МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Лабораторный практикум

Санкт-Петербург
2021

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целью выполнения лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации» является закрепление теоретического материала и получение практических навыков решения оптимизационных задач.

По результатам выполнения каждой работы студентом оформляется отчет.

Отчет должен содержать титульный лист, соответствующий образцу, размещенному на сайте университета.

Текст отчета в соответствии с требованиями ГОСТ 7.32 – 2017 набирается шрифтом Times New Roman кеглем не менее 12, с выравниванием по ширине; абзацный отступ должен быть одинаковым и равным по всему тексту 1,25 см; строки разделяются полуторным интервалом; поля страницы: верхнее и нижнее – 20 мм, левое – 30 мм, правое – 15 мм; полужирный шрифт применяется только для заголовков разделов; в особых случаях для акцентирования внимания разрешается применять шрифты разной гарнитуры.

Основную часть отчета следует делить на разделы в соответствии с пунктом «Содержание отчета». Разделы должны иметь нумерацию. Заголовки разделов следует печатать полужирным шрифтом, без точки в конце, не подчеркивая.

Страницы отчета следует нумеровать. Титульный лист включают в общую нумерацию страниц, но номер страницы на титульном листе не ставят; номер страницы ставят в центре нижней части листа без точки.

На все рисунки должны быть ссылки в тексте (например, …в соответствии с рисунком 1); рисунки должны иметь номер и могут иметь наименование. На все таблицы должны быть ссылки в тексте; таблицы следует нумеровать сквозной нумерацией, а наименование таблицы помещать над таблицей слева.

Полностью оформленный отчет допускается к защите. Для успешной защиты отчета обучающемуся необходимо уметь аргументированно обосновывать приведенные в отчете утверждения, положения и выводы.

ВВЕДЕНИЕ

Под *оптимизацией* в математике понимают задачу о нахождении экстремума (минимума или максимума) некоторой функции.

Оптимизационные задачи встречаются во многих прикладных областях: при проектировании технических объектов, в задачах управления, экономики, логистики и других. В качестве примера можно привести задачи о поиске наикратчайшего или наискорейшего пути, о поиске формы сосуда с максимальным объемом, о поиске наиболее экономически выгодного управляющего воздействия на объект.

Для поиска строгого математического решения оптимизационной задачи необходимо записать ее формулировку в виде некоторой функции, экстремум которой нужно найти. Эта функция $J = f(\mathbf{x})$ называется *критерием* или *целевой функцией*.

Для решения различных классов оптимизационных задач разработаны различные методы оптимизации [1, 2].

В зависимости от задачи целевая функция J может быть как от одного аргумента, так и от нескольких (в последнем случае $\mathbf{x}$ – вектор). В соответствии с числом аргументов целевой функции выделяют методы *одномерной* и *многомерной* оптимизации. Методы одномерной оптимизации предназначены для поиска экстремума функций одного аргумента, многомерные – для целевой функции нескольких аргументов.

Различают методы *условной* и *безусловной* оптимизации. Методы условной оптимизации применяются для поиска экстремума критерия $J = f(\mathbf{x})$ при дополнительном ограничении, например, в виде равенства $g(\mathbf{x}) = 0$. Методы безусловной оптимизации используют, если ограничения для целевой функции отсутствуют.

Аналитические методы оптимизации позволяют получить решение задачи в символьном виде. Однако многие оптимизационные задачи из-за сложности формулировки критерия не имеют аналитического решения, или поиск этого решения слишком трудоемок. В таких случаях используют аппарат *численных* методов оптимизации, позволяющих найти решение с некоторой точностью ε.

По виду целевой функции и ограничений задачи оптимизации и методы их решения делятся на два класса: *линейного программирования* (целевая функция и ограничения являются линейными функциями) и *нелинейного программирования*.

Исходя из требований к гладкости и наличию у целевой функции частных производных, могут быть выделены: *методы нулевого порядка* (*прямые*), требующие вычислений только целевой функции в точках приближений, *методы первого порядка*, требующие вычисления первых частных производных целевой функции, *методы второго порядка,* требующие вычисления вторых частных производных целевой функции. Методы более высоких порядков применяются редко.

По типу искомого экстремума все методы можно разделить на: *глобальные*, в которых осуществляется поиск глобального экстремума [1], и *локальные,* результатом которых является локальный экстремум целевой функции. Задача локальной оптимизации имеет достаточно простые решения, однако во многих случаях является менее актуальной, чем задача глобальной оптимизации.

Лабораторная работа 1
ОДНОМЕРНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Цель работы: ознакомиться с известными аналитическими и численными методами одномерной локальной оптимизации, получить опыт решения одномерной оптимизационной задачи, приобрести навыки использования математических программных средств для решения одномерных экстремальных задач.

1. Теоретические сведения

Задача одномерной локальной оптимизации заключается в поиске локального экстремума функции от одной переменной:

$$f(x) \rightarrow extr.$$

Для решения задачи локальной одномерной оптимизации могут применяться как аналитические, так и численные методы. Аналитические методы позволяют найти экстремум в символьном виде и с идеальной точностью. В случае если применение аналитических методов является невозможным или нецелесообразным, применяют численные методы оптимизации.

1.1. Аналитическая одномерная оптимизация. Метод Ферма

Основанием оптимизации можно считать лемму Ферма. В соответствии с этой леммой поиск экстремума функции следует производить на множестве стационарных точек этой функции (см. раздел 2 в [1]).

Рассмотрим пример применения метода Ферма для решения одной из классических оптимизационных задач.

Пример 1. *Задача Герона*.

Сказочная формулировка. Серый Волк хочет оживить Ивана-Царевича. Как ему добраться до Ивана кратчайшим путем, набрав по дороге живой воды в реке (рис. 1)?

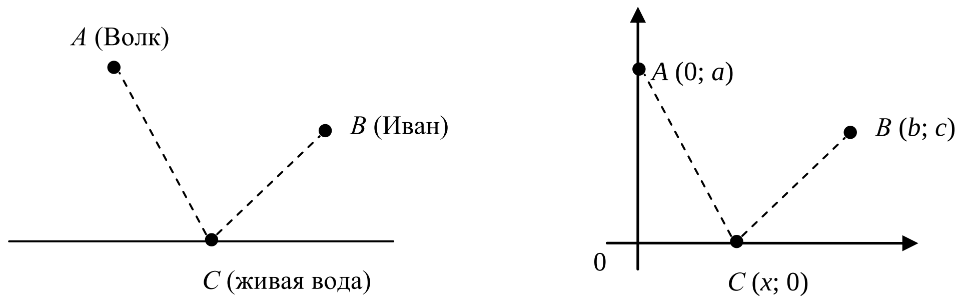

Рис. 1. Задача об Иване-Царевиче и Сером Волке

Другая формулировка задачи. По одну сторону от прямого шоссе расположены две деревни. В каком месте на шоссе нужно построить автобусную остановку, чтобы сумма расстояний от деревень до остановки была наименьшей?

Классическая формулировка. Дана прямая d и две точки A и B, лежащие от нее по одну сторону. Требуется найти такую точку C на прямой d, чтобы сумма расстояний AC и CB была наименьшей.

Аналитическое решение методом Ферма. Введем систему координат так, чтобы максимально упростить решение задачи. Пусть ось абсцисс совпадает с рекой, а ось ординат проходит через точку с Волком, как это показано на рис. 1, справа. По условию задачи, известны координаты точек A (0; a) и B (b; c). Требуется найти абсциссу точки C (x; 0) такую, что сумма длин отрезков AC и CB будет минимальной:

$$J = AC + CB \to \min. \tag{1}$$

Запишем J как функцию неизвестной координаты точки C. Для этого выразим длины отрезков AC и CB через их координаты (по теореме Пифагора):

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2},\ CB = \sqrt{(b-x)^2 + c^2}.$$

Подставляя эти выражения в (1), получим критерий оптимизации:

$$J = L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2} \to \min. \tag{2}$$

Для поиска минимума, согласно лемме Ферма, найдем производную J по x и приравняем результат нулю:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}} = 0. \tag{3}$$

Для поиска корней уравнения (3) перенесем одно из слагаемых в правую часть уравнения и возведем обе части в квадрат:

$$\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{(x-b)^2}{(b-x)^2+c^2}.$$

Теперь возведем обе части равенства в степень –1, тогда получим:

$$\frac{a^2+x^2}{x^2}=\frac{(b-x)^2+c^2}{(x-b)^2}\Rightarrow 1+\frac{a^2}{x^2}=1+\frac{c^2}{(x-b)^2}\Rightarrow \frac{a^2}{x^2}=\frac{c^2}{(x-b)^2}.$$

И извлечем корень из обеих частей уравнения:

$$\frac{a}{x}=\pm\frac{c}{x-b}.$$

Отсюда находим два решения:

$$x_1=\frac{ab}{a+c},\ x_2=\frac{ab}{a-c}.$$

При возведении уравнения (3) в квадрат мы потеряли информацию о знаках слагаемых, поэтому два полученных решения соответствуют двум возможным вариантам сочетания этих знаков. Для того чтобы отбросить «лишнее» решение, можно подставить каждое из них в (3). При подстановке истинного решения уравнение (3) должно обращаться в верное равенство.

Однако в данном случае можно воспользоваться очевидным условием минимума: $x < b$ (см. рис. 1). Этому условию точка x_2 не удовлетворяет, следовательно, кратчайший путь дает решение x_1. Также для отбрасывания «лишнего» решения можно воспользоваться условием положительности x при любых положительных значениях a, b и c.

Подставив x_1 в формулу (2), можно найти длину кратчайшего пути:

$$L(x_1)=\sqrt{a^2+\frac{a^2b^2}{(a+c)^2}}+\sqrt{\left(b-\frac{ab}{(a+c)}\right)^2+c^2}=a\sqrt{\frac{(a+c)^2+b^2}{(a+c)^2}}+\sqrt{c^2+\frac{c^2b^2}{(a+c)^2}}=\sqrt{(a+c)^2+b^2}.$$

Ответ. Серый Волк доберется до Ивана-Царевича кратчайшим путем, если он придет на реку с живой водой в точке

$$C\left(\frac{ab}{a+c};0\right).$$

Приведенные символьные вычисления могут быть выполнены с использованием *Python* следующим образом.

```
import sympy as sp #подключаем библиотеку sympy
a,b,c,x=sp.symbols('a b c x',positive=True) #создаем положительные символьные переменные
L=sp.sqrt(a**2+x**2)+sp.sqrt((b-x)**2+c**2) #задаем целевую функцию
Ld=sp.diff(L,x) #берем производную
xx=sp.solve(Ld,x) #решаем уравнение L'(x)=0
Ld0=Ld.subs(x,xx[0]) #проверка первого решения
print(sp.simplify(Ld0))
Ld1=Ld.subs(x,xx[1]) #проверка второго решения
print(sp.simplify(Ld1))
```

В случае если подходит второе решение, минимальная длина пути может быть найдена следующим образом.

```
Lrez=sp.simplify(L.subs(x,xx[1]))
```

В полученное решение можно подставить значения параметров задачи, например $a = 4$, $b = 6$, $c = 8$.

```
rez=Lrez.subs({a:4,b:6,c:8})
print(rez.evalf())#вычисляем
```

Далее можно построить график целевой функции при заданных параметрах и убедиться, что найденная точка является точкой минимума.

```
sp.plot(sp.sqrt(4**2+x**2)+sp.sqrt((6-x)**2+8**2),(x,0,5))
```

Аналогичные вычисления можно произвести в *MATLAB* с помощью *Symbolic Math Toolbox* (см. пример 1 в описании лабораторной работы 2).

1.2. Численная одномерная оптимизация

В случае если оптимизационная задача не имеет аналитического решения или его поиск является нецелесообразным, применяют численные методы оптимизации.

При решении экстремальной задачи численным методом необходимо задать:

1) целевую функцию $f(x)$ в аналитическом или в табличном виде;
2) интервал поиска экстремума $x \in [A; B]$ или начальную точку поиска x_0;
3) точность поиска экстремума ε.

Численные методы локальной оптимизации позволяют найти локальный экстремум функции $f(x)$ на интервале $x \in [A; B]$ или в окрестности точки x_0 с точностью $\pm\,\varepsilon$.

Численные методы оптимизации являются итерационными, то есть реализуются в виде алгоритмов с циклической структурой. Каждое выполнение тела цикла такого алгоритма называют итерацией.

