4.3.2011

1)a)

$$x = \begin{bmatrix} T_I \\ T_{II} \\ T_h \end{bmatrix} \qquad u = \dot{m}_I \qquad d = T_u \qquad y = T_h$$

$$\dot{Q}_s = \sigma (T_h^4 - T_u^4)$$

$$\dot{Q}_k = \alpha (T_I - T_{II})$$

$$\text{I:} \quad \frac{d}{dt}(m_I c T_I) = (\dot{m}_I c T_V - \dot{m}_I c T_I) + (-\dot{Q}_k)$$

$$\text{II:} \quad \frac{d}{dt}(m_{II} c T_{II}) = (\dot{m}_{II} c T_h - \dot{m}_{II} c T_{II}) + (\dot{Q}_k)$$

$$\text{III:} \quad \frac{d}{dt}(m_{II} c T_h) = (\dot{m}_{II} c T_{II} - \dot{m}_{II} c T_h) + (-\dot{Q}_s)$$

$$\text{I:} \quad \dot{m}_I c T_I + m_I c \dot{T}_I = \dot{m}_I c T_V - \dot{m}_I c T_I - \alpha T_I + \alpha T_{II}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{T}_I = \frac{\dot{m}_I c T_V - 2\dot{m}_I c T_I - \alpha T_I + \alpha T_{II}}{m_I c} \\ \text{II:} \quad &\dot{T}_{II} = \frac{\dot{m}_{II} c T_h - 2\dot{m}_{II} c T_{II} + \alpha T_I - \alpha T_{II}}{m_{II} c} \\ \text{III:} \quad &\dot{T}_h = \frac{\dot{m}_{II} c T_{II} - 2\dot{m}_{II} c T_h - \sigma T_h^4 + \sigma T_u^4}{m_{II} c} \end{aligned}\right\} \dot{x} = f(x, u, d)$$

$$y = T_h$$

1b) $T_{u,R} = 2T_{u,R}$

$$\dot m_{II}\, c\, T_{II,R} = 2\,\dot m_{II}\, c\, 2T_{u,R} + \sigma\, 16\, T_{u,R}^4 - \sigma\, T_{u,R}^4$$

$$T_{II,R} = \frac{2\dot m_{II}\, c\, 2T_{u,R} + 15\sigma T_{u,R}^4}{\dot m_{II}\, c} \qquad \text{A}$$

$$T_{I,R} = \frac{\alpha T_{II,R} + 2\dot m_{II}\, c\, T_{II,R} - \dot m_{II}\, c\, 2T_{u,R}}{\alpha} =$$

$$= \left(1 + \frac{2\dot m_{II} c}{\alpha}\right)\cdot\left(4T_{u,R} + 15\frac{\sigma}{\dot m_{II} c} T_{u,R}^4\right) - 2\frac{\dot m_{II} c}{\alpha} T_{u,R}$$

$$\alpha T_{II,R} = (2\dot m_I c + \alpha)\, T_{I,R} - \dot m_I c T_V$$

$$= (2\dot m_I c + \alpha)\left(1 + \frac{2\dot m_{II} c}{\alpha}\right) T_{II,R} - \dot m_I c T_V$$

$$\left(\cancel{\alpha} - 2\dot m_I c - \cancel{\alpha} - \frac{4\dot m_I \dot m_{II} c}{\alpha} - 2\dot m_{II} c\right) T_{II,R} = -\dot m_I c T_V$$

$$\text{A} \rightarrow \frac{4\dot m_{II} c T_{u,R} + 15\sigma T_{u,R}^4}{\dot m_{II} c} = \frac{\dot m_I c T_V}{2c\left(\dot m_I + \dot m_{II} + \frac{2\dot m_I \dot m_{II}}{\alpha}\right)}$$

