兴为考研 考研数学基础讲义

——线性代数

主编：兴为考研教研中心

目录

线性代数

第一讲　行列式

一、大纲要求

1.了解行列式的概念，掌握行列式的性质.

2.会应用行列式的性质和行列式按行（列）展开定理计算行列式.

二、知识讲解

（一）行列式的概念

1.排列与逆序数

（1）排列

把n个不同的元素排成一列，就叫做这n个元素的全排列，简称**排列**．比如231645就是这6个元素的一个排列.

注：不同的n级排列共有$n!$个.

（2）逆序、逆序数、对换.

在一个n级排列$j_1...j_n$中，若一对数$j_s j_t$，大前小后，即$j_s > j_t$，则$j_s j_t$构成了一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为此排列的**逆序数**，记为$\tau(j_1...j_n)$. 如231645的逆序数为4，记作$\tau(231645)=4$，$\tau(123)=0$.

排列$j_1...j_n$中，交换任意两个数的位置，其余元素不变，则称对排列作了一次**对换**.

奇（偶）排列：排列的逆序数为奇（偶）数.

注：对换一次改变排列的奇偶性．如$\tau(123)=0,\tau(321)=3$.

2. n阶行列式的定义

二阶行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

推广到三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} .$$

定义：$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} \dots a_{nj_n}$.由 n^2 个数 $a_{ij}(i, j = 1, \dots, n)$ 组成的 n 阶行列式.

（二）行列式性质

性质 1　行列式的行与列（按原顺序）互换,（互换后的行列式叫做行列式的**转置**）其值不变，即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

性质 2　（线性性质）

（1）行列式的某行（或列）所有元素都乘 k ，则等于用数 k 乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{m} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

（2）如果行列式某行（或列）元素皆为两数之和，则其行列式等于两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

性质 3　（反对称性质）行列式的两行对换，行列式的值反号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 4 （三角形法的基础）在行列式中，把某行各元素分别乘非零常数k，再加到另一行的对应元素上，行列式的值不变（简记为：对行列式做倍加行变换，其值不变），即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注：行列式中两行对应元素成比例（$a_{jk}=ka_{ik}$， $i\neq j,i=1,2,...,n$， k为常数），其值为零.

【例 1.1】计算$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$的结果为（　　）

A. -12　　　　B. 12　　　　C. 18　　　　D. -18

【例 1.2】若$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=6$，则$\begin{vmatrix} a_{12} & 2a_{11} & 0 \\ a_{22} & 2a_{21} & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$的值为（　　）

A. 12　　B. -12　　C. 18　　D. 0

【例 1.3】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$，若 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则 $\lambda=$（　　）

【例 1.4】 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=$（　　）

【例 1.5】已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2-x \\ 1 & x & x+3 & x+6 \end{vmatrix}$，证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

【例 1.6】 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均为三维列向量，记矩阵

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)，$$

如果$|\boldsymbol{A}|=1$，那么$|\boldsymbol{B}|=$（　　）

（三）行列式的展开定理

1.余子式与代数余子式

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，其中 M_{ij} 是 D 中去掉 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列全部元素后，按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

2.行列式的展开定理

行列式对任一行按下式展开，其值相等，即 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$.

（1）$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{B}_{n\times m} \\ \boldsymbol{O}_{m\times m} & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{C}_{m\times m} \\ \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{B}_{n\times m} \end{vmatrix}=(-1)^{n(n+m+1)}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$.

（2）$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.

（3）$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\ldots a_n$.

【例 1.7】若 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{12}=-1$，则代数余子式 $A_{21}=$（　　）

【例 1.8】方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数是（　　）

A.1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【例 1.9】已知 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}$，若 $D_n=a_nD_{n-1}+kD_{n-2}$，则 $k=$（　　）

3.范德蒙行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j).$$

【例 1.10】计算$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$.

（四）克莱姆法则

n 个未知量 n 个方程的线性方程组，在系数行列式不等于零时的方程组解法.

定理 1　设线性非齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$　　（1）

或简记为 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\dots,n$，若其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组（1）

有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}, j=1,2,\dots,n$，其中 D_j 是用常数项 $b_1,b_2,\dots,b_n$ 替换 D 中第 j 列所成的行列式，

即 $D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

【例 1.11】设齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1+ax_2+x_3=0 \\ ax_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$，只有零解，则 a 满足的条件是（　　）

第二讲　矩阵

一、大纲要求

1．理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质．

2．掌握矩阵的线性运算、乘法、转置，以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质．

3．理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵．

4．理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法．

5．了解分块矩阵及其运算．

二、知识讲解

（一）矩阵的定义

1.定义

数域 R 中 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ 排成 m 行 n 列，并括以圆括弧（或方括弧）的数表 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为数域 R 上的 $m\times n$ **矩阵**，通常用大写字母记做 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，有时也记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$，其中 a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列**元素**，横排为**行**，竖排为**列**．

2.同型矩阵与矩阵相等

同型矩阵：行数、列数都相同的矩阵．

矩阵相等：如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，且各对应元素也相等，

即 $a_{ij}=b_{ij},(i=1,2,...,m;j=1,2,...,n)$，就称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

3.几类特殊的矩阵

（1）**零矩阵**：$m\times n$ 个元素全为零的矩阵称为零矩阵，记作 O.

（2）**方阵**：当 $m=n$ 时，称 A 为 n 阶矩阵（或 n 阶方阵）.

（3）**单位矩阵**：主对角元全为1，其余元素全为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶单位矩阵（简称单位阵），记作 $\boldsymbol{I}_n$ 或 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$.

（4）**数量矩阵**：主对角元全为非零数 k，其余元素全为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶数量矩阵，记作 $k\boldsymbol{I}_n$ 或 $k\boldsymbol{I}$ 或 $k\boldsymbol{E}$.

（5）**对角矩阵**：非主对角元皆为零的 n 阶矩阵称为 n 阶对角矩阵（简称对角阵），记作 $\boldsymbol{\Lambda}$，即 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$，或记作 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,...,a_n)$.

（6）**上三角矩阵**：n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0(j=1,2,\cdots,n-1)$ 的矩阵称为上三角矩阵.

（7）**下三角矩阵**：当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0(j=2,...,n)$ 的矩阵称为下三角矩阵.

