

分部积分法→列表积分法



秋分 J

仅仅是在知乎凑热闹的学生，勿扰

+ 关注他

45 人赞同了该文章

突然想起来，反正本来也就大学生嘛...写一点这些基础的东西也没什么丢脸的。那就翻来之前的笔记找着写了。

翻了一下教材，似乎国内的教材很少有说列表积分法的。全都是到了分部积分就戛然而止了。虽然这样也不是不行，但是在后面的习题中都会有连续几次分部积分法。这即使不让人感到头大也让人感到繁杂无比。

除此之外，还有那些分部积分到一半就开始用代数方法解出积分的情况。更是让人摸不着头脑：我怎么知道要这么做？我怎么知道到这一步要开始用代数方法？

实际上这一切，前者用列表积分便可以迎刃而解，后者用“半个”列表积分法（自己取的名字...）也能很简单。不过对于后者，还会有一些巧妙的变化。

（郑重说明！笔者所述这一切的解法来源来自于《托马斯微积分》！以自己的理解叙述出来而已！）

正文

首先来看一下普通分部积分法：

对于 $\int f(x)g(x)dx$ ：

因为分部积分法是 $\int u dv = uv - \int v du$

分出待会要处理的 $f(x)$ 和 $g(x)dx$ 。为了方便起见，就写出代表的 u 和 v ：

$$u = f(x) \quad dv = g(x)dx$$

则：

$$du = f'(x)dx \quad v = G(x)$$

按照分部积分法的公式带入，则有：

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int G(x)f'(x)dx$$

如果要再来一次分部积分法呢？

显然，如果取 $u = G(x)$ $dv = f'(x)dx$ ，那么待会取 du 和 v 的时候就回到之前的积分去了。于是只能之前取了微分的继续微分，取了原函数的继续原函数。那接下去再来一次。



为了使结论明显直观，把 $g(x)$ 的原函数**不规范（不规范！不规范！不规范！！）** 的用 $\int g(x)$ 来表示求了一次原函数， $\iint g(x)$ 表示求了两次原函数。则第一次分部积分有：

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\left[\int g(x)\right] - \int \left[\int g(x)\right]f'(x)dx$$

接下来确定 u 和 v ：

$$u = f'(x) \quad dv = \left[\int g(x)\right]dx$$

则：

$$du = f''(x)dx \quad v = \iint g(x)$$

按照分部积分法的公式带入，则有：

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)\left[\int g(x)\right] - f'(x)\left[\iint g(x)\right] + \int \left[\iint g(x)\right]f''(x)dx$$

可以注意到几点：

- 1)、选择出谁求导谁积分之后，求导的会一直求导，积分的会一直积分。
- 2)、函数直接相乘的项，求导的次数始终比积分的次数少一，或者说积分的次数比求导的次数多一。
- 3)、由于有一个负号，那么函数直接相乘的项的负号就应该是：+ - + - + - ...
- 4)、剩下一个未完成的积分项，这个积分项中求导的函数的次数和积分的函数的次数相等。

第4)点得注意了，如果一个求导到零了，那么它就不存在了。就前面函数相乘的结果就是积分的结果。如果最后未完成的积分恰好是要求的积分式！那么就可以用代数的方法解出来。

在上一段话中先考虑前者，即两个函数中有一个能求导到零。那么对另一个就是能积分“用于求导的函数求导到零的次数”那么多次。比如某一个函数第三次求导到零，那么另外一个函数应当能“坚持”积分三次。满足这些要求就可以用列表积分法了。然后将函数按照以下方式列出来：

		(a) $g(x)$	
	$f(x)$ (1)	(b) $\int g(x)$	
$\frac{d}{dx} \downarrow$	$f'(x)$ (2)	(c) $\iint g(x)$	$\int \downarrow$
	$f''(x)$ (3)	(d) $\iiint g(x)$	
	0 (4)		

(空格空格)

那么，原积分就等于：

$$\text{原式} = + (1)(b) - (2)(c) + \dots$$

将上面四行每行对其排列着，然后划箭头：(1) → (b) 这样连起来，然后在上边标上 +，这样会变得很明显：



$$\int f(x) g(x) dx$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dx} \downarrow & f(x) & + & g(x) & \downarrow \int \\ & f'(x) & & \int g(x) & \\ & & - & & \\ & f''(x) & & \iint g(x) & \\ & & + & & \\ & 0 & & \iiint g(x) & \end{array}$$

$$\int f(x) g(x) dx = f(x) \cdot [\int g(x)] - f'(x) \cdot [\iint g(x)] + f''(x) \cdot [\iiint g(x)]$$

