Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Automatisierung am 31.01.2014

LÖSUNG

Aufgabe 1:
Lösungen zu Aufgabe 1a:

- Mathematisches Modell in Zustandsdarstellung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} z \\ v \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{1}{m}\left(\frac{ku_c^2}{2z^2} - cz\right) \\ \frac{z}{kR}(u-u_c) + \frac{u_c v}{z} \end{bmatrix}$$
$$y = z$$

- Ruhelagen

$$z_R = z_0$$
$$v_R = 0$$
$$u_0 = u_{c,R} = \sqrt{\frac{2cz_0^3}{k}}$$

Linearisiertes System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta v \\ \Delta u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3c}{m} & 0 & -\frac{1}{m}\sqrt{\frac{2ck}{z_0}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2cz_0}{k}} & -\frac{z_0}{kR} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta v \\ \Delta u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{z_0}{kR} \end{bmatrix}\Delta u$$
$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta v \\ \Delta u_c \end{bmatrix}$$

Lösungen zu Aufgabe 1b:

- Zeitdiskrete Systemdarstellung

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{T_a}-1 \\ 0 & \mathrm{e}^{T_a} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Phi}}\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{T_a}-1-T_a \\ \mathrm{e}^{T_a}-1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}} u_k$$
$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}}\begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}$$

- Das zeitdiskrete System ist für eine Abtastzeit $T_a > 0$ immer beobachtbar, da die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}(\mathbf{c}, \mathbf{\Phi})$ immer vollen Rang hat.

$$\det(\mathcal{O}(\mathbf{c}, \mathbf{\Phi})) = \mathrm{e}^{T_a} - 1$$

Aufgabe 2:
Lösungen zu Aufgabe 2a

- Übertragungsfunktion des Gesamtsystems

$$G(s) = \frac{G_2(s)G_1(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)} = \frac{(s-2)(s+4)}{(s+3)(s^2+4s-4+\alpha)}$$

- Damit $G(s)$ BIBO-stabil ist, muss $\alpha > 4$ gelten.

Lösungen zu Aufgabe 2b

- Übertragungsfunktion des Abtastsystems

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{1}{2}\frac{z+1}{z^2}$$

- Das System ist BIBO-stabil (Polstelle $z = 0$) aber nicht sprungfähig (Zählergrad < Nennergrad)
- Sprungantwort

$$h_k = \frac{1}{2}(\sigma_{k-1} + \sigma_{k-2})$$

Aufgabe 3: Lösungen zu Aufgabe 3

a) i. FKL-Reglerentwurf

$$R(s) = \frac{V(1+sT_I)}{s} \tag{1}$$

mit

$$T_I = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad V = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{3}}} \tag{2}$$

ii. geschlossene Kreis stabil wenn Nullstellen von $1 + R(s)G(s)$ in linker offenen Halbebene $\rightarrow$ Hurwitzpolynom 2. Ordnung

$$a > -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \tag{3}$$

b) Totzeitglied ändert nur Phase $\rightarrow \Delta\varphi_{max} = -\pi/3$

$$T_{t,max} = \frac{\pi}{6} \tag{4}$$

c) exakte Störgrößenkompensation: $T_{d,y} = 0$

$$R_d(s) = \frac{G_d(s)}{G(s)} \tag{5}$$

Aufgabe 4: Lösungen zu Aufgabe 3

a) Das System ist nicht asymptotisch stabil.

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm j3 \tag{6}$$

b) System muss vollständig erreichbar sein.
Mit der Bedingung $c \in \mathbb{R}$ ist das System nur für den Wert

$$c = 0 \tag{7}$$

nicht vollständig erreichbar.

c) Der Zustandsreglerentwurf nach Ackermann liefert

$$\mathbf{k}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -5 \end{bmatrix} . \tag{8}$$

Die Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises ergibt sich zu

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 6 & 11 & -10 \end{bmatrix} . \tag{9}$$

d) Die reelle Jordan-Form lautet

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

mit der zugehörigen Transformationsmatrix

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathrm{Re}(\mathbf{v}_2) & \mathrm{Im}(\mathbf{v}_2) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \tag{12}$$