利用拉格朗日松弛计算合作博弈中

稳定成本分配的近似最优解

作者：刘林冬、齐向彤、徐宙

**摘要：**

对一个属于空核的成本分配合作博弈，本文研究了其在满足大联盟稳定性约束下将分摊给所有局中人的总成本最大化的近似最优成本分配问题（OCAP）。这类问题的应用之一就是找到稳定大联盟所需的最低补贴水平。为求得此问题的解，我们提出了一种新的基于拉格朗日松弛的算法。与现在基于线性规划(LP)松弛的算法相比，它可以得到更好的成本分配结果，并且其适用范围也更加广泛。为了证明拉格朗日松弛算法的有效性和性能，我们研究了两种不同的设施定位博弈。结果表明，这种新算法可以得到可替代的最优解甚至比线性规划算法更好的最优解。

**关键词：**博弈论、合作博弈、成本分配、拉格朗日松弛、设施选址博弈

1. **问题及现状**

OCAP试图最大化分配给受联盟稳定性约束的所有局中人的总成本。这个问题可以看作计算在大联合政府下稳定社会最优状态的“成本”。在大联合政府中，代表社会福利的第三方愿意为大联合政府的稳定提供补贴。在这里，第三方可以是政府机构，而局中人是一群私营公司。或者，第三方是一个大公司的总部，局中人是不同的分支。在这种情况下，OCAP的目标相当于最小化分配给所有参与者的总成本与大联盟所产生的成本之间的差距，而大联盟则是由第三方提供补贴。

粗略地说，找到OCAP的解至少有两个困难。首先，普通线性规划(LP)公式要求约束的数量随着参与者数量的增加而指数级增加，即n个参与者需要2^n个约束。其次，对于给定的成本分配，仅为了验证其中一个LP约束是否被满足，常常需要解NP-hard的优化问题。因此，直接从OCAP的LP公式中求解OCAP一直是困难的。

1. **基本知识介绍**

博弈论主要研究具有策略互动特征的社会经济问题，在经济、金融、贸易等领域的应用日益广泛。现代博弈理论可以分为非合作博弈理论和合作博弈理论。

合作博弈理论主要研究对象为联盟博弈理论。

介绍联盟定义→稳定

介绍OCAP的背景，政府投资或者福利，保证联盟稳定 尽量减少必要的亏损。

介绍LP算法、LRB算法

应用

合作博弈理论解决了多个独立的决策人之间的合作情况。它在经济、金融、运筹学(OR)和电信等多个领域都有应用。合作博弈的核心是联盟的成本分配集满足(1)联盟稳定性和(2)预算平衡约束。如果至少存在一个这样的分配，那就不是空核。在这种情况下，大联盟是稳定的。不幸的是，许多合作博弈都是空核。对于这种博弈,已经有人提出了用替换的概念来推出一个解决方案。基本思想是松弛在核心定义中指定的两个条件之一。例如，最小核概念(例如，Maschler et al. 1979； Kern and Paulusma 2003； Schulz and Uhan 2010，2013)的定义是松弛联盟稳定性的要求。在最小核心概念下，分摊给每个联盟的费用不超过一个值z与联盟的最小成本之和，其中z是一个最小化的参数。

在另一个被称为的替换概念(例如Jain和Mahdian 2007)中，预算平衡约束被替换为预算平衡约束。预算平衡约束指分配给所有局中人的总成本不小于乘以大联盟的最小成本，其中。在数学上等同于另一个概念 (例如Faigle et al. 1998, Blaser and Ram 2008) 。它限制预算平衡，松弛联盟稳定性，使分配给每个联盟的成本之和不超过联盟的最低成本之积。总的来说，研究或的关键点是在具体地博弈中找到或的连续边界。

在本文中，我们研究了的概念，但是与原文的关注点不同。对于由Caprara和Letchford(2010)提出的最优成本分配问题(OCAP)，我们设计了一种算法来精确计算任一给定博弈的最佳值，而不是寻找的连续边界。特别地，OCAP试图最大化分配给受联盟稳定性约束的所有局中人的总成本。

粗略地说，找到OCAP的解至少有两个困难。首先，普通线性规划(LP)公式要求约束的数量随着参与者数量的增加而指数级增加，即n个参与者需要个约束。其次，对于给定的成本分配，仅为了验证其中一个LP约束是否被满足，常常需要解NP-hard的优化问题。因此，直接从OCAP的LP公式中求解OCAP一直是困难的。