→ Gleichung nach $T_{u,R}$ auflösen und Ergebnis oben einsetzen

1c)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{2\dot{m}_I c + \alpha}{m_I c} & \frac{\alpha}{m_I c} & 0 \\ \frac{\alpha}{m_{II} c} & -\frac{2\dot{m}_{II} c + \alpha}{m_{II} c} & \frac{\dot{m}_{II}}{m_{II}} \\ 0 & \frac{\dot{m}_{II}}{m_{II}} & -\frac{2\dot{m}_{II} c + 4\sigma T_u^3}{m_{II} c} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{T_{V,R} - T_{I,R}}{m_I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4\sigma T_{u,R}^3}{m_{II} c} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2a)

$$(\lambda)(\lambda)(\lambda - 5) + (-4) + 0 - (-5\lambda) - 0 - 0 =$$

$= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 5\lambda - 4$ notwendiges Kriterium für ein Hurwitzpolynom nicht erfüllt

$\rightarrow$ nicht asymptotisch stabil

b) es muss vollst. erreichbar sein,

v. Erreichbarkeit: wenn aus $x_0 = 0$ jeder beliebige Zustand $x(T)$ innerhalb einer endlichen Zeit mit einer stückweise stetigen Eingangsgröße $u(t)$ erreicht werden kann

2c) Steuerbarkeitsnormalform!
$\Rightarrow$ vollst. erreichbar

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} x_k$$

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4+k_1 & k_2-5 & 5+k_3 \end{bmatrix} x_k$$

$$\lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda - 5 - k_3) - \lambda(-1)(5-k_2) + (-4-k_1)$$

$$= \lambda^3 - 5\lambda^2 - k_3\lambda^2 + \lambda(5-k_2) - 4 - k_1$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 \frac{1}{2} + 3\lambda \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$$

$$5 + k_3 = \frac{3}{2} \qquad 5 - k_2 = \frac{3}{4} \qquad 4 + k_1 = \frac{1}{8}$$

$$k_3 = -\frac{7}{2} \qquad k_2 = \frac{17}{4} \qquad k_1 = -\frac{31}{8}$$

$$k^T = \begin{bmatrix} -\frac{31}{8} & \frac{17}{4} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

2d) $x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$

$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_k$

e) *) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vollst. beobachtbar

$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad p_{g,soll}(z) = z^3$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & \Phi^3 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & 4 & -5 & 5 & 4 & -5 & 5 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times & 5 \\
0 & 0 & 1 & 4 & -5 & 5 & \times & \times & 20 \\
4 & -5 & 5 & 20 & -21 & 20 & \times & \times & 79
\end{array}$$

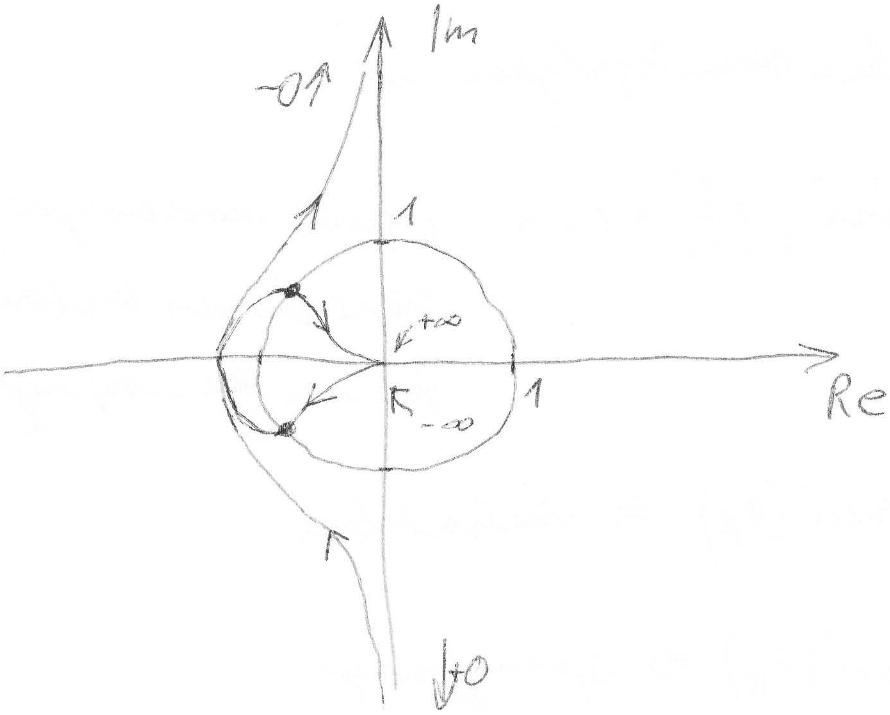
$\hat{k} = -\Phi^3 v_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -20 \\ -79 \end{bmatrix}$

