72 道积分题——略详解析

秋分乀
仅仅是在知乎凑热闹的学生，勿扰

原文章为：湖心亭看雪：这 72 道积分题目会积了，绝对是高高手
系列：
秋分乀：72 道积分题略详解析（01-20）
秋分乀：72 道积分题略详解析（21-30）
秋分乀：72 道积分题略详解析（31-50）
秋分乀：72 道积分题略详解析（51-72）

这篇文章是笔者在做这 72 道积分题的一些笔记和总结。发表这个已得到原作者的授权。本作者为学生，本就在学习，疏漏之处在所难免。有不妥之处还请指出。（好像有点太严肃了？/打破严肃）

解析里面每题会给出一至多种解法，用 a),b),⋯标示出，某些只是第一类和第二类换元法的区别，但是在这些特殊情况下，二者由于思路上或许会有很大的不同，便也分开写出来。每题下面附有"注"以解析和串联题与题之间的关系。希望对和我一样的初学微积分的同学有所裨益。（实际上本是写给自己的笔记）（另外，公式编辑的时候我偷懒了⋯）

另外，这些是我做题时自己想出来的方法，可能会有和原作者不一样的，也可能会有某些方法原作者用了但是我没有想出来。集思广益的话可以再参考原作者的答案。

正文

1. $\displaystyle\int \frac{1}{5x+3}\,\mathrm{d}x$

   解：

   (a) 设 $u=5x+3$，则 $\mathrm{d}u=5\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{5}\ln|u|+C \\
&= \frac{1}{5}\ln|5x+3|+C
\end{aligned}
\tag{1}
$$

(b) 一类换元

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{5x+3}\,\mathrm{d}(5x+3) \\
&= \frac{1}{5}\ln|5x+3| + C
\end{aligned} \tag{2}
$$

注：二种换元方法皆可。熟练的话使用后者，但自己更喜欢前者（看上去更有条理）。另外，“(C 是积分常数)”这一句作为基本的规范就不再加上去了，后文都是如此。

2. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x+3}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u = 2x+3$, 则 $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u} + C \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+3} + C
\end{aligned} \tag{3}
$$

注：替换即可，以后一般情况不再区分此二种换元方式，以前者解析。特殊情况会继续区分此二者。

3. $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u = x^2$, 则 $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{u} + C \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + C
\end{aligned} \tag{4}
$$

注：替换即可，按照 $\mathrm{d}x^2$ 的变换亦可，但在此不写。实际上 $x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}x^2$ 这种第一类换元方式在某些时候十分重要，甚至会比设 $u = f(x)$ 这第二类换元方式更好用。这一点在题27会说明，在题35会有深刻体现。

4. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u = 1-x^2$，则 $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\
&= -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned} \tag{5}
$$

注：设 $u=1-x^2$ 后，其 $\mathrm{d}u$ 带来的一个 x 便可消掉被积函数的 x。在上一题以及之后的换元的题也是如此。

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u=\dfrac{1}{x}$，则 $\mathrm{d}u=-\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\int \sin u\cdot \mathrm{d}u\\&=\cos u+C\\&=\cos\frac{1}{x}+C\end{aligned}\tag{6}$$

注：替换之后约掉 $\dfrac{1}{x^2}$ 即可。

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u=\sqrt{x}$，则 $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\int \mathrm{e}^{3u}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3u}+C\\&=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{3\cdot\sqrt{x}}+C\end{aligned}\tag{7}$$

注：替换，然后去掉分母的 $\sqrt{x}$ 即可。

7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+1)}$

解：

(a) 先裂项：设

$$\frac{1}{x(x^6+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx^5}{x^6+1}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x^5}{x^6+1}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-\int\frac{x^5}{x^6+1}\,\mathrm{d}x\\&=\ln|x|-\frac{1}{6}\ln\left|x^6+1\right|+C\end{aligned}\tag{9}$$

(b) 直接凑：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{x^5\,\mathrm{d}x}{x^6(x^6+1)} \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}x^6}{x^6(x^6+1)} \\
&= \frac{1}{6}\int \left(\frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^6+1}\right)\mathrm{d}x^6 \\
&= \frac{1}{6}\ln\left|x^6\right| - \frac{1}{6}\ln\left|x^6+1\right| + C \\
&= \ln|x| - \frac{1}{6}\ln\left|x^6+1\right| + C
\end{aligned} \tag{10}
$$

注：对于 $\dfrac{1}{(a+bx^n)x}$ 可用方法一拆分为 $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B\cdot bx^{n-1}}{a+bx^n}$($A,B$ 是待定系数)。当然，在这种情况下（或者某些更宽泛的情况下，分子有因式比分母的因式少一次时，在此分母有“x”这一次的因式、分子有“1”这零次的因式）可利用方法二将分子分母的两个因式同次化（分子那少一次的因式和 $\mathrm{d}x$ 合成，使得同次化）。实际上两种方法同源，但后者中 $\dfrac{1}{6}\ln\left|x^6\right|$ 容易忘记化简。个人更倾向于前一种方法。

8. $\displaystyle\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}(2x) \\
&= \frac{1}{2}\sin 2x + C
\end{aligned} \tag{11}
$$

注：替换即可，由于只是系数的变化，这样更为简单。

9. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u=5+\cos x$，则 $\mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= -\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\
&= -2\sqrt{u} + C \\
&= -2\sqrt{5+\cos x} + C
\end{aligned} \tag{12}
$$

注：替换即可，$\sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\,\mathrm{d}x$ 在后面会经常用且很方便，但在此还是选择上文的方法。

10. $\displaystyle\int \tan^4 x \,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \tan^2 x \left(\sec^2 x - 1\right) \mathrm{d}x \\
&= \int \tan^2 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int \tan^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \int \tan^2 x \,\mathrm{d}\left(\tan x\right) - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C
\end{aligned} \tag{13}
$$

注：很自然的想到得用 $1+\tan^2 x = \sec^2 x$ 来展开 $\tan^4 x$。不过到底是 $\tan^2 x\left(\sec^2 x - 1\right)$ 还是 $\left(\sec^2 x - 1\right)^2$ 呢？注意到 $\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$，很自然的想到选用前者。

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 以及变化形式的 $1+\tan^2 x = \sec^2 x$、$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$ 是极其常用的，应当熟记。除此，$\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$、$\cot^2 x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}(\csc x)$ 等也是十分常用。在后面会有更多这样的题，要在心中谨记着：$\sec^2 x\,\mathrm{d}x$ 是可以化成 $\mathrm{d}(\tan x)$ 的，剩下的东西能不能化为 $f(\tan x)$ 的形式？如在题15，以及更普遍的题25、26等都有体现。

另外，对于次数为奇次的，即 $\displaystyle\int \tan^{2n+1} x\,\mathrm{d}x$ 这样的积分有递推公式。举 $\displaystyle\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x$ 一例作为说明：

$$
\begin{aligned}
\int \tan^5 x\,\mathrm{d}x &= \int \tan^3 x \tan^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\sec^2 - 1\right) \tan^3 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \tan^3 x \sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \tan^3 x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan^3 x\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{14}
$$

同样的，有：

$$
\int \tan^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\tan^{2n} x - \int \tan^{2n-1} x\,\mathrm{d}x \tag{15}
$$

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 奇奇怪怪的解法：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \mathrm{e}^x \cdot \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\left(\ln|1+\mathrm{e}^x|\right) \\
&= \mathrm{e}^x \ln|1+\mathrm{e}^x| - \int \ln|1+\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) \\
&= \mathrm{e}^x \ln|1+\mathrm{e}^x| - \int \ln|1+\mathrm{e}^x|\,\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x) \\
&= \mathrm{e}^x \ln|1+\mathrm{e}^x| - (1+\mathrm{e}^x)\ln|1+\mathrm{e}^x| + (1+\mathrm{e}^x) + C \\
&= \mathrm{e}^x - \ln|1+\mathrm{e}^x| + C
\end{aligned} \tag{16}
$$