对于空核的合作博弈问题，首先想到的就是求解OCAP。然而，该问题一直未得到充分的研究，直到最近Caprara和Letchford(2010)提出了一个基于LP的框架(在这里称为LPB算法)来处理这种每一个“联盟”的最小成本都有一个整数线性规划(ILP)公式的博弈问题。许多具有这一特征的博弈问题都是源于运筹学的应用。其基本思想是建立一个稳定的成本分配机制。该机制可以在大联盟成本的下边界实现LP松弛。从理论上讲，LPB算法是可以最好地解决OCAP，但这样做需要首先识别并添加ILP公式中定义的所有“可分配”约束(可作为补充材料，见http://:// dx.doi.org/10.1287/ijoc.2016.0707)。然而，有时很难识别所有可分配的约束。例如，在Caprara和Letchford的旅行商问题(TSP)博弈和车辆路径博弈2010)。如果没有多项式时间间隔算法来处理可分配约束的指数数量，即使在所有可分配的约束都可以被识别的情况下，LPB算法仍然是不适用的。例如，Caprara和Letchford(2010)研究的无根旅行商博弈。

在本文中，我们提出了一个处理OCAP的新框架。它是基于拉格朗日松弛而非LP松弛。我们的方法（称为基于拉格朗日松弛(LRB)的算法）虽然也试图找一种成本分配使大联盟成本达到一个更低的边界，但与LPB算法相比具有以下优势。

首先，它是一个通用框架，可以应用于比Caprara和Letchford(2010)所描述的更广泛的合作博弈。而且与只针对线性目标的LPB算法不同，新方法也适用于具有非线性目标的问题。

其次，对于规划相同的大联盟问题，LRB算法可以找到比LPB算法更好的解。因为众所周知，拉格朗日松弛界不比松弛LP解提供的界差。在一定程度上，这避免了LPB算法中识别所有“可分配”约束的要求。此外，即使在某些很容易找到所有可分配的约束来保证LPB算法最优性的情况下，LRB算法仍然是有价值的。因为它可以为参与者提供可变的最优成本分配，从而提供更多的评估选择。

第三，在求解OCAP时，我们的算法是用一种分解的方法创建两个子博弈。相对于原来的博弈来说，这会更容易解决。其中一个子博弈有一个简单的最优解。这个解可以用封闭形式表示。另一个子博弈具有一些原始博弈所缺乏的有益的特性。在许多情况下与原始博弈相比，子博弈中每个联盟产生的最小成本更容易计算。在某些情况下，子博弈的最优成本分配是多项式可解的，而原始博弈的最优成本分配不是多项式可解的。

最后，LRB算法是依赖于几十年来为有效求解拉格朗日对偶问题而进行的大量研究。在将它应用到OCAP时，我们可以充分利用各种加速收敛和生成更清晰界限的方法。这些结果可以在LRB算法的第一步中进行合并。

1. **文献综述**

自Shapley1953)的开创性工作以来，合作博弈的研究一直在深入研究。一些与运筹学应用相关的最突出的例子包括分配博弈(Shapley and Shubik 1971, Martínez-de Albéniz et al. 2013),装箱博弈(Faigle and Kern 1993, Liu 2009),线性生产博弈(Owen 1975),最小生成树博弈(Granot and Huberman 1981),旅行商博弈(Tamir 1989, Potters et al.1992)，车辆路径选择博弈(Göthe-Lundgren et al.1996, Engevall et al. 2004)，库存博弈(Hartmanet al. 2000, Chen 2009, Chen and Zhang 2009, He et al.2012, Zhang 2009)、生产外包博弈(Aydinliyim and Vairaktarakis 2010, Cai and Vairaktarakis 2012)和一些图形包装和覆盖博弈(Deng et al. 1999)等等。研究这些博弈的主要兴趣通常是核心的存在。

本文以设施定位博弈为例，讨论了设施定位合作博弈的工作。Kolen(1983)给出了一个早期的重要结果。他指出，对于无容量设施选址(UFL)博弈，局中人的最大共享成本等于用于大联盟优化问题的经典LP松弛成本。后来，Goemans和Skutella(2000)扩展了这一结果，并证明了在一些特殊的设施选址博弈中的非空性核心，包括设施位置在一条线上、一个循环和一棵树上。其他人也研究了这个问题的变体。如Puerto 等(2011, 2012)分别介绍了最小半径选址博弈和最小直径选址博弈。Xu and Yang (2009)， Mallozzi (2011)， Li等人(2013)研究了各种成本要素的设施定位博弈，如服务安装成本，区域固定成本，以及凹形设施选址成本。

