清華大学
Tsinghua University

自93　姜永鹏　2019010465　凸优化　2022/11/13

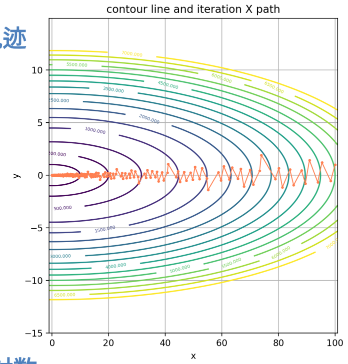
1、$f(x)=\frac{1}{2}x^TAx$ ，$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 100\end{pmatrix}$

$\nabla f(x)=Ax$　　$\nabla^2 f(x)=A$

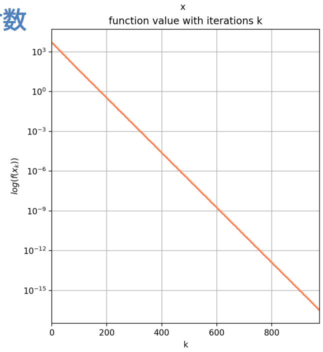
$x^{(0)}=(100,1)$ ，图像如下:

设 $\alpha=0.4$, $\beta=0.5$.

解的轨迹



函数值的对数



2、$f(x)=\frac{10x_1^2+x_2^2}{2}+5\log(1+e^{-x_1-x_2})$

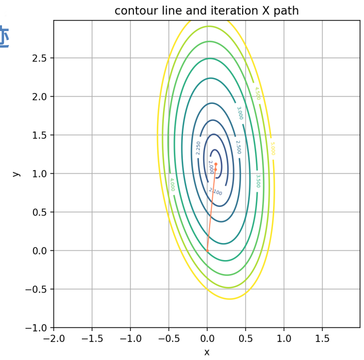
$$\nabla f(x)=\begin{pmatrix}10x_1-5\cdot\frac{e^{-x_1-x_2}}{1+e^{-x_1-x_2}}\\ x_2-5\cdot\frac{e^{-x_1-x_2}}{1+e^{-x_1-x_2}}\end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x)=\begin{vmatrix}10+5\cdot\frac{e^{-x_1-x_2}}{(1+e^{-x_1-x_2})^2} & 5\cdot\frac{e^{-x_1-x_2}}{(1+e^{-x_1-x_2})^2}\\ 5\cdot\frac{e^{-x_1-x_2}}{(1+e^{-x_1-x_2})^2} & 1+5\cdot\frac{e^{-x_1-x_2}}{(1+e^{-x_1-x_2})^2}\end{vmatrix}$$

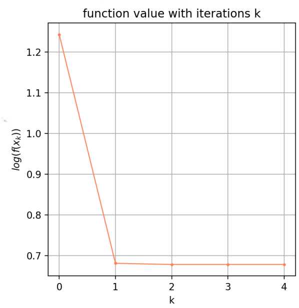
图像如下:

设 $\alpha=0.1$, $\beta=0.7$.（实验发现超参对结果的影响不敏感.）

解的轨迹



函数值的对数



3.(1). $f(x)=-\sum_{i=1}^{m}\log(1-a_i^Tx)-\sum_{i=1}^{n}\log(1-x_i^2)$

$\mathrm{dom} f=\{x\mid 1-a_i^Tx>0,\ 1-x_i^2>0,\ i=1,\dots,n\}$

$f(x)=-\sum_{i=1}^{m}\log(1-a_i^Tx)-\sum_{i=1}^{n}\log(1+x_i)-\sum_{i=1}^{n}\log(1-x_i)$

由于 $1-a_i^Tx$, $1+x_i$, $1-x_i$ 均符合仿射函数 $y=c_i+d_i^Tx$ 形式；故 $-\log(1-a_i^Tx), i=1,\dots,m$, $-\log(1+x_i)$, $-\log(1-x_i)$, $x=1,\dots,n$. 均为 $-\log y$ 与仿射函数 $y=c_i+d_i^Tx$ 的复合, 因此均为 self-concordant. 进而它们的求和 $f(x)$ 是 self-concordant 的.

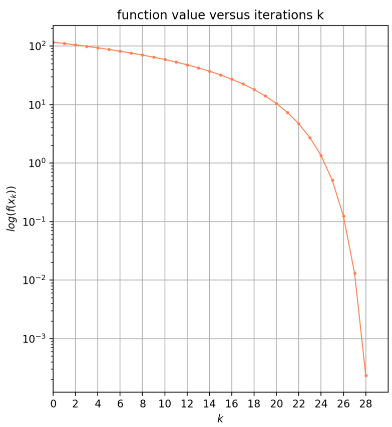
$$\nabla f(x) = \cancel{\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}}\ (d_1, \cdots, d_n)^T, \quad d_i = \frac{2x_i}{1-x_i^2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{ki}}{(1-a_k^T x)}, \quad i=1,\cdots,n.$$

$$\nabla^2 f(x) = \cancel{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}\ [\lambda_{ij}]_{i=1,j=1}^{n,n}, \quad \lambda_{ij} = \frac{2(1+x_i^2)}{(1-x_i^2)^2} I_{i=j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{ki} a_{kj}}{(1-a_k^T x)^2}, \quad i=1,\cdots,n. \qquad I_{i=j} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

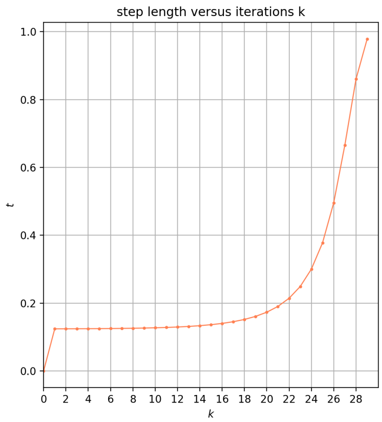
图像如下：步长 $t = \frac{1}{1+\lambda(x)}$，其中 $\lambda(x) = (\nabla f(x)^T \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x))^{1/2}$

A_50矩阵

函数值和最优值的差值

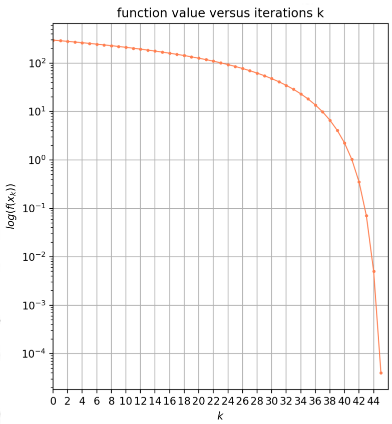


每步迭代时一维搜索的步长



A_100矩阵

函数值和最优值的差值



每步迭代时一维搜索的步长