3. Übung: Regelkreis

Aufgabe 3.1. Gegeben sind die beiden linearen zeitkontinuierlichen Systeme

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & 5 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \tag{3.1a}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 \tag{3.1b}$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 8 & -15 \\ 6 & -10 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} u_2 \tag{3.2a}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_2 + 4u_2. \tag{3.2b}$$

Berechnen Sie die zugehörigen Übertragungsfunktionen $G_1(s) = \hat{y}_1(s)/\hat{u}_1(s)$ und $G_2(s) = \hat{y}_2(s)/\hat{u}_2(s)$. Analysieren Sie die BIBO-Stabilität sowie die Sprungfähigkeit der beiden Übertragungsfunktionen. Vergleichen Sie die BIBO-Stabilität mit der asymptotischen Stabilität der obigen Systeme für $u_1 = 0$ bzw. $u_2 = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung der notwendigen inversen Matrizen die adjunkte Matrix. Beachten Sie, dass nicht alle Einträge dieser Matrix zur Berechnung der Übertragungsfunktion notwendig sind.

Lösung von Aufgabe 3.1. Die Übertragungsfunktionen errechnen sich zu

$$G_1(s) = \frac{4}{(s+3)(s+2)} \tag{3.3}$$

und

$$G_2(s) = \frac{4s^2 + 10s - 60}{s^2 + 2s + 10}. \tag{3.4}$$

Die Übertragungsfunktion $G_1(s)$ ist (i) BIBO-stabil (alle Pole in der linken offenen s-Halbebene) und (ii) nicht sprungfähig (Nennergrad ist größer als der Zählergrad). Das autonome System mit $u_1 = 0$ ist nicht asymptotisch stabil.

Die Übertragungsfunktion $G_2(s)$ ist (i) BIBO-stabil (alle Pole in der linken offenen s-Halbebene) und (ii) sprungfähig (Nennergrad ist gleich dem Zählergrad). Das autonome System mit $u_2 = 0$ ist asymptotisch stabil.

Aufgabe 3.2. Gegeben ist ein lineares, zeitinvariantes System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{7s^2 + 29s + 320}{s^2 + 4s + 29}. \tag{3.5}$$

Berechnen Sie die Impulsantwort $g(t)$ des Systems (3.5) mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Lösung von Aufgabe 3.2. Die Impulsantwort berechnet sich zu

$$g(t) = 7\delta(t) + e^{-2t}(\cos(5t) + 23\sin(5t)). \tag{3.6}$$

Aufgabe 3.3. Berechnen Sie die Realisierung der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^4 + 5s^2 + 3s}{(1-s)(5+2s)(s^2+2s+3)}$$

in zweiter Standardform.

Lösung von Aufgabe 3.3. Die Realisierung ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -\frac{15}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix} u \tag{3.7}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \frac{1}{2} u. \tag{3.8}$$

Aufgabe 3.4. Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}s - 1\right)(s-1)}{(s^2+s+2)(s+1)}.$$

Berechnen Sie die eingeschwungene Lösung für die Eingangsgröße

$$u(t) = 5\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{13}{(t+5)^3} + 2.$$

Lösung von Aufgabe 3.4. Die eingeschwungene Lösung lautet

$$y(t) = 5\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\left(t - \frac{\pi}{3} - \frac{11}{12}\pi\right) + 1. \tag{3.9}$$

Aufgabe 3.5. Gegeben ist das Strukturschaltbild eines Regelkreises mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ bis $G_5(s)$. Berechnen Sie für diesen Regelkreis die Übertragungsfunktionen von den Eingängen u_1 und u_2 auf jeden der beiden Ausgänge y_1 und y_2. Nehmen Sie dazu vorerst an, dass $G_5(s) = 0$ gilt und dass u_2 eine externe Eingangsgröße darstellt.

Im zweiten Schritt wird angenommen, dass u_1 eine messbare Störung darstellt. Bestimmen Sie ausgehend von den obigen Ergebnissen die Übertragungsfunktion $G_5(s)$ so, dass der Einfluss von u_1 auf den Ausgang y_1 mit Hilfe der Eingangsgröße $u_2 = G_5(s)u_1$ exakt kompensiert wird.