(b) 一类换元：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) \\
&= \int \left(1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) \\
&= \mathrm{e}^x - \ln|1+\mathrm{e}^x| + C
\end{aligned} \tag{17}
$$

(c) 二类换元：设 $u = 1+\mathrm{e}^x$，则 $\mathrm{e}^x = u-1$ 且 $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \\
&= u - \ln|u| + C \\
&= 1+\mathrm{e}^x - \ln|1+\mathrm{e}^x| + C \\
&= \mathrm{e}^x - \ln|1+\mathrm{e}^x| + C
\end{aligned} \tag{18}
$$

注：方法一是在胡乱试一下的情况想出来的⋯第一步强行凑出一个微分，然后用分部积分法。然后发现对数里面的东西和微分里面的只差个项“1”。$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)$ 这样的操作倒是挺有意思的。亦即 $\mathrm{d}[f(x)] = \mathrm{d}[f(x)+C]$、$c\cdot\mathrm{d}[f(x)] = \mathrm{d}[c\cdot f(x)]$ 这样的操作。这会在题62会有体现。

方法二和方法三实际上同源，这与题7有相似之处。分子相当于是 e^x 的二次项，分子含有其一次项。想到 $\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$ 恰可消掉分子一次，这样便是个很好的换元了。

12. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$

解：

(a)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int 1\,\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\
&= x - \ln|1+\mathrm{e}^x| + C
\end{aligned} \tag{19}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x} - \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} \\
&= \ln|\mathrm{e}^x| - \ln|1+\mathrm{e}^x| + C \\
&= x - \ln|1+\mathrm{e}^x| + C
\end{aligned} \tag{20}
$$

注：解决上一题的时候实际上就已经解决了这一题。方法二与题7有相似之处。但个人最喜欢的还是方法一。对于 $\int \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$、$\int \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ 之类的，利用加一项减一项的方法配凑出 $a\int \frac{\mathrm{e}^x}{1\pm\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ 则很容易求解。这类型的技巧在求解某类微分方程时会很容易遇到。

13. $\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u = 1+\ln x$，则 $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{u} + C \\
&= -\frac{1}{\ln x} + C
\end{aligned} \tag{21}
$$

注：做替换之后消去分母的 x 即可。

14. $\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u = 1 + 2\ln x$，则 $\mathrm{d}u = \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln|1 + 2\ln x| + C
\end{aligned} \tag{22}$$

注：实际上和上一题是一样的，做变换消掉分母的 x 即可。做变换 $u = \ln x$ 亦可，但是换元还是换完更好。

15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x + \frac{b^2}{a^2}\sin^2 x} \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2 x} \qquad (\text{同除以} \cos^2 x) \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2 x}
\end{aligned} \tag{23}$$

设 $u = \tan x$，则化成：

$$\text{原式} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + \frac{b^2}{a^2}u^2} \tag{24}$$

继续设 $u = \frac{a}{b}\tan v$，则 $\mathrm{d}u = \frac{a}{b}\sec^2 v\,\mathrm{d}v$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{a}{b}\sec^2 v}{1 + \tan^2 v}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{ab}\int \frac{\sec^2 v}{\sec^2 v}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{ab}\int \mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{ab}v + C \\
&= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}u\right) + C \\
&= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}\tan x\right) + C
\end{aligned} \tag{25}$$

注：这就是题10说的 $\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\tan x)$。注意到这一点，这一题便迎刃而解。在求解中最后那里用了三角换元，为了展示所以换了两次变量。但实际上熟练的话看见这样的积分式子可以直接写出答案。

另外，$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x}$ 亦用这种方法解。不过不用三角换元。替换之后用平方差打开即可（差的话三角换元得注意定义域，得在不同的定义域内用不同的三角换元）。在此就不写出来了。

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$

解：

(a) 设 $x = a\tan u$，则 $\mathrm{d}x = a\sec^2\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a}\int \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a}u + C \\
&= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C
\end{aligned} \tag{26}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \\
&= \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \\
&= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C
\end{aligned} \tag{27}$$

注：三角代换的基本内容，熟练的可以使用后者，甚至直接看出答案。之后换元之后的化简过程不再写出来。

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+x)(a-x)} \\
&= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2a}\left(\ln|a+x| - \ln|a-x|\right) + C \\
&= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C
\end{aligned} \tag{28}$$

注：$\dfrac{1}{a^2-x^2}$ 和 $\dfrac{1}{x^2-a^2}$ 可以用三角代换，比如此题，就可以用 $\tanh x$、$\coth x$ 代换。但是如前面所言，这样不得不考虑定义域的问题。因为 $\coth x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $\tanh x \in (-1, 1)$，所以不得不分两段换元。因此以平方差展开最佳。

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

解：

(a) 设 $x = a\sin u$，则 $\mathrm{d}x = a\cos u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \mathrm{d}u \\
&= u + C \\
&= \arcsin\frac{x}{a} + C
\end{aligned} \tag{29}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \\
&= \arcsin\frac{x}{a} + C
\end{aligned} \tag{30}$$

注：三角代换的基本内容，熟练者可使用后者或直接写出答案。

19. $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\int \sin^2 x\,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= \int \cos^2 x\,\mathrm{d}(\cos x) - \int \mathrm{d}(\cos x) \\
&= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C
\end{aligned} \tag{31}$$

注：接下来的题19、20、21、23都为同一类型的题。但题22倒有些不同，题22到了再解析。而题19、20、21、23在题23再解析这种类型的题目的通法。而在这之前很容易的就能找出规律。

在本题中，拿出一个 $\sin x$ 与 $\mathrm{d}x$ 结合成 $-\mathrm{d}(\cos x)$ 然后用三角恒等式将 $\sin x$ 化为 $\cos x$ 便可积。也就是一类换元法。可以看见，在此一类换元会比二类换元更好用，二类换元甚至很难找到应该换什么。这种情况下就应该用一类换元法。

20. $\displaystyle\int \sin^5 x \,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\int \sin^4 x \,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\int (1-\cos^2 x)^2 \,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= \int \left(-\cos^4 x + 2\cos^2 x - 1\right) \mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C
\end{aligned} \tag{32}$$

注：此题亦拿出一个 $\sin x$ 与 $\mathrm{d}x$ 结合成 $-\mathrm{d}(\cos x)$，然后将剩下的化为 $f(\cos x)$ 的形式，便可积。

21. $\displaystyle\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \cos^2 x \,\mathrm{d}(\sin x) \\
&= \int \left(1-\sin^2 x\right) \mathrm{d}(\sin x) \\
&= -\frac{1}{3}\sin^3 x + \sin x + C
\end{aligned} \tag{33}$$

注：此题是拿出 $\cos x$ 与 $\mathrm{d}x$ 结合成 $\mathrm{d}(\sin x)$。然后将剩下的 $\cos^2 x$ 化为 $1-\sin^2 x$，便可积。

22. $\displaystyle\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \left[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right]+C \\
&= \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C
\end{aligned}
\tag{34}
$$

注：此题与前几题不同，原因是这一题是偶数次幂。对于此类型的题目，降幂次即可。

23. $\int \sin^2 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \sin^2 x\cos^4 x\,\mathrm{d}(\sin x) \\
&= \int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)^2 \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \int \left(\sin^2 x-2\sin^4 x+\sin^6 x\right) \mathrm{d}(\sin x) \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x+C
\end{aligned}
\tag{35}
$$

注：前面也说了，此题与题19、20、21同类型。$\int \sin^{2n+1} x\cos^{2m} x\,\mathrm{d}x$ 或者 $\int \cos^{2n+1} x\sin^{2m} x\,\mathrm{d}x$ 其特征就是“总”次数为奇次幂。将此奇次幂分开一个，与 $\mathrm{d}x$ 结合成 $\mathrm{d}(\sin x)$ 或者 $\mathrm{d}(\cos x)$。剩下的皆为偶次。接下来化为和微分一样的同函数即可积。这一类型的题都是简单的。