知乎 @秋分

这只是一个三次求导到零的情况，四次五次都可以。

这么这么看来，选择进行列表积分条件就很清晰了：

1)、某一个函数能求导到零

2)、另一个函数能比较简单的积分和求导的函数那么多次。

可见：

$$\int x^n \sin ax dx, \int x^n e^{ax} dx$$

都是这样的经典类型（函数类型无论正弦还是余弦都可以，不再分别举例，下同）。除此之外当然还有其他类型的，比如 $\int x \tan^2 x dx$ 、 $\int \arctan^2 x dx$ 具体的可参见我的文章：[秋分](#)
[72道积分题 略详解析 \(51-72\)](#)

例：

$$\int x^2 \sin ax dx$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dx} \downarrow & x^2 & + & \sin ax & \downarrow \int \\ & 2x & & -\frac{1}{a} \cos ax & \\ & & - & & \\ & 2 & & -\frac{1}{a^2} \sin ax & \\ & & + & & \\ & 0 & & \frac{1}{a^3} \cos ax & \end{array}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = -\frac{1}{a} x^2 \cos ax + \frac{2}{a^2} x \sin ax + \frac{2}{a^3} \cos ax + C$$

知乎 @秋分

赞同 45

12 条评论

分享

收藏

...



对于后者，即最后未完成的积分式恰好是需要要求的积分式，则使用半个列表积分法。

什么情况下最后未完成的积分式恰好是需要要求的积分式？最经典的情况就是：

$$\int e^x \sin x dx$$

稍微思考一下就知道， e^x 无论求导还是积分都是不会变的，而 $\sin x$ 两次积分或者求导之后便会变回之前的样子，这样的话就有了未完成的积分式恰好是需要要求的。半个分部积分的操作模板与上面的很像，只是最后多了一个横着的 “ \rightarrow ” 表示最后那一个积分。

$$\begin{array}{c} \int f(x)g(x)dx \\ \begin{array}{ccc} \frac{d}{dx} \downarrow & f(x) & \xrightarrow{+} g(x) \\ & f'(x) & \xrightarrow{-} \int g(x) \\ & f''(x) & \xrightarrow{+} \iint g(x) \\ & f'''(x) & \xrightarrow{-} \iiint g(x) \end{array} \quad \downarrow \int \\ \int f(x)g(x)dx = f(x) \cdot [\int g(x)] - f'(x) \cdot [\iint g(x)] \\ + f''(x) [\iiint g(x)] - \int f'''(x) [\iiint g(x)] \cdot dx \\ = k \cdot \int f(x)g(x)dx \end{array}$$

知乎 @秋分

如此看来，使用半个列表积分的条件也很明显了：

要么一个函数求导之后不变，另一个函数积分之后函数形式循环（积分和求导的函数可交换）；要么两个函数积分和求导都循环。

经典的题目类型就是： $\int e^{ax} \sin bx dx$

除此之外还有 $\int \sin(ax) \cos(bx) dx$ ，不过这类的题目也可以不用列表积分法求解，而是用积化和差求解。具体的可见我的文章：[秋分：72道积分题 略详解析 \(21-30\)](#)

例：



$$\int e^x \sin x \, dx$$

$$\begin{array}{c} \frac{d}{dx} \downarrow \quad \sin x \quad + \quad e^x \quad \downarrow \int \\ \cos x \quad \searrow \quad e^x \\ -\sin x \quad \xrightarrow{+} \quad e^x \end{array}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$$

知乎 @秋分へ

似乎在题头的时候说了“不过对于后者，还会有一些巧妙的变化。”

实际上，半个列表积分法不只是可以处理最后未完成的积分式与要求的积分式一样的情况。更深层的，前两种方法实际上都是在对最后一项未完成的积分项做文章：要么最后一项积分项为零，要么最后一项积分项和所求相同。