（8）**正交矩阵**：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $AA^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵，这里 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵.

（二）矩阵的运算

1.矩阵的线性运算

（1）**加法**：两个同型矩阵（行数与列数分别相等）可以相加，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，

规定 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$，并称 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和.

矩阵的加法满足以下运算律：

①交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

②结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 同型的零矩阵；

④ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

这里的 $-\boldsymbol{A}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 中每个元素都乘上 -1 得到的，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**. 进而我们可以定义矩阵的减法 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

（2）矩阵的数量乘法（简称**数乘**）：设 k 是数域 R 中的任意一个数，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，规定

$$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

并称这个矩阵为 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的**数量乘积**.

设 k,l 是数域 R 中的数，矩阵的数量乘法满足运算律：

① $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$；② $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；③ $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

矩阵加法和数量乘法结合起来，统称为矩阵的线性运算.

2.矩阵的乘法

定义：设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $n\times s$ 矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之**乘积** $\boldsymbol{AB}$（记作 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$）是一个 $m\times s$ 矩阵，且 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

即矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 n 个元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应的 n 个元素分别相乘的乘积之和.

矩阵乘法满足以下运算律：

（1）结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

（2）数乘结合律 $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$，其中 k 是数；

（3）左分配律 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

（4）右分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

注：关于矩阵的乘法运算，有两个重要的结论.

①矩阵的乘法不满足交换律，即一般 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，可从 3 个方面来理解：

a) $\boldsymbol{AB}$ 可乘，$\boldsymbol{BA}$ 不一定可乘；

b) $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都可乘，但不一定是同型矩阵（例 2.2）；

c) $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 为同型矩阵（此时，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 必为同阶方阵），也不一定相等.

矩阵乘法不满足交换律，并不等于说对任意的两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，必有 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 当 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 时，称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不可交换（或 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不可交换）. 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，称 $\boldsymbol{AB}$ 可交换（或 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换）.

②矩阵乘法不满足消去律，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，不能推出 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$. 例如 $\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8\\3&24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$.

3.方阵的幂

（1）定义：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，k 个 $\boldsymbol{A}$ 的连乘积称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次**幂**，记作 $\boldsymbol{A}^k$，即 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}\times\ldots\times\boldsymbol{A}$，规定 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$. 设 $f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$ 是 x 的 k 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $f(\boldsymbol{A})=a_k\boldsymbol{A}^k+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$，称为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次多项式**（注意常数项应变为 $a_0\boldsymbol{E}$）.

4.矩阵的转置、对称矩阵

（1）矩阵的转置

定义：把一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ 的行列互换得到的一个 $n\times m$ 矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^T$ 或 $\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}^T=(a_{ji})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$.

注：矩阵的转置也是一种运算，满足运算律

① $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$；　　② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$；

③ $(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T$（$k$ 为任意实数）；　　④ $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$.

（2）对称矩阵、反对称矩阵

定义：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 是一个 n 阶矩阵，如果 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}$，$(i,j=1,2,\ldots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**；如果 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji},(i,j=1,2,\ldots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**.

对称矩阵的特点是：它的元素以对角线为对称轴对应相等.

5.方阵的行列式

由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式**，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det(\boldsymbol{A})$.

求方阵的行列式也是一种运算，满足运算律：

（1）$|\boldsymbol{A}^T|=|\boldsymbol{A}|$；　　（2）$|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$；　　（3）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

注：① $|\boldsymbol{A}^k|=|\boldsymbol{A}|^k$，$k$ 为自然数；

② $|\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}|$ 不一定等于 $|\boldsymbol{A}|\pm|\boldsymbol{B}|$；

③若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$；若 $|\boldsymbol{A}|=0$ 不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

6.分块矩阵的行列式运算

$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{B}_{n\times m} \\ \boldsymbol{O}_{m\times m} & \boldsymbol{C}_{n\times n} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$，$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{C}_{m\times m} \\ \boldsymbol{A}_{n\times n} & \boldsymbol{B}_{n\times m} \end{vmatrix}=(-1)^{n(n+m+1)}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{C}|$.

【例 2.1】已知 $\boldsymbol{X}$ 为 n 维单位列向量，$\boldsymbol{X}^T$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的转置，$\boldsymbol{E}_n$ 为单位矩阵，若 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{XX}^T$ 则 $\boldsymbol{G}^2$ 等于（　　）

A. $\boldsymbol{G}$　　B. $\pm\boldsymbol{G}$　　C. 1　　D. $\boldsymbol{E}_n$

【例 2.2】求与 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ 可交换的矩阵.

总部地址：北京市海淀区西直门北大街 32 号院 B 座 4 层

【例 2.3】设 β 是三维列向量，β^T 是 β 的转置，若 $\beta\beta^T=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\-2&2&4\end{pmatrix}$，则 $\beta^T\beta=$（　　）

A.4　　B.6　　C.8　　D.12

【例 2.4】在$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&4&-1\\0&-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$的展开式中，$x_2x_3$项的系数是（　　）

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 3

【例 2.5】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&0&0\\0&3&1&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&3&-1\\0&0&0&-9&3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$（　　）

【例 2.6】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{2013}-2\boldsymbol{A}^{2012}=$（　　）

【例 2.7】设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵，若三阶矩阵 Q 满足关系 $AQ+E=A^2+Q$，则 Q 的第一行的行向量为（　　）

A. $(1\ \ 0\ \ 1)$　　B. $(1\ \ 0\ \ 2)$　　C. $(2\ \ 0\ \ 1)$　　D. $(2\ \ 0\ \ 2)$

（三）逆矩阵

1.定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆**的.记做 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

逆矩阵是唯一的：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E},\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

2.矩阵可逆的充要条件

首先我们引入矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$. $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}=(A_{ij})^T$，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，$\boldsymbol{A}^*$ 的第 j 列元素 $A_{j1},A_{j2},...,A_{jn}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行元素 $a_{j1},a_{j2},...,a_{jn}$ 的代数余子式 $(j=1,2,...,n)$.

定理 1 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$.

证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆，即有 $\boldsymbol{A}^{-1}$，使 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$.故 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1$，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq0$.