Наиболее распространенными являются два типа детерминированных одномерных методов: методы исключения интервалов и аппроксимирующие методы (см. раздел 2.1 в [2]).

Рассмотрим пример решения одномерной оптимизационной задачи методом Фибоначчи.

Пример 2. Дана целевая функция

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-1)^2+1} + \sqrt{(3-x)^2+1}.$$

Требуется найти ее минимум методом Фибоначчи с точностью $\varepsilon = 0.05$ на интервале $x \in [0; 3]$.

Начальные установки. Вычислим $y_a = f(a) = 5.5765$, $y_b = f(b) = 6.3983$.

Итерация 1.

Определим: $(b - a)/\varepsilon = 60$, следовательно, $F_n = F_{11} = 89$, $F_{n-1} = F_{10} = 55$.

Рассчитаем координаты точек c и x:

$$c = b - \frac{(b-a)F_{n-1}}{F_n} = 3 - \frac{3 \cdot 55}{89} = 1.1461, x = b - (c - a) = 1.8539.$$

Вычислим $y_c = f(c) = 4.6381$, $y_x = f(x) = 4.9424$.

$n = n - 1 = 10$. Так как $n > 2$, продолжаем выполнять алгоритм.

$y_c < y_x$, поэтому изменяем следующие значения: $b = x = 1.8539$, $x = c = 1.1461$, $c = a + (b - x) = 0.7079$, $y_b = y_x = 4.9424$, $y_x = y_c = 4.6381$, вычислим $y_c = f(c) = 4.7678$, и возвращаемся к шагу 5 алгоритма.

Итерация 2. $n = n - 1 = 9$. Так как $n > 2$, продолжаем выполнять алгоритм.

$y_x < y_b$, поэтому изменяем следующие значения: $a = c = 0.7079$, $c = x = 1.1461$, $x = b - (c - a) = 1.4157$, $y_a = y_c = 4.7678$, $y_c = y_x = 4.6381$, вычислим $y_x = f(x) = 4.6897$, и возвращаемся к шагу 5 алгоритма.

Результаты выполнения всех девяти итераций и число вычислений функции на каждой итерации (N) приведены в табл. 1.

Таблица 1

n	$a, f(a)$	$c, f(c)$	$x, f(x)$	$b, f(b)$	N
11	0 5.5765	1.1461 4.6381	1.8539 4.9424	3 6.3983	4
10	0 5.5765	0.7079 4.7678	1.1461 4.6381	1.8539 4.9424	1
9	0.7079 4.7678	1.1461 4.6381	1.4157 4.6897	1.8539 4.9424	1
8	0.7079 4.7678	0.9775 4.6549	1.1461 4.6381	1.4157 4.6897	1
7	0.9775 4.6549	1.1461 4.6381	1.2472 4.6467	1.4157 4.6897	1
6	0.9775 4.6549	1.0787 4.6400	1.1461 4.6381	1.2472 4.6467	1
5	1.0787 4.6400	1.1461 4.6381	1.1798 4.6394	1.2472 4.6467	1
4	1.0787 4.6400	1.1124 4.6382	1.1461 4.6381	1.1798 4.6394	1
3	1.1124 4.6382	1.1461 4.6381	1.1461 4.6381	1.1798 4.6394	1

Ответ. Минимум функции $f(x)$ достигается при x = 1.1461±0.05. Для расчета потребовалось выполнить 9 итераций метода Фибоначчи и вычислить значение функции в 12 точках.

Графическая иллюстрация выполненных итераций приведена на рис. 2.

Аналитические расчеты показывают, что точка минимума функции $f(x)$ равна 1.13291. Это значение с точностью ε = 0.05 совпадает с полученным с помощью метода Фибоначчи.

Построение интервалов на рис. 2 произведено в *MATLAB* с помощью следующей команды.

```
rectangle('Position',[A,4.62,B-A,0.2*10/n],'LineStyle','--')
```

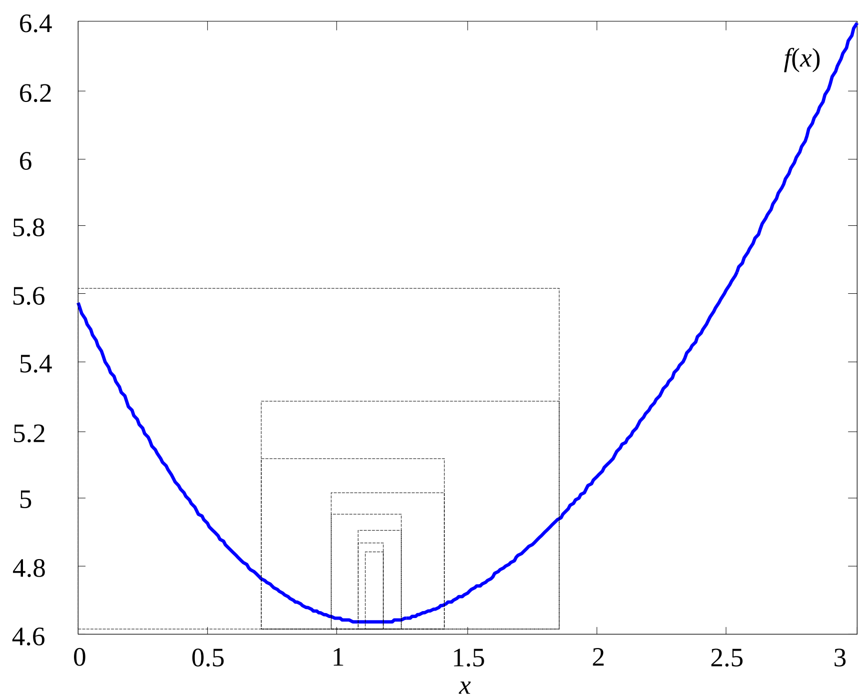

Рис. 2. Итерационный поиск минимума методом Фибоначчи

При реализации алгоритма в *MATLAB* для вычисления значений целевой функции удобно применять так называемые анонимные функции. В отличие от обычных пользовательских функций, создаваемых в отдельном файле, анонимная функция может быть создана в командной строке, внутри сценария или другой функции. Целевая функция для рассматриваемого примера может быть определена так.

```
f=@(x)sqrt(x^2+1)+sqrt((x-1)^2+1)+sqrt((3-x)^2+1)
```

Для построения графиков в *Python* рекомендуется использовать библиотеку *matplotlib*. Построение графика целевой функции с помощью *Python* может быть произведено следующим образом.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# целевая функция
def f(x):
return (x**2+1)**(0.5)+((x-1)**2+1)**(0.5)+((3-x)**2+1)**(0.5)
A=0.0;B=3.0;eps=0.05 # границы поиска и точность
#график
xx=np.arange(A,B,eps)
plt.plot(xx, f(xx))
```

На каждой итерации на график может быть добавлен прямоугольник, обозначающий границы интервала поиска (рис. 2).

```
rect=pat.Rectangle((A,4.62),B-A,0.1*n,fill = False,ls='--')
axes.add_patch (rect)
```

Для этого необходимо подключить библиотеки *matplotlib.patches* и *pylab*.

```
import matplotlib.patches as pat
import pylab
```

Кроме того, необходимо создать переменную для хранения графика.