24. $\int \sec x\,\mathrm{d}x$

解：

(a)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \sec x\cdot\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{36}
$$

注意到 $(\sec^2 x + \sec x \tan x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sec x + \tan x)$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}(\sec x + \tan x) \\
&= \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned} \tag{37}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1 - \sin^2 x} \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x}\right)\mathrm{d}(\sin x) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right| + C
\end{aligned} \tag{38}$$

注：两种方法皆可。但在国内的教材里面后者为主，并且也可以看成前一题所述的方法的运用，并且在后面还会有这样的运用。方法一在《托马斯微积分》有出现。看上去方法更妙，结论更简洁。这两个结果的互化是很简单的，在此就不展开了。除此之外，还可以用 $\tan\dfrac{x}{2}$ 的代换。

另外，这个积分公式很重要，和 $\displaystyle\int \csc x\,\mathrm{d}x$ 一起甚至是可以放入基本积分表的。

25. $\displaystyle\int \sec^3 x \tan^5 x\,\mathrm{d}x$

解：

(a)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \sec^2 x \tan^4 x \cdot \sec x \tan x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec^2 x(\sec^2 x - 1)^2\,\mathrm{d}(\sec x) \\
&= \int \left(\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x\right)\mathrm{d}(\sec x) \\
&= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C
\end{aligned} \tag{39}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sin^5 x}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^8 x}\,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= \int \left(-\cos^{-8} x + 2\cos^{-6} x - \cos^{-4}\right)\mathrm{d}(\cos x) \\
&= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C \qquad (40)
\end{aligned}
$$

注：此题与下一题为同一类型（也有一点点不同），但先在此说明了。方法二还是前面说的方法类型：奇次的正余弦函数，所以可以化为 $f(\sin x)g(\cos x)$ 的形式，以题23的方法求解即可。

重点是方法一，提出 $\sec x\tan x$ 与 $\mathrm{d}x$ 化为 $\mathrm{d}(\sec x)$ 接下来将 $f(\tan x)$ 化为 $g(\sec x)$ 即可。

这是 $\int \tan^{2n+1} x \sec^m x\,\mathrm{d}x$ 类型的题目，其要点是 $\tan x$ 为奇数幂次，而 $\sec x$ 无限制。$\tan^{2n+1} x$ 和 $\sec^m x$ 各提出一个，与 $\mathrm{d}x$ 结合成 $\mathrm{d}(\sec x)$。剩下的 $\sec^{m-1} x$ 无影响，$\tan^{2n} x$ 恰好为偶数幂次，则易用 $1+\tan^2 x = \sec^2 x$ 化为全为 $\sec x$ 函数的形式。便可容易积分。所以其特点是 $\tan x$ 为奇次。

26. $\int \tan^5 x \sec^4 x\,\mathrm{d}x$

解：

(a)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \tan^4 x \sec^3 x \cdot \sec x \tan x\,\mathrm{d}x \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^3 x\,\mathrm{d}(\sec x) \\
&= \int \left(\sec^7 x - 2\sec^5 x + \sec^3 x\right)\mathrm{d}(\sec x) \\
&= \frac{1}{8}\sec^8 x - \frac{1}{3}\sec^6 x + \frac{1}{4}\sec^4 x + C \qquad (41)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \tan^5 x \sec^2 x \cdot \sec^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int \tan^5 x\left(1+\tan^2 x\right)\mathrm{d}(\tan x) \\
&= \int \left(\tan^5 x + \tan^7 x\right)\mathrm{d}(\tan x) \\
&= \frac{1}{6}\tan^6 x + \frac{1}{8}\tan^8 x + C \qquad (42)
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sin^5 x}{\cos^9 x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{\sin^4 x}{\cos^9 x}\,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^9 x}\,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= \int \left(-\cos^{-9} x + 2\cos^{-7} x - \cos^{-5} x\right)\,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= \frac{1}{8}\sec^8 x - \frac{1}{3}\sec^6 x + \frac{1}{4}\sec^4 x + C
\end{aligned} \tag{43}
$$

注：可以看出由于 $\tan x$ 为奇幂次，此题亦可用上面的方法求解。它们分别为方法一和方法三，不再多言。

重点是方法二，在此提出 $\sec^2 x\,\mathrm{d}x$ 化为 $\mathrm{d}(\tan x)$，剩下的 $\sec^2 x$ 恰为偶幂次，可以化为 $\tan x$ 的形式。

此为 $\displaystyle\int \tan^m x \sec^{2n} x\,\mathrm{d}x$ 的类型。其要点是 $\sec x$ 为偶数幂次，$\tan x$ 次数无限制。$\sec^{2n} x$ 提出 $\sec^2 x$ 与 $\mathrm{d}x$ 结合为 $\mathrm{d}(\tan x)$。剩下的 $\sec^{2n-2} x$ 也为偶数幂次，则可以化为全为 $\tan x$ 函数的形式。所以其特点为：$\sec x$ 为偶幂次。

27. $\displaystyle\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 设 $u = \tan x$，则 $\mathrm{d}u = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\ln u}{\sin x \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\ln u \sec^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\ln u \sec^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\ln u}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{44}
$$

到这里和很前面的换元题一样很简单了：设 $v=\ln u$，则 $\mathrm{d}v=\dfrac{1}{u}\mathrm{d}u$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int v\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}v^2+C \\
&= \frac{1}{2}\ln^2 u+C \\
&= \frac{1}{2}\ln^2(\tan x)+C
\end{aligned}
\tag{45}
$$

(b) 注意到 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}=\mathrm{d}\left[\ln(\tan x)\right]$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \ln(\tan x)\,\mathrm{d}\left[\ln(\tan x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln^2(\tan x)+C
\end{aligned}
\tag{46}
$$

注：此题为后面一大堆奇怪类型的开端，在此将之分为：

1) 奇怪的复合函数类型。比如：此题，还有题31、32、59、60、68。对于此直接替换内层函数。此题替换 $u=\tan x$ 即可，替换之后剩下的就很简单了。

2) 巧妙替换 $\mathrm{d}x$ 型。即：将积分视作 $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，观察是否有 $g(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}[f(x)]$，有则化为 $\int f(x)\,\mathrm{d}[f(x)]$ 的形式。如：此题，还有题31、32、35、60、68。或者“退而求其次”，如：题55、61、65。为什么叫“退而求其次”？到了这三题就知道了（雾）。对于这一题来说，观察到分子的微分恰好就是剩下的东西，那么就是这样了。需要注意的是，*这并不是拆开分子和分母！*

一般来说，1)与2)是统一的，即都能比较简单的操作得到结果（虽然方法二看上去会难以想象到一点，但是按照上面的方法思考的话它也是显而易见的）。但是题35却并非如此，到那一题再说明。

28. $\int \cos 3x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 积化和差：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C
\end{aligned}
\tag{47}
$$

(b)（半个）列表积分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow\quad\begin{array}{rl} \cos 3x(1) & (a)\cos 2x \\ -3\sin 3x(2) & (b)\dfrac{1}{2}\sin 2x \\ -9\cos 3x(3) & (c)-\dfrac{1}{4}\cos 2x \end{array}\quad\downarrow\int \tag{48}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= +(1)(b)-(2)(c)+\int(3)(c)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cos 3x\sin 2x-\frac{3}{4}\sin 3x\cos 2x+\frac{9}{4}\int\cos 3x\cos 2x\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{49}$$

$$\therefore -\frac{5}{4}\int\cos 3x\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos 3x\sin 2x-\frac{3}{4}\sin 3x\cos 2x+C \tag{50}$$

$$\therefore \int\cos 3x\cos 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{5}\cos 3x\sin 2x+\frac{3}{5}\sin 3x\cos 2x+C \tag{51}$$

注：积化和差显然更简单，看上去（半个）列表积分法很复杂的样子，“效果”还不好。

在此试求：$\int\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x,\quad (m,n\in\mathbb{R})$

