

# 无容量限制设施选址逆优化问题的求解方法

Discount

## 摘要

逆优化问题是给定一个可行解 (值) 通过最小化目标函数中参数的改变量使得该可行解 (值) 成为改变后问题的最优解 (值) 的问题。对于本是 NP-难问题的设施选址问题, 其逆优化问题变得更为复杂。研究了使用经典的行生成算法对无容量设施选址的逆优化问题进行计算, 并给出了得到逆优化问题上下界的启发式方法。该方法基于对子问题的线性松弛求解给出上界和利用邻域搜索的方式给出下界。数值结果表明可行上界得到的结果与最优值差距极小, 极大地提高了求解该逆优化问题的效率。所提到的启发式算法还可以推广至有容量设施选址逆优化问题的计算。

**关键词:** 设施选址问题、逆优化、行生成算法、启发式算法

## Abstract

The inverse optimization problem is to give a feasible solution (value) by minimizing the change of parameters in the objective function so that the feasible solution (value) becomes optimal after the change. For the facility location problem which is NP-hard, its inverse optimization problem becomes more complex. In this paper, the classical row generation algorithm is used to calculate the inverse optimization problem of uncapacitated facility location, and two heuristic methods are given to get the upper and lower bounds of the inverse optimization problem. One gives the upper bound based on the linear relaxation of the subproblem and the lower bound is given by the way of local search. The numerical results show that the difference between the feasible upper bound and the optimal value is very small, which greatly improves the efficiency of solving the inverse optimization problem. The proposed heuristic algorithm can also be extended to the calculation of the inverse optimization of the capacitated facility location problem.

**Keywords:** uncapacitated facility location problem, inverse optimization problem, row generation method, heuristic

## 1 引言

### 逆优化综述

逆优化问题最初已经有很多人进行了研究同时设施选址由于设施选址问题本身是 NP 难问题, 它的逆问题就变得更为复杂。若是

在现实生活中，由于设施已经建立在某些固定的地方，不容易更改，我们往往需要固定哪些设施开启以提供便利。对应到模型中，即给定了开设哪些设施，需要调整量达到最小。

而设施选址的逆优化的问题很少有人研究

本文研究了

本文安排如下：第一节给出了 UFL 的定义以及 UFL 逆优化问题模型建立的过程。第二节给出了 UFL 逆优化问题的列生成求解方法。第三节给出了对列生成算法进行改进，得到逆优化问题上下界的启发式算法。第四节给出了 UFL 逆优化问题的简单示例以及计算结果。第五节给出了对于该逆优化问题延拓以及算法改进的展望。

## 2 UFL 逆优化问题的模型

设施选址问题通常被提出如下：假设有  $m$  个设施和  $n$  个客户。我们希望选择（1）哪些设施要打开，以及（2）哪些打开的设施要用于向哪些客户提供，以便以最低的成本满足某些固定需求。引入以下记号，令  $f_i$  表示开启设施  $i$  的固定成本， $i \in M, M = \{1, \dots, m\}$ 。  $r_{ij}$  表示运输商品从设施  $i$  到客户  $j$  的成本， $j \in N, N = \{1, \dots, n\}$ 。

则无容量限制设施选址问题定义如下：

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^n f_i v_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n u_{ij} = 1, \forall j \in N \\ & \sum_{j=1}^m u_{ij} \leq T v_i, \forall i \in M \\ & u_{ij} \in \{0, 1\}, \quad v_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

用  $c = (f, r)$  表示成本，并且用更为简洁的方式改写包含足够大容量  $T$  的上式，得到下式：

$$\begin{aligned} F(c) = \min & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^n f_i v_i \\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^n u_{ij} = 1, \forall j \in N \\ & u_{ij} \leq v_i, \forall i \in M, \forall j \in N \\ & u_{ij} \in \{0, 1\}, \quad v_i \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