```
axes = pylab.gca()
```

2. Задание по работе

Требуется решить оптимизационную задачу аналитически и одним из численных методов в соответствии с вариантом с точностью $\varepsilon = 0.01$:

a) методом дихотомии (вариант 1) (см. раздел 2.1.1.1 в [2]);
b) методом золотого сечения (см. раздел 2.1.1.4 в [2]);
c) методом Фибоначчи (см. раздел 2.1.1.3 в [2]);
d) методом дихотомии (вариант 3) (см. раздел 2.1.1.1 в [2]);
e) методом средней точки (см. раздел 2.1.1.2 в [2]);

f) методом парабол (см. раздел 2.1.2.1 в [2]);

g) методом дихотомии (вариант 2) (см. раздел 2.1.1.1 в [2]);

h) методом хорд (см. раздел 2.1.2.2 в [2]);

i) методом Ньютона (см. раздел 2.1.2.3 в [2]).

Численное решение задачи необходимо реализовать в виде программы на языке *MATLAB* или *Python* (по выбору обучающегося) и произвести анализ полученного решения.

Задача А. Серый Волк находится на скошенном лугу в точке A и хочет оживить Ивана-Царевича, находящегося в точке B на нескошенном лугу. Между этими лугами протекает река с живой водой. Скорость Волка при движении по скошенному лугу в 2 раза больше, чем по нескошенному. Волк легко может перепрыгнуть реку в любом месте. Как Волку быстрее всего добраться до Ивана, набрав по дороге живой воды (рис. 3 *а*)?

Задача Б. Серый Волк находится на лугу в точке A и хочет оживить Ивана-Царевича, находящегося на берегу реки с живой водой в точке B. Скорость Волка при движении по лугу в 2 раза меньше, чем при движении по берегу реки. Как Волку быстрее всего добраться до Ивана (рис. 3 *б*)?

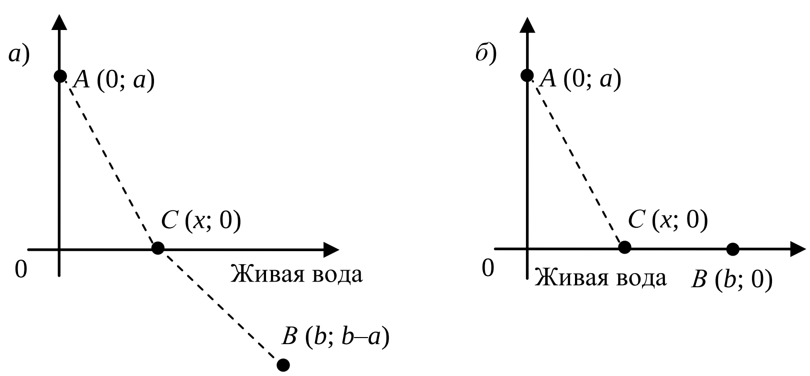

Рис. 3. Поясняющие рисунки к задачам А и Б

Задача В. Дан круг радиуса a. На диаметре AB дана точка E (на расстоянии b от центра), через которую проводится хорда CD. Найдите угол α, при котором площадь четырехугольника $ACBD$ будет максимальна (рис. 4). *Указание*: вспомните, что площадь четырехугольника равна полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними.

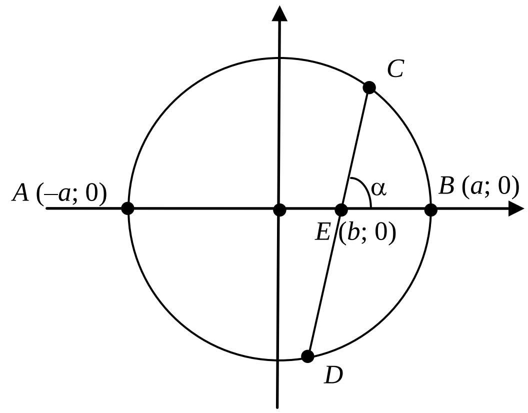

Рис. 4. Поясняющий рисунок к задаче В

Задача Г. Дан шар радиуса a. Требуется найти высоту вписанного в шар конуса, имеющего максимальный объем.

Задача Д. Дан конус радиуса a и высоты b. Требуется найти высоту вписанного в конус цилиндра, имеющего наибольший объем.

3. Порядок выполнения работы

Выполнение работы состоит из двух частей: аналитического решения задачи и решения задачи заданным численным методом с помощью его программной реализации.

При аналитическом решении задачи необходимо:

1) на основании условия задачи вывести целевую функцию;
2) найти стационарную точку функции методом Ферма;
3) проверить, что производная функции в найденной точке равна нулю;
4) по знаку второй производной функции в найденной точке убедиться, что найденная стационарная точка является точкой минимума или максимума;
5) построить полученное оптимальное решение (рис. 3 – 4 с точными координатами); для задач Г и Д – нарисовать вертикальную проекцию фигур.

При программной реализации решения на языке *MATLAB* или *Python* необходимо:

1) пользуясь условием задачи, выбрать интервал поиска экстремума или начальную точку(и);
2) написать скрипт или функцию, реализующую решение задачи заданным численным методом оптимизации;
3) построить график целевой функции и нанести на него найденную с помощью программы точку экстремума;
4) найти разность ответов, полученных при аналитическом и численном решении;
5) вычислить потребовавшееся число итераций и число вычислений функции (и ее производных);
6) на график(и) целевой функции нанести точки (границы интервала), полученные после каждой одномерной оптимизации, и соединить их прямыми линиями или построить прямоугольники (как на рис. 2).

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы.

1. Цель работы.
2. Задание по работе.
3. Описание оптимизационной задачи.

В данном разделе необходимо привести: формулировку задачи, поясняющий рисунок, вывод целевой функции и выбор интервала поиска или начальной точки для численного решения.

4. Аналитическое решение задачи.

В данном разделе необходимо описать поиск стационарной точки методом Ферма и определение вида стационарной точки.

5. Программная реализация решения.

В данном разделе необходимо привести: текст программы с комментариями; графики целевой функции, на которых проиллюстрирован процесс поиска (см. п. 6 в порядке выполнения программной реализации) и найденный экстремум; а также скриншоты с результатами анализа точности и времени выполнения программы.

6. Вывод.

Пример вывода: «В результате выполнения работы было получено аналитическое и численное решение поставленной оптимизационной задачи. Аналитический ответ: …. Для поиска численного решения методом … была разработана программа на языке …. Полученный с помощью программы ответ равен … и с заданной точностью … совпадает с аналитическим. Поиск решения производился на интервале … Программа выполнила … итераций алгоритма, при этом потребовалось произвести … вычислений целевой функции. Объем программы составляет … строк».

5. Контрольные вопросы

1. В каких случаях интервал поиска методом дихотомии на некоторой итерации сокращается более чем в 2 раза и почему?
2. Поясните понятие «золотое соотношение».
3. Является ли условие $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$ при выборе начальных точек для оптимизации методом парабол необходимым?
4. Произведите оценку временной сложности алгоритма в лучшем и худшем случае.
5. Найдите геометрическое решение задачи.
6. Найдите численное решение с помощью функций одномерной оптимизации *MATLAB* или *Python* и сравните его с решением, найденным с помощью вашей программы, по точности и времени. Используйте следующие функции. Для *MATLAB*: *fminbnd* (метод Брента) и *fminsearch* (симплекс-метод Нелдера-Мида). Для *Python*: *scipy.optimize.minimize_scalar* с указанием *method='bounded'* (метод Брента) или *method='golden'* и *scipy.optimize.minimize* с указанием *method='Nelder-Mead'* или *method='BFGS'*.
7. Рассчитайте значение F_n для поиска экстремума методом Фибоначчи с точностью 0.02 на интервале

a) [–1; 2];

a) [0; 5];

b) [–1; 2];

c) [–10; 10];

d) [–6; –1].

8. По трем заданным точкам постройте параболу:

a) (0; 0), (2; 1), (1; 0);

b) (1; 1), (0; 1), (2; 0);

c) (0; 0), (1; 1), (2; 0);

d) (1; 0), (0; 1), (2; 2);

e) (1; 2), (0; 1), (2; 0).

9. Постройте параболу $f(x)$ по трем значениям:

a) $f(0) = 0$; $f'(0) = –1$; $f''(0) = 3$;

b) $f(1) = –1$; $f'(1) = –1$; $f''(1) = –1$;

c) $f(–2) = 1$; $f'(–2) = 2$; $f''(–2) = 0$.

10. Найдите минимум функции аналитически и методом дихотомии с точностью 0.1 на интервале [–4; 4]:

a) $f(x) = x^2 + 5x + 7$;

b) $f(x) = 3x^3 – x^2 – 10x + 7$;

c) $f(x) = 2x^2 – 5x + 1$;

d) $f(x) = x^3 – x^2 – 5x$;

e) $f(x) = 4x^2 + 5x + 1$.

11. Найдите экстремум функции

a) $y = x^2 + 2x + 3$;

b) $y = 6x^3 – 5x^2 + 7$.

12. Найдите наибольшее значение функции

a) $y = x^3 – 3x^2$ на интервале [–0.5; 4];

b) $y = x^3 – 4.5x^2 + 6x$ на интервале [0; 3].

13. Найдите длину интервала, на котором функция $y = –2x^3 + 15x^2 + 12$ возрастает.

14. Дан прямоугольный лист жести размерами $a \times b$. Требуется вырезать около всех его углов одинаковые квадратики так, чтобы после загибания остающихся кромок получилась открытая сверху коробка наибольшей вместимости. Найдите аналитическое выражение для стороны квадратика.
15. Чему равны высота и диаметр цилиндрического ведра объема V, при которых длина сварного шва будет минимальной?
16. Чему равны высота и диаметр цилиндрической консервной банки объема V, при которых длина сварного шва будет минимальной?

6. Варианты заданий

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Задача	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
Метод	a	b	c	d	e	f	g	h	i	a
a	3	2	7	10	12	15	7	6	7	10
b	1	8	3	4	5	6	15	1	2	3

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Задача	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
Метод	b	c	d	e	f	g	h	i	a	b
a	15	5	15	16	5	10	3	9	13	15
b	4	14	6	7	1	2	11	4	5	6

№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Задача	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
Метод	c	d	e	f	g	h	i	a	b	c
a	7	4	15	18	17	6	8	7	9	10
b	3	10	5	6	7	1	5	3	3	4

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Задача	А	Б	В	Г	Д	А	Б	В	Г	Д
Метод	d	e	f	g	h	i	a	b	c	d
a	5	9	14	17	19	8	2	18	10	10
b	1	8	5	6	7	3	6	6	3	4

Лабораторная работа 2
МНОГОМЕРНАЯ ЛОКАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Цель работы: ознакомиться с известными аналитическими и численными методами многомерной локальной безусловной оптимизации, получить опыт решения многомерной оптимизационной задачи, приобрести навыки использования математических программных средств для решения многомерных экстремальных задач.

1. Теоретические сведения

Задача многомерной локальной безусловной оптимизации заключается в поиске локального экстремума функции от нескольких переменных:

$$J = f(x_1, \ldots, x_n) \to extr.$$

Более удобной в ряде случаев является векторная форма записи этой задачи:

$$J = f(\mathbf{x}) \to extr, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ – вектор переменных.

Для решения задачи (1) могут применяться как аналитические, так и численные методы многомерной оптимизации.

1.1. Аналитическая многомерная оптимизация

Аналитический метод решения задач на безусловный экстремум гладких функций в многомерном, как в одномерном, случае опирается на *лемму Ферма* (см. раздел 3.1 в [1]). Вид стационарной точки можно определить исходя из знакоопределенности матрицы Гессе в этой точке (см. там же).

Рассмотрим пример поиска аналитического решения классической многомерной оптимизационной задачи, получившей свое название в честь швейцарского математика XIX века Якоба Штейнера.

Пример 1. *Задача Штейнера*.

Требуется связать три деревни *A*, *B* и *C* дорогами так, чтобы их общая протяженность была минимальной (рис. 1).

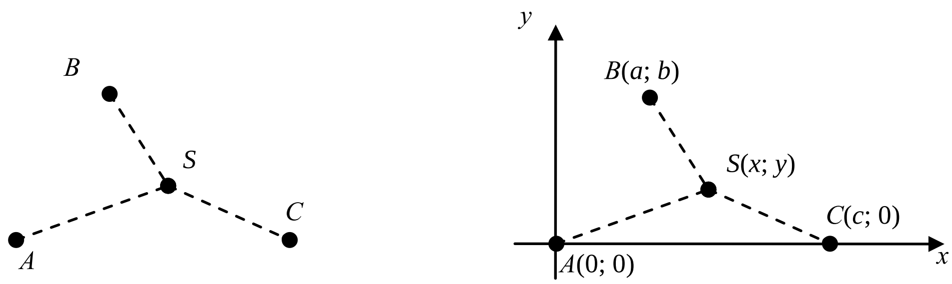

Рис. 1. Задача Штейнера

Задача была предложена Пьером Ферма и получила свое название по имени исследовавшего ее немецкого геометра Якоба Штейнера (1796 – 1863).

Формулировка Ферма. Для заданных трех точек найти такую четвертую, что если из неё провести три отрезка в данные точки, то сумма этих трех отрезков даст наименьшую величину.

Аналитическое решение. Введем систему координат так, чтобы максимально упростить решение. Расположим начало координат в точке A, а ось абсцисс проведем через точку C, как это показано на рис. 1, справа. По условию задачи, известны координаты точек A (0; 0), B (a; b) и C (c; 0). Пусть $a = 1$, $b= 3$ и $c = 5$. Требуется найти координаты точки S (x; y) такие, что сумма длин отрезков AS, CS и BS будет минимальной:

$$J = AS + CS + BS \to \min. \tag{2}$$

Запишем J как функцию неизвестных координат точки S. Для этого выразим длины отрезков AS, CS и BS через их координаты (по теореме Пифагора):

$$AS = \sqrt{x^2 + y^2},\ BS = \sqrt{(x-a)^2 + (b-y)^2},\ CS = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Подставляя эти выражения в (2), получим критерий оптимизации:

$$J = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-a)^2 + (b-y)^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} \to \min. \tag{3}$$

Для поиска стационарных точек функции найдем ее частные производные и, приравняв каждую производную нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(b-y)^2}} + \dfrac{x-c}{\sqrt{(c-x)^2+y^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(b-y)^2}} + \dfrac{y}{\sqrt{(c-x)^2+y^2}} = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы уравнений при $a = 1$, $b= 3$ и $c = 5$ воспользуемся возможностями *Symbolic Math Toolbox* пакета *MATLAB*.

```
syms x y a b c real %объявление символьных переменных
fxy=sqrt(x^2+y^2)+sqrt((x-a)^2+(b-y)^2)+sqrt((c-x)^2+y^2);%цел. ф-я
fxy=subs(fxy,{a,b,c},{1,3,5});
dfx=diff(fxy,x);dfy=diff(fxy,y);%частные производные
sp=solve(dfx==0,dfy==0,x,y);%решение системы уравнений
xp=simplify(sp.x),yp=simplify(sp.y)%координаты стационарной точки
```

Аналогичные возможности предоставляет библиотека *sympy* языка *Python*.

В результате получим стационарную точку функции J с координатами:

$$(x;y) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{9-\sqrt{3}}{6}\right).$$

Определим вид полученной стационарной точки. Для этого построим матрицу Гессе и рассчитаем ее значение в стационарной точке.

```
H=hessian(fxy,{x,y});%Гессиан
H=double(subs(H,{x,y},{xp,yp}));
```

Получим:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.7929 & -0.0860 \\ -0.0860 & 0.5636 \end{bmatrix}.$$

Гессиан симметричен и все его угловые миноры положительны:

$$0.7929 > 0, \det \mathbf{H} > 0.$$

Таким образом, согласно критерию Сильвестра [1], матрица **H** в стационарной точке положительно определена, следовательно, стационарная точка является точкой минимума.

Ответ. При $a = 1$, $b = 3$ и $c = 5$ для построения оптимальной сети дорог нужно каждую из деревень A (0; 0), B (1; 3) и C (5; 0) соединить прямой дорогой с точкой

$$S\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{9-\sqrt{3}}{6}\right)\approx(1.366;1.211).$$

Схема полученной оптимальной сети дорог на плоскости xy изображена на рис. 2.

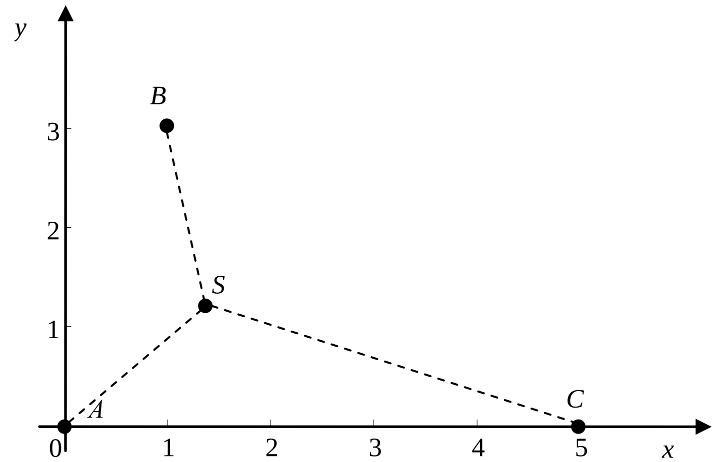

Рис. 2. Решение задачи Штейнера

Точка, являющаяся решением задачи Штейнера, то есть точка плоскости, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна, называется *точкой Ферма* или иногда – *точкой Торричелли*.

1.2. Численная многомерная оптимизация

В случае если аналитический поиск решения многомерной экстремальной задачи невозможен или нецелесообразен, применяют численные методы многомерной оптимизации. При этом при постановке задачи наряду с критерием оптимизации (1) необходимо указать точность поиска экстремума и начальную точку или границы поиска.

Рассмотрим пример поиска численного решения задачи Штейнера методом покоординатного спуска (об этом и других методах см. раздел 2.2.1 в [2]).

Пример 2. Требуется найти численное решение задачи Штейнера из примера 1 при $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$ с точностью $\varepsilon = 0.01$.

Численное решение методом покоординатного спуска. Запишем целевую функцию (3) с учетом заданных значений a = 1, b= 3 и c = 5:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(3-y)^2}+\sqrt{(5-x)^2+y^2}\to\min.$$

Определим интервалы поиска экстремума по каждой из координат. Из рисунка 1 видно, что $x\in[0;\,5]$, $y\in[0;\,3]$.

Итерация 1 метода покоординатного спуска. Зафиксируем координату y точки S, приняв, например, y = 3, и проведем одномерную оптимизацию по координате x, воспользовавшись функцией *fminbnd* пакета *MATLAB* для одномерной оптимизации с заданными граничными значениями; для ускорения поиска точность можно указать меньше заданной.