如前所述，最小核是一种可用于处理空核博弈的松弛类型。Faigle等人(2000)指出，计算最小生成树博弈的最小核心分配是NP-hard问题。Kern和Paulusma(2003)基于基数匹配博弈中最小核的多项式描述研究了核仁。Schulz和Uhan(2010)的研究表明对一个具有超分子成本单机调度博弈的最小核值是弱NP-hard，并为计算最小核值的3近似算法（界为3）提供了框架。关于和，使用后一个概念进行研究的更多。例如，Faigle等人(1998)提出了一种基于LP的算法，它为欧几里得TSP生成一个1/3-近似核。Blaser和Ram(2008)提供了一种多项式时间算法，该算法可以在一个(log2(n-1)-1) 近似核中查找不对称TSP博弈的成本分配。我们建议读者参考Jain和Mahdian(2007)的研究以对先前的概念进行更全面的回顾。

现在只有几篇论文直接研究OCAP。Bachrach等人(2009)提出了问题—在稳定合作博弈中大联盟的前提下,如何确定补贴的最小值并且得到最小值合适的上、下界？在Bachrach 等人(2009)研究之后，Meir 等人(2011)进行了类似的关于联合博弈中限制合作的研究。唯一解决OCAP的算法是由Caprara和Letchford(2010)提出的。他们提出了一种基于LP松弛和对偶理论的综合框架。这一方法最适宜解决大量问题。在他们的方法中，通常需要通过引入具有特殊结构的约束来重新表达优化问题。详细内容将在下一节中介绍。

3正文前述

可转让公用事业的合作博弈被一对(V, c)定义，其中V={1,2，…마表示一组球员c:SR表示特征函数和S = 2 v \表明荷兰国际集团(ing)的非空的联盟的球员。特征函数为每个联盟分配了一个值c(S)，代表了S中的成员在吃东西时需要支付的最小总成本。这里研究的成本分配问题是在V中的局中人之间分摊大联盟的成本c(V)，这样一来，对于任何一个小联盟的局中人来说，都没有动力让他们脱离大联盟，组建自己的联盟。A(联合)博弈的稳定成本分配(V, c)是一个向量A E R，满足联盟稳定性:kes A (k) <c(s)， Vs E s .理想成本分摊(V, c)另外满足预算平衡控制:kev A (k) =c(V)。博弈(V, c)的核心定义为:

Core4V 1 c5 D  2 v2 Xk2s 4k5 ≤ c4s51 8s 2 S1and X  
k2V4k5 D c4V 5

众所周知，并不是每个博弈(V, c)都有一个非空的核心。要解决核心为空的博弈，“我们的目标是找到一个稳定的成本分配，以尽可能多地降低大联盟成本c(V)，最优成本分配问题的动机是什么、

max  
**X *k*2*V  
4k5*s.t. X  
*k*2*s  
4k5* ≤ *c4s51* 8*s* 2 *S0* (1) 定义1。合作博弈(V, c)如果存在，称为OR博弈。正整数r r' t xf。左边矩阵A errxt和A' errx z。右边矩阵是RX和B' e Rrxe•非负的右侧列向量•目标函数f(x)，在x中可以是线性的，也可以是非线性的。如果kes和Y= 0，则关联列向量ys E {0,11, Y=1，否则，vkev，这样对于所有的s E s，特征函数c(s)由以下IP给出:

*c4s5* D min  
*x  
f 4x52 Ax* ≥ *Bs* C *D1  
A*0*x* ≥ *B*0*s* C *D*0*1 x* 2 *8*0*1* 1*9t*×1 *0* (2)

注意，在(2)中，约束被划分为两部分，以便稍后使用拉格朗日弛豫。继Caprara和chletford(2010)之后，很容易证明非负D和D'的每一个或博弈都是次加性的。， c(s Us2) Sc(s1) +c(s)表示。所有的Si,S, E和S =。这就定义了一种合适的博弈，在这种博弈中局中人对库珀吃是有意义的，这也是本文分析的重点。对于IM博弈，一个特殊的或博弈的情况，它的特征函数c(s)是由ILP给出的:

*c4s5* D min  
*x  
Cx2 Ax* ≥ *Bs* C *D1  
A*0*x* ≥ *B*0*s* C *D*0*1 x* 2 *8*0*1* 1*9t*×1 *1* (3

其中C是维数t的行向量，我们使用Cp(V)表示(3)中定义的C (V)的LP下界，其中x {0, 1x1松弛到0sx<1。

Caprara和Letchford(2010)解释了如何通过使用column generation、row generation或both来解决IM博弈的OCAP。为了使论文内容完备，我们在在线补充中总结了这些方法的一些要点。粗略地说，列生成方法有一个简单的公式;然而，相关的定价问题通常很难处理，因为它需要在很大的解决方案空间上进行优化。更有希望的行生成方法需要通过识别一组所谓的可分配约束{Ex}来重新制定ILP(3)。然后，通过求解LP弛豫c(V) = min|Cx: Ex> Fyl仅具有可赋值约束，分配的总成本等于cp(V)， c(V)的下界。注意，cEE(V)可能与Cp(V)不同，Cp(V)是原公式(3)下c(V)的LP下界。对于IM博弈，LPB成本allo的质量很大程度上依赖于已确定的可分配的约束。从理论上讲，如果所有可分配的约束都能被识别和添加，LPB算法就能找到一个最优的稳定成本。然而,对于不同。在博弈中，识别可分配约束的方法通常是不同的，因为没有一般的方法是已知的。对于一些可分配的约束条件，不知道保利的分离算法，这就增加了计算LPB成本的另一个困难。尽管存在这些困难，LPB算法可以作为一种有效的启发式方法，在只添加可赋值约束的子集的情况下，找到良好的稳定的成本分配。