定理 2 若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

证明：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记 $\boldsymbol{AA}^*=(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij}$，

故
$$\boldsymbol{AA}^*=(|\boldsymbol{A}|\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|(\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

同理有
$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj}\right)=(|\boldsymbol{A}|\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|(\delta_{ij})=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

因 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，故有 $\boldsymbol{A}\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，所以按逆矩阵的定义，即知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

由以上两定理知**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是** $|\boldsymbol{A}|\neq0$.

推论 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆可逆，且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 互为

逆矩阵.

注：（1）用定义法求抽象矩阵的逆矩阵；

（2）数值型矩阵求逆的方法：

①定义；②伴随矩阵；③初等变换；④分块矩阵.

3.可逆矩阵的性质

设同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 皆可逆，数 $k\neq 0$.

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$ ；

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq 0$ ，则 $k\boldsymbol{A}$ 亦可逆，且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ （ k 为非零常数）；

（3）若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵且均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ ，推广：$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_1^{-1}$， $(\boldsymbol{A}^n)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^n$ ；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{A}^*$ 亦可逆，且 $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$ ， $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$;

（5） $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

【例 2.8】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵 $|\boldsymbol{A}|=3$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若交换 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与第二行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*|=$ ________.

A.9　　B. -27　　C.30　　D. -3

【例 2.9】对任意的n阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$，若$\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$（$\boldsymbol{E}$是单位矩阵），则下列 5 式中：（I）$\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$；（II）$\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$；（III）$\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$；（IV）$\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$；（V）$\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$恒成立的有（　　）个.

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【例 2.10】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵.若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则（　　）

A. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

B. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

D. $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

【例 2.11】设 3 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$，若 $B=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的第 2 行是（　　）

A. $(-1\ \ -1\ \ 0)$　　B. $(-1\ \ 1\ \ 0)$　　C. $(1\ \ -1\ \ 0)$　　D $(1\ \ 1\ \ 0)$

【例 2.12】 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵，若三阶矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{X}$ 的第 3 行向量是（　　）

A. $(2\ \ 1\ \ 1)$　　B. $(1\ \ 2\ \ 1)$　　C. $(1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2})$　　D. $(\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ 1)$

【例 2.13】$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&2\\0&1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$，则矩阵$\boldsymbol{C}^{-1}$中，第 3 行第 2 列的元素是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

【例 2.14】设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ 且 $\boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{BA}^{-1} + 3\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

（四）矩阵的初等变换和初等矩阵

1.初等变换的定义

用消元法解线性方程组，其消元步骤是对增广矩阵进行 3 类行变换，推广到一般，即

（1） kr_i 或 kc_i，$(k \neq 0)$；

（2） $r_i + kr_j$ 或 $c_i + kc_j$；

（3） $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$.

注：用初等变换求解线性方程组时，只能用初等行变换.

2.初等矩阵

（1）定义：将单位矩阵做一次初等变换所得到的矩阵称为**初等矩阵**.

初等倍乘矩阵：$\boldsymbol{E}_i(c) = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,c,1,\ldots,1)$，$\boldsymbol{E}_i(c)$ 是由单位矩阵第 i 行（或列）乘 c $(c \neq 0)$ 而得到的.

初等倍加矩阵：$\boldsymbol{E}_{ij}(c) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & c & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$，$\boldsymbol{E}_{ij}(c)$ 是由单位矩阵第 i 行乘 c 加到第 j 行而得到的，或由第 j 列乘 c 加到第 i 列而得到的.

初等对换矩阵：$\boldsymbol{E}_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$，$\boldsymbol{E}_{ij}$ 是由单位矩阵第 i, j 行（或列）对换而得到的.

（2）初等矩阵的作用

对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行（列）变换，相当于左（右）乘相应的初等矩阵.

如：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ 可以视作 $\boldsymbol{E}_{12}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{E}_i(c)\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘 c；

$\boldsymbol{E}_{ij}(c)\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘 c 加至第 j 行；

$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换位置；

$\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_i(c)$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列乘 c；

$\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_{ij}(c)$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列乘 c 加至第 i 列；

$\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列与第 j 列对换位置.

注：①初等矩阵的行列式都不等于零，因此初等矩阵都是可逆矩阵.

② $\boldsymbol{E}_i^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{c})$， $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(c) = \boldsymbol{E}_{ij}(-c)$， $\boldsymbol{E}_{ij}^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}$.

③ $\boldsymbol{E}_i^T(c) = \boldsymbol{E}_i(c)$， $\boldsymbol{E}_{ij}^T(c) = \boldsymbol{E}_{ji}(c)$， $\boldsymbol{E}_{ij}^T = \boldsymbol{E}_{ij}$.

④ $\boldsymbol{E}_i^*(c) = c\boldsymbol{E}_i(\frac{1}{c})$， $\boldsymbol{E}_{ij}^*(c) = \boldsymbol{E}_{ij}(-c)$， $\boldsymbol{E}_{ij}^* = -\boldsymbol{E}_{ij}$.

⑤在矩阵乘法或求逆等运算中，若有初等矩阵，则要利用初等矩阵的作用与性质，而不要去计算.

3.利用初等变换求逆矩阵

定理 3　可逆矩阵可以经过若干次初等行变换化为单位矩阵.

推论 1　可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积.

推论 2　如果对可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 做同样的初等行变换，那么当 $\boldsymbol{A}$ 变为单位矩阵时，$\boldsymbol{E}$ 就变为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$.

我们也可用初等列变换求逆矩阵，即 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$.

4.矩阵的等价

（1）定义

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

（2） $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的三种等价说法

① $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等变换变到 $\boldsymbol{B}$;

②存在一些初等阵 $\boldsymbol{E}_1,\cdots,\boldsymbol{E}_s$， $\boldsymbol{F}_1,\cdots,\boldsymbol{F}_t$，使得 $\boldsymbol{E}_s\cdots\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}_1\cdots\boldsymbol{F}_t=\boldsymbol{B}_t$;

③存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

（3）矩阵等价关系的性质

①反身性： $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$;

②对称性：若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$;

③传递性：若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$， $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

（4）矩阵等价的充要条件

同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

【例 2.15】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\boldsymbol{B}$，再将 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则（　　）

A. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$　　B. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$　　C. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{AP}$　　D. $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{T}$

【例 2.16】 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵.记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$（　　）

A. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　B. $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　C. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$

【例 2.17】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（　　）

A. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$　　B. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$　　C. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

【例 2.18】 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$，用初等变换求$\boldsymbol{C}^{-1}$.