```
y=3;
xk=fminbnd(@(x)sqrt(x^2+y^2)+sqrt((x-1)^2+(3-y)^2)+…
sqrt((5-x)^2+y^2),0,5,optimset('TolX',0.1))
```

Поучим, что минимум функции $f(x, 3)$ достигается при x = 1.01.

Для решения задачи одномерной оптимизации функция *fminbnd* использует метод Брента (комбинация методов золотого сечения и парабол).

Теперь зафиксируем координату x в найденной точке x = 1.01 и проведем одномерную оптимизацию по координате y.

```
x=xk;
yk=fminbnd(@(y)sqrt(x^2+y^2)+sqrt((x-1)^2+(3-y)^2)+…
sqrt((5-x)^2+y^2),0,3,optimset('TolX',0.1))
```

Поучим, что минимум функции $f(1.01, x)$ достигается при y = 1.08.

Итерация 2. Зафиксируем координату y в найденной точке y = 1.08 и снова проведем одномерную оптимизацию по координате x. В результате вычислений получим, что минимум функции $f(x, 1.08)$ достигается при x = 1.36.

Зафиксируем координату x в найденной точке x = 1.36 и проведем одномерную оптимизацию по координате y. В результате вычислений получим, что минимум функции $f(1.36, y)$ достигается при y = 1.21.

Поскольку изменение по обеим координатам больше заданной точности ε = 0.01, продолжаем итерации, пока это условие не нарушится для обеих координат.

После выполнения четвертой итерации, изменение по обеим координатам получается меньшим заданной точности, поэтому алгоритм завершается и последняя найденная точка (1.378; 1.212) объявляется точкой минимума. Как видно, координаты этой точки с точностью ε = 0.01 совпадают с найденными аналитически в примере 1.

Графическая иллюстрация метода покоординатного спуска приведена на рис. 3, где изображены линии уровня функции $f(x, y)$ и точки, полученные на каждом шаге метода.

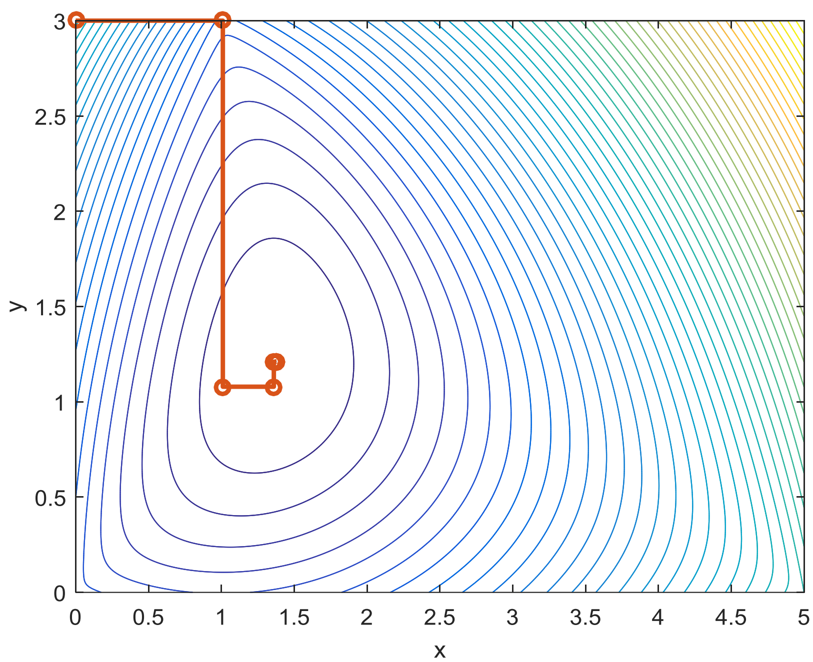

Рис. 3. Поиск минимума методом покоординатного спуска

Ответ: дороги должны соединяться в точке с координатами (1.378; 1.212). Для получения ответа потребовалось выполнить 4 итерации метода покоординатного спуска и 8 одномерных оптимизаций.

2. Задание по работе

Требуется решить оптимизационную задачу аналитически и одним из численных методов (см. раздел 2.2.1 в [2]) в соответствии с вариантом с точностью $\varepsilon = 0.001$:

a) методом градиентного спуска;

b) методом Гаусса (покоординатного спуска);

c) методом Хука-Дживса;

d) методом Розенброка (вращающихся координат);

e) методом Ньютона;

f) методом BFGS;

g) методом DFP;

h) методом Нелдера-Мида.

Численное решение задачи необходимо реализовать в виде программы на языке *MATLAB* или *Python* (по выбору обучающегося) и произвести анализ полученного решения. Для одномерной оптимизации рекомендуется использовать функции одномерной оптимизации языка *MATLAB* или *Python*.

Задача А. Серый Волк находится в точке *A* и хочет оживить Ивана-Царевича, находящегося в точке *B*. Оба они находятся между реками с мертвой и живой водой, текущими параллельно друг другу. Как Волку добраться до Ивана кратчайшим путем, набрав по дороге сначала живой, а затем мертвой воды (рис. 4 *а*)?

Задача Б. Серый Волк находится в точке *A* и хочет оживить Ивана-Царевича, находящегося в точке *B*. Оба они находятся между реками с мертвой и живой водой, вытекающими из одного источника под углом 45° друг к другу (рис. 4 *б*). Как Волку добраться до Ивана кратчайшим путем, набрав по дороге сначала мертвой, а затем живой воды?

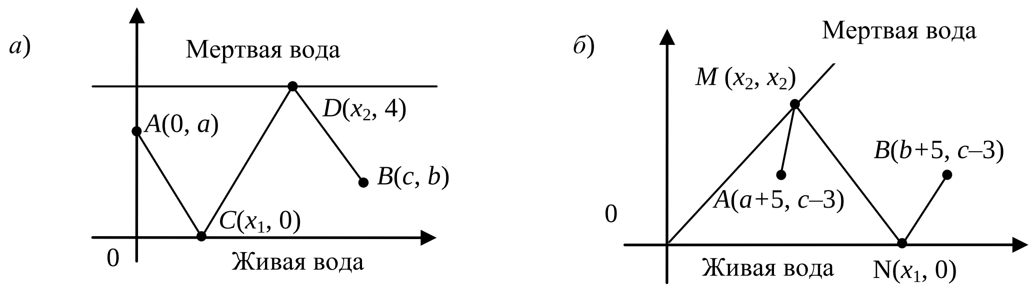

Рис. 4. Поясняющие рисунки к задачам А и Б

Задача В. Серый Волк и Иван-Царевич находятся в точке *А* между реками с мертвой и живой водой, вытекающими из одного источника под углом 45º друг к другу (рис. 5 *а*). Волк хочет оживить Ивана-Царевича. Как кратчайшим путем Волку набрать сначала мертвой, затем живой воды и вернуться к Ивану?

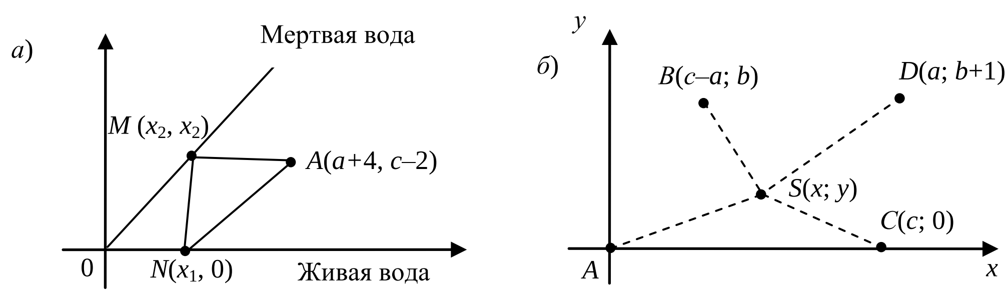

Рис. 5. Поясняющие рисунки к задачам В и Г

Задача Г. *Задача Штейнера для четырех точек*. Пусть имеются четыре города *A*, *B*, *C* и *D*. Требуется указать такое место *S*, чтобы суммарная длина прямолинейных участков шоссе, соединяющих *S* с *A*, *B*, *C* и *D*, была минимальной (рис. 5 *б*). *Ответ*: если точки *A*, *B*, *C* и *D* образуют выпуклый четырехугольник, то искомая точка – точка пересечения диагоналей, если невыпуклый, то – вершина наибольшего угла.

Задача Д. Для изготовления закрытого прямоугольного бака заданного объема *abc* используется выкройка из жести, вид которой показан на рис. 6. Чему равны *x*, *y* и *z* (длины сторон бака), при которых длина сварного шва будет минимальной?

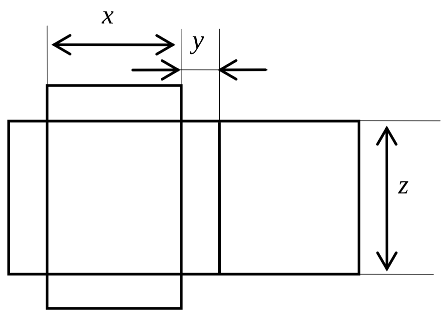

Рис. 6. Выкройка из жести для изготовления бака

Задача E. Чему равны высота, ширина и глубина прямоугольного аквариума объема abc, при которых суммарная длина швов будет минимальной?

3. Порядок выполнения работы

Выполнение работы состоит из двух частей: аналитического решения задачи и решения задачи заданным численным методом с помощью его программной реализации.

При аналитическом решении задачи необходимо:

1) на основании условия задачи вывести целевую функцию;
2) найти стационарную точку функции методом Ферма;
3) проверить, что градиент функции в найденной точке равен нулю;
4) по знакоопределенности гессиана функции в найденной точке убедиться, что найденная стационарная точка является точкой минимума;
5) построить полученное оптимальное решение (рис. 4 – 6 с точными координатами).

При программной реализации решения на языке *MATLAB* или *Python* необходимо:

1) написать скрипт или функцию, реализующую решение задачи заданным численным методом оптимизации;
2) построить график линий уровня целевой функции и нанести на него найденную с помощью программы точку экстремума;

3) найти разность ответов, полученных при аналитическом и численном решении;
4) оценить время выполнения программы (например, с помощью функции *timeit*);
5) вычислить потребовавшееся число итераций и число одномерных оптимизаций;
6) на график(и) линий уровня целевой функции нанести точки, полученные после каждой одномерной оптимизации, и соединить их прямыми линиями (как на рис. 3).

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы.

1. Цель работы.
2. Задание по работе.
3. Описание оптимизационной задачи.

В данном разделе необходимо привести: формулировку задачи, поясняющий рисунок, вывод целевой функции и выбор интервала поиска или начальной точки для численного решения.

4. Аналитическое решение задачи.

В данном разделе необходимо описать поиск стационарной точки методом Ферма и определение вида стационарной точки, привести полученное оптимальное решение (рис. 4 – 6 с точными координатами).

5. Программная реализация решения.

В данном разделе необходимо привести: текст программы с комментариями; графики линий уровня целевой функции, на которых проиллюстрирован процесс поиска (см. п. 6 в порядке выполнения программной реализации) и найденный экстремум; а также скриншоты с результатами анализа точности и времени выполнения программы.

6. Вывод.

Пример вывода: «В результате выполнения работы было получено аналитическое и численное решение поставленной оптимизационной задачи. Аналитический ответ: …. Для поиска численного решения методом … была разработана программа на языке …. Для решения задачи одномерной оптимизации был использован метод … Полученный с помощью программы ответ равен … и с заданной точностью … совпадает с аналитическим. Поиск решения производился из начальной точки … Программа выполнила … итераций алгоритма, при этом потребовалось произвести … одномерных оптимизаций. Объем программы составляет … строк. Среднее время выполнения программы составляет … мс».

5. Контрольные вопросы

1. В чем состоит основная идея метода покоординатного спуска?
2. В чем состоит основная идея метода Хука-Дживса?
3. В чем состоит основная идея метода Розенброка?
4. В чем отличие псевдо-ньютоновских методов от метода Ньютона?