由（半个）列表积分法：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow\quad\begin{array}{rl} \cos mx(1) & (a)\cos nx \\ -m\sin mx(2) & (b)\dfrac{1}{n}\sin nx \\ -m^2\cos mx(3) & (c)-\dfrac{1}{n^2}\cos nx \end{array}\quad\downarrow\int \tag{52}$$

$$\begin{aligned} \int\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x &= +(1)(b)-(2)(c)+\int(3)(c)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\cos mx\sin nx-\frac{m}{n^2}\sin mx\cos nx \\ &\quad+\frac{m^2}{n^2}\int\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} \therefore\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\int\cos mx\cos nx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n}\cos mx\sin nx \\ &\quad-\frac{m}{n^2}\sin mx\cos nx \end{aligned} \tag{54}$$

$$\therefore \int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{n}{n^2 - m^2} \cos mx \sin nx - \frac{m}{n^2 - m^2} \sin mx \cos nx + C \tag{55}$$

由积化和差：

$$\begin{aligned}\int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x &= \int (\cos[(m-n)x] + \cos[(m+n)x]) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{m-n} \sin[(m-n)x] \\ &\quad + \frac{1}{m+n} \sin[(m+n)x] + C\end{aligned} \tag{56}$$

就视觉上来说二者看上去是等价的。因为用（半个）列表积分法所得的结果与积化和差的结果还是只差个积化和差。不过先积化和差会使积分简单得多。

29. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \, \mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} - \frac{1}{1 + \sin x} \right) \mathrm{d}x \\ &= x - \int \frac{1}{1 + \sin x} \, \mathrm{d}x \\ &= x - \int \frac{1}{1 + \sin x} \cdot \frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \, \mathrm{d}x \\ &= x - \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x \\ &= x - \int \left(\sec^2 x - \sec x \tan x \right) \mathrm{d}x \\ &= x - \tan x + \sec x + C\end{aligned} \tag{57}$$

注：此题与题53、54相联系。$\dfrac{1}{1 \pm \sin x}$、$\dfrac{1}{1 \pm \cos x}$ 都可以先乘以 $\dfrac{1 \mp \sin x}{1 \mp \sin x}$、$\dfrac{1 \mp \cos x}{1 \mp \cos x}$，即分母可用平方差公式，再利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 转化为相同的函数，拆开后便很简单很易积了。

在题53、54还会有 $\tan \dfrac{x}{2}$ 的代换，在这里就不说了。

30. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x \cos x}$

解：

(a)

$$
\begin{aligned}
原式 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\cos^2 x} \qquad\qquad (\sin 2x = 2\sin x\cos x) \\
&= \frac{1}{2}\int \csc x \sec^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{\cot^2 x + 1}\,\mathrm{d}(\tan x)
\end{aligned} \tag{58}
$$

设 $u = \tan x$

$$
\begin{aligned}
原式 &= \frac{1}{2}\int \sqrt{\frac{1}{u^2} + 1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{u^2+1}}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned} \tag{59}
$$

设 $v = \sqrt{u^2+1}$，则 $\mathrm{d}v = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u$ 且 $v^2 = u^2 + 1$

$$
\begin{aligned}
原式 &= \frac{1}{2}\int \frac{v}{u}\cdot\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{v^2-1}\right)\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}v + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{u^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{u^2+1}-1}{\sqrt{u^2+1}+1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\sec x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}\right| + C
\end{aligned} \tag{60}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
原式 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\cos^2 x} \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x}
\end{aligned} \tag{61}
$$

设 $u=\cos x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)u^2} \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1-u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2u}-\frac{1}{4}\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2u}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C \\
&= \frac{1}{2}\sec x-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C
\end{aligned} \tag{62}$$

注：方法一和方法二的结果其实是一样的。

方法一考虑的是 $\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$，但是带来了麻烦

方法二考虑的是正余弦次数和为奇次，则以 $f(\sin x)g(\cos x)$ 的通法求解，比较简单。

实际上方法一还间接的解决了 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x$ 这一积分。

31. $\displaystyle\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 设 $u=\sqrt{x}$，则 $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}$ 且 $u^2=x$

$$\text{原式}=2\int \frac{\arctan u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \tag{63}$$

注意到：$\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\mathrm{d}(\arctan u)$, 所以：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\int \arctan u\,\mathrm{d}(\arctan u) \\
&= \arctan^2 u+C \\
&= \arctan^2\left(\sqrt{x}\right)+C
\end{aligned} \tag{64}$$

(b) 由：$\dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}(x^2+1)}=\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{x}\right)$, 直接可得：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\left(\arctan\sqrt{x}\right) \\
&= \arctan^2\left(\sqrt{x}\right)+C
\end{aligned} \tag{65}$$

注：此为奇怪复合函数类型。如题27所言，直接设内层函数即可。如果可以一眼看出微分的话也可以像方法二一样做。实际上这两种方法是一样的。

32. $\int \frac{1+\ln x}{2+(x+\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u = x\ln x$，则 $\mathrm{d}u = (\ln x + 1)\,\mathrm{d}x$

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} \tag{66}$$

设 $u = \sqrt{2}\tan v$，则 $\mathrm{d}u = \sqrt{2}\sec^2 v\,\mathrm{d}v$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 v}{2\sec^2 v}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}v + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x\ln x}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned} \tag{67}$$

注：此题亦为奇怪复合函数类型。设最内层为 u 即可，亦可以以上一题方法二解。

33. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u = x^2-3x+1$，则 $\mathrm{d}u = (2x-3)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|x^2-3x+1| + C
\end{aligned} \tag{68}$$

注：此题为下一题、甚至分母再加上根号（如题41）的母版（不过题41有一点不一样的，在题41内再说）。在此先说明了。

这类分母为二次函数、分子为一次函数的题，可以如下操作：无论是否有根号，分母有二次、一次、零次项，分子有一次项，则先通过加减常数将分子分离出一个分母二次函数的微分的式子。并且分离之后另一项只剩下常数项。如此题就是分子恰为分母的微分的式子，不需要变化。这样两个式子都易进行积分。

34. $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-3+5}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-3x+1| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-3x+1| + \frac{5}{2}\int \left(\frac{1}{x-\frac{\sqrt{5}+3}{2}} + \frac{1}{x+\frac{\sqrt{5}-3}{2}}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-3x+1| + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{5}+3}{2}}{x+\frac{\sqrt{5}+3}{2}}\right| + C
\end{aligned} \tag{69}
$$

注：如题33所言即可。分开后前者是很简单的，而后者是分子为常数项，分母为二次函数，这样的话就将二次函数化为平方差，则变成之前的类型了。

35. $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,\mathrm{d}x$

解：

$$
\text{原式} = \int \frac{1-\ln x}{x^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{70}
$$

注意到 $\displaystyle\frac{1-\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) \\
&= -\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} + C \\
&= -\frac{x}{\ln x - x} + C
\end{aligned} \tag{71}
$$

注：这一题着实令人摸不着头脑（我没做出来）。它是奇怪复合函数类型，似乎只能用此法？

36. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

解：设 $x = a\sin u$，则 $\mathrm{d}x = a\cos u\,\mathrm{d}u$ 且 $\sin u = \dfrac{x}{a}, \cos u = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} =$

$\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= a^2\int \cos^2 u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{a^2}{2}u+\frac{a^2}{4}\sin 2u + C \\
&= \frac{a^2}{2}u+\frac{a^2}{2}\sin u\cos u + C \\
&= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C
\end{aligned} \tag{72}$$

注:标准的三角代换题目。但注意,最后的 $\sin u$ 和 $\cos u$ 不要用 $\sin(\arcsin(\cdots))$ 的样子写出来。同时有三角函数和反三角函数则写成多项式的形式。

另外,有关我习惯选用三角代换的三角类型见文末。(也可以先去文末,再看接下来的几题。)

37. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

解:设 $x=a\cosh u$,则 $\mathrm{d}x=a\sinh u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{a\sinh u}{a\sinh u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \mathrm{d}u \\
&= u+C \\
&= \cosh^{-1}\frac{x}{a}+C
\end{aligned} \tag{73}$$

注:标准的三角代换题目。

38. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

解:设 $x=a\sinh u$,则 $\mathrm{d}x=a\cosh u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{a\cosh u}{a\cosh u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \mathrm{d}u \\
&= u+C \\
&= \sinh^{-1}\frac{x}{a}+C
\end{aligned} \tag{74}$$

注:标准的三角代换题目。

39. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

解：设 $u=\sqrt[6]{x}$，则 $x=u^6, \mathrm{d}x=6u^5\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 6\int \frac{u^3}{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 6\int \left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= 2u^3-3u^2+6u-6\ln|u+1|+C \\
&= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C
\end{aligned} \tag{75}$$

注：遇上这样带根号的题，毫不犹豫的就选择去根号。如前面的题31，以及后面的题44、58. 有如 $\sqrt[n]{ax+b}$、$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 都是直接去根号即可（理论上）。但是要注意的是，去根号要彻底。故此题设的是 $u=\sqrt[6]{x}$，则可化为整式。

另外，分子次数比分母大，在前面都没出现过。但这是真分式化就能搞定的问题。

40. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

解：设 $x=\tan u$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2 u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\sec^2 u}{\sec^4 u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \cos^2 u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\sin u\cos u+C
\end{aligned} \tag{76}$$

又：$\sin u=\dfrac{\tan u}{\sec u}, \cos u=\dfrac{1}{\sec u}$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+C \tag{77}$$

注：不标准的三角代换题，但它是 $\dfrac{1}{x^2+1}$ 的形式。故可用 $x=\tan u$ 代换。那个平方不碍事。

41. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+2x-5}}\,\mathrm{d}x$

解：

(a)

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{2}{3}+2-2}{\sqrt{x^2+2x-5}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-5}}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x-5}} \\
&= 3\sqrt{x^2+2x-5} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2-(\sqrt{6})^2}} \qquad (78)
\end{aligned}
$$

设 $x+1=\sqrt{6}\cosh u$，则 $\mathrm{d}x=\sqrt{6}\sinh u\,\mathrm{d}u$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 3\sqrt{x^2+2x-5} - 2\int \mathrm{d}u \\
&= 3\sqrt{x^2+2x-5} - 2\cosh^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C \qquad (79)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\text{原式} = \int \frac{3x+1}{\sqrt{(x+1)^2-(\sqrt{6})^2}}\,\mathrm{d}x \qquad (80)
$$

设 $x+1=\sqrt{6}\cosh u$，则 $\mathrm{d}x=\sqrt{6}\sinh u\,\mathrm{d}u$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{3x+1}{\sqrt{6}\cosh u}\cdot\sqrt{6}\cosh u\,\mathrm{d}u \\
&= \int (3x+1)\,\mathrm{d}u \\
&= \int (3\sqrt{6}\cosh u-2)\,\mathrm{d}u \\
&= 3\sqrt{6}\sinh u - 2u + C \qquad (81)
\end{aligned}
$$

又：$\sinh u = \sqrt{\cosh^2 u - 1} = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{6}-1}$

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 3\sqrt{6}\sqrt{\frac{(x+1)^2}{6}-1} - 2\cosh^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C \\
&= 3\sqrt{x^2+2x-5} - 2\cosh^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{6}}\right) + C \qquad (82)
\end{aligned}
$$

注：如题33所言，可以先拆开。这便是常规的方法了。但是注意到分母的平方差是在根式之内的，可以用三角代换（题33虽然是平方差但是没有根式，因此不用三角代换）。而这个代换又是标准的三角代换（即代换之后三角代换的部分可以全部抵消掉，在此只剩下不属于三角代换的分子）。所以可以不用拆开，直接三角代换解题。

稍微推广一下，除此之外的分母是二次函数的题，如果分母是标准形式的三角代换，若分子有一个一次函数，应该也可以直接代换解之。比如：$\dfrac{ax+b}{x^2+c^2}$ 应该也可以直接代换。

42. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

解：

(a) 设 $x=\dfrac{1}{u}$，则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int \frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u^2}\sqrt{\frac{1}{u^2}-1}}\,\mathrm{d}u\\&=-\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u\end{aligned}\tag{83}$$

设 $v=1-u^2$，则 $\mathrm{d}v=-2u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v}}\\&=\sqrt{v}+C\\&=\sqrt{1-u^2}+C\\&=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C\end{aligned}\tag{84}$$

(b) 设 $x=\cosh u$，则 $\mathrm{d}x=\sinh u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int \frac{\sinh u}{\cosh^2 u\cdot\sinh u}\,\mathrm{d}u\\&=\int \operatorname{sech}^2 u\,\mathrm{d}u\\&=\tanh u+C\\&=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C\end{aligned}\tag{85}$$

(c) 设 $x=\sec u$，则 $\mathrm{d}x=\sec u\tan u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int \frac{\sec u\tan u}{\sec^2 u\tan u}\,\mathrm{d}u\\&=\int \cos u\,\mathrm{d}u\\&=\sin u+C\\&=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C\end{aligned}\tag{86}$$

注：此题可用多种方法解。方法一为倒代换法。一般在分母次数比分子高的时候使用。设 $x=\dfrac{1}{u}$ 以求消去分母以容易积分。一般来说不失为一种尝试。如题43也是如此。但是注意到有 $\sqrt{x^2-1}$，故可代换 $x=\cosh u$，剩下的不碍事。更加的，注意到有 $x\sqrt{x^2-1}$，便可代换 $x=\sec u$，这样更佳。

43. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}$

解：设 $x=\dfrac{1}{u}$，则 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{-\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u}{\frac{1}{u^6}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)} \\
&= -\int \frac{u^6}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= -\int \left(u^4-u^2+1-\frac{1}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3-u+\arctan u+C \\
&= -\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+\arctan\frac{1}{x}+C
\end{aligned} \tag{87}$$

注：这是倒代换很经典的一道题（$\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\,\mathrm{d}x$ 也是很经典的一道题，不在这 72 道题里面，可以试一下，在此就不写了）。由于含有 $\dfrac{1}{x^2+1}$，（理论上）也可以用 $x=\tan u$ 代换，在此便不说明了。

44. $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 设 $u=1+\sqrt{x}$，则 $x=(u-1)^2, \mathrm{d}x=2(u-1)\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int 2\sqrt{u}(u-1)\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int\left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}+C \\
&= \frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}+C
\end{aligned} \tag{88}$$

(b) 设 $u=\sqrt{1+\sqrt{x}}$，则 $x=(u^2-1)^2, \mathrm{d}x=2(u^2-1)\cdot 2u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=4\int u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{4}{5}u^5-\frac{4}{3}u^3+C\\&=\frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}\tag{89}$$

注：此题为带根号的题目，也属于奇怪的复合函数的题型。方法一与方法二都是去根号。方法一也属于代换内层函数。但显然的，彻底去根号更好。

45. $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

解：列表积分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow\begin{array}{rl}x(1) & (a)\cos x\\ 1(2) & (b)\sin x\\ 0(3) & (c)-\cos x\end{array}\downarrow\int\tag{90}$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=+(1)(b)-(2)(c)\\&=x\sin x+\cos x+C\end{aligned}\tag{91}$$

注：标准的分部积分题。但是要用分部积分的话，用列表积分的方式会更方便、更直观，甚至有时候会有意想不到的效果。

46. $\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

解：列表积分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow\begin{array}{rl}x^2(1) & (a)\cos x\\ 2x(2) & (b)\sin x\\ 2(3) & (c)-\cos x\\ 0(4) & (d)-\sin x\end{array}\downarrow\int\tag{92}$$

$$\begin{aligned}\text{原式}&=+(1)(b)-(2)(c)+(3)(d)\\&=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C\end{aligned}\tag{93}$$

