo de trânsito nas famílias de ponto médio comum é uma ferramenta útil por causa da sua simplicidade, dependente apenas do parâmetro A . Essa simplicidade é útil na criação de algorítimos de inversão baseados nessa aproximação com poucos parâmetros para inverter. A aproximação se mostrou robusta até 6000m no meio TIV, produzindo bons resultados para afastamentos 2 vezes superiores ao afastamento em que a aproximação hiperbólica começa a divergir (3000m). No caso, dos modelos de variação linear de velocidade e de variação linear da vagarosidade a aproximação de Padé produz erros bem menores que as aproximações convencionais e suporta grandes afastamentos e gradientes de variação de velocidade.

Os testes analíticos para o método SRC apresentam um importante resultado: O método SRC hiperbólico diverge rapidamente para distâncias entre o ponto médio central m_0 e o ponto médio m , isso significa que as aberturas escolhidas, no domínio do meio afastamento h e no domínio da distância entre os pontos médios, irão influenciar na qualidade da seção empilhada. Ou seja, não haverá diferença significativa em relação a uma seção sísmica empilhada com o método SRC hiperbólico e uma seção empilhada com o SRC quarta ordem para grandes aberturas em h (razão h/D menor que 1) porém pequenas aberturas em d (razão d/D menor que 1); a diferença na qualidade dda seção sísmica empilhada deve surgir quando aumenta-se a abertura de empilhamento no domínio do ponto médio comum $d = m - m_0$.

A aproximação SRC que apresentou o melhor resultado foi a aproximação SRC não hiperbólica, essa aproximação produziu o menor erro para as três posições de m_0 escolhidas, superando a aproximação do SRC hiperbólico, as aproximações SRC quarta ordem e as aproximações de Padé SRC.

A aproximação de Padé aumenta a região de erro mínimo da aproximação SRC quarta ordem para a série $t(h, d)$ como visto na Seção 6.2. A região de erro mínimo em azul aumenta e o erro diminui de várias ordens de magnitude (O erro alcança valores de 20% na aproximação SRC quarta ordem e diminui para menos de 1% para valores das razões h/D iguais a 0.8).

As aproximações de Padé da aproximação do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$ não produzem diferença significativa para $m_0 = 0$. A diferença surge quando $m_0 = 500m$, as aproximações de Padé SRC aumentam a região de erro mínimo em azul para razões h/D até 0.4, a aproximação de Padé em d consegue manter um comportamento assintótico mais suave que as outras duas aproximações. Na posição de $m_0 = 100m$, as três aproximações apresentam o mesmo comportamento assintótico, divergindo rapidamente para razões h/D maiores que 0.4 sendo o pior resultado o da aproximação de Padé SRC expansão em d .

Na Seção 6.4 a aproximação de Padé od SRC quarta ordem para a série $(t(d, h) - t_0 + \frac{2}{v_0} R_{NIP})^2$ não produziu diferença na acurácia da aproximação, a exceção da expansão em d que apresentou o pior resultado para $m_0 = 500m$ e $m_0 = 100m$. No caso desta

Tabela 1 – Descrição das aproximações de tempo de trânsito para o domínio do ponto médio comum, a escala de acurácia vai da melhor(6) para a pior (1) aproximação.

Aproximação	Fonte	Parâmetros	Acurácia
Generalizada	(STOVAS; FOMEL, 2010)	A, B, C, v, t_0	6
Padé frações contínuas	Do Autor	A, v, t_0	5
Padé	Do Autor	A, v, t_0	4
Hipérbole deslocada	(DE BAZELAIRE, 1988)	s, t_0, v	3
Modelo TIV	(ALKHALIFA; TSVANKIN, 1995)	η, t_0, v	2
Sobretempo normal	(DIX, 1955)	v, t_0	1

série do SRC quarta ordem, a aproximação de Padé não produz melhora na qualidade da aproximação.

Assim, para o método SRC as aproximações de Padé apresentam resultados pouco significativos nos testes analíticos a justificar a sua utilização ao invés do SRC quarta ordem, a exceção da aproximação de Padé do SRC para a série $t(h, d)$ onde a aproximação de Padé produziu aumento na região de convergência da superfície SRC. Como sugestão de experimentos futuros, propomos a realização do empilhamento utilizando as diferentes aproximações do SRC com aberturas maiores para o domínio do meio afastamento e do ponto médio.

