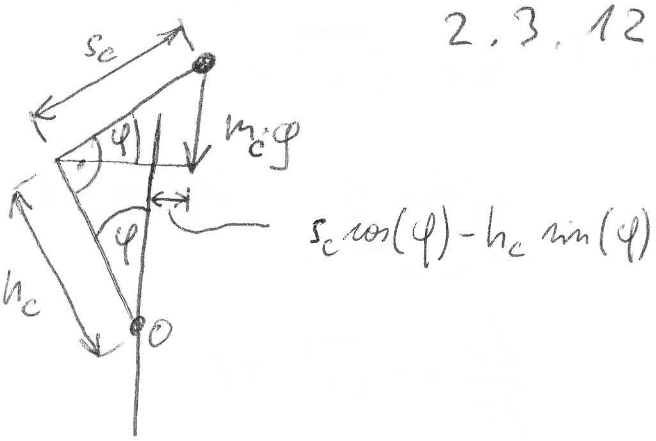
2.3.12

1a) i) $F_L = A_L(\varphi)\cdot q$



$M_L = F_L \cdot h_L(\varphi)$

$M_c = m_c g \cdot (s_c\cos(\varphi) - h_c\sin(\varphi))$

ii) $u = s_c \qquad d = q$

$$y = \begin{bmatrix}\varphi \\ v_y\end{bmatrix}$$

$$J\dot{\omega} = -F_A(\varphi)\cdot e_A(\varphi) + F_d e_d - M_d + M_L - M_c + m\cdot g\cdot\sin(\varphi)\cdot h$$

$$m\dot{v}_y = -F_d + F_L$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\varphi \\ \omega \\ v_y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega \\ \frac{1}{J}\left(-\rho g V(\varphi)\cdot e_A(\varphi) + d_y v_y e_d - d_\varphi\omega + A_L(\varphi)\cdot q\cdot h_L(\varphi) - m_c g(s_c\cos(\varphi) - h_c\sin(\varphi)) + m g\sin\varphi h\right) \\ \frac{1}{m}\left(-d_y v_y + A_L(\varphi)\cdot q\right)\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}\varphi \\ v_y\end{bmatrix}$$

iii) $\dot{x} = 0 \Rightarrow \omega_s = 0$

φ_s bekannt, 2. Gleichung muss von φ_s erfüllt werden, liefert aber keine neue Information

$$v_{ys} = \frac{A_L(\varphi_s)\, q_s}{d_y}$$

1b) i) $\dot{x} = -\sqrt{x}\, u$

$x(0) = 1 \qquad u(t) = 4t$

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{x} \cdot 4t$$

$$-\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int 4t\; dt$$

$$-2\sqrt{x} = 4\frac{t^2}{2} + C_1$$

$$-\sqrt{x} = t^2 + C_2$$

$$x(t) = (c - t^2)^2$$

$$x(0) = 1 = c^2$$

$$c = \pm 1$$

$$x_1(t) = (1 - t^2)^2$$

$$x_2(t) = (1 + t^2)^2$$

ii) $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\, u \qquad b(t) = \frac{\partial f}{\partial u} = -\sqrt{x}$

$$\Delta \dot{x}_1(t) = A(t)\Delta x + b(t)\Delta u = -\frac{1}{2|1-t^2|} 4t \Delta x - |1-t^2|\, \Delta u$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = A(t)\Delta x + b(t)\Delta u = -\frac{1}{2|1+t^2|} 4t\; \Delta x - |1+t^2|\, \Delta u$$

2a) i) Dreiecksstruktur $\Rightarrow$ EW auf Hauptdiagonale

$$\lambda_{1,2} = 1 \qquad \lambda_3 = 2$$

$$(\lambda_1 E - A) v_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v_1 = 0 \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 E - A) v_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} v_2 = 0 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_3 E - A) v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 = 0 \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ii)

$$\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

iii) $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = v_3$ $\qquad A \cdot v_3 = \lambda_3 v_3$

$$x(t) = \Phi(t)\, x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k v_3 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} t^k v_3 = e^{\lambda_3 t} v_3$$

$$= e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2b) i) $$(zE - \Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} z-2 & -1 & -2 \\ 0 & z-3 & 0 \\ 0 & 0 & z-0{,}5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-2)(z-3)(z-0{,}5)} \begin{bmatrix} X & +(z-0{,}5) & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{bmatrix}$$

$$G_z = c^T (zE - \Phi)^{-1} \Gamma = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

