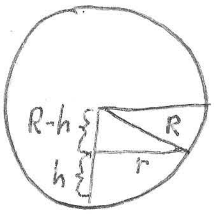
1a) $\dot{V}_h = q_i - q_o$ $\quad u = q_i$ $\quad$ 6.7.12



$r^2 = R^2 - (R-h)^2 =$
$= R^2 - R^2 + 2Rh - h^2$

$\pi(2Rh-h^2)\dot{h} = q_i - q_o = q_i - k\sqrt{h}$

$$V_h = \int_0^h A(\bar{h})\,d\bar{h} = \int_0^h \pi r^2(\bar{h})\,dh = \int_0^h \pi(2R\bar{h}-\bar{h}^2)\,d\bar{h}$$

$$= \pi\left(2R\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \pi\left(Rh^2 - \frac{h^3}{3}\right)$$

$$I\dot{\omega} = F_q \cdot L \cdot \cos\varphi - m \cdot g \cdot L \cdot \cos\varphi - d_\omega \omega$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \varphi \\ \omega \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{1}{mL^2}\left[\frac{\rho}{A_0} k^2 h \cdot L \cdot \cos\varphi - m \cdot g \cdot L \cdot \cos\varphi - d_\omega \omega\right] \\ \frac{1}{\pi(2Rh-h^2)}\left[q_i - k\sqrt{h}\right] \end{bmatrix}$$

$y = \varphi$

b) $h = R$ $\quad \dot{x} = 0 \Rightarrow \omega = 0$

$q_{i,R} = k\sqrt{R}$

$0 = \frac{\rho}{A_0} k^2 R L \cos\varphi_R - m_R g L \cos\varphi_R$ $\quad$ für $\varphi_R \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

↵

$m_R = \frac{\rho}{A_0 g} k^2 R$

c)

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{mL^2}\left[\frac{\rho}{A_0} k^2 \; L - mgL\right](-\sin \varphi_R) & -\frac{d_\omega}{mL^2} & \frac{\rho k^2 L \cos\varphi_R}{mL^2} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{33} = \frac{-\frac{k}{2\sqrt{R}}\pi(R^2) - (k\sqrt{R} - k\sqrt{R})\pi(2R - 2R)}{(\pi(2R^2 - R^2))^2} =$$

$$= -\frac{k \cancel{\pi} \cancel{R^2}}{2\sqrt{R}\,\pi^{\cancel{2}}\,R^{\cancel{4}2}} = -\frac{k}{2\pi\sqrt{R}R^2}$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\pi R^2} \end{bmatrix} \qquad c^T = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

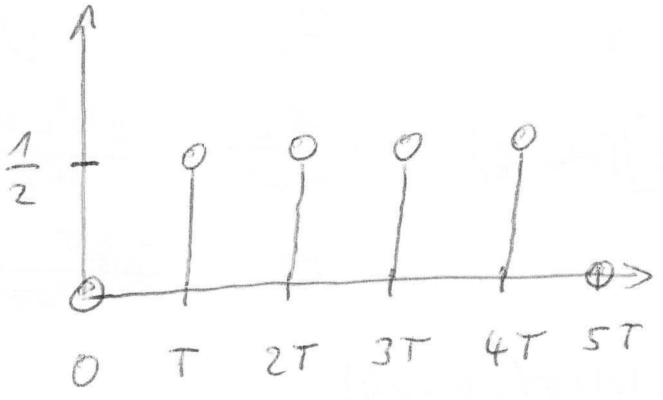
$$d = \frac{\partial h}{\partial u} = 0$$

2a) i) $h_k = \frac{1}{2}(1^{k-1}) + \frac{1}{2}(1^{k-2}) + \frac{1}{2}(1^{k-3}) + \frac{1}{2}(1^{k-4})$

$$g_k = \frac{1}{2}\delta_{k-1} + \frac{1}{2}\delta_{k-2} + \frac{1}{2}\delta_{k-3} + \frac{1}{2}\delta_{k-4}$$

$$G(z) = \frac{1}{2}(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}) = \frac{1}{2}\,\frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z^4}$$