No teste numérico realizado no Capítulo 7, a aproximação do SRC quarta ordem para a série $t^2(h, d)$ apresenta um aumento da região de convergência em relação ao SRC não hiperbólico e o SRC hiperbólico de, lembrando que o mesmo teste não pôde ser realizado para a aproximação de Padé, pois as derivadas parciais das aproximações de Padé do SRC não possuem uma dependência linear.

Apesar do custo computacional aumentar bastante para a inversão dos 9 coeficientes e cálculo das 9 derivadas parciais da aproximação do SRC quarta ordem utilizando a metodologia no Capítulo 7, os resultados justificam a sua utilização. Propomos portanto, como sugestão para pesquisas futuras, a realização da etapa de empilhamento sobre as superfícies SRC quarta ordem e SRC não hiperbólico, com o mesmo modelo do refletor gaussiano e metodologia de inversão, para comparação entre os resultados da seção empilhada.

9 CONCLUSÃO

As equações do tempo de trânsito utilizando aproximantes de Padé surgem como alternativa para aproximar o tempo de trânsito em grandes afastamentos são mais acuradas do que a aproximação hiperbólica do tempo de trânsito (sobretempo normal). Estas aproximações dependem apenas de um parâmetro além de v e t_0 , o parâmetro A . Este parâmetro é obtido através da expansão em série de Taylor quarta ordem do tempo de trânsito ao longo do raio normal.

As aproximações do SRC utilizando aproximantes de Padé, apesar de não serem mais acuradas do que as aproximações do SRC quarta ordem e SRC não hiperbólico, são mais acuradas que a aproximação hiperbólica do SRC. Demonstramos assim que as aproximações não hiperbólicas do SRC: SRC Padé, SRC não hiperbólico e SRC quarta ordem, estendem a região de convergência da aproximação hiperbólica do SRC para maiores distâncias entre os pontos médios e meio afastamentos.

REFERÊNCIAS

- ALKHALIFA, T. An anisotropic marmousi model. *Stanford Exploration Project*, p. 265–282, 1997.
- ALKHALIFA, T.; TSVANKIN, I. Velocity analysis for transversely isotropic media. *Geophysics*, n. 60, p. 1550–1566, 1995.
- BJORC, A. *numerical methods for least squares problems*. [S.l.]: SIAM, 1996.
- CERVENÝ, V. *Seismic Ray Theory*. [S.l.]: Cambridge:Cambridge University press, 2001.
- DE BAZELAIRE, E. Normal moveout revisited - inhomogeneous media and curved interfaces. *Geophysics*, n. 53, p. 143–157, 1988.
- DIX, C. H. Seismic velocities from seismic measurements. *Geophysics*, n. 20, p. 68–86, 1955.
- FOMEL, S.; KAZINNIK, R. Nonhyperbolic common reflection surface. *Geophysical Prospecting*, v. 61, p. 21–27, 2013.
- GELCHINSKY, B.; BERKOVITCH, A.; KEYDAR, S. Multifocusing homeomorphic imaging – part 1. basic concepts and formulas. *Journal of Applied Geophysics*, n. 42, p. 229–242, 1999a.
- GHOSH, S. G.; KUMAR, P. Divergent and asymptotic nature of the time-offset taner-koehler series in reflection seismics. *Geophysics*, n. 67, p. 1913–1919, 2002.
- GLAESER, G. Reflection on spheres and cylinders of revolution. *Journal for Geometry and Graphics*, n. 3, p. 121–139, 1999.
- HAKE, H.; HELBIG, K.; MESDAG, C. S. Three-term taylor series for x^2-t^2 curves of p- and s-waves over layered transversely isotropic ground. *Geophysical Prospecting*, n. 32, p. 828–850, 1984.
- HUBRAL, P. Computing true amplitude reflections in a laterally inhomogeneous earth. *Geophysics*, n. 48, p. 1051–1062, 1983.
- HÖCHT, G. *Traveltime approximations for 2D and 3D media and kinematic wavefield attributes*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Física Karlsruhe (TH) Genehmigte, 2002.
- JAGER, R. et al. Common reflection surface stack: Image and attributes. *Geophysics*, n. 66, p. 97–109, 2001.
- LANDA, E. et al. Application of multifocusing method for subsurface imaging. *Journal of Applied Geophysics*, n. 42, p. 283–300, 1999.
- LIN, Q. *A Study of long-offset seismic imaging with an upgraded physical modeling system*. Tese (Doutorado) — Faculdade do departamento de geociências da universidade de Houston, 2003.
- MÜLLER, T. Common reflection surface versus nmo/stack and nmo/dmo/stack. In *60th EAGE Annual International Meeting*, 1998.