但是忽视了最简单的一种情况，（似乎）也是分部积分最初的目标：最后一项积分项能积、易积即可。最后一项积分项为零当然是易积的，但是易积绝不止为此。如接下来这题，就很巧妙：

$$\int x \ln x \, dx$$

若以 x 求导 $\ln x$ 积分，则有：



$$\int x \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dx} \downarrow & x & + \ln x & \downarrow \int \\ & \searrow & \nearrow & \\ & 1 & \longrightarrow & x \ln x - x \end{array}$$

$$\int x \ln x \, dx = x^2 \ln x - x^2 - \int (x \ln x - x) \, dx$$

$$2 \int x \ln x \, dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

知乎 @秋分へ

积分的项再积分的话发现正是要求的积分，不能再往下积了。但是左边的恰好又是 **1**，这样一来，就又出现了要求的积分。半个列表积分法就安排的妥妥的。

若以 x 积分 $\ln x$ 求导，则有：

$$\int x \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{d}{dx} \downarrow & \ln x & + x & \downarrow \int \\ & \searrow & \nearrow & \\ & \frac{1}{x} & \longrightarrow & \frac{1}{2} x^2 \end{array}$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} x^2 \, dx$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

知乎 @秋分へ

求导的发现求导无止境，越求导离“0”和原来的函数形式越远。但是骤然发现，求导和积分剩下的都是幂函数！这明显是很容易积分的。那么，果断使用半个积分法。

除此之外， $\int \ln x \, dx$ 也可以同样的用这样的方法求解，对 $\ln x$ 求导，对“1”积分，用上半个列表积分法也能同样解决问题。但是完全没有必要了...

读者可以尝试 $\int x^2 \ln x \, dx$ ，分别尝试选用不同的函数求导和积分，与 $\int x \ln x \, dx$ 有异曲同工之妙。



一眼看出到底是用求导到零的列表积分法，还是循环的半个列表积分法固然是好，这也是一个求积分的方向。特别是当看见某个乘积中的函数可以求导到零时，看见出现三角函数指数函数时，应当敏感的找到这个方向。

但是“巧妙的半个列表积分法”可以让人意识到，列表积分法应该是随心所欲的。熟练的话，就完全可以抛掉那些条条框框，只需要做到：**尝试一下列表积分法吧**。然后选择两个准备要求导和积分的函数，在草稿本或者脑子里求一列导，求一列积分。**观察一下两列的函数变化以及关系**，就可以从容的选择出接下来要做的步骤。

发布于 2019-09-04

微积分

不定积分

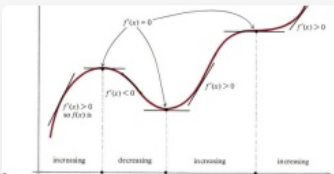
文章被以下专栏收录

数学笔记整理

每次写笔记的时候都提醒自己“只写知识点就行了！”，但总是写着写着就冗长(?)了...

关注专栏

推荐阅读



单变量微积分-第七讲-描绘函数曲线

刘梳子

发表于刘梳子数学

$$\int \frac{1}{1 + \sin \theta} d\theta$$

【A-Level】三角函数积分方法总结

双木止月Tong

微积分

爆破鬼才

12 条评论

切换为时间排序

写下你的评论...



水泞

2 个月前

留个言

赞



水泞

2 个月前

最后那个对 $x \ln x$ 的积分直接用分部积分不就好了嘛

1



秋分丿 (作者) 回复 水泞

2 个月前

我只是想举例说明...列表积分本来就是分部积分的一种表达形式啊啊

赞



学无止境

2 个月前

$\int \sin 3x \sin 5x dx$ 这样的可以算吗?

赞

赞同 45

12 条评论

分享

收藏

...



秋分 J (作者) 回复 学无止境
可以的，在我之前的文章里有

2 个月前



赞



学无止境 回复 秋分 J (作者)
好的，谢谢

2 个月前



赞

展开其他 1 条回复



多啦小曦
太清晰了!!! 找不到笔记搜到这个，开心

1 个月前



1



秋分 J (作者) 回复 多啦小曦
!

1 个月前



赞



素晴晴晴
可是 $x \ln x$ 的积分， x 求导也可以到零啊，为什么不能用第一种方法，而是用第二种加横线那个？[秋分 J](#) 而求 $x^2 \sin x$ 的积分，就用了第一种方法

1 个月前



赞



秋分 J (作者) 回复 素晴晴晴
左边的 x 的确可以求导到0...但是右边的积分呢？里面有个 $x \ln x$ 啊，怎么积？如果在这里就积出来了，那还写这些步骤干什么...

1 个月前



赞



我不知1024
不错[赞][赞]

4 天前



赞

▲ 赞同 45 ▼

💬 12 条评论

🔗 分享

★ 收藏

...