$G(z)$ ist BIBO-stabil, da alle Pole innerhalb des offenen Einheitskreises liegen ii)



iii) $\omega_0 T_a = \frac{\pi}{2}$ $\qquad e^{I\pi/2} = I$

$$G(e^{I\pi/2}) = \frac{I^3 + I^2 + I + 1}{2I^4} = \frac{-I - 1 + I + 1}{2I^4} = 0$$

$$(y_k) = 3\left|G(e^{I\pi/2})\right| \sin\left(k\frac{\pi}{2} + \arg\left(G(e^{I\pi/2})\right)\right) = 0$$

2b) $$G(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right) = \frac{z-1}{z} \frac{2T_a z}{(z-1)^2} = \frac{2T_a}{z-1}$$

$$T_{r,y} = \frac{L}{1+L} = \frac{RG}{1+RG} = \frac{P2T_a}{z-1+P2T_a}$$

alle Pole müssen innerhalb des offenen Einheitskreises liegen für BIBO-Stabilität

$$\Rightarrow |P2T_a - 1| < 1$$

$$-1 < P2T_a - 1 < 1$$

$$0 < P2T_a < 2$$

$$0 < P < \frac{2}{T_a}$$

3a) i) $R = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} \\ 1 & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$ voller Rang $\Rightarrow$ vollständig erreichbar

$$R^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{10}} \begin{bmatrix} -\frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1^T = e_n^T R^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_{g,soll} = \left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{array}{cc|cc}
 & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\
\multicolumn{2}{c|}{(\Phi - \frac{1}{4}E)(\Phi - \frac{1}{2}E)} & 1 & -\frac{7}{10} \\
\hline
-\frac{1}{4} & -\frac{1}{10} & \frac{2}{80} & \frac{38}{400} \\
1 & -\frac{9}{20} & \times & \times
\end{array}$$

$$k^T = -v_1^T \, p_{g,soll}(\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{2}{8} & \frac{38}{40} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{19}{20} \end{bmatrix}$$

ii) System liegt in Beobachtbarkeitsnormalform vor

$\Rightarrow$ durch $\hat{k}$ wird nur die 2. Spalte von Φ beeinflusst
es stehen dort anschließend die Koeffizienten von $\hat{p}_{g,soll}$

$$\hat{p}_{g,soll} = \left(z - \frac{1}{50}\right)\left(z - \frac{1}{100}\right) = z^2 - \frac{3}{100} z + \frac{1}{5000}$$

$$\Rightarrow \Phi_e = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{5000} \\ 1 & \frac{3}{100} \end{bmatrix}$$

3b) $\omega_c t_r = 1{,}5$

$\omega_c = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$

$\Phi + \ddot{u} = 70$

$\Phi = 30^\circ$

$\Rightarrow \arg(L(I\omega_c)) = -150^\circ$

$e_\infty|_{r(t)=t} = 0 \Rightarrow$ Doppelintegrator

$\arg(G(I2)) = \arctan(2-\sqrt{3}) - \arctan(1) = -30^\circ$

$\Rightarrow \arg(R(I2)) \overset{!}{=} -120^\circ \qquad R(s) = V \frac{(1+sT)}{s^2}$

$\Rightarrow \quad \arctan(2T) = 60^\circ$

$T = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$|L(I2)| \overset{!}{=} 1 = \frac{V \cdot \sqrt{1+3} \cdot 10 \cdot \sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}}{4 \cdot \sqrt{1+1}} =$

$\Rightarrow V = \frac{\cancel{4}^{2} \sqrt{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{10}_{5} \cdot \sqrt{1+4-4\sqrt{3}+3}} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{8-4\sqrt{3}}} =$

$= \frac{1}{5\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

4a) i) G_a und G_b haben eine endliche Winkeländerung

$\Rightarrow G_4$ fällt weg, da es eine Totzeit enthält, mit $\Delta \arg(G_4) = \infty$

$$\lim_{\omega \to +\infty} G_2(j\omega) = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{j\omega(j\omega - 2)}{(j\omega - 4)(j\omega + 5)} = 1$$

$$\lim_{\omega \to +0} G_2(j\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \to 0} G_3(j\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{2(j\omega - 2)}{(j\omega - 4)(j\omega + 0{,}5)} = 2$$