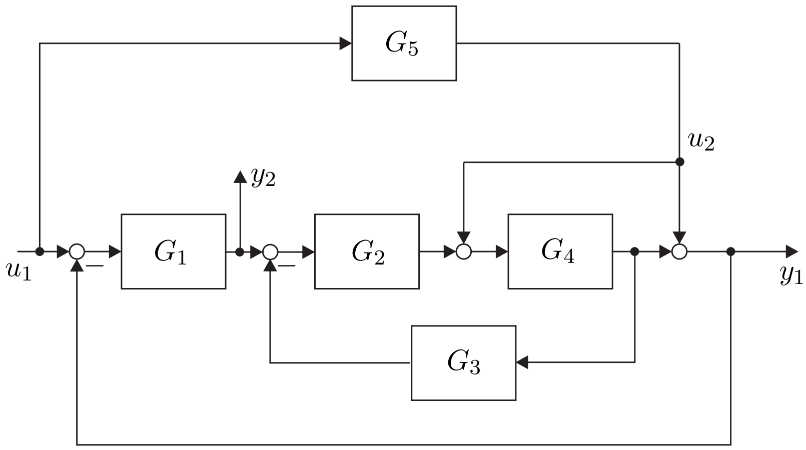


Abbildung 3.1.: Regelkreis.

Lösung von Aufgabe 3.5. Es gilt

$$y_1 = \underbrace{\frac{G_1G_2G_4}{1 + G_2(G_1 + G_3)G_4}}_{=T_{u_1,y_1}} u_1 + \underbrace{\frac{1 + G_4(1 + G_2G_3)}{1 + G_2(G_1 + G_3)G_4}}_{=T_{u_2,y_1}} u_2 \tag{3.10}$$

$$y_2 = \underbrace{\frac{G_1(1 + G_2G_3G_4)}{1 + G_2(G_1 + G_3)G_4}}_{=T_{u_1,y_2}} u_1 + \underbrace{\frac{-G_1(1 + G_4 + G_2G_3G_4)}{1 + G_2(G_1 + G_3)G_4}}_{=T_{u_2,y_2}} u_2. \tag{3.11}$$

Es muss

$$G_1G_2G_4 + G_5(1 + G_4(1 + G_2G_3)) = 0$$

gelten. Damit folgt

$$G_5 = -\frac{G_1G_2G_4}{1 + G_4(1 + G_2G_3)}.$$

Aufgabe 3.6. Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ eines linearen, zeitinvarianten, kontinuierlichen Systems anhand deren Pol- und Nullstellendiagramm in Abbildung 3.2.

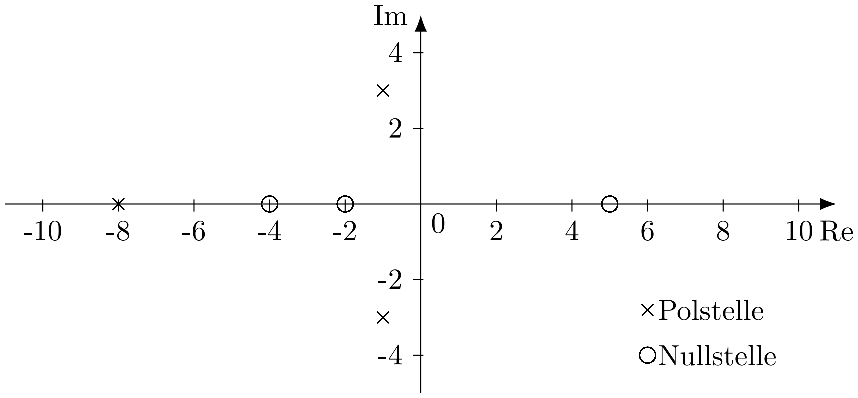


Abbildung 3.2.: Pol- und Nullstellendiagramm.

Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ so an, dass die stationäre Verstärkung der Übertragungsfunktion $V = 25$ beträgt.

- Ist die Strecke BIBO-stabil?
- Ist die Strecke sprungfähig?
- Ist die Strecke phasenminimal?

