

1. Übung: Systemanalyse

Aufgabe 1.1 (Magnetlagerung). Diese Aufgabe soll die Bedeutung von Ruhelagen am Beispiel der eindimensionalen magnetischen Lagerung aus Abbildung 1.1 zeigen. Ein Elektromagnet wird dabei mit einer Spannung v versorgt, welche einen Strom i und damit eine Magnetkraft f_m zur Folge hat. Auf das zu lagernde Objekt mit der Masse m wirken die Magnetkraft, die Gewichtskraft und eine äußere Lastkraft f_l . Der Luftspalt zwischen Elektromagnet und dem Objekt ist mit δ bezeichnet und die Geschwindigkeit des Objekts mit w . Ferner ist in Abbildung 1.1 das magnetische Ersatzschaltbild für den magnetischen Fluss Φ dargestellt. Es besteht aus einer Durchflutungsquelle $\Theta = Ni$, wobei N die Anzahl der Windungen bezeichnet, einer konstanten Eisenreluktanz $\mathcal{R}_E = p_1$ und einer luftspaltabhängigen Reluktanz $\mathcal{R}_L(\delta) = p_2 \delta$ mit den Konstanten p_1 und p_2 . Für das elektrische Teilsystem gilt $\frac{d}{dt}\psi = -Ri + v$, wobei $\psi = L_G(\delta)i$ den verketteten Fluss und R den elektrischen Widerstand der Spule des Elektromagneten bezeichnen.

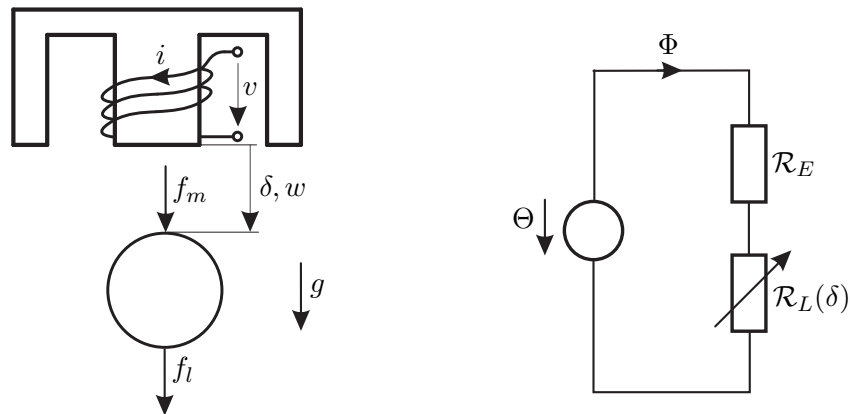


Abbildung 1.1.: Prinzipskizze der eindimensionalen Magnetlagerung und magnetisches Ersatzschaltbild.

Für die Induktivität gilt

$$L_G(\delta) = \frac{N^2}{\mathcal{R}_G(\delta)}, \quad (1.1)$$

wobei $\mathcal{R}_G(\delta)$ die Ersatzreluktanz des Magnetkreises gemäß Abbildung 1.1(b) bezeichnet. Für die Magnetkraft gilt

$$f_m = \frac{1}{2} \frac{\partial L_G(\delta)}{\partial \delta} i^2. \quad (1.2)$$

Das Gesamtmodell der magnetischen Lagerung lautet mit dem Strom i als Ausgangsgröße

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\delta} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\frac{R(p_1 + p_2\delta)}{N^2}\psi + v \\ w \\ -\frac{1}{2}\frac{p_2}{N^2m}\psi^2 + g + \frac{f_l}{m} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\psi}{L_G(\delta)} = \frac{p_1 + p_2\delta}{N^2}\psi. \quad (1.4)$$

- a) Bestimmen Sie die Ruhelage(n) des Systems für konstante Eingangsgrößen $\mathbf{u}_R = \begin{bmatrix} v_R & f_{l,R} \end{bmatrix}^T$.

Im Weiteren wird angenommen, $\delta_R = \bar{\delta}$ sei eine gewünschte Ruhelage des Systems für $f_{l,R} = 0$. Bestimmen Sie v_R so, dass $\delta_R = \bar{\delta}$ eine Ruhelage des Systems darstellt.