- NAVARRO, M. C. et al. Os aproximantes de padé. *MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA*, n. 26/27, p. 49–66, junho/dezembro 1999.
- ROMANELLI, A. L. *Análise do sinal sísmico*. [S.l.]: PETROBRAS, 2007.
- SLOTNICK, M. M. *Lessons in seismic computing*. [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists, 1959.
- SONG, H. et al. Long-offset moveout for vti using padé approximation. *Geophysics*, v. 81, n. 5, p. 219–227, 2016.
- STOVAS, A.; FOMEL, S. Generalized nonhyperbolic moveout approximation. *Geophysics*, v. 75, n. 2, p. U9–U18, 2010.
- TANER, M. T.; KOEHLER, F. Velocity spectra – digital computer derivation and applications of velocity functions. *Geophysics*, n. 34, p. 859–881, 1969.
- THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, n. 51, p. 1954–1966, 1986.
- TYGEL, M.; SANTOS, L. T.; SCHLEICHER, J. Multifocus moveout revisited: derivations and alternative expressions. *Applied Geophysics*, n. 42, p. 319–331, 1999.
- VERSTEEG, R. J. Sensitivity of prestack depth migration to the velocity model. *Geophysics*, v. 58, n. 6, p. 873–882, 1993.

APÊNDICES

APÊNDICE A – APROXIMANTES DE PADÉ

Em 1892 foi publicada uma tese na revista parisiense Ann. Sci. Ecole Normale Supérieure sobre um método para aproximar funções através de funções racionais. Estes ‘aproximantes’ receberam o nome de ‘aproximantes de padé’ em homenagem ao autor, o matemático francês Henri Padé. O método de padé surge como alternativa a teoria das perturbações que resulta em uma aproximação polinomial da função desejada através de truncamentos sucessivos de uma série proveniente de uma família de funções polinomiais: Em geral a partir do truncamento de uma série de Taylor.

Existem problemas com essa aproximações polinomiais, pois em geral a convergência é lenta, o raio de convergência além de ser estreito pode não englobar regiões com significado físico. Para tanto, o método de padé apresenta várias vantagens: convergem mais rapidamente do que a série de Taylor e se estendem a regiões muito além da definida pelo raio de convergência da série de Taylor. Os aproximantes de padé surgem através da própria série de Taylor e sendo funções racionais trazem muito mais informação sobre a função aproximada do que a série de Taylor original. Se diz que os aproximantes de padé são uma forma multilinear dos aproximantes de Taylor, pode ser demonstrado que a aproximação de Taylor é um caso particular do método de padé.

Segundo (NAVARRO et al., 1999) os aproximantes de padé são funções racionais, ou seja, quocientes de dois polinômios, que representam a expansão. Esses aproximantes são caracterizados por dois inteiros positivos L e M, graus do numerador e denominador, respectivamente, da função racional, e são representados pela notação:

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}, \quad (\text{A.1})$$

Onde:

$$L, M \geq 0$$

Os polinômios $P_L(x)$ e $Q_M(x)$ são definidos:

$$P_L(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Lx^L \quad (\text{A.2})$$

e

$$Q_M(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M \quad (\text{A.3})$$

É tomado, sem perda de generalidade, $q_0 = 1$. De modo que o polinômio se expressa por (NAVARRO et al., 1999):

$$Q_M(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M \quad (\text{A.4})$$

