1a) $x = \begin{bmatrix} m_r \\ V_r \\ r \\ \dot{r} \end{bmatrix}$ $\quad u = V_a \quad y = r$ 14.9.12

$$m_r \dot{V}_r = \dot{m}_t V_a = \rho_t A_t |V_a| V_a$$

$$\frac{d}{dt}(m_r \dot{r}) = -\frac{M m_r}{r^2} G + \frac{m_r V_r^2}{r}$$

$$\dot{m}_r \dot{r} + m_r \ddot{r} = -\frac{M m_r}{r^2} G + \frac{m_r V_r^2}{r}$$

$$\dot{m}_r = -\dot{m}_t = -\rho_t A_t |V_a|$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} m_r \\ V_r \\ r \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_t A_t |V_a| \\ \frac{1}{m_r}\rho_t A_t |V_a| V_a \\ \dot{r} \\ \frac{1}{m_r}\left[-\frac{M m_r}{r^2} G + \frac{m_r V_r^2}{r} + \rho_t A_t |V_a| \dot{r}\right] \end{bmatrix}$$

$$y = r$$

b) $r = R \qquad \dot{x} = 0$

$\dot{r} = 0, \quad 0 = -\rho_t A_t |V_{aR}| \Rightarrow V_{aR} = 0$

$\dot{V}_r = 0 \Rightarrow$ keine neue Information

$0 = -\frac{M m_{rR}}{R^2} G + \frac{m_{rR} V_{rR}^2}{R}$ $\quad m_{rR}$ beliebig aber nicht 0

$V_{rR}^2 = \frac{M}{R} G \qquad V_{rR} = \sqrt{\frac{M}{R} G}$

1b ff)

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_{rR}^2}\rho_t A_t \cdot 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{m_{rR}^2}\rho_t A_t \cdot 0 \cdot 0 & \frac{2\ v_{rR}}{R} & \frac{M \cdot 2}{R^3} G - \frac{v_{rR}^2}{R^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{R}\sqrt{\frac{MG}{R}} & \underbrace{\frac{2MG}{R^3} - \frac{MG}{R^3}}_{\frac{MG}{R^3}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} -\rho_t A_t \\ \frac{2\rho_t A_t}{m_r} \cdot 0 \\ 0 \\ -\frac{\rho_t A_t}{m_{rR}} \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\rho_t A_t \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\rho_t A_t}{m_{rR}} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2a) Φ hat Blockstruktur

$$\Rightarrow \det(\lambda E - \Phi) = \begin{vmatrix} \lambda+\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \lambda-\frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 \\ -\frac{3}{2} & \lambda-3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right) \cdot \left((\lambda+1)(\lambda-3)+3\right) =$$

$$= \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right) \cdot \lambda \cdot (\lambda-2)$$

Φ hat EW außerhalb des Einheitskreis $\Rightarrow$ instabil

b) $v_k = k^T x_k$

$$\Phi_g = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3-k_1 & -\frac{5}{8}-k_2 & -1-k_3 & -2-k_4 \\ -1+2k_1 & 2k_2 & \frac{3}{2}+2k_3 & 3+2k_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & & k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3+k_4x_4 \\ \hline 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -k_1x_1-k_2x_2-k_3x_3-k_4x_4 \\ -3 & 2 & 2k_1x_1+2k_2x_2+2k_3x_3+2k_4x_4 \end{array}$$

EW von rechtem unteren Block:

$$[\lambda-(-1-k_3)] \cdot [\lambda-3-2k_4] + \left(\frac{3}{2}+2k_3\right)(2+k_4) =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-3-2k_4+1+k_3) + \cancel{-3} - 2k_4 - 3k_3 \cancel{-2k_3k_4} \cancel{+3} + \frac{3}{2}k_4 + 4k_3 \cancel{+2k_3k_4}$$

$$p_{soll} = \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right) = \lambda^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -2-2k_4+k_3 = 0 \Rightarrow k_3 = 2(1+k_4)$$

$$-\frac{1}{4} = -2k_4 - 3\cdot 2(1+k_4) + \frac{3}{2}k_4 + 8(1+k_4)$$

2b) ff

$$-\frac{1}{4} = k_4\left(-2-6+\frac{3}{2}+8\right)+(-6+8)$$

$$= k_4 \frac{3}{2} + 2$$

$$-\frac{9}{4} = \frac{3}{2} k_4$$

$$k_4 = -\frac{3}{2}$$

$$k_3 = 2\left(1-\frac{3}{2}\right) = -1$$

k_1 und k_2 werden 0 gesetzt, da sie ohnehin keinen Einfluss auf die EW von Φ_g haben

c) Ja, x_3 und x_4 sind beide beobachtbar $\Rightarrow$ es wird kein Beobachter zur Realisierung des Zustandsreglers benötigt

d)