Pole: $z_1 = 2$, $z_2 = 3$

ii) $$x_k = \Phi^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1} \Gamma u$$

$$x_1 = \Phi x_0 + \Gamma u_0$$
$$x_2 = \Phi^2 x_0 + \Phi \Gamma u_0 + \Gamma u_1$$

Φ		Γ	$\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$
2	1	2	1
0	3	0	3
0	0	0,5	0 ← Der Zustand x_3 kann nicht durch den Eingang u beeinflusst werden

$x_{3,k+1}$ hängt nur von $x_{3,k}$ ab

$$x_{3,k+1} = 0{,}5\, x_{3,k}$$

2b) ii) ff $x_{3,k} = 0{,}5^k x_{3,0}$

$$\lim_{k \to \infty} x_{3,k} = 0$$

iii) $$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ x_{3,k} \end{bmatrix}$$

$y_k = [1 \quad 0]\, x_k$

iv) Die Umkehrung gilt nur dann wenn das System vollständig beobachtbar und vollständig erreichbar ist, weil dann keine Pol-Nullstellen Kürzung auftritt und die Ordnung der Übertragungsfunktion gleich der Systemordnung ist.

v) $y_k = [0 \quad 1 \quad 0]\, x_k$

$$\Rightarrow G_z = \frac{1}{z-3}$$

3a) $m_1 = c^T \Gamma = 0$

$m_2 = c^T \Phi \Gamma = -5$

$m_3 = c^T \Phi^2 \Gamma = 25$

$m_4 = c^T \Phi^3 \Gamma = -80$

$m_5 = c^T \Phi^4 \Gamma = 200$

	0	1	0	1
	0	0	1	0
m_2	-5	-9	-5	0
0 0 1	-5	-9	-5	-5

	0	1	0	1
	0	0	1	0
m_3	-5	-9	-5	0
-5 -9 -5	25	40	16	25

	0	1	0	1
	0	0	1	0
m_5	-5	-9	-5	0
-80 x -40	200	x	x	200

	0	1	0	1
	0	0	1	0
m_4	-5	-9	-5	0
25 40 16	-80	x	-40	-80

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 25 \\ -5 & 25 & -80 \\ 25 & -80 & 200 \end{bmatrix}$$

b) $$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \\ 25 & 40 & 16 \end{bmatrix}$$ ⇐ Zeilen können aus Berechnung der Markov Parameter entnommen werden

$\det(\Theta) = -200 + 225 \neq 0 \Rightarrow$ voller Rang $\Rightarrow$ vollständig beobachtbar

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & -5 \\ 25 & 40 & 16 \end{bmatrix} \hat{v}_1$$

$$\hat{v}_{13} = 0$$

$$5\hat{v}_{11} = -9\hat{v}_{12}$$

$$1 = 5 \cdot 5\hat{v}_{11} + 40\hat{v}_{12}$$

$$= -45\hat{v}_{12} + 40\hat{v}_{12}$$

$$\hat{v}_{12} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \hat{v}_{11} = \frac{9}{25}$$

$\hat{p}_{g,soll} = z^3$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
 & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{25} \\
 & \hat{p}_{g,soll}(\Phi)\cdot\hat{v}_1 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\
 & & & -5 & -9 & -5 & -5 & -9 & -5 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & -9 & \times & 0 \\
0 & 0 & 1 & -5 & -9 & -5 & 25 & 40 & \times & 9-8 \\
-5 & -9 & -5 & 25 & 40 & 16 & -80 & -119 & \times & \frac{-9\cdot 16}{5} + \frac{119\cdot 9}{5}
\end{array}$$

$$\hat{k} = -\hat{p}_{g,soll}(\Phi)\cdot\hat{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

c) $\det(\lambda \underline{E} - A) = \lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda + 5) + 5 + 9\lambda = \lambda^3 + \lambda^2 5 + 9\lambda + 5$

	1	5	9	5
-1	1	4	5	0

(Horner - Schema)