- b) Linearisieren Sie das nichtlineare Zustandsmodell um eine allgemeine Ruhelage $(\mathbf{x}_R, \mathbf{u}_R)$ und geben Sie es in der Zustandsraumdarstellung

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (1.5a)$$

$$\Delta y = \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D} \Delta \mathbf{u} \quad (1.5b)$$

an.

Lösung von Aufgabe 1.1. Die Ruhelagen des Systems berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \psi_R &= \pm \sqrt{\frac{2N^2}{p_2}(mg + f_{l,R})} \\ \delta_R &= \frac{1}{p_2} \left(\frac{v_R N^2}{R\psi_R} - p_1 \right) \\ w_R &= 0. \end{aligned}$$

Damit für $f_{l,R} = 0$ die Position $\delta_R = \bar{\delta}$ eine Ruhelage des Systems darstellt, muss die Spannung zu

$$v_R = \pm \frac{p_2 \bar{\delta} + p_1}{N} R \sqrt{\frac{2}{p_2} mg}$$

gewählt werden.

Die Systemmatrizen des linearisierten Modells lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -\frac{R}{N^2}(p_1 + p_2\delta_R) & -\frac{Rp_2}{N^2}\psi_R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{p_2}{N^2m}\psi_R & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}^T &= \left(\frac{p_1 + p_2\delta_R}{N^2} \quad \frac{p_2}{N^2}\psi_R \quad 0 \right) & \mathbf{D} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 (Ruhelagen und Linearisierung). Im Folgendem soll die Berechnung der Ruhelagen und die Linearisierung für verschiedene Systemklassen behandelt werden.

- a) Das mathematische Modell einer Kugel (Radius $R > 0$, Masse $m > 0$), die in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht ρ schwimmt (siehe Abbildung 1.2) ist durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} w \\ g - \frac{F}{m} - \frac{\rho g \pi h^2}{3m} (3R - h) \end{bmatrix}$$

$$h(\mathbf{x}, u) = h$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} h & w \end{bmatrix}^T$ den Zustand, $u = F$ den Eingang und $y = h$ den Ausgang sowie g die Gravitationskonstante.

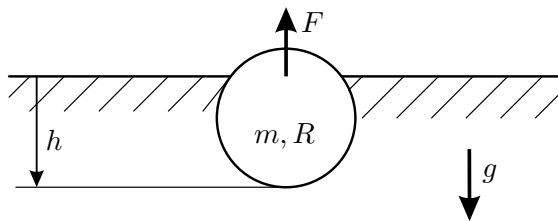


Abbildung 1.2.: Schwimmende Kugel.

Bestimmen Sie jenen Wert der Kraft F_R , bei dem die Eintauchtiefe der Kugel in der Ruhe $h_R = \frac{R}{3}$ beträgt und bringen Sie das mathematische Modell durch Linearisierung um diese Ruhelage in die Form (1.5).

- b) Gegeben ist das elektrische System nach Abbildung 1.3. Die darin verwendete Induktivität ist eine Funktion des Stroms $L = L(i_L)$ und die Kapazität ist von der Spannung u_C abhängig, d. h. $C = C(u_C)$. Der Operationsverstärker wird ideal angenommen und ein unbelasteter Ausgang u_C vorausgesetzt, d. h. es fließt kein Strom aus den Klemmen.

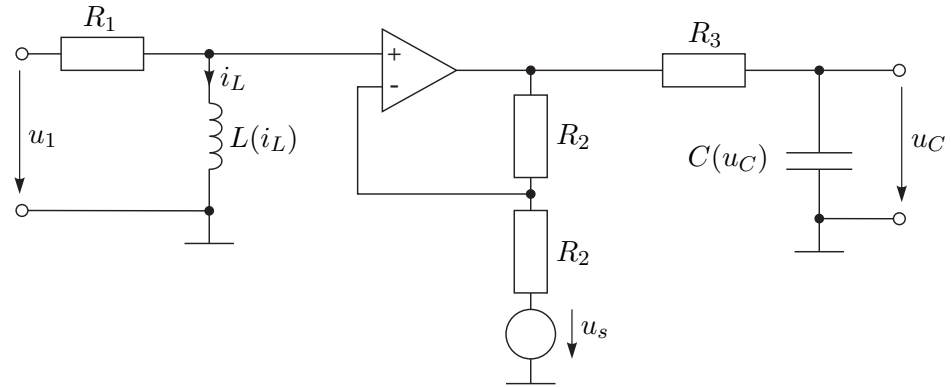


Abbildung 1.3.: Elektrisches Netzwerk.