A condição de existência para os aproximantes de padé estabelece que os coeficientes e podem ser determinados a partir das peças de informação contidas na expansão em série de Taylor da função desejada, ou seja, a partir dos n coeficientes da série. Esta é dada por:

$$f(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}) \quad (\text{A.5})$$

A.5 garante que $f(x)$ e o aproximante de padé $\left[\frac{P_L(x)}{Q_M(x)}\right]$ diferem apenas por termos da ordem x^{L+M+1} (NAVARRO et al., 1999). A partir desta condição é construído um sistema de equações lineares algébricas que permite a determinação dos coeficientes p_i e q_j a partir de f_n . A condição de existência pode ser reescrita (NAVARRO et al., 1999):

$$P_L(x) = f(x)Q_M(x) + O(x^{L+M+1}) \quad (\text{A.6})$$

ou,

$$p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Lx^L = (f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots)(1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M) + O(x^{L+M+1}) \quad (\text{A.7})$$

Desenvolvendo o lado direito da expressão até termos de ordem x^{L+M} e comparando as potências de x:

$$\begin{aligned} p_0 &= f_0 \\ p_1 &= f_1 + f_0q_1 \\ p_2 &= f_2 + f_1q_1 + f_0q_2 \\ &\vdots \\ p_l &= f_l + f_{l-1}q_1 + \dots + f_0q_l \\ 0 &= f_{l+1} + f_lq_1 + \dots + f_{l-M+1}q_M \\ 0 &= f_{l+2} + f_{l+1}q_1 + \dots + f_{l-M+2}q_M \\ &\vdots \\ 0 &= f_{l+M} + f_{l+M-1}q_1 + \dots + f_lq_M \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

com $f_n \equiv 0$ se $n < 0$, e $q_j \equiv 0$ se $j > M$

O sistema A.8 de $L + M + 1$ equações determina os coeficientes dos polinômios $P_L(x)$ e $Q_M(x)$ do aproximante de Padé, em termos dos coeficientes da expansão original. A série de Taylor original deve conter no mínimo $L + M + 1$ coeficientes. (NAVARRO et al., 1999)

APÊNDICE B – GENERALIZAÇÃO DO APROXIMANTE DE PADÉ [2/2]
PARA UMA SÉRIE NA FORMA $t(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6)$

Generalizaremos a equação para o aproximante de padé [2/2] para uma expansão em série de Taylor na forma:

$$t^2(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6) \quad (\text{B.1})$$

Retomando a condição de existência do aproximante de Padé em A.7, e utilizando a série de Taylor em B.1:

$$(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = (\lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + \dots) (q_0 + q_1 x + q_2 x^2) \quad (\text{B.2})$$

Escolhendo-se $q_0 = 1$ sem perda de generalidade, desprezando termos de ordem superior a x^4 . Então:

$$(p_0 + p_1 x + p_2 x^2) = \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + \lambda_0 q_1 x + \lambda_1 q_1 x^3 + \lambda_2 q_1 x^4 + \lambda_0 q_2 x^2 + \lambda_1 q_2 x^4 + \dots$$

Organizando as igualdades a partir das potencias de x:

$$x^0 : p_0 = \lambda_0 \quad (\text{B.3})$$

$$x^1 : p_1 = \lambda_0 q_1 \quad (\text{B.4})$$

$$x^2 : p_2 = \lambda_1 + \lambda_0 q_2 \quad (\text{B.5})$$

$$x^3 : 0 = \lambda_1 q_1 \quad (\text{B.6})$$

$$x^4 : 0 = \lambda_2 q_1 + \lambda_1 q_2 \quad (\text{B.7})$$

Dessas expressões surge que:

$$q_1 = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$p_1 = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$q_2 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{B.10})$$

$$p_2 = \lambda_1 - \lambda_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{B.11})$$

Substituindo os coeficientes q 's e p 's em B.1 e após algumas simplificações algébricas:

$$[2/2] = \zeta_1 + \frac{x^2 \zeta_2}{1 + \zeta_3 x^2} \quad (\text{B.12})$$

Onde:

$$\zeta_1 = \lambda_0 \quad (\text{B.13})$$

$$\zeta_2 = \lambda_1 \quad (\text{B.14})$$

$$\zeta_3 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \quad (\text{B.15})$$

B.12 é a generalização do aproximante de Padé [2/2]: De modo que para obtermos o aproximante de Padé [2/2] de uma série de Taylor que possa ser expressa na forma $t^2(x) \approx \lambda_0 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^4 + O(x^6)$, basta substituir os valores dos coeficientes λ 's da série de Taylor em B.13-B.15, e depois substituir os coeficientes ζ 's em B.12.