注：标准的列表积分题。

47. $\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

解：列表积分法

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow\begin{array}{rl}x(1) & (a)\mathrm{e}^x\\ 1(2) & (b)\mathrm{e}^x\\ 0(3) & (c)\mathrm{e}^x\end{array}\downarrow\int\tag{94}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= +(1)(b)-(2)(c) \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned} \tag{95}$$

注：标准的列表积分题。

48. $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$

解：列表积分法

$$\frac{d}{dx}\downarrow \begin{array}{rl} x^2(1) & (a)e^x \\ 2x(2) & (b)e^x \\ 2(3) & (c)e^x \\ 0(4) & (d)e^x \end{array} \downarrow \int \tag{96}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= +(1)(b)-(2)(c)+(3)(d) \\ &= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C \end{aligned} \tag{97}$$

注：标准的列表积分题。

49. $\displaystyle\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$

解：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2}\int x^2(1+\cos x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx \\ &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \sin x + x\cos x - \sin x + C \end{aligned} \tag{98}$$

注：很明显的降次。之后便是普通的列表积分题。

50. $\displaystyle\int x \tan^2 x \, dx$

解：列表积分法

$$\frac{d}{dx}\downarrow \begin{array}{rl} x(1) & (a)\tan^2 x \\ 1(2) & (b)\tan x - x \\ 0(3) & (c)\ln|\sec x| - \dfrac{x^2}{2} \end{array} \downarrow \int \tag{99}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= +(1)(b)-(2)(c) \\ &= x\tan x - x^2 - \ln|\sec x| + \frac{x^2}{2} + C \\ &= x\tan x - \ln|\sec x| - \frac{x^2}{2} + C \end{aligned} \tag{100}$$

附：两个积分：

$$\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \tan x - x \tag{101}$$

$$\int (\tan x - x)\,\mathrm{d}x = \int \tan x \,\mathrm{d}x - \int x \,\mathrm{d}x = \ln|\sec x| - \frac{x^2}{2} \tag{102}$$

注：不标准的列表积分题。如果用分部积分的话会很难受⋯（不要问我为什么，自己试一下）列表积分的要点是：积分为 $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 的形式，并且某一者，如 $f(x)$ 可连续求导到零。另一者即 $g(x)$ 能够比较简单的积分，或者说能够积分即可。

在这里，发现 x 只要求导两次就到零了，这样以来就只要 $\tan^2 x$ 能坚持积分两次就可以了。发现恰好如此。

对于三角代换的选择：

(a) 单纯含有根号的：$\sqrt{x^2+a^2}$、$\sqrt{x^2-a^2}$、$\sqrt{a^2-x^2}$
选择“弦”：$\sin u$、$\cos u$、$\sinh u$、$\cosh u$
利用恒等式：$\cos^2 u + \sin^2 u = 1$、$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$
来选择合适的“弦”。其中“1”就是常数“a”，看怎么变换可以使“弦”和“1”在一起结合成另一个“弦”。也就是 x 和 a 被换成了那一个“弦”。后面两个都是这样。

(b) 不含根号（且在分母的）：$\dfrac{1}{x^2+a^2}$
选择“切”：$\tan u$、$\cot u$、$\tanh u$、$\coth u$
利用恒等式：$1+\tan^2 u = \sec^2 u$、$1-\tanh^2 u = \mathrm{sech}^2 u$（还有两个不写了）
和上面一样选择合适的“切”以换元。

(c) $\dfrac{1}{x^2-a^2}$、$\dfrac{1}{a^2-x^2}$ 请平方差。头铁用三角代换也不是不可以。

(d) 含且不止含根号（且在分母）：$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}$、$\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}$、$\dfrac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}$
选择“割”：$\sec u$、$\csc u$、$\mathrm{sech}\, u$、$\mathrm{csch}\, u$
利用恒等式：（和上面那个一样不写了）
和上面一样选择合适的“切”以换元。（水了一大段⋯）

51. $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$

解：

(a) 分部积分法

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \ln x \,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\ln x) \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C
\end{aligned} \tag{103}$$

(b) 设 $u = \ln x$，则 $x = \mathrm{e}^u, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u$

$$\text{原式} = \int u\mathrm{e}^{2u}\,\mathrm{d}u \tag{104}$$

接下来是一个简单的列表积分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow \begin{array}{cc} u(1) & (a)\mathrm{e}^{2u} \\ 1(2) & (b)\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2u} \\ & \\ 0(3) & (c)\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2u} \end{array} \downarrow\int \tag{105}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= +(1)(b) - (2)(c) \\
&= \frac{1}{2}u\mathrm{e}^{2u} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2u} + C \\
&= \frac{1}{2}(\ln x)\cdot x^2 - \frac{x^2}{4} + C
\end{aligned} \tag{106}$$

注：此题方法一当然也可以用列表积分法写出来。实际上方法一和方法二都是列表积分法，只不过 x 和 $\ln x$ 谁求导谁积分换了一下而已。但是方法一如果用列表积分法写出来的话会很有一点奇怪：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow \begin{array}{cc} \ln x(1) & (a)x \\ \dfrac{1}{x}(2) & (b)\dfrac{x^2}{2} \\ & \\ -\dfrac{1}{x^2}(3) & (c)\dfrac{x^3}{6} \end{array} \downarrow\int \tag{107}$$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= +(1)(b) - (2)(c) + \int (3)(c)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{6} - \int \frac{x}{6}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C
\end{aligned} \tag{108}$$

注：这是非循环的半个列表积分法。可以这样使用的原因是最后那个积分是简单、易积的积分。

方法二的话不换元也是可以的，但是换元的话会更加直观清晰。

52. $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned} 原式 &= x \ln x - \int \mathrm{d}x \\ &= x \ln x - x + C \end{aligned} \tag{109}$$

注：可写入基本积分表的积分。分部积分法的经典例题。

53. $\int \frac{1}{1+\cos x} \, \mathrm{d}x$

解：

(a)

$$\begin{aligned} 原式 &= \int \frac{1}{1+\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \csc^2 x \, \mathrm{d}x - \int \csc x \cot x \, \mathrm{d}x \\ &= -\cot x + \csc x + C \end{aligned} \tag{110}$$

(b) 设 $u = \tan \frac{x}{2}$，则 $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2} \mathrm{d}u$ 且 $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

$$\begin{aligned} 原式 &= \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \, \mathrm{d}u \\ &= \int \mathrm{d}u \\ &= u + C \\ &= \tan \frac{x}{2} + C \end{aligned} \tag{111}$$

注：方法一和方法二得到的结果实际上是一样的。

这一题与下一题为同类型的题型。在题29已提到此：可以乘以“1”或者以 $u = \tan \frac{x}{2}$ 代换。当代换时需要记住：$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2} \mathrm{d}u$、$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$、$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$。实际上这就是万能公式。

当仅仅是 $\dfrac{1}{1\pm\sin x}$、$\dfrac{1}{1\pm\cos x}$ 的时候，乘以“1”最佳。当含有系数 $\dfrac{1}{a\pm b\sin x}$、$\dfrac{1}{a\pm b\cos x}$ 的时候，则用代换的方法。

54. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

解：

(a)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{1+\sin x}\cdot\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x \\
&= \tan x - \sec x + C
\end{aligned} \tag{112}$$

(b) 设 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ 且 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} \\
&= -\frac{2}{u+1}+C \\
&= \frac{-2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C
\end{aligned} \tag{113}$$

注：见上题。（实际上方法一的 $C=0$ 时，与方法二的 $C=1$ 相等，所以说二者等价。）

55. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+4}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 设 $u=x^4+4$，则 $\mathrm{d}u=4x^3\,\mathrm{d}x$ 且 $x^4=u-4, x^2=\sqrt{u-4}$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{u}\cdot\frac{x}{4x^3}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u-4}}
\end{aligned} \tag{114}$$