（五）分块矩阵

1.定义

把一个大型矩阵分成若干小块，构成一个分块矩阵，这是矩阵运算中的一个重要技巧，它可以把大型矩阵的运算化为若干小型矩阵的运算，使运算更为简明.

把一个 5 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$用水平和垂直的虚线分成 4 块，如果记

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

就可以把 $\boldsymbol{A}$ 看成由上面 4 个小矩阵所组成，写成 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_3 \end{pmatrix}$，并称它是 $\boldsymbol{A}$ 的一个 2×2 分块矩阵，其中的每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个子块.

把一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，在行的方向分成 s 块，在列的方向分成 t 块，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 $s\times t$ 分块矩阵，记作 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$，其中 $\boldsymbol{A}_{kl}(k=1,2,\ldots,s;l=1,2,\ldots,t)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，它们可以是各种类型的小矩阵.

2.运算

（1）分块矩阵的加法

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$， $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t}$， 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{kl}+\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t}$.

要求： $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同型矩阵，且采用相同的分块法.

（2）分块矩阵的数量乘法

设分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$， λ 是一个数，则 $\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$.

（3）分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times l}$， 如果 $\boldsymbol{A}$ 分块为 $r\times s$ 分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{r\times s}$， $\boldsymbol{B}$ 分块为 $s\times t$ 分块矩阵

$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{kl})_{s\times t}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{r1} & \boldsymbol{A}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}j_1\text{列} & j_2\text{列} & & j_s\text{列}\end{array}\end{array}\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}\begin{array}{l}j_1\text{行}\\ j_2\text{行}\\ \\ j_s\text{行}\end{array}=\boldsymbol{C}\overset{\text{记作}}{=\!=}(\boldsymbol{C}_{kl})_{r\times t},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是 $r\times t$ 分块矩阵，且 $\boldsymbol{C}_{kl}=\sum_{i=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ki}\boldsymbol{B}_{il}\ (k=1,2,\ldots,r;l=1,2,\ldots,t)$.

要求：$\boldsymbol{A}$ 的列的分块法和 $\boldsymbol{B}$ 的行的分块法完全相同.

（4）分块矩阵的转置

分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{kl})_{s\times t}$ 的转置矩阵为 $\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{B}_{lk})_{t\times s}$，其中 $\boldsymbol{B}_{lk}=\boldsymbol{A}_{kl}^T, l=1,2,\ldots,t;k=1,2,\ldots,s$.

要求：不仅要行(块)与列(块)互换，而且每一子块也要转置.

（5）分块对角阵的行列式、n 次幂，可逆分块矩阵的逆矩阵

分块对角阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_i, i=1,2,\ldots,m$ 为方阵，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$，

$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^n & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^n\end{pmatrix}$. 因此，分块对角阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件为 $|\boldsymbol{A}_i|\neq 0, i=1,2,\ldots,m$，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m^{-1}\end{pmatrix}.$$

3.两种常用的分块法

$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{\beta}_n)$.

注：（1）$m\times n$ 矩阵既可看成是由 m 个 n 维行向量组成，也可看成是由 n 个 m 维列向量

组成；反之亦然.

（2）线性方程组的向量形式：

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}_1x_1+\boldsymbol{\beta}_2x_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_nx_n=\boldsymbol{b}.$$

【例 2.19】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\3&2&0&0\\0&0&3&2\\0&0&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|,\boldsymbol{A}^{-1}$.

第三讲　向量

一、大纲要求

1.理解向量的概念，掌握向量的加法和数乘运算法则.

2.理解向量的线性组合、线性表示、向量组等价、线性相关与线性无关等概念，掌握向量线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

3.理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.

4.理解矩阵的秩与其行（列）向量组的秩之间的关系.

5.了解向量内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特方法.

二、知识讲解

（一）n 维向量的概念与运算

1.定义

n 个数 $a_1,a_2,...,a_n$ 构成的有序数组，称为一个 n 元**向量**（也称 n 维向量），记作 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,...,a_n)$，其中 a_i 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量．向量写成上述形式称为**行向量**，写成列 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 的形式，称为**列向量**.

2.线性运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，

定义：（1）$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$，当且仅当 $a_i=b_i(i=1,2,...,n)$；

（2）**向量加法**（$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 之和）$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)^T$；

（3）向量的数量乘法（简称**数乘**）为 $k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,...,ka_n)^T$，$k\boldsymbol{\alpha}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与数 k 的**数量**

乘积.

零向量：分量全为零的 n 维向量 $(0,0,...,0)^T$ 称为 n 维零向量，记作 $\mathbf{0}_n$ ，或简记为 $\mathbf{0}$.

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 n 维向量， k,l 是常数，满足下列运算规则：

①加法交换律 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ ；

②加法结合律 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$ ；

③对任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ ，有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$ ；

④对任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ ，存在负向量 $-\boldsymbol{\alpha}$ ，使 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=0$ ；

⑤ $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ ；

⑥数乘结合律 $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$ ；

⑦数乘分配律 $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$ ；

⑧数乘分配律 $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

【例 3.1】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,0,0)^T$ ， $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,0)^T$ ， $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^T$ ，求 $\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$.

【答案】 $(2,3,4)^T$.

【解析】 $\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,4)^T$.

【考点】向量基本运算.

（二）线性组合、线性表出

1.线性组合

给定 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ ，对于任何一组实数 $k_1,k_2,...,k_m$ ， $\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+...+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$ ，称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个线性组合， $k_1,k_2,...,k_m$ 称为这个线性组合的系数.

