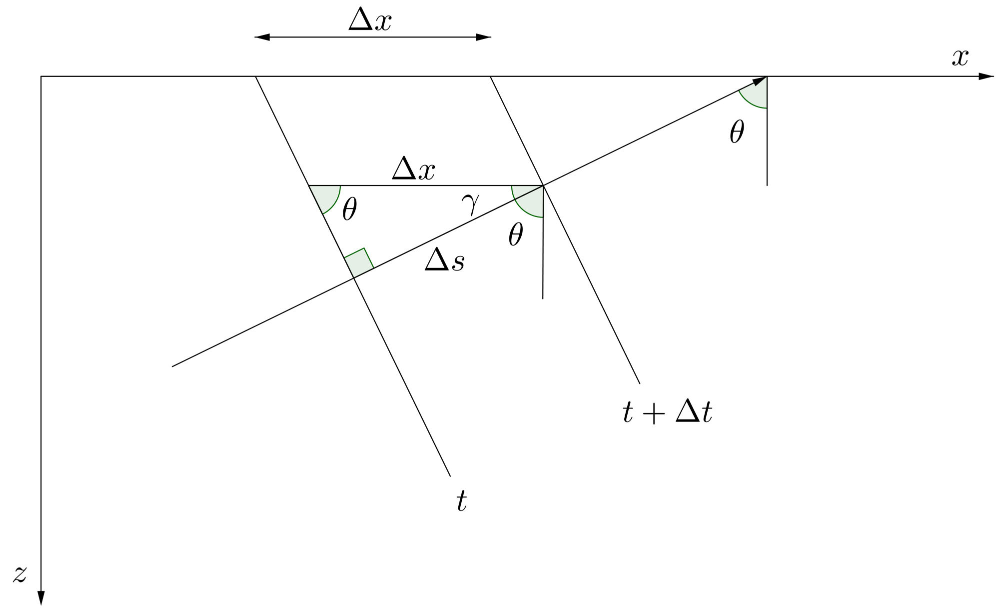
1 A teoria do raio em um modelo de ondas planas: Vagarosidade horizontal

Figura 1: Exemplo esquemático de uma onda plana atingindo a superfície de aquisição formando um ângulo θ com a normal à superfície. Apresentamos dois instantâneos da propagação da onda plana, t e $t + \Delta t$. A velocidade do meio é constante e igual a v.



Fonte: Do Autor.

O espaço Δs percorrido pela onda plana do tempo t a $t + \Delta t$:

$$\Delta s = \Delta x \cos\gamma = \Delta x \sin\theta \tag{1}$$

Pois:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \tag{2}$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \tag{3}$$

$$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\theta\sin\frac{\pi}{2} \tag{4}$$

Por definição $\cos\frac{\pi}{2} = 1$ e $\sin\frac{\pi}{2} = 0$:

$$\cos\gamma = \sin\theta \tag{5}$$

A velocidade da onda plana no meio:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta x \sin\theta}{\Delta t} \tag{6}$$

$$v\Delta t = \Delta x \sin\theta \tag{7}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\sin\theta}{v} = u\sin\theta \equiv p \tag{8}$$

A vagarosidade é definida como $u = 1/v$, p é a chamada vagarosidade horizontal.

2 Sistema centrado no raio: Vagarosidade vertical

$$\eta = u\cos\theta = (u^2 - p^2)^{1/2} \tag{9}$$

Pois:

$$u^2 = p^2 + \eta^2 \tag{10}$$

Notar que no *turning point*, $p = u$ e $\eta = 0$:

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta = \frac{p}{u} \tag{11}$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos\theta = (1 - \sin^2\theta)^{1/2} = (1 - p^2/u^2)^{1/2} = u^{-1}(u^2 - p^2)^{1/2} \tag{12}$$

Da regra da cadeia:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dz} = \frac{p}{u}\frac{u}{(u^2 - p^2)^{1/2}} = \frac{p}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \tag{13}$$

Integrando x em z, de z_1 a z_2:

$$x(z_1, z_2, p) = p\int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \tag{14}$$

Como o raio é simétrico em relação ao *turning point*, a distância total percorrida em x será:

$$x(p) = 2p\int_{0}^{z_p} \frac{dz}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} \tag{15}$$

Expressando a integral acima na forma discreta:

$$x(p) = 2p\sum_i \frac{\Delta z_i}{(u_i^2 - p^2)^{1/2}} \tag{16}$$

Válido sob a condição:

$$u_i > p \tag{17}$$

Definindo $dt = uds$:

$$\frac{dt}{ds} = u \tag{18}$$

Da regra da cadeia:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dz} = u\frac{u}{(u^2 - p^2)^{1/2}} = \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \tag{19}$$

Integrando t em z, de z_1 a z_2:

$$t(z_1, z_2, p) = \int_{z_2}^{z_1} \frac{u^2(z)}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} dz \tag{20}$$

Como o raio é simétrico em relação ao *turning point*, a distância total percorrida em x será:

$$t(p) = 2\int_0^{z_p} \frac{u(z)^2}{(u^2(z) - p^2)^{1/2}} dz \tag{21}$$

Expressando a integral acima na forma discreta:

$$t(p) = 2\sum_i \frac{u_i^2 \Delta z_i}{(u_i^2 - p^2)^{1/2}} \tag{22}$$

Válido também sob a condição da Equação 17. Esta condição existe para garantir que o produto $(u_i^2 - p^2)^{1/2}$ não se torne um número imaginário.

3 Introdução ao domínio τ x p

$$\tau(p) = t(p) - px(p) \tag{23}$$

$$\tau(p) = 2\int_0^{z_p} \left[\frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}} - \frac{p^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}} dz \right] \tag{24}$$

$$\tau(p) = 2\int_0^{z_p} (u^2 - p^2)^{1/2} dz = 2\int_0^{z_p} \eta(z) dz \tag{25}$$

Na forma discreta:

$$\tau(p) = 2\sum_i (u_i^2 - p^2)^{1/2} \Delta z_i = 2\sum_i \eta_i \Delta z_i \tag{26}$$

A Equação 26 também é válida sob a condição da Equação 17. Tomando a derivada da Equação 25 em relação ao parâmetro p:

$$\frac{d\tau}{dp} = \frac{d}{dp} 2\int_0^{z_p} (u^2 - p^2)^{1/2} dz = -2p\int_0^{z_p} \frac{dz}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \tag{27}$$

$$\frac{d\tau}{dp} = -x(p) \tag{28}$$

$$\frac{d^2\tau}{dp^2} = \frac{d}{dp}(-x) = -\frac{dx}{dp} \tag{29}$$