1.15 配对积分法(组合积分法) 互导函数、自导函数

① 求积分 $\boxed{\int \frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx}$

令 $I_1=\int \frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$, $I_2=\int \frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx$

可得 $bI_1+aI_2=\int \frac{b\sin x+a\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx=\int dx=x+C$ —— ①

$-aI_1+bI_2=\int \frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx=\int \frac{d(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=\ln|a\cos x+b\sin x|+C$ —— ②

$b\times$① $-a\times$② 消去 I_2: $(a^2+b^2)I_1=bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|+C$

得 $I_1=\frac{1}{a^2+b^2}(bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|)+C$

$a\times$① $+b\times$② 消去 I_1: $(a^2+b^2)I_2=ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|+C$

得 $I_2=\frac{1}{a^2+b^2}(ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|)+C$

② 求积分 $\boxed{\int \frac{e^x}{ae^x+be^{-x}}dx}$

令 $J_1=\int \frac{e^x}{ae^x+be^{-x}}dx$, $J_2=\int \frac{e^{-x}}{ae^x+be^{-x}}dx$

可得 $aJ_1+bJ_2=\int \frac{ae^x+be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}dx=x+C$ —— ③

$aJ_1-bJ_2=\int \frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}dx=\int \frac{d(ae^x+be^{-x})}{ae^x+be^{-x}}=\ln|ae^x+be^{-x}|+C$ —— ④

③+④得: $2aJ_1=x+\ln|ae^x+be^{-x}|+C$

$J_1=\frac{1}{2a}(x+\ln|ae^x+be^{-x}|)+C$

③-④得: $2bJ_2=x-\ln|ae^x+be^{-x}|+C$

$J_2=\frac{1}{2b}(x-\ln|ae^x+be^{-x}|)+C$

③ 求积分 $\boxed{\int \frac{\cosh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx}=K_1$ $\quad K_2=\int \frac{\sinh x}{a\cosh x+b\sinh x}dx$

$(\sinh x)'=\cosh x$, $(\cosh x)'=\sinh x$

④求积分 $\boxed{\int \frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}dx}$

令 $Q_1=\int \frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}dx$, $Q_2=\int \frac{\cos x}{1+\sin x\cos x}dx$

可得 $Q_1+Q_2=\int \frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x\cos x}dx=\int \frac{d(-\cos x+\sin x)}{1+\sin x\cos x}$

$(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x$

得 $\sin x\cos x=\frac{1-(\sin x-\cos x)^2}{2}$ ，代入

$$=\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{1+\frac{1-(\sin x-\cos x)^2}{2}}=2\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctanh}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+C$$

$$Q_2-Q_1=\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}dx=\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{1+\sin x\cos x}$$

$$=\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{1+\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}}=2\arctan(\sin x+\cos x)+C$$

⑤求积分 $\boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx}$

令 $S_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx$. $S_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx$

使用微分积分法：

先对被积函数求微商： $(e^{ax}\cos bx)'=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx$

$(e^{ax}\sin bx)'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$

再积分： $e^{ax}\cos bx=a\int e^{ax}\cos bx\,dx-b\int e^{ax}\sin bx\,dx=aS_1-bS_2$

$e^{ax}\sin bx=a\int e^{ax}\sin bx\,dx+b\int e^{ax}\cos bx\,dx=aS_2+bS_1$

⑥求积分 $\boxed{\int xe^{ax}\cos bx\,dx}=T_1$ $T_2=\int xe^{ax}\sin bx\,dx$

$$(xe^{ax}\cos bx)'=e^{ax}\cos bx+axe^{ax}\cos bx-bxe^{ax}\sin bx$$

$$\int xe^{ax}\cos bx\,dx=\int e^{ax}\cos bx\,dx+\int axe^{ax}\cos bx-\int bxe^{ax}\sin bx$$

$$=\underline{\int e^{ax}\cos bx\,dx+aT_1-bT_2}$$