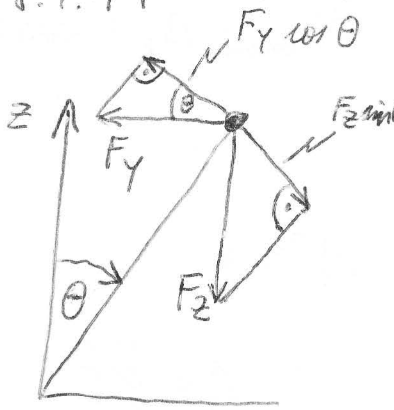
8.7.11



1) a) $x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \\ \beta \\ \dot\beta \end{bmatrix} \qquad u = M_L \qquad y = \theta$

$$F_Y = -m\left(\frac{dV_0}{b}\frac{1}{\cos^2\beta}\dot\beta + \frac{V_0^2}{b}\tan\beta\right)$$

$$J_p\ddot\theta = -F_Y\cdot\cos\theta\cdot h + m\cdot g\cdot\sin\theta\cdot h$$

$$J_L\ddot\beta = M_L - d_L\dot\beta$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \theta \\ \dot\theta \\ \beta \\ \dot\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\theta \\ +\frac{\cos(\theta)h}{J_p}m\left(\frac{dV_0}{b}\frac{1}{\cos^2\beta}\dot\beta + \frac{V_0^2}{b}\tan\beta\right) + \frac{m\cdot g}{J_p}\sin(\theta)h \\ \dot\beta \\ \frac{M_L}{J_L} - \frac{d_L}{J_L}\dot\beta \end{bmatrix}$$

$y = \theta$

b) $\dot\theta_R = 0 \qquad \dot\beta_R = 0 \Rightarrow M_{L,R} = 0$

$$0 = +\frac{\cos(\theta_R)\cancel{h}}{\cancel{J_p}}\cancel{m}\left(\frac{V_0^2}{b}\tan\beta_R\right) + \frac{\cancel{m}\cdot g}{\cancel{J_p}}\sin(\theta_R)\cancel{h}$$

$$-\cos(\theta_R)\frac{V_0^2}{b}\tan(\beta_R) = g\sin(\theta_R)$$

$$-\frac{V_0^2}{bg}\tan(\beta_R) = \tan(\theta_R)$$

mit $\beta_R = \text{const.}$: $\beta_R = 0 \Rightarrow \theta_R = 0 \rightarrow$ Gerade

$\beta_R \neq 0 \Rightarrow \theta_R = \arctan\left(-\frac{v_0^2}{bg}\tan(\beta_R)\right) \rightarrow$ Kreis

c)

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgh}{J_p}\cos\theta_R - \frac{mh}{J_p}\left(\frac{a v_0}{b}\frac{\dot{\beta}_R}{\cos^2\beta_R} + \frac{v_0^2}{b}\tan\beta_R\right)\sin\theta_R & 0 & \frac{mh}{J_p}\cos\theta_R\left(\frac{a v_0}{b}\frac{\dot{\beta}_R(2\sin\beta_R)}{\cos^3\beta_R} + \frac{v_0^2}{b}(1+\tan\beta_R)\right) & \frac{mahv_0\cos\theta_R}{J_p\, b\cos^2\beta_R} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{J_L} \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_L} \end{bmatrix} \qquad c^T = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) a) i) v. Erreichbarkeit: wenn aus $x_0 = 0$ jeder beliebige Zustand $x(T)$ innerhalb einer endlichen Zeit mit einer stückweise stetigen Eingangsgröße $u(t)$ erreicht werden kann

$$R = \begin{bmatrix} 1/T_1 & -\frac{1}{T_1^2} \\ 0 & -\frac{1}{T_1} \end{bmatrix}$$ voller Rang ⇒ vollst. erreichbar

ii) $p_{g\,soll} = s^2 - 2\cdot(-0{,}3)\,s + (0{,}3^2 + 0{,}3^2) = s^2 + 0{,}6s + 0{,}18$

$$R^{-1} = -T_1^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & \frac{1}{T_1^2} \\ 0 & \frac{1}{T_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & -1 \\ 0 & -T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & -1 \\ & v_1^T & 0 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|cc} & & -\frac{1}{2} & 0 \\ & A^2 & -1 & 0 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & \times & \times \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$p_{g\,soll}(A) = \begin{bmatrix} \times & \times \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \times & \times \\ -0{,}6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \times & \times \\ 0 & 0{,}18 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \times & \times \\ -0{,}1 & 0{,}18 \end{bmatrix}$$

$$k^T = -v_1^T\, p_{g\,soll}(A) = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0{,}36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & \times & \times \\ & & -0{,}1 & 0{,}18 \\ \hline 0 & 2 & -0{,}2 & 0{,}36 \end{array}$$

b)