2.线性表示

给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$ ，如果存在一组数 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ ，使 $\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+...+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$ ，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的线性组合，称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

3.向量组等价

如果向量组中每一个向量可由向量组线性表示，就称前一个向量组可由后一个向量组线性表示．如果两个向量组可以相互线性表示，则称这两个向量组是等价的．

注：向量组等价具有三条性质：（1）反身性；（2）对称性；（3）传递性．

（三）线性相关性

1.线性相关与线性无关的定义

给定 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ ，如果存在 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,...,k_m$ ，使得 $\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+...+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=0$ 成立，则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，否则，称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关．

2.向量组线性相关性的基本性质

定理 1　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geq 2)$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中至少有一个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表示．

定理 2　$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21},...,a_{r1})^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{12},a_{22},...,a_{r2})^T,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=(a_{1n},a_{21},...,a_{rn})^T$ ，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ ，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

上述定理的等价命题是：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解．

定理 3　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，且表示法唯一．

推论　n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则任一 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示法唯一．

定理 4　如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关（简记为：部分相关，整体相关）．

该命题的逆否命题是：如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则其任一部分向量组也线性无关（简记为：整体无关，部分无关）．

定理 5　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 m 维向量，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_s$ 是 n 维向量，令

$\gamma_1=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix},\cdots,\gamma_s=\begin{pmatrix}\alpha_s\\ \beta_s\end{pmatrix}$，其中$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$是$m+n$维向量.如果$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性无关，则$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$线性无关；反之，若$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性相关.

【例 3.2】判别下列向量的线性相关无关性$\alpha_1=[3,6,0]^T,\alpha_2=[-1,4,2]^T,\alpha_3=[1,0,-1]^T$.

（四）向量组的极大无关组与秩

1.定义

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$的部分组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{ir}$满足条件：

（1）$\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{ir}$线性无关；

（2）$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$中的任一向量均可由$\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{ir}$线性表示；

则称向量组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{ir}$为向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$的一个**极大线性无关组**，简称**极大无关组**.

向量组的极大无关组所含向量个数称为向量组的**秩**，记为$r(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)=r$.

2.向量组秩的性质

性质 1　$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$；

$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$.

性质 2　若向量组$\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}$中的每个向量可以由向量组$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$线性表示，则$r\{\beta_1,\cdots,\beta_k\}\le r\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$.

性质 3　若向量组$\beta_1,...,\beta_t$可由$\alpha_1,...,\alpha_s$线性表示，且$t>s$，则$\beta_1,...,\beta_t$线性相关（多的能由少的线性表示，则多的必线性相关）.

上述定理的等价命题是：若向量组$\beta_1,...,\beta_t$，可由$\alpha_1,...,\alpha_s$线性表示，且$\beta_1,...,\beta_t$线性无关，则$t\le s$（无关向量组不能由比它个数少的向量组表出）.

性质 4　对矩阵$\boldsymbol{A}$做初等行变换化为$\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的任何对应的列向量组有相同的线性相关性，即$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\boldsymbol{B}$，则列向量组$\alpha_{i1},\alpha_{i2},...,\alpha_{ir}$与$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir}$有相同的线性相关性.

【例 3.3】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[0,-1,2]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[2,5,-6]^T$，判断它们是线性相关还是线性无关，指出极大线性无关组.

【例 3.4】问 $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$，能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ 线性表示.

（五）矩阵的秩

1. k **阶子式**

矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的任意 k 个行和任意 k 个列的交点上的 k^2 个元素按原顺序排成 k 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式.

2.矩阵的秩

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中存在一个 r 阶子式不为零，而所有 $r+1$ 阶子式全为零（若存在），则称矩阵的秩为 r，记为 $r(\boldsymbol{A})=r$，即非零子式的最高阶数.

3.矩阵秩的基本性质

（1） $\boldsymbol{A}_{m\times n}$， $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})\le \min(m,n)$.

证明： $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 则行数和列数分别为 m,n，但是向量的极大线性无关组个数肯定不能超过矩阵的行数和列数，所以得到结果.

（2） $r(\boldsymbol{A}_{m\times n})=r(\boldsymbol{A}^T)$.

证明：转置不改变行列式的值，所以利用行列式定义可知，转置不改变余子式的值，所以得到结果.

（3）初等行变换不改变秩.

（4） $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

（5） $r(\boldsymbol{AB})\le \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

（6） $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是可逆阵，则 $r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{A})$， $r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{A})$， $r(\boldsymbol{PAQ})=r(\boldsymbol{A})$.

（7） $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n, \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1, \\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1. \end{cases}$

（8） $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$ 那么 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n+r(\boldsymbol{AB})$.

（9） $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$，而且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，那么 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$，显然这是（8）的特例.

（10）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 可逆，而且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$，那么 $n=r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n\Rightarrow r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=n$，显然这是（4）和（9）的基本应用.

【例 3.5】求矩阵的秩

（1）$\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-1&2\\2&-2&1\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&2&2&2\\1&2&3&5\\1&1&1&5\end{bmatrix}$；（3）$\begin{bmatrix}3&2&-1&-3\\2&-1&3&1\\4&5&-5&-6\end{bmatrix}$.

【例 3.6】 t 取何值时，$\beta_1=(-1,0,1)^T$，$\beta_2=(-4,t,3)^T$，$\beta_3=(1,-3,t+1)^T$ 线性无关.

【例 3.7】设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$线性无关.

【例 3.8】已知 $\beta_1=(3,0,7,14)$，$\beta_2=(1,-1,2,4)$，$\beta_3=(0,3,1,2)$，求向量组的秩，同时求向量组的极大线性无关组，同时用向量 β_2,β_3 来表示 β_1.

【例 3.9】设矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=m<n$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则（　　）

A. $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 阶子式均不为零

B. $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个向量均线性无关

C. $|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}|\neq 0$

D.当 $r(\boldsymbol{B})=n$ 时，有 $r(\boldsymbol{AB})=m$

【例 3.10】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & t\\ 3 & t & -1\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是3阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$（　　）

A. 6　　B. -4　　C. 1　　D. 3

【例 3.11】已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&2&0&1\\0&0&3&-1\\0&0&0&4\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{A})=$（　　）

A.1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

（六）向量空间

1.向量的内积

（1）定义：设有 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)^T,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,...,y_n)^T$，则称

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**.

内积具有以下的运算性质：

①$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$；

②$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$；

③$(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$；

④$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=x_1^2+...+x_n^2\geq 0$ 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

（2）**模、长度**：向量 x 的长度 $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$.

（3）**正交**：当 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 时，称向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.

（4）**正交矩阵**：若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**正交矩阵**，这里 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵.

正交矩阵的性质：

①若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正交矩阵；

②若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为正交矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵；

③若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|=\pm 1$.