设 $v=\sqrt{u-4}$，则 $u=v^2+4, \mathrm{d}u=2v\,\mathrm{d}v$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{2v}{v(v^2+4)}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\arctan\frac{v}{2}+C \\
&= \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C
\end{aligned} \tag{115}$$

(b)

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^4+4} \tag{116}$$

设 $u=x^2$，则 $\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\arctan\frac{u}{2}+C \\
&= \frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C
\end{aligned} \tag{117}$$

注：此题不易用倒代换。这一题可以用方法一的普通代换，设 $u=x^4+4$ 后，代换出 $\dfrac{1}{u}$ 剩下一个 x 在分母。而微分恰好是奇次，约掉一次之后为偶次，则可以很容易的用 $u=x^4+4$ 变形得到所需的偶次式子。

这样的分子为奇次、分母为偶次的题（或者反之也可以？）似乎都可以用此方法解。如：题57、61、65。

当然也可以观察之后按方法二解，题61、65亦如此。

56. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u=x+1$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{(u-1)^2+2}{u^3}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \left(u^2-2u+3\right)u^{-3}\,\mathrm{d}u \\
&= \int \left(u^{-1}-2u^{-2}+3u^{-3}\right)\mathrm{d}u \\
&= \ln|u|+2u^{-1}-\frac{3}{2}u^{-2}+C \\
&= \ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+C
\end{aligned} \tag{118}$$

注：分母只是一个一次函数的三次方，并不需要什么操作，分母单项化就可以了。这是在高中常用的技巧（一次函数单项化，然后可以用双勾函数求最值的那个）。分母单项化之后就除进去，展开即可。

当然，还可以像这样打开：$\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x+1)^2}+\dfrac{C}{(x+1)^3}$，待定系数求 A,B,C 即可。在此就不说了。

57. $\displaystyle\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 设 $u=1-x^2$，则 $\mathrm{d}u=-2x\,\mathrm{d}x, x^2=1-u$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{x^5}{-2x}\,\mathrm{d}x\\
&=-\int\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(1-u)^2\,\mathrm{d}u\\
&=-\int(1-u)^2\,\mathrm{d}\left(\sqrt{u}\right)
\end{aligned}
\tag{119}
$$

设 $v=\sqrt{u}$，则 $u=v^2, \mathrm{d}u=2v\,\mathrm{d}v$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=-\int(1-v^2)^2\,\mathrm{d}v\\
&=-\int\left(v^4-2v^2+1\right)\,\mathrm{d}v\\
&=-\frac{1}{5}v^5+\frac{2}{3}v^3-v+C\\
&=-\frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}+C
\end{aligned}
\tag{120}
$$

(b) 设 $x=\sin u$，则 $\mathrm{d}x=\cos u\,\mathrm{d}u$

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int\sin^5 u\,\mathrm{d}u\\
&=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^2\,\mathrm{d}(\cos u)\\
&=\int\left(-\cos^4 u+2\cos^2 u-\cos u\right)\,\mathrm{d}(\cos u)\\
&=-\frac{1}{5}\cos^5 u+\frac{2}{3}\cos^3 u-\cos u+C\\
&=-\frac{1}{5}\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1-x^2}+C
\end{aligned}
\tag{121}
$$

注：此题为题55所说的分子为奇，分母为偶类型，故可以设分母（当然不设根号进去了）。不过注意到分母是 $\sqrt{1-x^2}$ 的形式，所以也可以三角代换。其 x^5 不碍事。

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u=\sqrt{x+1}$，则 $x=u^2-1, \mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\int \frac{u-1}{u+1}u\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int \left(1-\frac{2}{u+1}\right)u\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int u\,\mathrm{d}u - 4\int \frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= u^2 - 4\int \left(1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= u^2-4u+4\ln|u+1|+C \\
&= x+1-4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C
\end{aligned} \tag{122}$$

注：此为带根号的式子，设 $u=\sqrt{x+1}$ 即可。设完之后的积分拆开即可，分母单项化也可以。后者在这里就不写了，实际上是等价的。

59. $\displaystyle\int x(1-2x)^{99}\,\mathrm{d}x$

解：设 $u=1-2x$，则 $\mathrm{d}u=-2\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= -\frac{1}{4}\int (1-u)u^{99}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{4}\int \left(u^{99}-u^{100}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{404}u^{101}-\frac{1}{400}u^{100}+C \\
&= \frac{1}{404}(1-2x)^{101}-\frac{1}{400}(1-2x)^{100}+C
\end{aligned} \tag{123}$$

注：此题为奇怪复合函数类型，故直接设内项 $u=1-2x$ 即可。但注意到此为积的函数形式，而 x 可求导到零，也可以采用列表积分法。

60. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$

解：

(a) 设 $u=\ln x$，则 $\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} \tag{124}$$

设 $v = \ln u$，则 $\mathrm{d}v = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v \\
&= \ln|v| + C \\
&= \ln|\ln u| + C \\
&= \ln|\ln(\ln x)| + C
\end{aligned} \tag{125}$$

(b) 注意到：$\dfrac{1}{A}\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}(\ln A)$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x \ln(\ln x)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} \\
&= \ln|\ln(\ln x)| + C
\end{aligned} \tag{126}$$

注：奇怪的复合函数类型，设内层即可。如果注意到关系 $\dfrac{1}{A}\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}(\ln A)$ 则可以使用后者。

61. $\displaystyle\int \frac{x^7}{x^4+2}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 拆假分式：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \left(x^3 - 2\frac{x^3}{x^4+2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\ln\left|x^4+2\right| + C
\end{aligned} \tag{127}$$

(b) 设 $u = x^4 + 2$，则 $\mathrm{d}u = 4x^3\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{x^7}{4x^3}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}(u-2)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}u - \frac{1}{2}\ln|u| + C \\
&= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\ln\left|x^4+2\right| + C
\end{aligned} \tag{128}$$

(c)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x^4+2}\,\mathrm{d}\left(x^4\right) \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1-\frac{2}{x^4+2}\right)\mathrm{d}\left(x^4\right) \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\ln\left|x^4+2\right| + C \end{aligned} \tag{129}$$

注：假分式拆开最佳。在分子奇次分母偶次时也可以用方法二的老方法。方法三也是老方法了。

62. $\int (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$

解：

(a)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x(\arcsin x)^2 - \int x\,\mathrm{d}[(\arcsin x)^2] \\ &= x(\arcsin x)^2 - \int x\arcsin x\,\mathrm{d}(\arcsin x) \end{aligned} \tag{130}$$

设 $u=\arcsin x$，则 $x=\sin u$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= x(\arcsin x)^2 - 2\int \sin u\cdot u\,\mathrm{d}u \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2u\cos u - 2\sin u + C \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2x + C \end{aligned} \tag{131}$$

(b) 设 $x=\sin\theta$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \theta^2\,\mathrm{d}(\sin\theta) \\ &= \int \theta^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{132}$$

列表积分：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow \begin{array}{rl} \theta^2(1) & (a)\cos\theta \\ 2\theta(2) & (b)\sin\theta \\ 2(3) & (c)-\cos\theta \\ 0(4) & (d)-\sin\theta \end{array} \downarrow\int \tag{133}$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= +(1)(b)-(2)(c)+(3)(d) \\ &= \theta^2\sin\theta + 2\theta\cos\theta - 2\sin\theta + C \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2x + C \end{aligned} \tag{134}$$

注：方法一便是题11所说的注意变量之间的关系。当然，方法二更好。

对于 $f(\arcsin x)$ 之类的，更或者 $f(\arccos x)$ 之类，如 $\int (\arccos x)^2 \,\mathrm{d}x$ 都可以用分部积分法。列表积分就算了。在后面如题66也是反三角函数题，亦用分部积分法。

63. $\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x$

解：

(a)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \sec x \,\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \int \sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}(\tan x) \end{aligned} \tag{135}$$