Das mathematische Modell ergibt sich mit dem Zustand $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_C & i_L \end{bmatrix}^T$ zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \frac{(2u_1 - u_C - u_s - 2R_1 i_L)}{\left(C(u_C) + u_C \frac{d(C(u_C))}{du_C}\right) R_3} \\ \frac{u_1 - R_1 i_L}{L(i_L) + i_L \frac{d(L(i_L))}{di_L}} \end{bmatrix}$$

$$y = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = u_C.$$

Im Folgenden gilt

$$L(i_L) = L_0 + L_1 i_L^2$$

$$C(u_C) = C_0 + C_1 \left(1 - e^{-\frac{u_C}{u_{C0}}}\right)$$

mit den konstanten, positiven Parametern L_0 , L_1 , C_0 , C_1 und u_{C0} . Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems für $u_s = 0$ und $u_1 = \text{konst.}$

Lösung von Aufgabe 1.2.

- a) Die benötigte Kraft F_R , um die Kugel bei $h_R = R/3$ in der Ruhe zu halten, beträgt

$$F_R = mg - \frac{8}{81} \rho g \pi R^3.$$

Die Systemmatrizen des linearisierten Modells ergeben sich zu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2\rho g \pi h_R}{3m}(3R - h_R) + \frac{\rho g \pi h_R^2}{3m} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

b) Für die Ruhelagen gilt

$$u_{C,R} = 0$$

$$i_{L,R} = \frac{u_1}{R_1}.$$

Aufgabe 1.3 (Linearität und Zeitinvarianz). Überprüfen Sie die folgenden dynamischen Systeme auf Linearität bzw. Zeitinvarianz.

a)

$$5\ddot{y} - \frac{1}{10}\dot{y}y = 7.5tu$$

b)

$$\frac{1}{2}y^{(3)} - 10\ddot{y} - \frac{y}{1+t} = \int_0^t \sqrt{2}u(\tau)d\tau + \frac{1}{3}\dot{u}$$

c)

$$\cos\left(\frac{4}{5}\pi\right)\ddot{y} + 3y = \frac{7}{10}u$$

Lösung von Aufgabe 1.3. Zur Überprüfung der Linearität bzw. Zeitinvarianz werden die gegebenen Systeme in einem ersten Schritt als explizite Differentialgleichungssysteme erster Ordnung dargestellt. Lassen sich diese anschließend in der Form

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (1.6a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (1.6b)$$

anschreiben, kann sofort auf die Linearität des Systems geschlossen werden. Sind die Systemmatrizen konstant, folgt unmittelbar die Zeitinvarianz. Ist das System nichtlinear, d. h. ist keine Darstellung in der Form (1.6) möglich, sind zur Charakterisierung der Zeit(in)varianz weitere Untersuchungen nötig.

- a) Das System lautet als Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{50}x_1x_2 + 1.5tu \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$y = x_1,$$

welches nicht in der Form (1.6) dargestellt werden kann. Die Zeit tritt in $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ aber explizit auf, womit sofort auf die Zeitvarianz des Systems geschlossen werden kann.

- b) Mit den fünf neu eingefügten Zuständen und dem neuen Eingang

$$\begin{aligned} x_1 &= y, & x_4 &= \int_0^t u(\tau) d\tau, \\ x_2 &= \dot{y}, & x_5 &= u, \\ x_3 &= \ddot{y}, & v &= \dot{u}, \end{aligned}$$

kann man das gegebene System umschreiben in

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= 2 \left(10x_3 + \frac{x_1}{t+1} + \sqrt{2}x_4 + \frac{1}{3}v \right) \\ \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= v, \end{aligned}$$

womit leicht ersichtlich ist, dass eine Darstellung gemäß (1.6) mit dem Zustand \mathbf{x} und dem Eingang v möglich ist. Das System ist linear aber zeitvariant.

- c) Das System lautet als Differenzialgleichungssystem erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{-3}{\cos(\frac{4}{5}\pi)}x_1 + \frac{7}{10\cos(\frac{4}{5}\pi)}u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3}{\cos(\frac{4}{5}\pi)} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{7}{10\cos(\frac{4}{5}\pi)} \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1,$$

womit unmittelbar die Linearität und Zeitinvarianz gefolgert werden kann.