APÊNDICE C – GENERALIZAÇÃO DO APROXIMANTE DE PADÉ [2/2]

PARA UMA SÉRIE NA FORMA: $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$

Para realizar a expansão de Padé [2/2] em d ao invés de h , nas expansões em série de Taylor quarta ordem desenvolvidas por (HöCHT, 2002), generalizaremos a expressão para o Padé [2/2] para uma série de Taylor na forma $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$. Rearranjando as séries de Taylor quarta ordem na forma desejada, os coeficientes do aproximante de Padé serão obtidos por comparação entre a série de Taylor aproximada e a série de Taylor genérica.

O aproximante de Padé [2/2] é dado pela razão de dois polinômios $p(d) = p_0 + p_1 d + p_2 d^2$ e $q(d) = q_0 + q_1 d + q_2 d^2$, como explicado no apêndice A em A.1.

$$[2/2] = \frac{p_0 + p_1 d + p_2 d^2}{q_0 + q_1 d + q_2 d^2} \quad (\text{C.1})$$

Da condição de existência dos aproximantes de Padé escrita na forma A.7, utilizando a série de Taylor $t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4$ no lugar de $f(x) \approx f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots$, e escolhendo-se $q_0 = 1$ sem perda de generalidade:

$$(p_0 + p_1 d + p_2 d^2) = (t(d) \approx \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4)(1 + q_1 d + q_2 d^2) \quad (\text{C.2})$$

Expandindo o produto do lado direito.

$$\begin{aligned} (p_0 + p_1 d + p_2 d^2) &= \lambda_0 + \lambda_1 d + \lambda_2 d^2 + \lambda_3 d^3 + \lambda_4 d^4 \\ &\quad + \lambda_0 q_1 d + \lambda_1 q_1 d^2 + \lambda_2 q_1 d^3 + \lambda_3 q_1 d^4 + \dots \\ &\quad + \lambda_0 q_2 d^2 + \lambda_1 q_2 d^3 + \lambda_2 q_2 d^4 + \dots \end{aligned}$$

Isolando de acordo com as potências de d .

$$d^0 : p_0 = \lambda_0 \quad (\text{C.3})$$

$$d^1 : p_1 = \lambda_1 + \lambda_0 q_1 \quad (\text{C.4})$$

$$d^2 : p_2 = \lambda_2 + \lambda_1 q_1 + \lambda_0 q_2 \quad (\text{C.5})$$

$$d^3 : 0 = \lambda_3 + \lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1 \quad (\text{C.6})$$

$$d^4 : 0 = \lambda_4 + \lambda_3 q_1 + \lambda_2 q_2 \quad (\text{C.7})$$

Isolando q_2 em C.7.

$$q_2 = \frac{-\lambda_4 - \lambda_3 q_1}{\lambda_2} \quad (\text{C.8})$$

Substituindo C.8 em C.6, obtém-se o valor de q_1 .

$$q_1 = \frac{-\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 \lambda_1}{\lambda_2^2 - \lambda_3 \lambda_1} \quad (\text{C.9})$$

Os coeficientes λ_0 , λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 , são os próprios coeficientes da série de Taylor na qual será realizada a aproximação de Padé. Note que, diferente da expansão em h , na expansão em d , o aproximante de Padé [2/2] é dado implicitamente em C.1; nesse sentido do cálculo dos coeficientes p 's e q 's: A partir de C.9 se obtém o valor de q_1 em função dos coeficientes λ 's da série aproximada. Da mesma forma, o coeficiente q_2 é calculado em função de q_1 e dos coeficientes λ 's, por C.8. Os coeficientes do polinômio $p(d)$, p_0 , p_1 e p_2 são obtidos por C.3-C.5.