5. Что нужно изменить в алгоритме покоординатного спуска, если необходимо осуществить поиск максимума?
6. Для заданной функции найдите экстремум методом Ферма. Выполните два шага покоординатного спуска из точки (10; 10), в качестве одномерного метода используя метод Ферма. Постройте на плоскости все найденные точки.
   a) $f(x,y)=2x^2+2y^2-2xy-4x-6y;$
   b) $f(x,y)=x^2+xy+(y-3)^2;$
   c) $f(x,y)=2x-2y+x^2+xy+y^2;$
   d) $f(x,y)=xy+2x^2+3y^2;$
   e) $f(x,y)=2x^2+2y^2+xy-4x-6y;$
   f) $f(x,y)=11x^2+3y^2+6xy+3(x-y)-22;$

g) $f(x,y) = x^2 + \frac{xy}{2} + \left(y-3\right)^2$;

h) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4xy - 4\left(x - y\right) + 4$;

i) $f(x,y) = 2xy + 2x^2 + y^2$.

7. Для заданной функции из п. 5 рассчитайте градиент в точке (–1; –1) и выполните оптимизацию в направлении вектора градиента методом Ферма.
8. Дан контурный график унимодальной функции двух аргументов. Изобразите путь покоординатного спуска.
9. Найдите численное решение с помощью функций многомерной оптимизации *MATLAB* или *Python* и сравните его с решением, найденным с помощью вашей программы, по точности и времени. Используйте следующие функции. Для *MATLAB*: *fminunc* (BFGS) и *fminsearch* (симплекс-метод Нелдера-Мида). Для *Python*: *scipy.optimize.minimize* с указанием *method='Nelder-Mead'* и *method='BFGS'*.
10. Приведите геометрическое решение задачи.
11. С помощью разработанной программы найдите минимум функции

a) $f(x,y) = (a-x)^2 + b(y-x^2)^2$;

b) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)e^{x+y}$;

c) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)e^{x}$;

d) $f(x,y) = \dfrac{1}{a + (x-1)^2 + (y-b)^2}$;

e) $f(x,y) = \cosh(ax + by) + \cosh(x-1)$.

12. Проверьте знакоопределенность матрицы:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$;

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Варианты заданий

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Задача	А	Б	В	Г	Д	Е	А	Б	В	Г
Метод	a	b	c	d	e	f	g	h	a	b
a	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
b	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
c	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Задача	Д	Е	А	Б	В	Г	Д	Е	А	Б
Метод	c	d	e	f	g	h	a	b	c	d
a	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
b	3	1	2	3	1	3	1	2	2	3
c	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8

№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Задача	В	Г	Д	Е	А	Б	В	Г	Д	Е
Метод	e	f	g	h	h	g	f	e	d	c
a	3	1	2	3	1	2	1	1	3	3
b	2	3	1	2	3	1	3	3	2	1
c	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Задача	А	Б	В	Г	Д	Е	А	Б	В	Г
Метод	b	a	h	g	f	e	d	c	b	a
a	2	3	1	2	2	3	1	2	1	3
b	3	1	2	3	1	2	3	1	3	1
c	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5

Лабораторная работа 3
ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Цель работы: ознакомиться с известными численными методами глобальной безусловной оптимизации, получить опыт решения глобальной оптимизационной задачи, приобрести навыки использования математических программных средств для решения задач на глобальный экстремум.

1. Теоретические сведения

В случае если целевая функция на исследуемом интервале не унимодальна, то есть имеет несколько локальных экстремумов, при оптимизации возникает задача поиска глобального экстремума.

Рассмотрим пример поиска глобального минимума методом дифференциальной эволюции *DE* (об этом и других методах см. раздел 3 в [2]).

Пример 1. Дана функция:

$$f(x,y) = (x-y)^2 + \left(\frac{x+y-10}{3}\right)^2.$$

Требуется найти глобальный минимум $f(x,y)$ с точностью $\varepsilon = 0.0001$ на интервале $x \in [0;\ 10]$, $y \in [0;\ 10]$.

Численное решение методом дифференциальной эволюции. Сгенерируем начальную популяцию на интервале $x \in [0;\ 10]$, $y \in [0;\ 10]$. В соответствии с рекомендациями метода она должна содержать от 10 до 20 точек. Пусть $N = 10$.

Получим, например, следующий случайный набор точек (рис. 1, табл. 1)

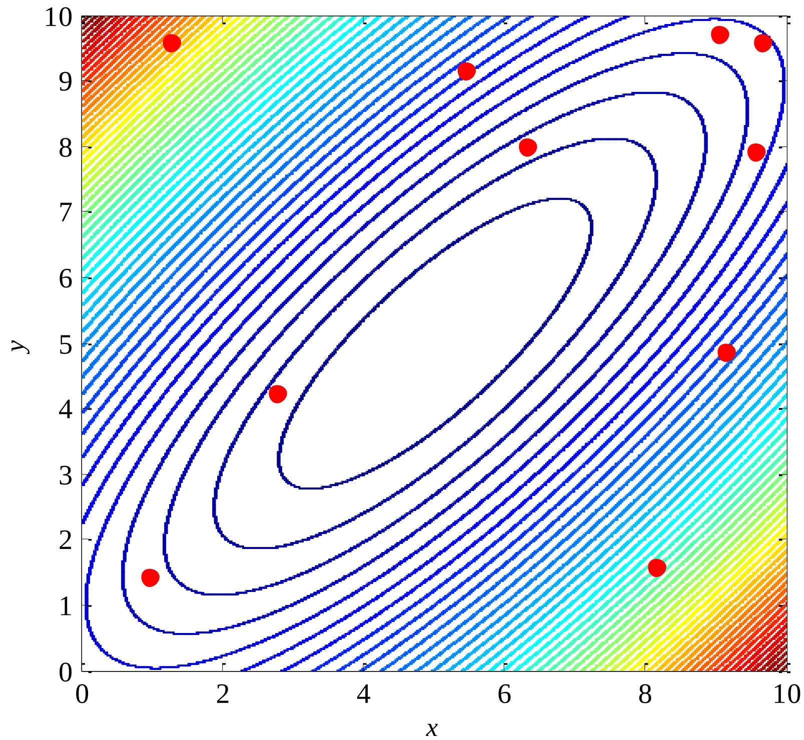

Рис. 1. Начальная популяция.

Таблица 1

x	8.1472	9.0579	1.2698	9.1337	6.3235	0.9754	2.7849	5.4688	9.5750	9.6488
y	1.5761	9.7059	9.5716	4.8537	8.0028	1.4188	4.2176	9.1573	7.9220	9.5949

Установим значения силы мутации $F = 0.5$ и вероятности мутации $P = 0.8$.

Итерация 1. Возьмем первую точку из популяции:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 8.1472 \\ 1.5761 \end{bmatrix}.$$

Случайным образом выберем среди оставшихся точек еще три, не совпадающие друг с другом, например:

$$\mathbf{x}_A = \begin{bmatrix} 9.0579 \\ 9.7059 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} 9.5751 \\ 7.9221 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_C = \begin{bmatrix} 2.7850 \\ 4.2176 \end{bmatrix}.$$

Вычислим точку-мутанта:

$$\mathbf{x}_M = \mathbf{x}_C + F(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) = \begin{bmatrix} 2.5264 \\ 5.1095 \end{bmatrix}.$$

Сгенерируем пару случайных чисел:

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}0.9340\\0.6787\end{bmatrix}.$$

Получим, что координата y наследуется от родителя $\mathbf{x}_M$, а координата x от родителя $\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{x}_T=\begin{bmatrix}8.1472\\5.1095\end{bmatrix}.$$

Произведем отбор. $f(\mathbf{x}_T)$ = 10.4061, $f(\mathbf{x}_1)$ = 43.1879, следовательно, потомок $\mathbf{x}_T$ попадает в новую популяцию.

Затем те же действия повторим для второй точки:

$$\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}9.0579\\9.7059\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x}_A=\begin{bmatrix}2.7850\\4.2176\end{bmatrix},\mathbf{x}_B=\begin{bmatrix}9.1338\\4.8538\end{bmatrix},\mathbf{x}_C=\begin{bmatrix}5.4688\\9.1574\end{bmatrix}.$$

Точка $\mathbf{x}_A$ совпала с предыдущей $\mathbf{x}_C$ случайно.

$$\mathbf{x}_M=\mathbf{x}_C+F(\mathbf{x}_A-\mathbf{x}_B)=\begin{bmatrix}2.2944\\8.8393\end{bmatrix}.$$

Для

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix}0.6555\\0.1712\end{bmatrix}$$

обе координаты наследуется от родителя $\mathbf{x}_M$:

$$\mathbf{x}_T=\mathbf{x}_M=\begin{bmatrix}2.2944\\8.8393\end{bmatrix}.$$

$f(\mathbf{x}_T)$ = 42.9780, $f(\mathbf{x}_1)$ = 8.9538, следовательно, потомок $\mathbf{x}_T$ в новую популяцию не попадет и вторая точка не изменится.

Те же действия повторим для оставшихся восьми точек. В результате получим новое поколение (табл. 2).

Таблица 2

x	8.1472	9.0579	4.9755	9.1337	6.3235	8.1560	2.7849	8.6602	9.5750	8.6632
y	5.1095	9.7059	9.2852	5.3882	8.0028	6.1182	4.2176	8.1576	7.9220	9.3687

Поскольку координаты всех точек популяции отличаются друг от друга на величину, большую заданной точности, переходим к следующей итерации.

Итерация 2. Выполнив те же действия, что и на итерации 1, над новым поколением, получим следующее поколение точек (рис. 2, табл. 3).

Таблица 3

x	8.1472	9.0579	9.7186	10.1760	6.3235	7.2886	2.7849	8.6602	9.5750	7.0345
y	5.1095	9.7059	9.2852	9.1674	8.0028	7.8133	4.2176	8.1576	7.9220	8.1980

Заметим, что после второй итерации точки сместились в сторону минимума.

Будем продолжать итерации, пока разница между соответствующими координатами точек не станет меньше точности ε = 0.0001.

Расположение точек на седьмой итерации приведено на рис. 3.

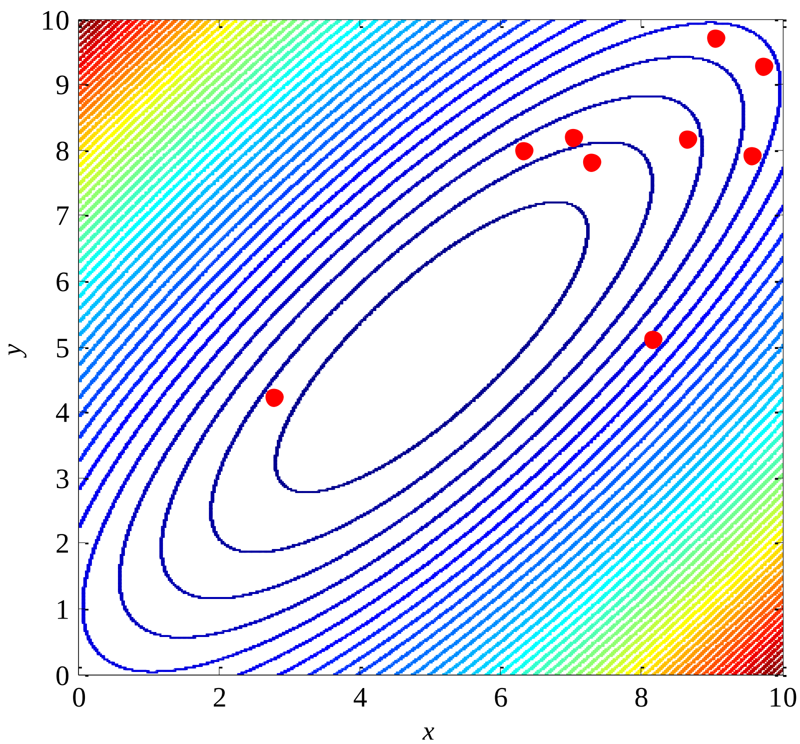

Рис. 2. Популяция в третьем поколении.

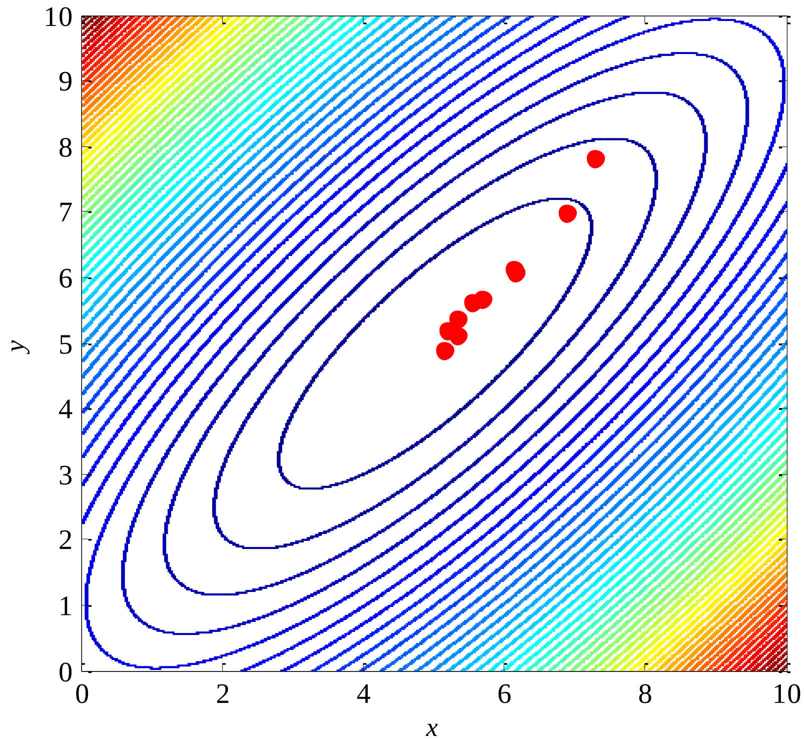

Рис. 3. Популяция в восьмом поколении.

В результате на 51 итерации получим популяцию, состоящую из одной точки с координатами (5.0001; 5.0001) и девяти точек с координатами (5.0000; 5.0000). Поскольку координаты всех точек популяции совпадают с заданной точностью, поиск завершен.

Ответ: точка минимума целевой функции имеет координаты (5.0000; 5.0000). Для получения ответа потребовалось выполнить 51 итерацию метода дифференциальной эволюции.

В пакете *MATLAB* графически отобразить процесс изменения популяции во времени можно с помощью команды *set*:

```
p=plot(Points(:,1),Points(:,2),'.r','EraseMode','xor');
while (max(Points)-min(Points))>0.0001 %условие окончания аогритма
    ...% мутация, скрещивание, отбор
    set(p,'Xdata', Points(:,1),'Ydata', Points(:,2));
    pause(1);
end
```

2. Задание по работе

Требуется найти точку глобального минимума для двух заданных целевых функций одним из численных методов глобальной оптимизации (см. раздел 3 в [2]) в соответствии с вариантом с точностью ε = 0.001:

a) BA с постоянным значением R и случайными точками G;
b) DE;
c) BA с уменьшающимся R от итерации к итерации и лучшими точками G;
d) BA с постоянным значением R и лучшими точками G;
e) DE2;
f) BA с уменьшающимся значением R и случайными точками G;
g) Basin-hopping.

R – радиус окрестности поиска для метода BA.

Решение задачи необходимо реализовать в виде программы на языке *MATLAB* или *Python* (по выбору обучающегося) и произвести анализ полученного решения.

Заданные функции

1. **Функция Экли**:

$$f(x,y) = -20e^{-\frac{1}{5\sqrt{2}}(x^2+y^2)} - e^{\frac{1}{2}(\cos 2\pi x+\cos 2\pi y)} + e + 20.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], глобальный минимум при $x = y = 0$.

2. **Функция Растригина**:

$$f(x,y) = 20 + x^2 + y^2 - 10\cos(2\pi x) - 10\cos(2\pi y).$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], глобальный минимум при $x = y = 0$.

3. **Функция Гривонка**:

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{4000}(x^2+y^2) - \cos(x)\cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], глобальный минимум при $x = y = 0$.

4. **Функция Розенброка**:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (x - 1)^2.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], глобальный минимум при $x = y = 1$.

5. **Функция Химмельблау**:

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], четыре локальных минимума: при $x = 3$, $y = 2$, при $x = -2.805118$, $y = 3.131312$, при $x = -3.77931$, $y = -3.283186$, при $x = 3.584428$, $y = -1.848126$.

6. **Функция**:

$$f(x, y) = 3(1 - x^2)e^{-x^2-(y+1)^2} - 10(\frac{x}{5} - x^3 - y^5)e^{-x^2-y^2} - \frac{1}{3}e^{-(x+1)^2-y^2}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–2; 1], минимум при $x = 0.01336$, $y = -1.66215$.

7. **Функция**:

$$f(x, y) = -\frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–8; 8], минимум при $x = y = 0$.

8. **Функция**:

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–2; 2], минимум при $x = -0.7071$, $y = 0$.

9. **Функция**:

$$f(x, y) = (4 - 2.1x^2 + \frac{x^4}{3})x^2 + xy + (-4 + 4y^2)y^2.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–2; 2], минимум при $x = \pm 0.089842$, $y = \pm 0.7126564$.

10. **Функция:**

$$f(x, y) = (1.5 - x + xy)^2 + (2.25 - x + xy^2)^2 + (2.625 - x + xy^3)^2.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–4; 4], минимум при x = 3, y = 0.5.

11. **Функция**:

$$f(x,y)=\left(1+(x+y+1)^2(19-14x+3x^2-14y+6xy+3y^2)\right)\times$$
$$\times\left(30+(2x-3y)^2(18-32x+12x^2+48y-36xy+27y^2)\right).$$

Интервал поиска по каждой переменной [–1.5; 1.5], минимум при x = 0, y = –1.

12. **Функция**:

$$f(x,y)=100\sqrt{\left|y-0.01x^2\right|}+0.01\left|x+10\right|.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–11; 2], минимум при x = –10, y = 1.

13. **Функция Матиаса**:

$$f(x,y)=0.26\left(x^2+y^2\right)-0.48xy.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при x = 0, y = 0.

14. **Функция Леви:**

$$f(x,y)=\sin^2(3\pi x)+(x-1)^2\left(1+\sin^2(3\pi y)\right)+(y-1)^2\left(1+\sin^2(2\pi y)\right).$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при x = 1, y = 1.

15. **Функция «трехгорбый верблюд»**:

$$f(x,y)=2x^2-1.05x^4+\frac{x^6}{6}+xy+y^2.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], минимум при x = 0, y = 0.

16. **Функция Изома**:

$$f(x,y)=-\cos x\cdot\cos y\cdot e^{-(x-\pi)^2-(y-\pi)^2}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = \pi$, $y = \pi$.

17. **Функция**:

$$f(x,y)=-0.0001\left(\left|\sin x\cdot\sin y\cdot e^{\left|100-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\pi}\right|}\right|+1\right)^{0.1}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при x = ±1.34941, y = ±1.34941.

18. **Функция**:

$$f(x,y) = -\left|\sin x \cdot \cos y \cdot e^{\left|1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\pi}\right|}\right|.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при x = ±8.05502, y = ±9.66459.

19. **Функция**:

$$f(x,y) = \sin\left(x+y\right) + \left(x+y\right)^2 - 1.5xy + 2.5y + 1.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–2; 4], минимум при x = 0.2077, y = –1.4589.

20. **Функция**:

$$f(x,y) = 0.5 + \frac{\sin^2\left(x^2 - y^2\right) - 0.5}{\left(1 + 0.001\left(x^2 + y^2\right)\right)^2}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при x = 0, y = 0.

21. **Функция**:

$$f(x,y) = 0.5 + \frac{\cos^2\left(\sin\left|x^2 - y^2\right|\right) - 0.5}{\left(1 + 0.001\left(x^2 + y^2\right)\right)^2}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при x = 0, y = ±1.25313 и x = ±1.25313, y = 0.

22. **Функция**:

$$f(x,y) = \frac{x^4 - 16x^2 + 5x + y^4 - 16y^2 + 5y}{2}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], минимум при x = –2.903534, y = –2.903534.

23. **Функция**:

$$f(x,y) = 2 + x^2 + y^2 - \cos(18x^2) - \cos(18y^2).$$

Интервал поиска по каждой переменной [–2; 2], минимум при x = 0, y = 0.

24.**Функция**:

$$f(x,y)=|x|+|y|.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

25.**Функция**:

$$f(x,y)=-\frac{1}{(x-1)^2+0.2}-\frac{1}{2(x-2)^2+0.15}-\frac{1}{3(x-3)^2+0.3}-$$
$$-\frac{1}{(y-1)^2+0.2}-\frac{1}{2(y-2)^2+0.15}-\frac{1}{3(y-3)^2+0.3}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [0; 4], минимум при x = 2, y = 2.

26.**Функция**:

$$f(x,y)=x^2+2y^2-0.3\cos(3\pi x)\cos(4\pi y)+0.3.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–2; 2], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

27.**Функция**:

$$f(x,y)=0.5\left(x^2+y^2\right)\left(1.6+0.8\cos(1.5x)\cos(3.14y)+0.8\cos\left(\sqrt{5}x\right)\cos(3.5y)\right).$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

28.**Функция**:

$$f(x,y)=x^2\left|\sin(2x)\right|+y^2\left|\sin(2y)\right|-\frac{1}{5x^2+5y^2+0.2}+5.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

29.**Функция**:

$$f(x,y)=0.1x^2+0.1y^2-4\cos(0.8x)-4\cos(0.8y)+8.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

30.**Функция**:

$$f(x,y)=\left(0.15\left(x\cos\frac{\pi}{2}-y\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^2+\left(0.08\left(x\sin\frac{\pi}{2}+y\cos\frac{\pi}{2}\right)\right)^2-$$
$$-4\cos\left(1.2\left(x\cos\frac{\pi}{2}-y\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)-4\cos\left(0.64\left(x\sin\frac{\pi}{2}+y\cos\frac{\pi}{2}\right)\right)+8.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при x = 0, y = 0.

31.**Функция**:

$$f(x,y) = -\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{200} - \cos(x)\cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + 2}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

32.**Функция**:

$$f(x,y) = \frac{\sin^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - 1}{1 + 0.001\left(x^2+y^2\right)}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

33.**Функция**:

$$f(x,y) = |x|^2 + |y|^3.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

34.**Функция**:

$$f(x,y) = \left(y - \frac{5.1}{4\pi^2}x^2 + \frac{5}{\pi}x - 6\right)^2 + 10\left(1 - \frac{1}{8\pi}\right)\cos x + 10.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 15], минимум при $x = -\pi$, $y = 12.275$; $x = \pi$, $y = 2.275$; $x = 3\pi = 9.42478$, $y = 2.475$.

35.**Функция**:

$$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}\left(\sin\left(50\sqrt[5]{x^2+y^2}\right) + 1\right)\right)^2.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

36.**Функция**:

$$f(x,y) = -200e^{-0.02\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

37.**Функция**:

$$f(x,y) = 100\left(y - x^3\right)^2 + \left(1 - x\right)^2.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–5; 5], минимум при $x = 1$, $y = 1$.

38.**Функция**:

$$f(x,y)=\left|x\sin(x)+0.1x\right|+\left|y\sin(y)+0.1y\right|.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–10; 10], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

39.**Функция**:

$$f(x,y)=\sin(x)e^{(1-\cos y)^2}+\cos(y)e^{(1-\sin x)^2}+(x-y)^2.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–6; 6], минимум при $x = 4.70104$, $y = 3.15294$ и $x = -1.58214$, $y = -3.13024$.

40.Функция:

$$f(x,y)=x^2+2y^2-0.3\cos(3\pi x)-0.4\cos(4\pi y)+0.7.$$

Интервал поиска по каждой переменной [–2; 2], минимум при $x = 0$, $y = 0$.

3. Порядок выполнения работы

При программной реализации решения на языке *MATLAB* или *Python* необходимо:

1) написать скрипт или функцию, реализующую решение задачи заданным численным методом оптимизации;
2) для каждой целевой функции построить график линий уровня и нанести на него найденную с помощью программы точку экстремума;
3) найти разность между найденным численном решением и приведенным в задании ответом;
4) оценить время выполнения программы для поиска экстремума каждой функции (например, с помощью функции *timeit*);
5) для каждой функции вычислить потребовавшееся число итераций;
6) на график(и) линий уровня каждой целевой функции нанести
   a. *Basin-hopping*: точки, полученные после каждой итерации;
   b. *для остальных методов*: точки популяции, полученные после выборочных итераций (как на рис. 1-3).

4. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы.

1. Цель работы.