*) $\hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k + \hat{k}(\hat{y}_k - y_k)$

$\hat{y}_k = c^T \hat{x}_k$

f) in höchstens 3 Schritten,
da vollständig beobachtbar und vollständig erreichbar
gilt das Separationsprinzip $\Rightarrow$ der Beobachter hat keine
Auswirkung auf die Eigenwerte des geschlossenen Kreises

3 a)



b) $\Delta \arg(1+L(I\omega)) = 5\pi \overset{!}{=} (6-3+2)\pi = 5\pi$

$\Rightarrow$ BIBO stabil

c) keine Pol-Nst.-Kürzungen von instabilen Polen ✓

$1+L(s) \neq 0$ für $Re(s) \geq 0$

$s\cdot(s+2)(s^2-6s+9)\cdot\left(\frac{s^2}{12}+s+1\right) + 16(s+1)^2 \ (s^2+2s+1) = 0$

darauf kann man das Routh-Hurwitz Verfahren anwenden...

d) nein da $N_L(s)$ kein Hurwitzpolynom ist

e) •) ist BIBO-stabil, $\left(\frac{s^2}{12}+s+1\right)$ erfüllt notwendiges und hinreichendes Kriterium für ein Hurwitzpolynom

•) $grad(N_R) \geq grad(Z_R) \Rightarrow$ realisierbar

•) $grad(N_R) = grad(Z_R) \Rightarrow$ sprungfähig

4) a) kein Sprung bei $t=0$ $\Rightarrow$ nicht sprungfähig

$\Rightarrow G_4$ fällt weg

EWS: $\lim_{t \to \infty} h(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{G(s)}{s} = \lim_{s \to 0} G(s)$

für G_3: $\lim_{s \to 0} G_3(s) = c > 0$

$\Rightarrow G_3$ fällt weg

$$G_1: \quad s_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$ zwei reelle Nst

$\Rightarrow$ nicht schwingungsfähig $\Rightarrow G_1$ fällt weg

G_2 ist richtige Übertragungsfkt.

$$\lim_{s \to 0} G_2(s) = -c \overset{!}{=} -3$$

$$c = 3$$

b) $\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\,\Phi(t) \qquad \Phi(0) = E$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Phi(t)\Big|_{t=0} = A$

$(\lambda+3)(\lambda-2)-50=$
$=\lambda^2+\lambda-56$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 56}}{2}$
$= \frac{-1\pm\sqrt{225}}{2}$
$= \frac{-1\pm 15}{2} = \genfrac{}{}{0pt}{}{-8}{7}$

$$A = \begin{bmatrix} -8\cdot\frac{2}{3}+\frac{7}{3} & \frac{7}{3}+\frac{8}{3} \\ \frac{14}{3}+\frac{16}{3} & -\frac{8}{3}+\frac{14}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

c) notwendiges + hinreichendes Kriterium für ein Hurwitzpolynom ist erfüllt $\Rightarrow$ Kriterium von Michailow

$\Rightarrow \Delta \arg(p(I\omega)) = 2\pi$

d) $\dot{x}=0$

$0 = 0\cdot x_{1R} + 0\cdot x_{2R} + \alpha u_R \quad \Rightarrow \alpha = 0$

$0 = x_{1R} + x_{2R} + \beta u_R$

$\beta = \frac{-x_{1R} - x_{2R}}{u_R}$

e) $|h(t)| < \infty \;\; \forall t$

$h(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau$

$|h(t)| = \left|\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right| < \int_0^t |g(\tau)|\,d\tau < \int_0^\infty |g(\tau)|\,d\tau < \infty$ für BIBO-Stabilität