Lösung von Aufgabe 3.6. Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$G(s) = -25 \frac{\left(\frac{s}{5} - 1\right)\left(\frac{s}{2} + 1\right)\left(\frac{s}{4} + 1\right)}{\left(\frac{s}{8} + 1\right)\left(\frac{s^2}{10} + \frac{2s}{10} + 1\right)}.$$

Wie anhand der Pole und Nullstellen abgelesen werden kann, ist diese Strecke BIBO-stabil, sprungfähig und *nicht* phasenminimal.

Aufgabe 3.7. Gegeben ist der Regelkreis nach Abbildung 3.3.

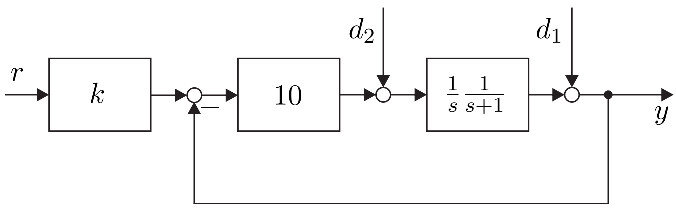


Abbildung 3.3.: Regelkreis 2.

Bestimmen Sie zunächst k so, dass der Regelfehler e für $d_1 = d_2 = 0$ und $r = \sigma(t)$ verschwindet. Berechnen Sie anschließend die bleibende Regelabweichung bei $r = 0$ für die Fälle

1. $d_1 = 0$, $d_2 = \sigma(t)$,
2. $d_1 = \sigma(t)$, $d_2 = 0$ und
3. $d_1 = t$, $d_2 = 0$.

Lösung von Aufgabe 3.7. In der angegebenen Konfiguration kann k beliebig gewählt werden, damit der stationäre Regelfehler e_∞ für $r(t) = \sigma(t)$ verschwindet. Für die zu betrachtenden Fälle ergibt sich

1. $e_\infty|_{d_1=0,d_2=\sigma(t)} = -\frac{1}{10}$
2. $e_\infty|_{d_1=\sigma(t),d_2=0} = 0$
3. $e_\infty|_{d_1=t,d_2=0} = -\frac{1}{10}$.

Aufgabe 3.8. Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = -\frac{1}{50}\frac{s^2 + 99s - 100}{(s^2 - 4s + 100)(s + 0.1)} \ .$$

Skizzieren Sie das Bodediagramm dieser Übertragungsfunktion auf beiliegendem Blatt. Bringen Sie dazu $G(s)$ in normierte Form und zeichnen Sie zunächst die Asymptoten der Teilübertragungsfunktionen. Bestimmen Sie anhand Ihrer Skizze näherungsweise den Betrag und die Phase bei $\omega_1 = 10\,\mathrm{s}^{-1}$ und bei $\omega_2 = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$. Vergleichen Sie die erhaltenen Werte mit numerisch (MATLAB, Taschenrechner) berechneten Werten.

Lösung von Aufgabe 3.8. Die gegebene Übertragungsfunktion ergibt sich in normierter Form zu

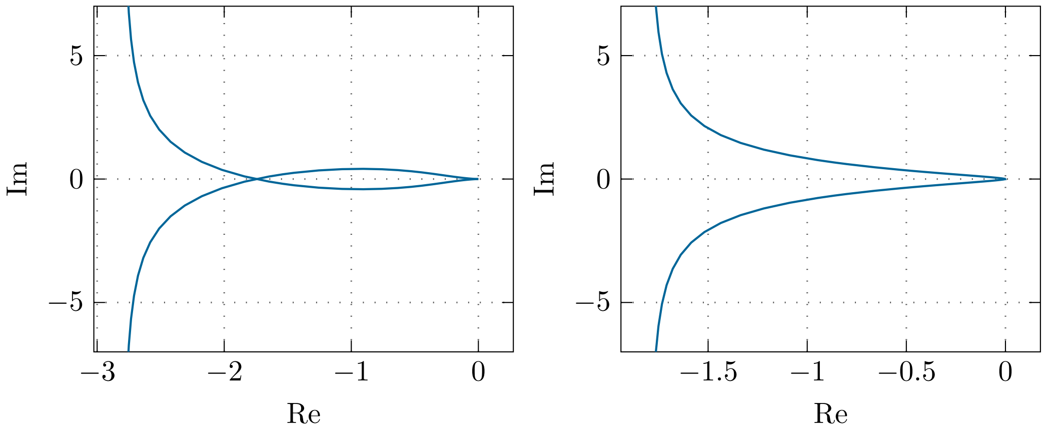
$$G(s) = \underbrace{\frac{1}{5}}_{V}\underbrace{\left(\frac{s}{100} + 1\right)}_{G_1}\underbrace{(-s + 1)}_{G_2}\underbrace{\frac{1}{\left(\frac{s^2}{10^2} + 2 \cdot (-0.2)\frac{s}{10} + 1\right)}}_{G_3}\underbrace{\frac{1}{\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)}}_{G_4} \ .$$