2.施密特正交法

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的向量，可用下述方法把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$ 标准正交化．取

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,\quad \cdots\cdots,\quad \boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1})}\boldsymbol{\beta}_{r-1}$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关，且两两正交，与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,...,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价．再把 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_r$ 单位化 $\gamma_1=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\gamma_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\cdots,\gamma_r=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|}$，即得到一组与原向量组等价的两两正交的单位向量 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r$，这个方法称为线性无关向量组标准正交化的**施密特方法**.

第四讲　线性方程组

一、大纲要求

1.理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件.

2.理解齐次线性方程组的基础解系及通解的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.

3.理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念.

4.掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

二、知识讲解

（一）线性方程组的三种表达形式、解与通解

1.线性方程组的三种表达形式

（1）一般形式（代数形式）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

称为 m 个方程 n 个未知量的**线性方程组**，当 $b_1=b_2=...=b_m=0$ 时，称为**齐次线性方程组**，当 $b_1,b_2,...,b_m$ 不全为零时，称为**非齐次线性方程组**.

（2）矩阵形式

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，则（4.1）可表为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

（3）向量形式

$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，则（4.1）可表为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}$.

2.解与通解

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}$，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个**解**.

当方程组有无穷多解时，则称它的全部解为该方程组的**通解**.

（二）齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构

1.解的判定

定理 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解（只有零解）的充要条件为 $r(\boldsymbol{A})<n(r(\boldsymbol{A})=n)$.

推论 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{n\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解（只有零解）的充要条件为 $|\boldsymbol{A}|=0(|\boldsymbol{A}|\neq 0)$.

注：（1）对于 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，若 $m<n$，则 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解；

（2）令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+...+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$ 有非零解（只有零解）

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关（无关）

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n(r(\boldsymbol{A})=n)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关（无关）.

2.解的结构

（1）定义

若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任意一个解均可用它们的线性表示，则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个**基础解系**.

若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的**通解**，其中 $k_1,k_2,...,k_{n-r}$ 是任意常数.

（2）解的性质

若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，则对任意常数 k_1,k_2，$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.因此和基础解系等价的解向量组都是基础解系.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 存在由 $n-r$ 个解构成的基础解系 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{n-r}$，方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{x}_{n-r}$（$k_1,k_2,...,k_{n-r}$ 为任意常数）.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 存在基础解系，且基础解系含 $n-r$ 个解向量.

（3）求解齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的方法步骤：

①用初等行变换化系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为行阶梯形；

②若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则无基础解系，只有零解；

若 $r(\boldsymbol{A})<n$，在每个阶梯上选出一列，剩下的 $n-r(\boldsymbol{A})$ 列对应的变量就是自由变量．依次对一个自由变量赋值为 1，其余自由变量赋值为 0，代入阶梯形方程组中求解，得到 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解，设为 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n-r(\boldsymbol{A})}$，即为基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+...+k_{n-r(\boldsymbol{A})}\xi_{n-r(\boldsymbol{A})}$，其中 $k_1,k_2,...,k_{n-r(\boldsymbol{A})}$ 是任意常数.

【例 4.1】 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-\frac{1}{2},2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,0,1,-2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,0,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(0,-2,1,-2)^T$，则齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_4=0,\\2x_3+x_4=0\end{cases}$ 的基础解系是（　　）

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　C. $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$

【**例 4.2**】设有方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0. \end{cases}$

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,-2,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(4,0,0,-6,2)$ 是否是上述方程组的基础解系?

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1,0,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,-1,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-2,0,1,0)$ 是否是上述方程组的基础解系?

【例 4.3】 $\boldsymbol{A}$ 是四阶矩阵，设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=3\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，则线性齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$（　　）

A.有非零解，且通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,-3,2,0)^T$

B.有非零解，且通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,3,-2)^T$

C.有非零解，且通解为 $\boldsymbol{x}=k(1,-2,3,1)^T$

D.只有零解

【例 4.4】设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\a&b&c\end{pmatrix}$，且 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解是（　　）

A. $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}$　　B. $k_2\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$　　C. $k_1\begin{pmatrix}3\\1\\c\end{pmatrix}$　　D. $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\a\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\1\\b\end{pmatrix}$

【例 4.5】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，若 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_1+t\alpha_3$，$\beta_3=t\alpha_1+\alpha_2$ 也为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则（　　）

A. $t\neq 0$　　　　B. $t=1$, 或 $t=2$

C. $t\neq 0$ 且 $t\neq 2$　　　　D. $t\neq 0$ 且 $t\neq \frac{1}{2}$

（三）非齐次线性方程组有解的条件及解的结构

1.解的判定

定理 3 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r$，且

$r=n\Leftrightarrow \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

$r<n\Leftrightarrow \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

$r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})+1=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\Leftrightarrow \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解

2.解的结构

（1）解的性质

①设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解；

②设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

（2）非齐次线性方程组的通解

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则其通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$，其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解.

（3）求解非齐次线性方程组的通解的步骤：

①用初等行变换化增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 为行阶梯形；

②若 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解；

若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$，则方程组有唯一解，根据消元法得到方程组的唯一解；

若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$，则方程组有无穷多解，设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta}$，其中 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为 $Ax=0$ 的一组基础解系.

系数矩阵 $A_{m\times n}$ 与方程的解的关系

齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$	
$r(\boldsymbol{A})=n$	方程唯一解
$r(\boldsymbol{A})<n$	方程无穷多解
$r(\boldsymbol{A})=m$	不能确定
$r(\boldsymbol{A})<m$	不能确定
$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关	方程唯一解
$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关	方程无穷多组解
$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关	无法确定
$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关	无法确定
非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	
$r(\boldsymbol{A})=n$	无法确定
$r(\boldsymbol{A})<n$	无法确定
$r(\boldsymbol{A})=m$（此时可以推出 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b})=m$）	方程有解，如果同时 $r(\boldsymbol{A})=m=n$ 则有唯一解，如果 $r(\boldsymbol{A})=m<n$ 则方程有无穷多解
$r(\boldsymbol{A})<m$	无法确定
$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b})=n$	方程唯一解
$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{b})<n$	方程有无穷多组解
$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性无关	无法确定
$\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关	无法确定
$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关	方程有解
$\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关	无法确定

【例 4.6】已知线性方程组（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1, \\ 3x_1+5x_2+x_3=7, \end{cases}$ 和（2）$\begin{cases} 2x_1+3x_2+ax_3=4, \\ 2x_1+4x_2+(a-1)x_3=b+4, \end{cases}$ 问 a,b 为何值时，方程组（1）（2）有公共解？并求此公共解.

