2. Übung: Lineare dynamische Systeme

Aufgabe 2.1. Gegeben sind die beiden autonomen Systeme

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \mathbf{x} \tag{2.1}$$

und

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \mathbf{x} \,. \tag{2.2}$$

Berechnen Sie die regulären Zustandstransformationen $\mathbf{x} = \mathbf{V}_1\mathbf{z}$ und $\mathbf{x} = \mathbf{V}_2\mathbf{z}$, die die Systeme (2.1) und (2.2) in die Jordansche Normalform transformieren. Geben Sie außerdem die Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ in Jordanscher Normalform an.

Lösung von Aufgabe 2.1. Sowohl die Matrix $\mathbf{A}_1$ als auch $\mathbf{A}_2$ haben die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit der algebraischen Vielfachheit $n_1 = 2$ und $\lambda_2 = 2$ mit der algebraischen Vielfachheit $n_2 = 1$. Für die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ_1 der Matrix $\mathbf{A}_2$ gilt $1 = g_1 < n_1$, so dass hier ein Hauptvektor berechnet werden muss, um die Transformationsmatrix auf Jordansche Normalform zu erhalten. Die Transformationsmatrizen können zum Beispiel wie folgt gewählt werden

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Jordanschen Normalformen der Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$ ergeben sich dann zu

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2.2. Gegeben ist das Modell eines linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\end{aligned} \tag{2.3}$$

mit der Federsteifigkeit k, der Dämpfungskonstante d, der Masse m und $u = F$ als Kraft auf die Masse. Für die Parameter gilt $m = 2$, $d = 4$ und $k = 6$.

Berechnen Sie die reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}$, die das System (2.3) in die *reelle* Jordansche Normalform transformiert und geben Sie das entsprechende transformierte System an.

Lösung von Aufgabe 2.2. Die Transformationsmatrix lautet beispielsweise

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Das System ergibt sich dann in reeller Jordanscher Normalform zu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V}}_{\widetilde{\mathbf{A}}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{V}^{-1}\mathbf{b}}_{\widetilde{\mathbf{b}}}u \\ y &= \underbrace{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}}_{\widetilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}}\mathbf{z}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \\ \widetilde{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{12} \end{bmatrix} \\ \widetilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Hinweis: Bei einer anderen Wahl der Transformationsmatrix (die Eigenvektoren sind nicht eindeutig) können $\widetilde{\mathbf{b}}$ und $\widetilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}$ eine andere Gestalt annehmen.

Aufgabe 2.3. Berechnen Sie die Transitionsmatrizen $\mathbf{\Phi}$ der Systeme (2.1), (2.2) und (2.3). Berechnen Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{2.4}$$

mit $\mathbf{A}_1$ aus (2.1) für die Eingangsgröße $u(t) = 1+t$ und dem Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Geben Sie die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems (2.3) für den Fall $u = 0$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ sowie die Parameterwerte $m = 2$, $d = 4$ und $k = 6$ an. Zeichnen Sie den jeweiligen Lösungsverlauf im Zustandsraum mit Maple.

Lösung von Aufgabe 2.3. Die Transitionsmatrix des Systems (2.1) lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}.$$

Die Transitionsmatrix des Systems (2.2) lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 2t\mathrm{e}^t & 2t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix}.$$

Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ des Systems (2.4) für $u(t) = 1 + t$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ folgt zu

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7}{4}\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}t - \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Die Transitionsmatrix des linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 2\cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) & \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -3\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) & 2\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}$$

und die Lösung ergibt sich für die gegebenen Parameterwerte sowie $u = 0$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ zu

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 2\cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -3\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \end{bmatrix}.$$

Als Hilfsmittel für die Darstellung der Lösung im Zustandsraum bietet sich der MAPLE-Befehl `DEplot` aus dem Paket `DEtools` an.

Aufgabe 2.4. Gegeben ist das folgende lineare System

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\,. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Berechnen Sie die Transitionsmatrix $\mathbf{\Phi}$ des Systems (2.5) mit Hilfe der Laplacetransformation. Berechnen Sie den Verlauf des Ausgangs y für die Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ und die Stellgröße $u = \exp(t)$. Interpretieren Sie das Ergebnis anhand der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)}$.

Hinweis:

- Die Inverse einer (regulären) Matrix läßt sich relativ einfach über die Adjunkte $adj(\mathbf{A})$ berechnen. Es gilt dann $\mathbf{A}^{-1} = \frac{adj(\mathbf{A})}{det(\mathbf{A})}$, wobei für die Einträge der Adjunkten gilt $adj(\mathbf{A})_{j,i} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, mit M_{ij} dem Wert der Unterdeterminanten, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von $\mathbf{A}$ entsteht.
- Es ist nicht notwendig, den Verlauf des gesamten Zustandes zu berechnen.

Lösung von Aufgabe 2.4.

Die Transitionsmatrix lautet

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) - \sin(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) + \sin(2t) \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}.$$

Für den Verlauf des Ausgangs bei der gegebenen Eingangsgröße erhält man

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} \sin(t)\cos(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\sin(2t).$$

Aufgabe 2.5. Welche der folgenden Systeme sind asymptotisch stabil?

$$\dot{x} = x \tag{2.6}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{2.7}$$

Begründen Sie jeweils Ihre Aussage. Was muss für die Parameterwerte des Systems (2.3) gelten, damit es asymptotisch stabil ist?

Lösung von Aufgabe 2.5. Das System $\dot{x} = x$ ist nicht asymptotisch stabil (positiver Eigenwert), (2.7) ist asymptotisch stabil.

Die Eigenwerte des linearen Feder-Masse-Dämpfer-Systems lauten mit $\overline{k} = \frac{k}{m}$ und $\overline{d} = \frac{d}{m}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\overline{d}}{2} \pm I \frac{1}{2} \sqrt{4\overline{k} - \overline{d}^2},$$

weshalb $d > 0$ und $k < \frac{5d^2}{16m}$ für asymptotische Stabilität gelten muss.