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & 3 & -\frac{5}{8} & -1 & -2 \\ & & & & -1 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

O hat nicht vollen Rang $\Rightarrow$ nicht vollst. beobachtbar

e) $G(z) = c^T (zE - \Phi)^{-1} \Gamma$

$$(zE-\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} z+\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & z-\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} z-\frac{1}{2} & 1 \\ \times & \times \end{bmatrix}$$

2e) ff

$$G(z) = \frac{2(z-\frac{1}{2})+3}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})} = \frac{2z+2}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{2})}$$

$$|G(e^{j0})| = \frac{4}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{16}{3}$$

$$|G(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \frac{2\cdot\sqrt{1+1}}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1}\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

$$\arg(G(e^{j\frac{\pi}{2}})) = \arctan(1) - \cancel{\arctan(2)} - \cancel{\arctan(-2)}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$y_k = 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot|G(e^{j\frac{\pi}{2}})|\cos\left(\frac{\pi}{2}k + \arg(G(e^{j\frac{\pi}{2}}))\right) + \frac{3}{4}|G(e^{j0})|1^k\right)$$

$$= 8\cos\left(\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{4}\right) + 20\cdot 1^k$$

3a)

$$G(s) = \frac{s^2+as+b}{s^2+s(c+d)+cd}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -cd & -c-d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b-cd & a-c-d \end{bmatrix} x + 1\cdot u$$

3b) $\exp((A_1+A_2)t) = E + (A_1+A_2)t + \frac{(A_1+A_2)^2}{2!}t^2 + \dots$

$$\text{I}: \quad = E + (A_1+A_2)t + \frac{A_1A_1 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_2A_2}{2!}t^2 + \dots$$

$$= E + (A_1+A_2)t + \frac{A_1A_1 + 2A_1A_2 + A_2A_2}{2!}t^2 + \dots$$

$\exp(A_1t)\exp(A_2t) = (E + A_1t + \dots)(E + A_2t + \dots)$

$$\text{II}: \quad = E + A_1t + A_2t + A_1A_2t + \frac{A_1^2}{2!}t^2 + \frac{A_2^2}{2!}t^2$$

I und II nur dann gleich wenn $A_1A_2 = A_2A_1$

c) Steuerbarkeitsnormalform

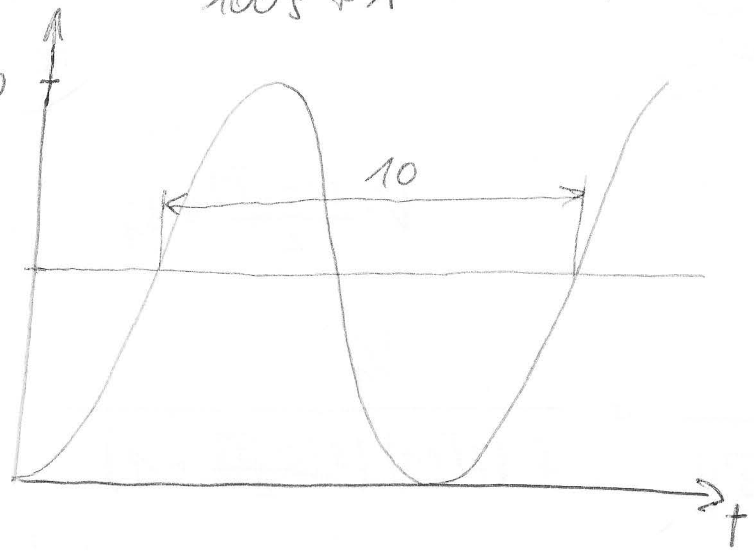
$\Rightarrow n(s) = s^3 + s^2 + 3s + 2$

s^3	1	3
s^2	1	2
s	$\frac{2-3}{-1} = 1$	0
s^0	2	

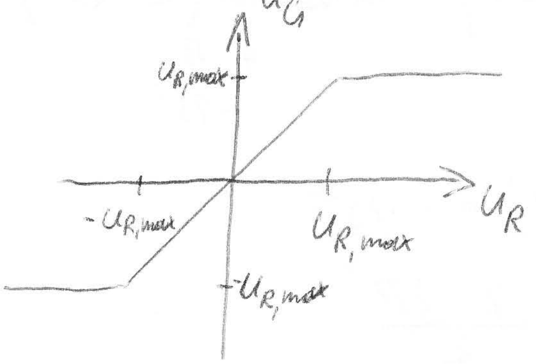
alle Elemente der Pivotspalte $\neq 0$ und selbes Vorzeichen