【例 4.7】 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是（　　）

A. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　B. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

C. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$　　D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

第五讲　矩阵的特征值和特征向量

一、大纲要求

1.理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质，会求矩阵的特征值和特征向量.

2.理解相似矩阵的概念、性质，理解矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

3.掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质.

二、知识讲解

（一）方阵的特征值和特征向量

1.定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在常数 λ 和非零 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的**特征向量**.

注意：特征向量 $\boldsymbol{\alpha}\neq 0$，特征值问题是对方阵而言的，所以不加说明，矩阵都是方阵.

$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，由此可知，$\lambda_0$ 是使得方程 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的值.

2.求法

$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解等价于 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0})$ $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

行列式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 称为方阵 A 的**特征多项式**，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**.

显然，n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 λ 的 n 次多项式. 特征多项式的 k 重根也称为 k 重特征值.

对于抽象矩阵，根据特征值和特征向量的定义及其性质推导出特征值和特征向量.

对于具体的数字矩阵，采用解方程法，具体步骤如下：

（1）特征值的求解方法：解特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，得到 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

（2）特征向量的求解方法：对每个不同的特征值 λ_i，解线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求

出它的基础解系$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$，则$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\dots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$（$k_1,k_2,\dots,k_s$不全为零），即为矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_i$的特征向量.

3.特征值、特征向量的基本运算性质

性质 1　设n阶矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$的n个特征值为$\lambda_1,\dots,\lambda_n$，则

（1）$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，其中$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$是$\boldsymbol{A}$的主对角元之和，称为矩阵$\boldsymbol{A}$的迹，记作$tr(\boldsymbol{A})$.

（2）$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|\boldsymbol{A}|$.

推论　$|\boldsymbol{A}|\neq 0$（即$\boldsymbol{A}$为可逆矩阵）的充要条件是矩阵$\boldsymbol{A}$的全部特征值均为非零数；反之，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$的充要条件是矩阵$\boldsymbol{A}$至少有一个零特征值.

性质 2　若$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$都是$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_0$的特征向量，则$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$也是$\boldsymbol{A}$的属于$\lambda_0$的特征向量，其中$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2\neq 0$.

性质 3　不同特征值的特征向量是线性无关的.

性质 4　如果$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵，λ_i是$\boldsymbol{A}$的m重特征值，则属于λ_i的线性无关的特征向量的个数不超过m.

性质 5　若λ是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{x}$是$\boldsymbol{A}$的属于λ的特征向量，则

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^m$	$f(\boldsymbol{A})=\sum_{i=0}^{m}a_i\boldsymbol{A}^i$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$（$\boldsymbol{A}$可逆）	$\boldsymbol{A}^T$	$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^m	$f(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}a_i\lambda^i$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\lambda}$	λ	λ
特征向量	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha}$	不一定是$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$

【例 5.1】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$1,2,2$，$\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则$|4\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{E}|=$ ________ .

【例 5.2】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 均不可逆，则 $|\boldsymbol{A}|=$ _______ .

【例 5.3】求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

【例 5.4】设 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&a\\b&-4&-2\\-2&2&0\end{pmatrix}$ 的属于特征值 λ_1 的特征向量，求 a,b 及 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征向量和特征值.

【例 5.5】 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 λ，其属于 λ 的特征向量是 $\boldsymbol{x}$，求 $5\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值和特征向量.

【例 5.6】若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,2$，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{*}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为（　　）

A.2,3,5　　　　B. $-2,0,1$　　　　C.4,0,1　　　　D. $-1,1,2$

【例 5.7】已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征向量，求 k 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值.

【例 5.8】四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素均为 1，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为（　　）

A. $1,1,1,1$　　B. $1,0,0,0$　　C. $1,1,0,0$　　D. $4,0,0,0$

（二）相似矩阵的概念与性质、方阵对角化的条件

1.概念

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相似**，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，称 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 是对 $\boldsymbol{A}$ 作**相似变换**.

2.性质

若矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

（1）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B});\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|;\ |\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|;\ tr(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=tr(\boldsymbol{B})$.

（2）$\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T;\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1};\boldsymbol{A}^n\sim\boldsymbol{B}^n(n\in N);\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$（$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆）.

3.方阵可对角化

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 能与对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ **可相似对角化**，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，称 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**相似标准形**.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\xlongequal{\text{记作}\boldsymbol{\Lambda}}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$$

（将 $\boldsymbol{P}$ 按列分块 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$）

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{\eta}_1,\lambda_2\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\eta}_n)$$

$\Leftrightarrow$ 利用矩阵相等，得到 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i=\lambda_i\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{\eta}_i\neq0,i=1,2,\cdots,n)$.

定理 1　（方阵可对角化的充要条件）n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

推论　若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，则 $\boldsymbol{A}$ 定可以相似对角化.

定理 2　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值对应的特征向量线性无关的个数等于该特征值的重数.

【例 5.9】已知 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{BP}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{2012}=$（　　）

【例 5.10】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\boldsymbol{Q}=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 等于（　　）

A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【例 5.11】矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

（三）判断矩阵 A 是否可相似对角化的解题步骤

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是实对称矩阵，则

（1）由特征多项式求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

（2）若特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化;

（3）若有重特征值 λ_i，计算 $\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，对每个重特征值 λ_i 看其重数 k_i 是否满足 $k_i=n-r(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$；

（4）若满足，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，否则不可相似对角化;

（5）若可相似对角化，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 所对应的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$；

（6）以 λ_i 的特征向量为列，按特征值的顺序从左往右构造可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$，与特征向量相对应，从上到下将 λ_i 写在矩阵主对角线上构成对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【例 5.12】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，则（　　）

A. $a=-2,\boldsymbol{A}$ 可相似对角化　　B. $a=-2,\boldsymbol{A}$ 不可对角化

C. $a=-\dfrac{2}{3},\boldsymbol{A}$ 可对角化　　D. $a=-\dfrac{2}{3},\boldsymbol{A}$ 均不可对角化

（四）实对称矩阵的相似对角化

1.实对称矩阵特征值、特征向量的性质

性质 1　实对称矩阵的特征值为实数.