Das Bodediagramm, wie es in Abbildung 3.6 dargestellt ist, kann dann durch Summation der Betrags- und Phasengänge der Teilübertragungsfunktionen konstruiert werden.

Aufgabe 3.9. Gegeben sind zwei Standardregelkreise mit den Übertragungsfunktionen der offenen Kreise

$$L_1(s) = \frac{1 + 2s}{s(s - 1)(1 + 0.2s)} \quad \text{bzw.} \quad L_2(s) = \frac{1 + 2s}{s(s^2 - 1)(1 + 0.2s)} \ .$$

Die Abbildungen 3.4 a) bzw. b) zeigen die Ortskurven der offenen Regelkreise.

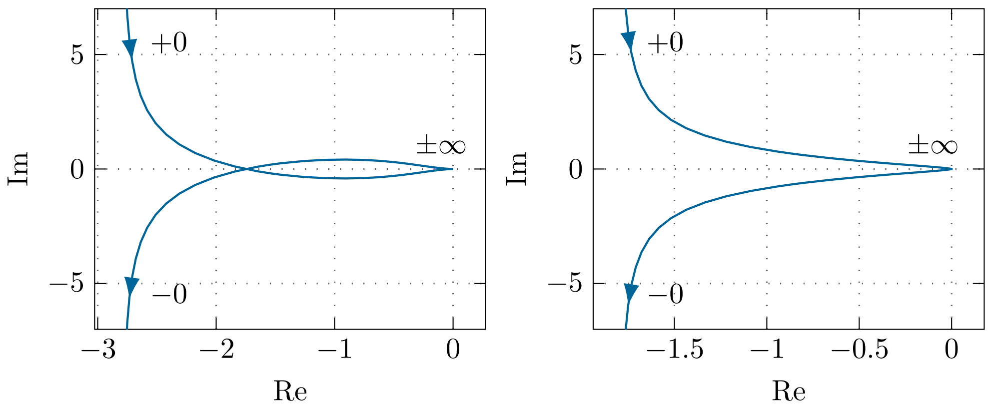


a) Ortskurve zu $L_1(s)$ b) Ortskurve zu $L_2(s)$

Abbildung 3.4.: Ortskurven.

Kennzeichnen Sie in den Ortskurven die Punkte $\omega = \pm 0$, $\omega = \pm\infty$ und den Durchlaufsinn. Beurteilen Sie die Stabilität der geschlossenen Regelkreise anhand des Nyquist-Kriteriums.

Lösung von Aufgabe 3.9. Die Lage der Punkte $\omega = \pm 0$, $\omega = \pm\infty$ und damit auch der Durchlaufsinn, wie in den Abbildungen 3.4 dargestellt, kann z. B. anhand der (Grenzwerte der) Beträge und der Phasen der Übertragungsfunktionen $L_1(s)$ und $L_2(s)$ ermittelt werden.



a) Ortskurve zu $L_1(s)$ b) Ortskurve zu $L_2(s)$

Abbildung 3.5.: Ortskurven von Aufgabe 3.9

Unter Berücksichtigung des Nyquist-Kriteriums muss für die stetige Winkeländerung $\Delta arg(1 + L_1(I\omega)) = 3\pi$ bzw. $\Delta arg(1 + L_2(I\omega)) = 3\pi$ gelten. Dies ist nur im Fall von $1 + L_1(I\omega)$ erfüllt, die stetige Winkeländerung von $1 + L_2(I\omega)$ beträgt dagegen $-\pi$. Damit ist nur der geschlossene Regelkreis zu $L_1(s)$ BIBO-stabil.