$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm I2}{2} \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm I = \alpha \pm I\omega$

$\omega \neq \frac{k\pi}{T_a} \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$T_a \neq \frac{k\pi}{\omega} = k\pi$

d) $\det(H) = 0 + 5 \cdot 80 \cdot 25 + 5 \cdot 80 \cdot 25 - 25 \cdot 200 - 25^3$

$= (800 - 200 - 625) \cdot 25 = -25 \cdot 25$

$= -625 \neq 0 \Rightarrow$ vollst. beobachtbar und vollst. erreichbar

$25 \cdot 25$
50
125
625

da vollst. beobachtbar und vollst. erreichbar ist (6) eine Minimalrealisierung

4a) $T_{r,y} = \frac{L^{\#}(q)}{1+L^{\#}(q)}$

$T_{r,y,1} = \frac{q+2}{q^3-3q^2+4+q+2}$ verletzt notwendiges Kriterium für ein Hurwitzpolynom (alle Koeffizienten gleiches Vorzeichen und ungleich null) $\Rightarrow$ nicht BIBO-stabil

$T_{r,y,2} = \frac{1+3q-2q^2-q^3}{\cancel{q^3}+\cancel{2q^2}-\cancel{3q}+1+1+\cancel{3q}-\cancel{2q^2}-\cancel{q^3}}$

$= \frac{1+3q-2q^2-q^3}{2}$ nicht BIBO-stabil da Pol bei $+\infty$, kann man auch durch einsetzen von $q=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ sehen

b) $\Omega_c \cdot t_r = 1{,}2$

$\Omega_c = 2$

$\Omega_c < 0{,}2 \cdot \Omega_0 \quad \Omega_0 = \frac{2}{0{,}1}$

$\Omega_c < 4$ ✓

$\Phi + \ddot{u} = 70$

$\Phi = 60°$

$e_\infty \big|_{r_k=(1)^k} = 0 \Rightarrow L^{\#}(q)$ benötigt einen $\frac{1}{q}$ Term

$\arg(G^{\#}(I2)) = -2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(2-\sqrt{3}) = -2\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \mathrel{\hat{=}} -75°$

$\arg(L^{\#}(I2)) \overset{!}{=} -120° \Rightarrow R^{\#} = \frac{V(1+qT)}{q}$

$\arg(1+I\Omega_c T) \overset{!}{=} 45°$

$\arctan(2T) = 45°$

$T = \frac{1}{2}$

4 b) ff

$$1 \stackrel{!}{=} |L^{\#}(I2)| = \frac{32 \cdot V \cdot \sqrt{1+1}}{\left((2\sqrt{3})^2+4\right) \sqrt{2^2+(2-\sqrt{3})^2 4} \cdot 2} =$$

$$= \frac{\overset{8}{\cancel{32}} \cdot \sqrt{2}\, V}{(4 \cdot 3+4) \sqrt{1+4-4\sqrt{3}+3} \cdot \cancel{2 \cdot 2}} =$$

$$\Rightarrow V = \frac{\overset{2}{\cancel{16}} \sqrt{8-4\sqrt{3}}}{\cancel{8} \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$$

$$R^{\#}(q) = \frac{4\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \frac{1-\frac{q}{2}}{q}$$

c)

$$R^{\#}(q) = \frac{V_I (1+q T_I)}{q} \qquad q = \frac{2}{T_a} \frac{z-1}{z+1}$$

$$= \frac{V_I}{q} + V_I T_I = V_I \cdot \frac{T_a}{2} \frac{z+1}{z-1} + V_I T_I$$

$$= \frac{V_I \frac{T_a}{2} (z+1) + V_I T_I (z-1)}{z-1} = \frac{z\left(V_I \frac{T_a}{2} + V_I T_I\right) + V_I \frac{T_a}{2} - V_I T_I}{z-1}$$

$$x_{k+1} = +1 \cdot x_k + u_k$$

$$y_k = \left(V_I \frac{T_a}{2} - V_I T_I + V_I \frac{T_a}{2} + V_I T_I\right) x_k + \left(V_I \frac{T_a}{2} + V_I T_I\right) u_k$$

$$= V_I T_a x_k + V_I \left(\frac{T_a}{2} + T_I\right) u_k$$