逆优化问题通常分为最优值和最优解问题，当给定原问题的一个可行解  $x^0$ ，通过调整原问题的成本  $c$  为  $d$ ，使得  $x^0$  成为调整后问题的最优解。而逆优化最优解问题则是求解在某个范数下使得这个调整量最小的问题。当给定原问题的一个可行值  $V_0$ ，称此时对应的问题为逆优化最优值问题。为方便以及更贴

近现实，我们以一范数为例，即表示调整量之和最小。往往对于设施成本和运输成本调整量的权重并不一样，可以分别设为  $w_i^f$  和  $w_{ij}^r$ 。

设施选址的逆优化问题定义如下：

$$\begin{aligned} & \min_d \|d - c\|_1 \\ \text{s.t. } & dx^0 = F(d) \\ & d \in \mathbb{R}^{mn+m} \end{aligned}$$

由约束式可以看出， $x^0$  需要满足  $dx^0 \leq dx', x' \in \Upsilon$ 。其中  $\Upsilon$  是满足原问题的所有可行解  $x'$  的集合。对于每一个客户  $j \in N$  可以被任一设施服务，共有  $|M| = m$  种选择。因而对于所有客户而言一共有  $m^n$  种不同情况。即满足原问题约束条件的可行解有  $m^n$  个。因此从逆优化的定义出发建立求解模型，上述集合中包含可行解的个数是指数个。由此可以看出设施选址的逆优化问题是 NP-难问题。事实上，设施选址逆优化问题是 NP-难问题。反证法证明

假设无容量约束的设施选址问题不是 NP-难问题，则可以在多项式时间内得到得到

### 3 行生成算法求解

从设施选址逆优化问题的定义过程中，我们可以看出原优化问题和逆优化问题有着一定的联系，即逆优化中的给定解对应的成本需要小于所有满足原问题约束条件的解对应的成本。行生成算法作为一种有效求解规模较大线性规划问题的方法。我们自然想到行生成算法中子问题即是求解满足原问题约束的，因而行生成算法可以用来求解设施选址的逆优化问题。

原逆优化模型为

$$\begin{aligned} & \min |c - c_0| \\ \text{s.t. } & V^0 = cx^0 \leq cx', x' \in \Upsilon \end{aligned}$$

为方便显示我们的结果，我们主要考虑最优解问题，而对于最优值问题，给定  $V^0$  而不是  $x^0$ ，根据该式  $V^0 = cx^0$  也可用相同思路求解。

将行生成算法应用于 UFL 的逆优化问题，将上式对应的设施和运输部分用  $(f, c)$  分别表示。根据

2001 年文献 Ahuja 在一范数下可以得到 UFL 逆优化问题的主问题为

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^m w_i^f(a_i + b_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij}^r(c_{ij} + d_{ij}) \\
\text{s.t.} \quad & (a_i - b_i + f_i^0)(v_i' - v_i^0) + (c_{ij} - d_{ij} + r_{ij}^0)(u_{ij}' - u_{ij}^0) \geq 0 \\
& a_i \geq 0, \quad b_i \geq 0, \quad \forall i \in M \\
& c_{ij} \geq 0, \quad d_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in M, \forall j \in N \\
& (v_i', u_{ij}') \in \mathbb{I}
\end{aligned}$$

其中  $(v_i', u_{ij}')$  属于一个限制集  $\mathbb{I}$ , 集合中的元素由子问题不断生成加入其中。而主问题得到的  $(a', b', c', d')$  带入到子问题中求解。

子问题如下:

$$\begin{aligned}
T = \min \quad & \sum_{i=1}^m (a_i' - b_i' + f_i^0)(v_i' - v_i^0) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}' - d_{ij}' + r_{ij}^0)(u_{ij}' - u_{ij}^0) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m u_{ij}' = 1, \quad \forall j \in N \\
& u_{ij}' \leq v_i', \quad \forall i \in M, \forall j \in N \\
& u_{ij}' \geq 0, \quad \forall i \in M, \forall j \in N \\
& u_{ij}' \in \{0, 1\}, \quad v_i' \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