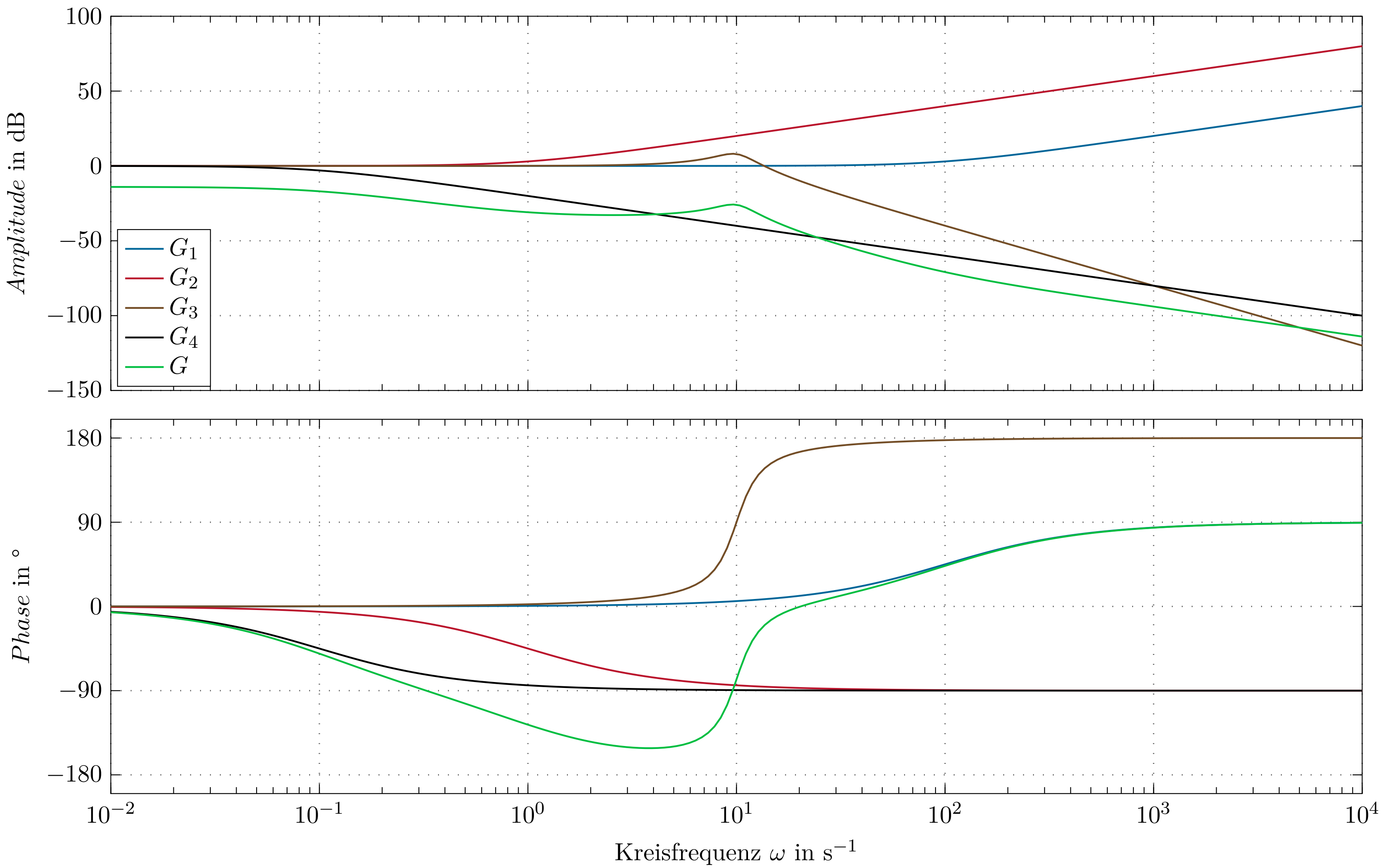


Abbildung 3.6.: Bodeplot zu Aufgabe 3.8.