性质 2　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是相互正交的.

性质 3　n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化，且总存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

2.实对称矩阵对角化的方法

将实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 利用正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵的方法：

（1）由特征多项式求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

（2）特征向量：对每个特征值 λ_i，解 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求出它的基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；

（3）正交化：利用施密特正交化方法将属于同一特征值 λ_i 的特征向量正交化，得到 $\boldsymbol{y}_{i1},\boldsymbol{y}_{i2},\cdots,\boldsymbol{y}_{ik}$；

（4）单位化：将两两正交的向量都单位化；

（5）得到正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$：将得到的向量按列排成 n 阶矩阵，即为所求的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

（6）写出关系式 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$：，其中 λ_i 与 $\boldsymbol{Q}$ 中的列向量相对应.

【例 5.13】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为 3，向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个解.

（1）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和与 $\boldsymbol{A}$ 相似的对角矩阵.

总部地址：北京市海淀区西直门北大街 32 号院 B 座 4 层

第六讲　二次型

一、大纲要求

1.了解二次型的概念，掌握用矩阵形式表示二次型，了解合同变换和合同矩阵的概念.

2.了解二次型秩的概念，了解二次型的标准形、规范形等概念，了解惯性定理，掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形的方法.

3.理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

二、知识讲解

（一）二次型的定义、矩阵表示、标准形

1.定义

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\ldots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n \qquad (6.1)$$

称为 n 元二次型，简称**二次型**.

2.二次型的矩阵表示、二次型的秩

由于 $x_ix_j=x_jx_i$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ij}x_jx_i(i<j)$，于是（6.1）式可以写成

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+a_{12}x_2x_1+\ldots+a_{2n}x_2x_n\\&\quad+\cdots+a_{1n}x_nx_1+\ldots+a_{m}x_n^2,\\&=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad (6.2)$$

记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$，则 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 叫做**二次型的矩阵**.

任意一个二次型都是和它的实对称矩阵是一一对应的.

实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩就叫做二次型 f 的**秩**.

3.二次型的标准形

只含平方项的二次型，称为二次型的**标准形**．例如：

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2-8x_3^2=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&&\\&5&\\&&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

由标准形知，

（1） f 的秩：$r(\boldsymbol{A})=3=r$；

（2）**正惯性指数**（标准形中正平方项的个数） $p=2$；

（3）**负惯性指数**（标准形中负平方项的个数） $q=1$；

（4） $r=p+q$.

在标准形中，若平方项的系数为$1,-1,0$，则称其为二次型的**规范形**.

【例 6.1】写出二次型 $f(x,y,z)=x^2-3z^2-4xy+yz$ 的实对称矩阵以及矩阵表达式.

（二）化二次型为标准形

1.非退化的线性变换（可逆变换）

$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 \\ x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 \end{cases}$ 写成矩阵形式为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，记 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$，

若 $|\boldsymbol{C}| \neq 0$，则称 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Cy}$ 为**可逆线性变换**（或**非退化的线性变换**）；

若矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵，则称 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Cy}$ 为**正交变换**，此时，

$$f(x) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Ax} = (\boldsymbol{Cy})^T \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Cy}) = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{By},$$

这里 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}$.

2.矩阵合同

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，记作 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$. 这种对 $\boldsymbol{A}$ 的运算叫做的**合同变换**.

3.化二次型为标准形的方法

定理 1 对于任一个 n 元二次型 $f(x) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$，存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$（$\boldsymbol{Q}$ 为 n 阶正交矩阵），使得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$.

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，$\boldsymbol{Q}$ 的 n 个列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 的**标准正交特征向量**.

任意一个实二次型经可逆线性变换化为标准形. 此结论也可叙述为：**任一实对称矩阵都与一个对角阵合同**.

（1）正交变换法

①把二次型表示为矩阵形式 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$；

②求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部互异特征值 λ_i，设 λ_i 是 n_i 重根；

③对每个特征值 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，求得基础解系，即属于 λ_i 的线性无关的特征向量；

④将 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一个特征值的特征向量正交化；

⑤将全部向量单位化；

⑥将正交单位化后向量为列，且按 λ_i 在对角矩阵的主对角线上的位置构成正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$；

⑦令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$.

（2）配方法

①如二次型中至少有一个平方项，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则对所有含 x_1 的项配方（经配方后所余各项中不再含 x_1），如此继续配方，直至每一项都包含在各完全平方项中，引入新变量 $y_1,y_2,\ldots,y_n$．由 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$，得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$；

②如二次型中不含平方项，只有混合项，不妨设 $a_{12}\neq 0$，则可令

$$x_1=y_1+y_2,x_2=y_1-y_2,x_3=y_3,\ldots,x_n=y_n,$$

经此坐标变换，二次型中出现 $a_{12}y_1^2-a_{12}y_2^2$ 后，再按①实行配方法.

（三）正定二次型和正定矩阵

1.正定二次型、正定矩阵

若二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 对任何 $x\neq 0$ 都有 $f>0$，则称 f 为**正定二次型**，正定二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**正定矩阵**.

2.判别二次型的正定性

一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，化为 $\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，其正定性保持不变，即当 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$，这里 $\boldsymbol{C}$ 可逆时，等式两端的二次型有相同的正定性.

一个二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$（或实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$），通过坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{C}$ 可逆），将其化为标准形（或规范形），$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$（或将 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角阵，即 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$），就容易判别其正定性.

正定二次型的判别法（充要条件）：

（1） f 的标准形的 n 个系数全为正；

（2） f 的正惯性指数为 n；

（3） f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全大于零；

（4）存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$；

（5） f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各顺序主子式全大于零.

注： $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Rightarrow|\boldsymbol{A}|>0$，且 $a_{ii}>0,(i=1,2,\ldots,n)$.

【例 6.2】下列矩阵中属于正定矩阵的是（　　）

A. $\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&0\\1&0&5\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}1&2&0\\2&5&-1\\0&-1&3\end{bmatrix}$　　C. $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&0\\3&0&-1\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&3&4\end{bmatrix}$

【例 6.3】问 a 为何值时，$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+(a+1)x_2^2+x_3^2-2x_2x_3$ 为正定的.

【例 6.4】设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，

其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

1）求 a,b 的值；

2）利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.