子问题求出得到  $(v^*, u^*)$ , 如果目标函数值小于 0, 将得到的  $(v^*, u^*)$  加入到主问题的限制集中。如果目标函数值不小于 0, 程序结束。注意到子问题实际上是无容量限制设施选址的原问题, 因此该设施选址的逆问题复杂度要大于原问题, 也是 NP-难问题。

求解 UFL 逆优化问题的行生成算法详细步骤如下:

输入: 1) 可行解:  $x^0 = (v_i^0, u_{ij}^0)$ ; 2) 原设施成本:  $c^0 = (f_i^0, r_{ij}^0)$ ;

输出: 1) 最优解  $(a^*, b^*, c^*, d^*)$ ; 2) 最小的总成本改变量为  $\sum_{i=1}^m (a_i^* + b_i^*) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}^* + d_{ij}^*)$ ;

3) 对应原成本的改变量为  $f_i - f_i^0 = a_i^* - b_i^*, r_{ij} - r_{ij}^0 = c_{ij}^* - d_{ij}^*$ .

初始化: 初始限制集包含对于原问题的可行解即可。为方便且不再重新生成可行解, 可取初始限制集为给定的可行解即  $\mathbb{I} = \{(v_i^0, u_{ij}^0)\}$ 。

步骤 1: 求解此时的主问题得到最优解  $(a', b', c', d')$ 。

步骤 2: 将步骤 1 得到的最优解  $(a', b', c', d')$  带入到子问题中, 求解子问题这一整数规划得到最优解  $x'^* = (v^*, u^*)$ , 和目标函数值  $T$ 。

步骤 3: 如果目标函数值  $T < 0$ , 将得到的  $x'^*$  加入到限制集中  $\mathbb{I} = \mathbb{I} \cup x'^*$ , 回到步骤 1, 重新求解主问题; 如果目标函数值  $T \geq 0$ , 则结束算法。此时得到最优解  $(a^*, b^*, c^*, d^*)$ 。

## 4 启发式算法得到上下界

由上述的行生成方法，我们可以知道要求得逆优化的最优解就需要得到尽可能精确的主问题的限制集，即主问题中的限制条件。由于主问题的限制集是由子问题不断生成得到的，可以看出行生成方法的核心是子问题的效率，即子问题求解越精确，逆优化的最优解越精确。但由于子问题是设施选址的原问题，因而可以通过对子问题进行松弛，牺牲一定求解精度的情况下简化求解过程。

当对子问题进行如下几种处理方法时，我们可以相应得到行生成方法的几点推论：

处理方法 1：严格求解子问题，即求解上式

推论 1. 当严格求解子问题时，循环结束时此时得到 UFL 逆优化问题的最优解。

说明：由于子问题是不断从 UFL 问题的约束中筛选出满足条件的解  $(v^*, u^*)$ ，严格求解子问题直到循环结束，筛选出来的解集  $\mathbb{I}$  满足 UFL 所有的约束条件，根据逆优化问题的定义，根据此时的解集求解主问题得到的即是逆优化问题的最优解。

处理方法 2：严格求解子问题但设定一定的循环次数

推论 2. 严格求解子问题时，设定一定的循环次数，此时求解得到 UFL 逆优化问题的下界。

说明：当循环一定次数时，此时子问题得到的限制集较最优时少，因而主问题的约束条件较最优时少。实际上减少了一些所必须的约束，此时主问题求解得到的目标函数值小于最优值，因而得到逆优化问题的下界。

处理方法 3：对子问题利用邻域搜索得到启发式整数解。

推论 3. 对子问题利用邻域搜索方法求解，此时求解得到 UFL 逆优化问题的下界。

说明：对于子问题给定一个可行解，利用邻域搜索的方法得到较优的整数解作为返回值。邻域搜索采用基本的本地搜索方法，即对于当前给定解采用增加，交换和减少的方式得到局部最优整数解。