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 2 & 2 & 1 \\ & & & 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{array}$$

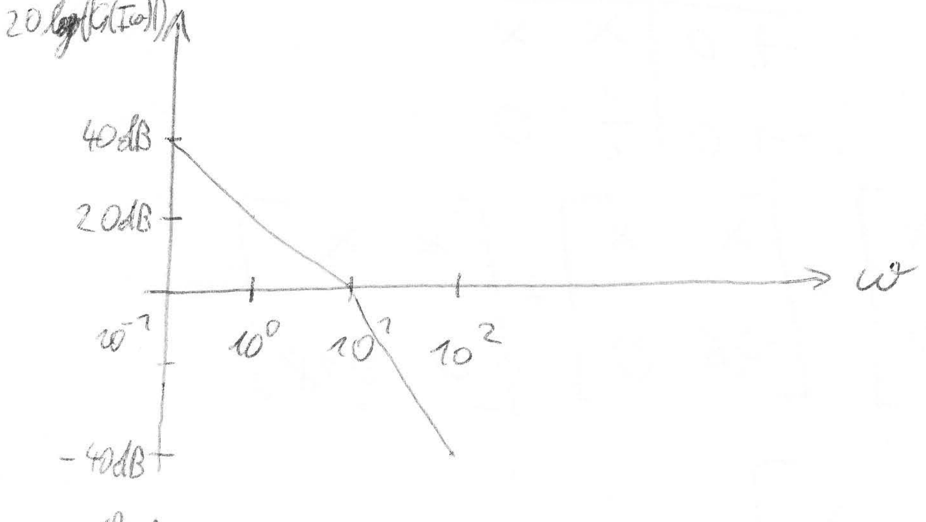
voller Rang $\Rightarrow$ vollst. beobachtbar

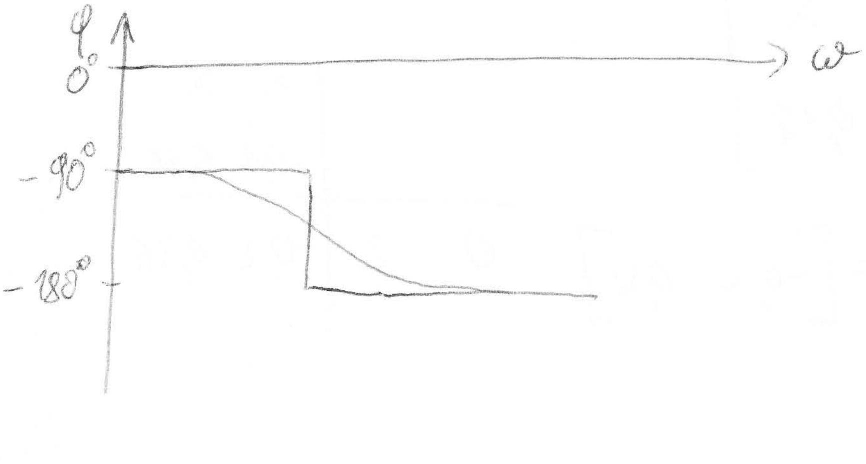
c) i) $G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s+\ln 2}\right)$

$$= \frac{z-1}{\cancel{z}} \frac{\cancel{z}}{z-e^{-\ln 2}} = \frac{z-1}{z-\frac{1}{2}}$$

ii) Anzahl der Pole bleibt gleich, über die Nullstellen lässt sich keine Aussage treffen

3) a) $G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{100} + \frac{s}{10}} = 10 \cdot \frac{1}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)}$





3b) i) $\omega_c t_r = 1{,}5$ $\qquad \Phi + \hat{u} = 70$

$$\omega_c = \frac{1{,}5}{0{,}15} = 10 \qquad \Phi = 45^\circ \Rightarrow \arg(L(I\omega_c)) \overset{!}{=} -135^\circ$$