设 $u = \tan x$

$$\text{原式} = \int \sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u \tag{136}$$

设 $u = \sinh v$，则 $\mathrm{d}u = \cosh v \,\mathrm{d}v$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \cosh^2 v \,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int \left[1+\cosh(2v)\right] \mathrm{d}v \\ &= \frac{v}{2} + \frac{1}{2}\sinh v \cosh v + C \\ &= \frac{1}{2}\sinh^{-1}(\tan x) + \frac{1}{2}\tan x \sec x + C \end{aligned} \tag{137}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \,\mathrm{d}x &= \int \sec x \,\mathrm{d}(\tan x) \\ &= \sec x \tan x - \int \tan x \,\mathrm{d}(\sec x) \\ &= \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x \,\mathrm{d}x \\ &= \sec x \tan x - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec x \,\mathrm{d}x \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \,\mathrm{d}x + \int \sec x \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{138}$$

所以有：

$$2\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{139}$$

即：

$$\int \sec^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C \tag{140}$$

注：方法一较为朴素，与题25、26相似。容易想到。提出 $\mathrm{d}(\tan x)$ 后，所剩虽非偶次幂但也是三角代换式。

后者不易想到但实际上也就是半个列表积分法的事情。

64. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$

解：设 $u = \tan\dfrac{x}{2}$，则 $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{\frac{2}{u^2+1}}{2+\frac{2u}{u^2+1}}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+u+1} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\end{aligned} \tag{141}$$

设 $u + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan v$，则 $\mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 v\,\mathrm{d}v$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 v}{\frac{3}{4}\sec^2 v}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \mathrm{d}v \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}v + C \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(u+\frac{1}{2}\right)\right] + C \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] + C\end{aligned} \tag{142}$$

注：如题54所言，推广至有系数的时候，万能公式代换即可。

65. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8-2}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 设 $u = x^8 - 2$，则 $\mathrm{d}u = 8x^7\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1}{u}\cdot\frac{x^3}{8x^7}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{1}{u\sqrt{u+2}}\,\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{143}$$

设 $v=\sqrt{u+2}$，则 $u=v^2-2, \mathrm{d}u=2v\,\mathrm{d}v$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{8}\int \frac{2v}{v(v^2-2)}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2-2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right|+C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C
\end{aligned} \tag{144}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^4\right)}{(x^4)^2-2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16}\int\left(\frac{1}{x^4-\sqrt{2}}-\frac{1}{x^4+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}\left(x^4\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C
\end{aligned} \tag{145}$$

注：方法一即分子奇次分母偶次的一般方法。方法二也是变换积分微元的老方法了。与之前不同的是，二者异曲同工。

66. $\int \arctan x\,\mathrm{d}x$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= x\arctan x-\int x\,\mathrm{d}(\arctan x) \\
&= x\arctan x-\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C
\end{aligned} \tag{146}$$

注：如题62所言，反三角函数之类的，分部积分即可。同样的 $\arcsin x$、$\arccos x$、$x^2\arcsin x$、$x^2\arccos x$ 亦可如此推广。

67. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,\mathrm{d}x$

解：先做一个长除法得：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int\left(x^{n-1}-\frac{x^{n-1}}{x^n+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}x^n-\frac{1}{n}\ln\left|x^n+1\right|+C
\end{aligned} \tag{147}$$

注：纸老虎，假分式真分式化，然后积分即可。

68. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}\,\mathrm{d}x$

解：

(a) 先不考虑积分上下限，设 $u=\cos x$，则 $\mathrm{d}u=-\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{u\ln u}\,\mathrm{d}u\\ &= -\ln|\ln(u)|+C\\ &= -\ln|\ln(\cos x)|+C\end{aligned} \tag{148}$$

考虑上下限：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left(-\ln|\ln(\cos x)|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\ &= -\ln\left|\ln\frac{1}{2}\right|+\ln\left|\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\end{aligned} \tag{149}$$

(b) 注意到：$\tan x\,\mathrm{d}x=\ \mathrm{d}[\ln(\cos x)]$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}[\ln(\cos x)]}{\ln(\cos x)}\\ &= \left(-\ln|\ln(\cos x)|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\\ &= -\ln\left|\ln\frac{1}{2}\right|+\ln\left|\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\end{aligned} \tag{150}$$

注：此为奇怪复合函数类型，设内层函数即可。亦可变换微元。

69. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

解：设 $x=\tan u$，则 $x\in(-1,1), u\in\mathbb{R}, \mathrm{d}x=\sec^2 u\,\mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \arctan x\Big|_{-1}^{1}\\ &= \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{151}$$

注：定积分一定要注意定义域。但这一题无影响，放心积分即可。

70. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}x$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x\left(1-\sin^2 x\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{152}
$$

在 $x \in [0,\pi]$ 时，$\sin^n x > 0$，但 $\cos x$ 并非如此：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x|\cos x|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \frac{2}{5}+\frac{2}{5} \\
&= \frac{4}{5}
\end{aligned} \tag{153}
$$

注：此题应该注意定义域。不过很容易考虑。

71. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

解：

(a) 先不考虑定义域（$\theta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时函数恒正，没有危险）

设 $u = \tan\dfrac{\theta}{2}$，则 $\mathrm{d}\theta = \dfrac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int \frac{\frac{2}{u^2+1}\cdot\frac{2u}{u^2+1}}{\frac{2u}{u^2+1}+\frac{1-u^2}{u^2+1}}\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(-u^2+2u+1)(u^2+1)} \\
&= \int \left(\frac{u+1}{u^2+1}+\frac{u-1}{-u^2+2u+1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2}\int \frac{-2u+2}{-u^2+2u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \arctan u + \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|-u^2+2u+1\right| + C
\end{aligned} \tag{154}
$$

考虑上下限：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \left(\arctan u + \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| - \frac{1}{2}\ln\left|-u^2+2u+1\right|\right)\Bigg|_{u=\tan\frac{0}{2}}^{u=\tan\frac{\frac{\pi}{2}}{2}} \\
&= \left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(0+\frac{1}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\ln 1\right) \\
&= \frac{\pi}{4} \qquad (155)
\end{aligned}
$$

(b) 设 $\theta = \frac{\pi}{2} - u$，则 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}u$. 积分上下限变为 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}$

$$
\begin{aligned}
I &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\cos u+\sin u}\,\mathrm{d}u \qquad (156)
\end{aligned}
$$

可见

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u+\cos u}\,\mathrm{d}u \qquad (157)
$$

而积分结果是与被积函数的符号无关的。则：

$$
\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin u+\cos u}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x+\sin x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} \qquad (158)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore I = \frac{\pi}{4} \qquad (159)
$$

注：$u = \tan\frac{\theta}{2}$ 是朴素的方法。后者更为巧妙（说来惭愧，笔者是在《托马斯微积分》里看见这种方法的，并不是自己做出来的）。后者的方法可以推广到积分：$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n\theta}{\sin^n\theta+\cos^n\theta}\,\mathrm{d}\theta$

72. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$

解：定义域没有什么问题，先不考虑上下限，直接积分即可（半个列表积分）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\downarrow \begin{array}{ll} \mathrm{e}^x(1) & (a)\sin x \\ \mathrm{e}^x(2) & (b)-\cos x \\ \mathrm{e}^x(3) & (c)-\sin x \end{array} \downarrow \int \tag{160}$$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= +(1)(b)-(2)(c)+\int (3)(c)\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{161}$$

$$2\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) \tag{162}$$

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x) \tag{163}$$

再考虑上下限：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^0 \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1\right)\end{aligned} \tag{164}$$

注：标准的半个列表积分题目。

72 道题的解析就到此为止了。

最后这篇文章，因为想把定积分放在最后，所以排版和原文章有点不一样。

在这 72 道题中说了比较多的技巧和解题思路，但这其实是远远不够的…（废话嘛！）所以谨当积分入门的方法参考罢了。

发布于 2019-08-20