2. Задание по работе.
3. Разработка программы.

В данном разделе необходимо привести: текст разработанной программы с комментариями, указать особенности реализации метода.

4. Решение оптимизационной задачи 1.

В данном разделе необходимо привести: формулировку оптимизационной задачи для функции 1; графики линий уровня целевой функции с иллюстрацией поиска экстремума (см. п. 6 порядка выполнения работы).

5. Решение оптимизационной задачи 2.

В данном разделе необходимо привести: формулировку оптимизационной задачи для функции 2; графики линий уровня целевой функции с иллюстрацией поиска экстремума (см. п. 6 порядка выполнения работы).

6. Анализ программной реализации.

В данном разделе необходимо описать для каждой задачи: расчет отклонения найденного численного решения от приведенного в задании; расчет числа итераций и определение времени выполнения программы.

7. Вывод.

Пример вывода: «В результате выполнения работы было получено численное решение двух задач глобальной оптимизации. Для поиска численного решения методом … была разработана программа на языке …. Объем программы составляет … строк. Полученный с помощью программы ответ для функции 1 равен … и с точностью … совпадает с указанным в задании. Среднее время поиска решения составляет … мс. Полученный с помощью программы ответ для функции 2 равен … и с точностью … совпадает с указанным в задании. Среднее время поиска решения составляет … мс».

5. Контрольные вопросы

1. В чем состоит отличие детерминированных методов от стохастических?
2. В чем состоит основная идея метода *ABC*?
3. В чем состоит основная идея метода *DE*?
4. Что нужно изменить в алгоритме 1, если необходимо осуществить поиск максимума?
5. Модифицируйте исследуемую функцию так, чтобы экстремум переместился в точку (–1; –2).
6. Для заданной функции найдите экстремум методом Ферма.

   а) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y$;

   б) $f(x, y) = x^2 + xy + (y-3)^2$;

   в) $f(x, y) = 2x - 2y + x^2 + xy + y^2$;

   г) $f(x, y) = xy + 2x^2 + 3y^2$;

   д) $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + xy - 4x - 6y$;

   е) $f(x, y) = 11x^2 + 3y^2 + 6xy + 3(x-y) - 22$;

   ж) $f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{2} + (y-3)^2$;

   з) $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4xy - 4(x-y) + 4$;

   и) $f(x, y) = 2xy + 2x^2 + y^2$.
7. Что нужно изменить в алгоритме *ABC*, если необходимо осуществить поиск максимума?
8. Найдите численное решение с помощью функций глобальной оптимизации *MATLAB* или *Python* и сравните его с решением, найденным с помощью вашей программы, по точности и времени. Используйте следующие функции. Для *MATLAB*: *ga* (генетический алгоритм) и *particleswarm* (метод роя частиц). Для *Python*: *scipy.optimize.differential_evolution* (метод дифференциальной эволюции),

scipy.optimize.basinhopping (детерминированно-стохастический метод) и *scipy.optimize.dual_annealing* (алгоритм имитации отжига).

6. Варианты заданий

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Функция 1	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Функция 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Метод	a	b	c	d	e	f	g	a	b	c

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Функция 1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Функция 2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Метод	d	e	f	g	a	b	c	d	e	f

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Функция 1	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
Функция 2	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Метод	g	a	b	c	d	e	f	g	a	b

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Функция 1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Функция 2	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Метод	c	d	e	f	g	a	b	c	d	e

Лабораторная работа 4
УСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Цель работы: ознакомиться с известными аналитическими и численными методами условной оптимизации, получить опыт решения условной оптимизационной задачи, приобрести навыки использования математических программных средств для решения задач на условный экстремум.

1. Теоретические сведения

Нередкими являются оптимизационные задачи, в которых при поиске экстремума целевой функции $J = f\,(x_1,\ ...,\ x_n)$ необходимо учесть дополнительные ограничения на аргументы функции. Ограничения формулируются в виде равенств и неравенств:

$$q_1(x_1, ..., x_n) = 0,\ \ldots,\ q_m(x_1, ..., x_n) = 0.$$

$$g_1(x_1, ..., x_n) \ge 0,\ \ldots,\ g_s(x_1, ..., x_n) \ge 0.$$

Векторная запись постановки условно-экстремальной задачи имеет вид:

$$J = f(\mathbf{x}) \to \min_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}) = 0, \quad g_i(\mathbf{x}) \ge 0, i = \overline{1, s}, \quad \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n. \tag{1}$$

Примером условно-экстремальной задачи может быть задача поиска размеров сосуда максимального объема с заданной площадью основания и заданной максимальной площадью поверхности.

1.1. Аналитическая условная оптимизация

Если в оптимизационной задаче присутствуют только ограничения типа равенство, для ее аналитического решения удобно использовать метод множителей Лагранжа, если же присутствуют ограничения-неравенства, используют условия Каруша-Куна-Таккера (см. раздел 3.2 в [1]).

Рассмотрим применение условий Каруша-Куна-Таккера на примере.

Пример 1. Задача о палатке.

Палатка имеет форму четырехгранной пирамиды (рис. 1). Основание палатки – квадрат со стороной a. Длины всех ребер, ведущих от вершины к основанию одинаковы и равны b. Требуется найти соотношение размеров a и b, обеспечивающих максимальный объем, при этом площадь поверхности не должна превышать 25 м^2.

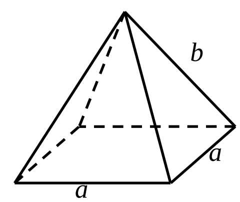

Рис. 1. Четырехскатная палатка.

Решение. Выпишем формулы для объема и площади поверхности пирамиды.

Площадь поверхности складывается из площади основания a^2 и площадей четырех равнобедренных треугольников с основанием a: $S = a^2 + 4S_a$.

Как известно, площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Тогда $S_a = ½ah_a$ (рис. 2, слева). Высота этого треугольника по теореме Пифагора равна:

$$h_a = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

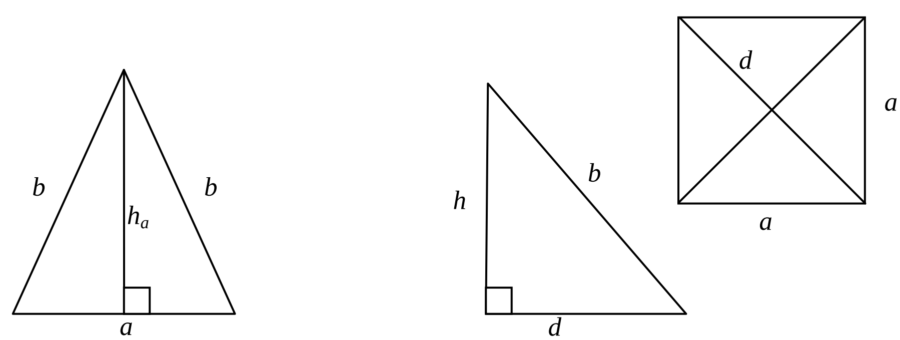

Рис. 2. Расчет площади поверхности и объема пирамиды.

Итак, площадь поверхности пирамиды выражается через длины ее ребер следующим образом:

$$S = a^2 + a\sqrt{4b^2 - a^2}.$$

Объем пирамиды равен трети произведения площади ее основания на высоту:

$$V = {}^1/_3\, a^2 h.$$

Очевидно, что высота рассматриваемой пирамиды опускается из ее вершины в центр квадрата, тогда найдем ее из треугольника (рис. 2, справа):

$$h = \sqrt{b^2 - d^2};\ d = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

Таким образом, объем пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}.$$

Для каждого конкретного значения S эту задачу максимизации можно изобразить графически на плоскости (a, b). Например, для S = 25 на рис. 3 представлены линии уровня функции $V(a, b)$ и кривая-ограничение

$$a^2 + a\sqrt{4b^2 - a^2} = 25.$$

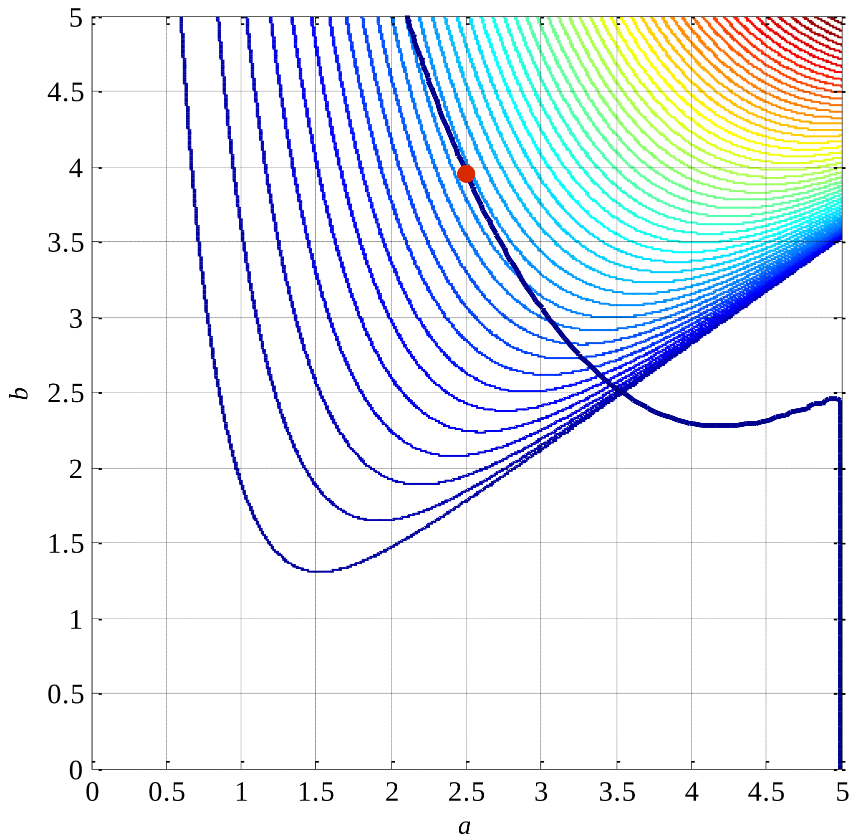

Рис. 3. Графическое представление задачи оптимизации.

Для решения задачи требуется найти точку (a, b), лежащую не выше кривой-ограничения, для которой значение V максимально. Очевидно, что искомая точка максимума является точкой касания ограничения и линии уровня (она отмечена жирной точкой).

Строгая математическая формулировка (1) решаемой оптимизационной задачи имеет вид:

$$V = f\left(a,b\right) = -\frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2-2a^2} \to \min,$$
$$g(a,b) = 25 - a^2 - a\sqrt{4b^2-a^2} \ge 0.$$

Для аналитического решения задачи оптимизации воспользуемся условиями Каруша-Куна-Таккера. В задаче присутствует только ограничение типа неравенство, поэтому условия Каруша-Куна-Таккера принимают вид:

$$\begin{cases} \nabla f\left(a,b\right) - \mu\nabla g\left(a,b\right) = 0, \\ g\left(a,b\right) \ge 0, \\ \mu g\left(a,b\right) = 0, \\ \mu \ge 0. \end{cases} \tag{2}$$

Рассчитаем градиенты целевой функции и ограничения:

$$\nabla f\left(a,b\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f\left(a,b\right)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial f\left(a,b\right)}{\partial b} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} a\sqrt{4b^2-2a^2} - \dfrac{a^3}{\sqrt{4b^2-2a^2}} \\ \dfrac{2a^2b}{\sqrt{4b^2-2a^2}} \end{bmatrix}.$$

$$\nabla g(a,b) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g\left(a,b\right)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial g\left(a,b\right)}{\partial b} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2a + \sqrt{4b^2-a^2} - \dfrac{a^2}{\sqrt{4b^2-a^2}} \\ \dfrac{4ab}{\sqrt{4b^2-a^2}} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, условия (2) имеют вид:

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\left(a\sqrt{4b^2-2a^2}-\frac{a^3}{\sqrt{4b^2-2a^2}}\right)+\mu\left(2a+\sqrt{4b^2-a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}\right)=0,\\ -\frac{2a^2b}{3\sqrt{4b^2-2a^2}}+\mu\frac{4ab}{\sqrt{4b^2-a^2}}=0,\\ 25-a^2-a\sqrt{4b^2-a^2}\ge 0,\\ \mu\left(25-a^2-a\sqrt{4b^2-a^2}\right)=0,\\ \mu\ge 0. \end{cases}$$

Полученная система состоит из трех уравнений с тремя неизвестными (a, b и μ) и двух неравенств. Необходимо найти корни системы из трех уравнений, а затем среди полученных корней выбрать те, которые удовлетворяют обоим неравенствам.

Решение может быть найдено с помощью *MATLAB*.