$\Rightarrow G_3$ fällt raus weil weder G_a, noch G_b durch den Punkt 2 verlaufen

$$\lim_{\omega \to \infty} G_1(j\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \frac{j\omega - 2}{(j\omega - 4)(j\omega + 0{,}5)} = 0$$

$$\lim_{\omega \to 0} G_1(j\omega) = \lim_{\omega \to 0} \frac{j\omega - 2}{(j\omega - 4)(j\omega + 0{,}5)} = 1$$

4a) i) ff

$$G_1(j\omega) = \frac{j\omega - 2}{(j\omega-4)(j\omega+0,5)} = \frac{(j\omega-2)(-j\omega-4)(-j\omega+0,5)}{(16^2+\omega^2)(0,25+\omega^2)}$$

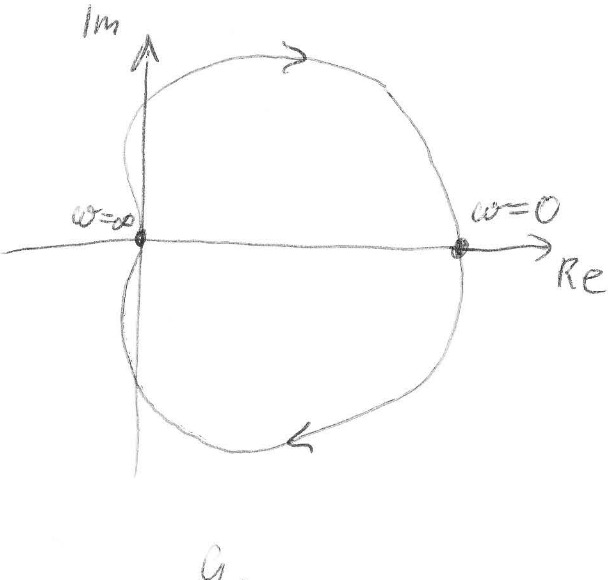
$$= \frac{(+\omega^2 \overbrace{-j4\omega+2j\omega}^{-2j\omega}+8)(-j\omega+0,5)}{N} =$$

$$= \frac{(-j\omega^3+0,5\omega^2-2\omega^2-j\omega-8j\omega+4)}{N} =$$

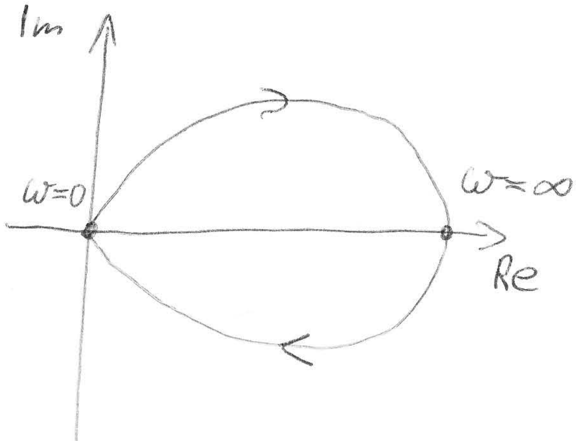
$$Re(G_1(j\omega)) = \frac{0,5\omega^2-2\omega^2+4}{N} = \frac{-1,5\omega^2+4}{N} = 0$$

$\Rightarrow$ es gibt 2 Frequenzenzen bei denen die y-Achse geschnitten wird, bei denen $\omega \neq \infty$ und $\omega \neq 0$ ist

$\Rightarrow G_1 = G_a$ und $G_2 = G_b$



G_1



4 a) ii) $G_1(s)$ und $G_4(s)$ haben den gleichen Betragsfrequenzgang

- $(s-2)$ und $(s+2)$ haben die gleiche Form nach der Betragsbildung
- $|e^{-0{,}4 I \omega}| = 1$ und wirkt sich daher nicht auf den Betragsgang aus

4 b) i) $R(s) = 10^{-1} + \frac{1{,}9 \cdot 10^{-3} s}{1 + s \cdot 10^{-3}} = \frac{10^{-1} + s\, 10^{-4} + s \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-3}}{1 + s \cdot 10^{-3}} =$

$$= \frac{10^{-1} + 2 \cdot 10^{-3} s}{1 + s \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{10} \frac{1 + 2 \cdot 10^{-2} s}{1 + s \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{10} \frac{1 + \frac{s}{50}}{1 + \frac{s}{1000}}$$