$e_\infty\Big|_{r=\sigma(t)} = 0 \Rightarrow$ Integrator in Strecke

ii)

$$\arg(G(I\omega_c)) = -90^\circ - \arctan(1) = -135^\circ$$

$$\Rightarrow R(s) = V$$

$$1 \overset{!}{=} |L(I\omega_c)| = \left|\frac{V \cdot 10}{I \cdot 10\left(\frac{I\,10}{10}+1\right)}\right| = \frac{V \cdot \cancel{10}}{\cancel{10} \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow V = \sqrt{2}$$

c) $T_{d,y} = \dfrac{G(s)}{1+R(s)G(s)}$

$$= \frac{\frac{10}{s(\frac{s}{10}+1)}}{1+\sqrt{2}\cdot\frac{10}{s(\frac{s}{10}+1)}} = \frac{10}{\frac{s^2}{10}+s+\sqrt{2}\cdot 10}$$

$$|T_{d,y}(I0)| = \frac{10}{\sqrt{2}\,10} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|T_{d,y}(I5)| = \frac{10}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\cdot 10 - \frac{5^2}{10}\right)^2 + 5^2}}$$

$$\arg(T_{d,y}(I5)) = -\arctan\left(\frac{5}{\sqrt{2}\cdot 10 - \frac{5^2}{10}}\right)$$

$$y(t) = \frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\,\sigma(t) + 0{,}5 \cdot |T_{d,y}(I5)|\,\sin\left(5t + \arg(T_{d,y}(I5))\right)$$

d) i) $L(s) = R(s)\,G(s) = \dfrac{s-1}{s} \cdot \dfrac{s+3}{s^2+s-2} = \dfrac{\cancel{(s-1)}(s+3)}{s\,\cancel{(s-1)}(s+2)}$

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

$$T_{r,y} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{s+3}{s(s+2)+s+3} = \frac{s+3}{s^2+2s+s+3} = \frac{s+3}{s^2+3s+3}$$

Nennergrad $= 2$ und alle Koeffizienten im Nenner > 0 $\Rightarrow$ Hurwitzpolynom

$\Rightarrow$ BIBO stabil

ii) nicht intern stabil wegen Pol-Nst.-Kürzung von einem instabilen Pol

4) a) i) wenn alle Eigenwerte eines Systems einen negativen Realteil besitzen

ii) $y(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$

System ist stabil für alle $\alpha > 0$ und ω_0 beliebig

instabil für alle $\alpha \leq 0$

iii)

s^3	$T_1 T_2$	1
s^2	T_1+T_2	K_0
s^1	$\frac{T_1 T_2 K_0 - T_1 - T_2}{-T_1 - T_2}$	0
s^0	K_0	

$T_1 T_2 > 0$ ✓ B

$T_1 + T_2 > 0$ ✓ A

$$\frac{T_1 T_2 K_0 - (T_1+T_2)}{-(T_1+T_2)} > 0 \quad \text{mit A} \Rightarrow T_1 + T_2 - T_1 T_2 K_0 > 0$$

$$T_1 + T_2 > T_1 T_2 K_0$$

$$\text{mit B} \Rightarrow \frac{T_1+T_2}{T_1 T_2} > K_0$$

$K_0 > 0$

$$\Rightarrow 0 < K_0 < \frac{T_1+T_2}{T_1 T_2}$$

4b) i) $\Psi(0) = E$

$\Psi^{-1}(k) = \Psi(-k)$

$\Psi(k+l) = \Psi(k)\,\Psi(l)$

$\Psi(k+1) = \Phi\,\Psi(k)$

ii) $\Psi(k) = \begin{bmatrix} (\frac{1}{c})^k & d^{k-1} - 1 \\ a - 0{,}5 & b^{3k-3} \end{bmatrix}$

$\Psi(0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{d} - 1 \\ a - 0{,}5 & b^{-3} \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow d = 1 \,,\; a = 0{,}5 \,,\; b = 1$

$\Psi(1) = \begin{bmatrix} (\frac{1}{c}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \Phi$

$\frac{1}{c} = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

4c) i) Dead Beat Verhalten $\Rightarrow$ nur Pole im Ursprung

$\Rightarrow G_1$ fällt weg

g_k hat einen Sprung bei $k=0 \Rightarrow G_4$ fällt weg (Zählergrad kleiner Nennergrad)

AWS: $g_0 = \lim_{z \to \infty} G_2(z) = -2 \neq -4 \Rightarrow$ fällt weg

$\Rightarrow G_3(z)$ ist richtig

ii) EWS: $y_\infty = \lim_{z \to 1} \cancel{(z-1)} \cdot \frac{-4z^2 + z + 4}{z^2} \cdot \frac{z}{\cancel{(z-1)}} = \frac{-4+1+4}{1} = \underline{\underline{1}}$

Grenzwert existiert da alle Pole im Einheitskreis liegen