$\Rightarrow$ Hurwitzpolynom $\Rightarrow$ BIBO-stabil

3d) $G(s) = \frac{10}{100s^2+1}$ $\omega = 0{,}1$



e)



4 a) $\omega_c t_r = 1{,}5$ $\quad \Phi + \ddot{u} = 70$ $\quad e_\infty\big|_{r(t)=\sigma(t)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{s}$ im Regler

$\omega_c = \frac{3}{2}\,\frac{4}{3} = 2$ $\quad \Phi = 60^\circ$

$$R(s) = \frac{V\cdot\left(s+2(2-\sqrt{3})\right)^2}{s\,(sT+1)} \qquad V\cdot\frac{(2-\sqrt{3})}{2} = V_1$$

$$L(s) = \frac{V}{s(sT+1)\left(s+2(2+\sqrt{3})\right)} = \frac{V_1}{s\,(sT+1)\left(s\frac{(2-\sqrt{3})}{2}+1\right)}$$

$$\arg(L(I2)) = -90^\circ - \arctan(2T) - \underbrace{\arctan\left(2-\sqrt{3}\right)}_{-15^\circ} \overset{!}{=} -120^\circ$$

$$-\arctan(2T) = -15^\circ$$

$$T = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$|L(I2)| \overset{!}{=} 1 = \frac{V_1}{2\sqrt{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{V_1}{2\left(1+\frac{4-4\sqrt{3}+3}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow V_1 = 2\cdot\left(1+1-\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{11}{4}-\sqrt{3}\right)$$

$$R(s) = \frac{4\left(\frac{11}{4}-\sqrt{3}\right)}{(2-\sqrt{3})}\cdot\frac{\left(s+2(2-\sqrt{3})\right)^2}{s\left(s\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)}$$

4b) $T_t > 0$

Begründung: Nyquistkriterium in Frequenzkennliniendarstellung

$\Phi = \arg(L(I2)) + \pi > 0$ $\qquad \arg(e^{-I2T_t}) = -2T_t$

$-\frac{2\pi}{3} - 2T_t + \pi > 0 \Rightarrow T_t < \frac{\pi}{6}$

c) $T_{d,y}$ benötigt eine Nullstelle bei $I5$

$T_{d,y} = \frac{1}{1+RG} = \frac{n_R n_G}{n_R n_G + z_R z_G} \Rightarrow n_R$ muss einen Pol bei $I5$ haben

z.B.: $R(s) = \frac{z_R(s)}{s^2+25}$

$\Rightarrow T_{d,y}(I5) = 0$

d) $1 + L(s) = 1 + \frac{s\alpha+2}{s+\beta} \cdot \frac{s+3}{s-1} \Rightarrow \alpha \neq -1$

da sonst eine Pol-Nullstellen Kürzung von instabilen Polen auftreten würde

$\Rightarrow 1 + L(s) \neq 0$ für $Re(s) > 0$

$(s+\beta)(s-1) + (s\alpha+2)(s+3) =$

$= s^2 - s + \beta s - \beta + s^2\alpha + 3\alpha s + 2s + 6$

$= s^2(1+\alpha) + s(-1+\beta+3\alpha+2) + 6 - \beta$

alle Koeff. $\neq 0$ und selbes Vorzeichen für Hurwitzpolynom

Koeff.$>0 \Rightarrow \alpha > -1$

$\beta + 3\alpha + 1 > 0$ $\qquad \Rightarrow 6 > \beta > -3\alpha - 1$

$6 - \beta > 0 \Rightarrow \beta < 6$ $\qquad 3\alpha > -7$

$\alpha > -\frac{7}{3}$

Koeff.<0

$\alpha < -1$

$\beta > 6$

$\beta + 3\alpha + 1 < 0$