Bode-Diagramm: nächste Seite

ii) $L(I0) = 10 \Rightarrow V = 100$

quadratischer Term bei $\omega = 1$

überschwingen: $-9\ dB = 20 \log(2\xi)$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\xi$$

$$\xi = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$G(s) = 100 \frac{1}{s^2 + 2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} s + 1}$$

iii) $\lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + L(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + 10} = \frac{1}{11}$

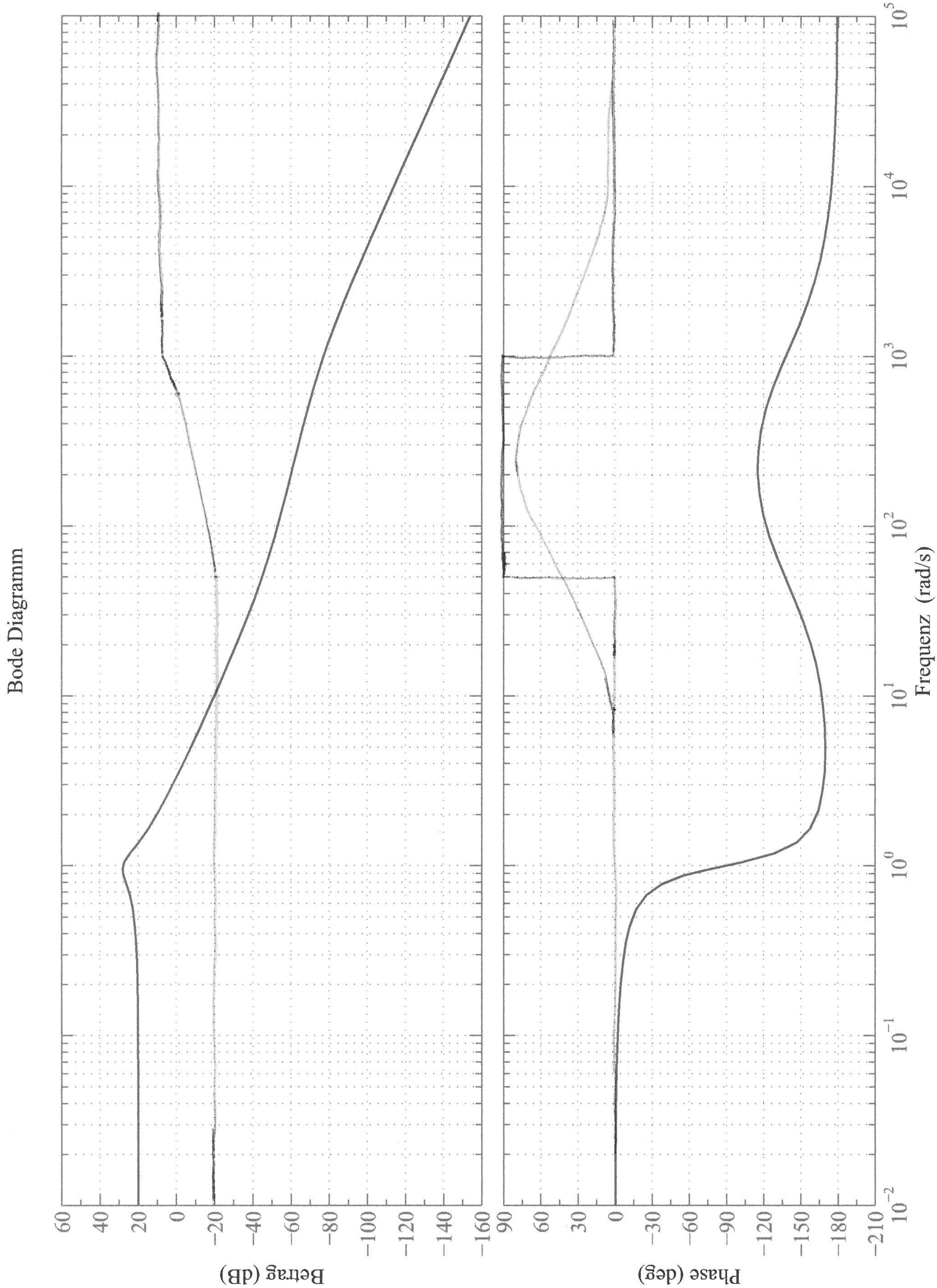


Abbildung 5: Bode-Diagramm zu Aufgabe 4. b).