cutting plane 结束是比较给定解和原问题求解出的  $\min_I P$   $\min_I P$   $\min_I P$

下面对三种方式进行说明。设此时未开启设施的数量为  $p$ ，开启设施的数量为  $m - p$ 。

增加，即对于当前未开启的设施中开启一个设施，作为一个增加邻域，共有  $p$  个邻域。

交换，即对于当前未开启的设施中开启一个设施，在开启的设施中关闭一个设施，作为一个交换邻域，共有  $p(m - p)$  个邻域。

减少，即对于当前开启的设施中关闭一个设施，作为一个减少邻域，共有  $(m - p)$  个邻域。在一次求解过程中，对于三种方式得到的邻域解对应的成本进行比较，取最小值得到求得的局部最优解。将当前给定解转移到得到的局部最优解，返回该局部最优解到主问题，进行下一次求解。

参考文献 Neighborhood search heuristics for the uncapacitated facility location problem

求解 UFL 下界的启发式算法详细步骤如下：

输入：1) 可行解： $x^0 = (v_i^0, u_{ij}^0)$ ；2) 原设施成本： $c^0 = (f_i^0, r_{ij}^0)$ ；

输出：1) 最优解  $(a^*, b^*, c^*, d^*)$ ；2) 最小的总成本改变量为  $\sum_{i=1}^m (a_i^* + b_i^*) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}^* + d_{ij}^*)$ ；  
3) 对应原成本的改变量为  $f_i - f_i^0 = a_i^* - b_i^*, r_{ij} - r_{ij}^0 = c_{ij}^* - d_{ij}^*$ 。

初始化：初始限制集包含对于原问题的可行解即可。为方便且不再重新生成可行解，可取初始限制集为给定的可行解即  $\mathbb{I} = \{(v_i^0, u_{ij}^0)\}$ 。

步骤 1: 求解此时的主问题得到最优解  $(a', b', c', d')$ .

步骤 2: 将步骤 1 得到的最优解  $(a', b', c', d')$  带入到子问题中, 给定子问题初始解为, 这一整数规划得到最优解  $x'^* = (v'^*, u'^*)$ , 和目标函数值  $T$ .

步骤 3: 如果目标函数值  $T < 0$ , 将得到的  $x'^*$  加入到限制集中  $\mathbb{I} = \mathbb{I} \cup x'^*$ , 回到步骤 1, 重新求解主问题; 如果目标函数值  $T \geq 0$ , 则结束算法。此时得到最优解  $(a^*, b^*, c^*, d^*)$ 。

处理方法 4: 直接对子问题进行线性松弛求解

推论 4. 将无容量限制设施选址的子问题松弛得到分数解, 则可以得到对应逆优化问题的上界。

说明: 当对子问题的整数规划问题进行线性松弛时, 可以得到非整数解。此时会得到子问题的下界, 对应的主问题会得到约束更为严格的限制集。主问题对应的可行域变小, 使得最终得到的结果大于最优解, 此时得到逆优化问题的上界。

此时对应的子问题模型变为:

$$\begin{aligned}
 T = \min \quad & \sum_{i=1}^m (a'_i - b'_i + f_i^0)(v'_i - v_i^0) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c'_{ij} - d'_{ij} + r_{ij}^0)(u'_{ij} - u_{ij}^0) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m u'_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \\
 & u'_{ij} \leq v'_i, \quad \forall i \in M, \forall j \in N \\
 & u'_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in M, \forall j \in N \\
 & 0 \leq u'_{ij} \leq 1, \quad 0 \leq v'_i \leq 1
 \end{aligned}$$

## 5 计算结果

本文使用 Windows 10 操作系统, 内存 8 GB 处理器为 Intel Core i7-8700 的 PC 电脑上进行了所有的数值实验。所有算法均通过 Matlab R2019a 调用 Gurobi 求解器去实现。