```
syms a b m
f=-a^2*sqrt(4*b^2-2*a^2)/6;
g=25-a^2-a*sqrt(4*b^2-a^2);
rez=solve([gradient(f)-m*gradient(g);m*g]);
```

Структура *rez* содержит 5 решений. Из пяти решений первое содержит нулевое значение a, четвертое и пятое – нулевое значение b и, очевидно, не являются решениями задачи. Третье решение содержит отрицательное значение b. Таким образом, получаем единственное подходящее решение:

$$a=\frac{5}{2}=2.5;\ b=\frac{5\sqrt{10}}{4}\approx 3.95;\ \mu=\frac{5\sqrt{2}}{16}.$$

Неравенство $\mu\ge 0$, очевидно, выполняется.

Для проверки неравенства $g(a,b)\ge 0$ рассчитаем значение g при найденных a и b.

```
subs(g,{a,b},{rez.a(2),rez.b(2)})
```

Получим, что $g\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{10}}{4}\right)=0$, то есть выполняется и второе неравенство, причем решение лежит на границе области ограничения (см. рис. 3).

Искомое соотношение сторон пирамиды равно $\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0.632$. Это означает, что длина стороны основания пирамиды оптимального объема должна быть почти вдвое короче бокового ребра.

2. Задание по работе

Требуется решить оптимизационную задачу аналитически и одним из численных методов (см. раздел 2.2.2 в [2]) в соответствии с вариантом с точностью ε = 0.001:

a) штрафных функций;

b) барьерных функций.

Численное решение задачи необходимо реализовать в виде программы на языке *MATLAB* или *Python* (по выбору обучающегося) и произвести анализ полученного решения. Для безусловной оптимизации рекомендуется использовать функции безусловной оптимизации языка *MATLAB* или *Python*.

Задача А. Чему равны высота и диаметр цилиндрического ведра объема *S*, при которых длина сварного шва будет минимальной?

Задача Б. Чему равны высота и диаметр цилиндрической консервной банки объема *S*, при которых длина сварного шва будет минимальной?

Задача В. Палатка имеет две прямоугольные боковые стенки, прямоугольное дно и два равносторонних треугольных торца (рис. 4). Какими должны быть длины сторон палатки, чтобы палатка имела максимальный объем, а площадь ее поверхности не превышала *S*?

Задача Г. Палатка имеет две прямоугольные боковые стенки, прямоугольное дно и один равносторонний треугольный торец (рис. 4). Какими должны быть длины сторон палатки, чтобы палатка имела максимальный объем, а площадь ее поверхности не превышала *S*?

Задача Д. Палатка имеет две прямоугольные боковые стенки и один равносторонний треугольный торец (рис. 4). Какими должны быть длины сторон палатки, чтобы палатка имела максимальный объем, а площадь ее поверхности не превышала S?

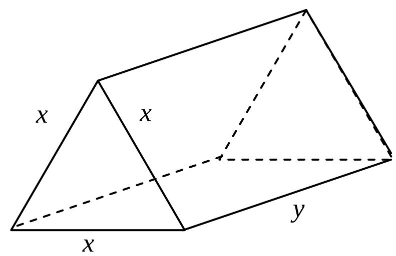

Рис. 4. – Эскиз палатки

Задача Е. Дан угол 45º и точки A и B внутри него. Как нужно провести прямую через точку A (рис. 5 *а*), чтобы площадь четырехугольника $OMBN$ была минимальной? *Указание*: вспомните, что площадь четырехугольника равна полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними.

Задача Ж. Дан угол 45º и точка A внутри него. Как нужно провести прямую через точку A, чтобы отсечь от угла треугольник наименьшего периметра (рис. 5 *б*)? *Ответ*: вневписанная в треугольник окружность должна касаться MN в точке A.

Задача З. Дан угол 45º и точка A внутри него. Как нужно провести прямую через точку A, чтобы отсечь от угла треугольник наименьшей площади (рис. 5 *б*)? *Ответ*: точка A должна делить отрезок MN пополам.

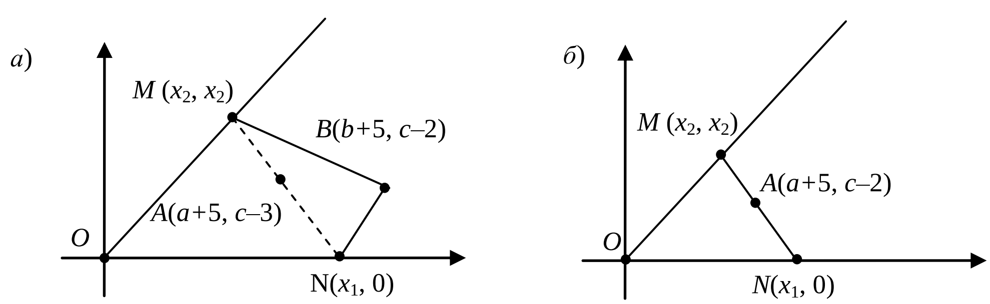

Рис. 5. Поясняющие рисунки к задачам Е – Ж

3. Порядок выполнения работы

Выполнение работы состоит из двух частей: аналитического решения задачи и решения задачи заданным численным методом с помощью его программной реализации.

При аналитическом решении задачи необходимо:

1) на основании условия задачи вывести целевую функцию;
2) найти стационарную точку функции методом Лагранжа или Каруша-Куна-Таккера;
3) проверить, что найденная точка удовлетворяет заданному ограничению;
4) построить полученное оптимальное решение (см. пример рис. 4 – 5 с точными размерами).

При программной реализации решения на языке *MATLAB* или *Python* необходимо:

1) написать скрипт или функцию, реализующую решение задачи заданным численным методом оптимизации;
2) построить график ограничения и линий уровня целевой функции и нанести на него найденную с помощью программы точку экстремума; убедиться, что точка с учетом точности совпадает с точкой касания линии уровня целевой функции и ограничения;
3) найти разность ответов, полученных при аналитическом и численном решении;
4) оценить время выполнения программы (например, с помощью функции *timeit*);
5) вычислить потребовавшееся число итераций;
6) на график(и) линий уровня целевой функции нанести точки, полученные после каждой одномерной оптимизации, и соединить их прямыми линиями.

4. Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Задание по работе.
3. Описание оптимизационной задачи.

В данном разделе необходимо привести: формулировку задачи, поясняющий рисунок, вывод целевой функции и выбор интервала поиска или начальной точки для численного решения.

4. Аналитическое решение задачи.

В данном разделе необходимо описать поиск стационарной точки аналитическим методом.

5. Программная реализация решения.

В данном разделе необходимо привести: текст программы с комментариями; графики линий уровня целевой функции и ограничения, на которых проиллюстрирован процесс поиска (см. п. 6 в порядке выполнения программной реализации) и найденный экстремум; а также скриншоты с результатами анализа точности и времени выполнения программы.

6. Вывод.

Пример вывода: «В результате выполнения работы было получено аналитическое и численное решение поставленной оптимизационной задачи. Аналитический ответ: …. Для поиска численного решения методом … была разработана программа на языке …. Для решения задачи безусловной оптимизации был использован метод … Полученный с помощью программы ответ равен … и с заданной точностью … совпадает с аналитическим. Поиск решения производился из начальной точки … Программа выполнила … итераций алгоритма. Объем программы составляет … строк. Среднее время выполнения программы составляет … мс».

5. Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие разделы.

1. Цель работы.
2. Задание по работе.
3. Программная реализация решения.

В данном разделе необходимо привести: текст программы с комментариями; графики линий уровня целевой функции, на которых проиллюстрирован процесс поиска (см. п. 6 в порядке выполнения программной реализации) и найденный экстремум; а также скриншоты с результатами анализа точности и времени выполнения программы.

4. Вывод.

Пример вывода: «В результате выполнения работы было получено численное решение поставленной оптимизационной задачи. Для поиска численного решения методом … была разработана программа на языке …. Для решения задачи детерминированной оптимизации был использован метод … Полученный с помощью программы ответ равен … и с заданной точностью … совпадает с приведенным в задании. Программа выполнила … итераций алгоритма. Объем программы составляет … строк. Среднее время выполнения программы составляет … мс».

6. Контрольные вопросы

1. В чем состоит основная идея метода штрафных функций?
2. Почему метод барьерных функций не применяется для решения задач с ограничениями-равенствами?
3. В чем состоит основная идея метода барьерных функций?
4. Что нужно изменить в алгоритме штрафных функций, если необходимо осуществить поиск максимума?
5. Используйте написанную вами программу для решения задачи из примера 1.

6. Решите задачу из примера 1 для палатки без дна.
7. Приведите решение задачи методом Ферма.
8. Найдите численное решение задачи с помощью функций условной оптимизации *MATLAB* или *Python* и сравните их с решением, найденным с помощью вашей программы, по точности и времени. Используйте следующие функции. Для *MATLAB*: *fmincon* (метод внутренней точки). Для *Python*: *scipy.optimize.minimize* с указанием *method='trust-constr'* (метод внутренней точки).
9. Найдите аналитическое решение задачи условной оптимизации:

a) $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 \to \min,$
$x_1 - 1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

b) $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 \to \min,$
$x_1^2 - x_2 \le 0, x_1 \ge 0;$

c) $f(\mathbf{x}) = (x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 \to \min,$
$x_1 + x_2 - 5 \le 0;$

d) $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 8x_1 - x_2 - 3 \to \max,$
$x_1 + x_2 = -2;$

e) $f(\mathbf{x}) = \frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1 + x_2 \to \min,$
$x_1 + x_2 \le 6, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

f) $f(\mathbf{x}) = \frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1 + x_2 \to \min,$
$x_1 + x_2 \le 4, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

g) $f(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_1 + x_2^2 - 8x_2 + 5 \to \min,$
$2x_1 - x_2 = 6;$

h) $f(\mathbf{x}) = -8x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 12x_2 - 7 \to \max,$
$2x_1 + 3x_2 = -6;$

i) $f(\mathbf{x}) = (x_1+4)^2 + (x_2-4)^2 \to \min,$
$2x_1 - x_2 \le 2, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

j) $$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) = \ln x_1 - x_2 \to \min, \\ x_1 - 1 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0; \end{gathered}$$

k) $$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 \to \min, \\ x_1 + 2x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

7. Варианты заданий

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Задача	А	В	Б	Г	Е	Д	Ж	В	А	Г
Метод	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
S	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Задача	В	Г	Д	В	Ж	Д	А	В	Б	Г
Метод	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
S	11	12	13	14	15	16	25	1	2	3

№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Задача	Д	В	Ж	Г	А	Д	В	Г	Е	Д
Метод	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
S	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

№ варианта	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Задача	Ж	В	А	Г	В	Д	Б	Г	Ж	В
Метод	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
S	14	15	16	17	18	19	20	21	22	25

Список литературы

1. Соловьева Т. Н., Шинтяков Д. В. Аналитические методы оптимизации : учеб. пособие. СПб.: ГУАП, 2023. 100 с.

2. Соловьева Т. Н., Шинтяков Д. В. Численные методы оптимизации : учеб. пособие. СПб.: ГУАП, 2023. 50 с.

3. Петров Ю. И. Программирование на языке высокого уровня (Python) URL: https://www.yuripetrov.ru/edu/python/