通过对按照规模  $(m, n)$  大小  $m$  和  $n$  之间比例关系稀疏矩阵还有设施成本与运输成本之间关系

为方便起见, 在接下来的计算中取  $w^f = 1, w^r = 1$ 。在实际不能改变设施成本时, 可以设置相应的权重  $w^f = \infty$ 。

在数值实验中, 我们对于 12 种不同规模随机生成了对应规模下 50 种可能的实例。

$(m, n) = (20, 20) (30, 30) (40, 40) (50, 50)$

$(20, 40) (30, 60) (40, 80) (50, 100)$

$(20, 60) (30, 90) (40, 120) (50, 150)$  其中设施的启动成本取值范围如下: 整数解  $f_i = [100, 200]$  运输成本取值范围如下:  $r_{ij} = [1, 100] [100, 200]$

我们采用当最优改变量不为 0 时, (上界改变量-最优改变量)/最优改变量 (%) 的方式来比较 gap 的大小 (利用相对值) 同时, 当给定可行解刚好是最优解时, 此时最优改变量为 0, 可以利用总的改变量来衡量 gap 或者利用总成本改变量除以总的成本 (利用绝对值)

结果如下：

1 离散随机变量 $\xi$ 的分布						
情景	1	2	3	4	5	6
$\xi_1^i$	0	0.5	0.6	0.8	1	2
$\xi_2^i$	1	2	0.7	0.5	0	0.4
$p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

在表中，(m,n) 表示 P 的问题规模。例如 (20, 30) 表示 20 个设施和 30 个客户

LB1 表示使用迭代次数得到的 P 的下界。

LB2 表示使用邻域搜索得到的 P 的下界。

UB 表示使用线性松弛的方法得到的 P 的上界。

OS 表示严格求解子问题时得到的逆优化问题的最优值。

表中所有的结果是一个规模中产生的 50 个实例的平均值

## 5.1 简单的例子

为说明逆优化的效果

如上图所示，I, II, III, IV 为设施编号，每个设施开启成本为 10。a, b, c, d 为顾客编号，相应的设施开启成本为  $f_i^0 = (10, 10, 10, 10)$ ,  $r_{ij}^0 =$  粗线表示服务方向细线表示

## 5.2 不同结果比较

计算结果表明，稀疏度并不影响 gap 以及设施开设成本和运输成本的大小关系不影响 gap

## 6 有容量限制

更进一步，令  $d_j$  表示客户  $j$  的需求，并且假设每一个设施有一个最大输出限制，令  $k_i$  表示设施  $i$  能够生产出的最大商品量，即表示设施  $i$  的容量。

类似的，有容量限制的设施选址问题定义如下：

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^n f_i v_i \\
 & \text{s.t.} \sum_{i=1}^n u_{ij} = 1, \forall j \in N \\
 & \sum_{j=1}^m d_j u_{ij} \leq k_i v_i, \forall i \in M \\
 & 0 \leq u_{ij} \leq 1, \forall j \in N, \forall i \in M \\
 & v_i \in \{0, 1\}, \forall i \in M
 \end{aligned}$$

我们同样可以使用上述提到的行生成算法和启发式方法得到最优解。

对于行生成的方法，实际上是限制集的选取的问题，限制集越接近因此可以采用

## 7 结论与展望

本文针对无容量限制的设施选址逆优化问题进行了建模分析，提出了使用行生成算法得到最优解以及通过对整数规划进行线性松弛而得到启发式方法。分析表明对于行生成算法中的子问题采取不同的计算方法可以分别得到逆优化问题的最优解以及解的上下界。数值实验结果说明了得到的启发式算法在上界上的优异表现，而在牺牲一定计算资源的情况下，下界也可以得到较为不错的结果。这些结果充分说明了该启发式算法的有效性。实际上，尽管上界非常接近最优值，但下界的结果可以进一步优化改进。由于子问题是设施选址的原问题，可以将求解设施选址更为高效的近似算法用于其中，从而提高下界解的质量。同时，尽管本文只提到了无容量限制的设施选址逆优化问题，但提出的算法也可以用在有容量限制的设施选址逆优化问题中。

子问题是最具有优化空间的地方，可以结合启发式算法一次找出多个目标函数小于 0 的解，并一次性全部加入主问题中进行求解。

Ghosh D. Neighborhood search heuristics for the uncapacitated facility location problem[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 150(1): 150-162.