4. LRB成本分配算法

在本节中，我们将介绍LRB成本分配算法。一般来说，对于an或game (V, c)，当目标函数f(x) In(2)在x、LPB和LRB算法中是线性的，在com puting中，可以选择好的稳定的成本分配，但如果f(x)是非线性的，则只有LRB算法可以使用。我们首先介绍了LRB算法的框架，并给出了它的有效性，然后给出了算法实现的更多细节。

4.1. 拉格朗日松弛和博弈分解

在拉格朗日弛豫过程中，通过在(2)中放松{a ' xb 'y +D'|，并将其引入具有非负拉格朗日乘子a的目标函数中，我们可以得到一个或一个博弈a的拉格朗日特征函数GR

其中A是维数r'的非负行向量，即。,e RIxr”。特别是对于大联盟V，它的拉格朗日特征函数是CLR(V))= min(f(x)aa 'x +有所+广告”:Ax2 B1 + D,xe { 0 1 x1。

就像拉格朗日弛豫的典型情况一样，可以仔细选择约束A' x2 B'ys + D'l，以便CLR (S);A)是相对容易解决的，例如，对于任何s s s，在polynomial或假多峰时间，已知CIR(V);A)是任何非负A的c(V)的下界。为了达到最尖锐的下界，拉格朗日对偶问题duR(V)找到了使电流(V)最大化的最佳拉格朗日乘子A;一),即dLR(V) = max|min{f(x)- AA'x+ AB1+AD:和Ax2 B1 +D xe (0,11: A20)(5)通过子梯度法(如Ahuja等)。我们可以计算dR(V)的最优拉格朗日常数A\*。在任何非负的拉格朗日乘法器下，我们可以分解拉格朗日特征函数GR(.;A)进入两个亚特征的func - CRi(-;)和GR)(。一个),这样CR(年代;)= CuRI(年代;一个)+ CuR2(年代;A)对于任何s，在哪里GRI(年代;A) = AB'Ys和CLR2 (s)A) = min{f(x)-AA'x+ AD:，AxBy + D,xe { 0,1 x11。(6)(7)

我们定义子博弈1为(V, CuRi(-;A)，其特征函数为CuRi(s);A)和子博弈2(V, CuR2(.;)类似。在某些特定的实现中，我们可以进一步分解CuR2(.;A)生成更多的子特征函数，使LRB算法更加高效。第5.2.1节给出了一个例子。定理1。给定任意非负的拉格朗日常数A，如果atRi和aiR2是子博弈的稳定成本分配(V, CLRI(;)和(V,CLR2。;A))，则aR =aiRI+aiR2为OR博弈的稳定成本分配(V, c)。证明。对于任何s e, diRi和aiR2的稳定性意味着DaR(k) +aR (k)] kesSCLRI(年代;一个)+ CuR2(年代;)=坏蛋(年代;< c(s)。因此我们有Ekes aLR(k) = EkesatR1(k) + aR (k)] sc(s)。这就完成了证明。根据定理1，我们可以设计一种LRB算法，通过寻找a，得到一个好的OCAP稳定解

6 总结

本文的重点是合作博弈，其核心可能是空的。我们提出一个通用的框架来计算一个良好的稳定成本分配，以满足联盟的稳定性，并尽可能恢复大联盟的成本。在文献中，这类问题通常通过LP松弛法和对偶法来解决。我们采用不同的方法研究拉格朗日松弛技术。除了拉格朗日界比LP界具有竞争力外，我们的算法并不局限于用可分配的约束和线性目标函数来解决问题。

我们在两种不同的设施定位博弈上演示了我们的新算法，每种游戏都代表了可能遇到的一种典型的合作游戏类型。计算实验表明，我们的算法能够为所有这些游戏提供近乎最优的成本分配，优于现有的基于lp的算法。事实上，我们也成功地将我们的算法引入到其他典型的游戏中，例如TSP游戏，如see Liu(2015)。

作者信息：

刘林冬：南京大学学士，香港科技大学博士，2016年加入中国科学技术大学管理学院特任副教授，其研究兴趣主要是合作博弈、组合优化、整数规划等。在 UTD 24 期刊以第一作者身份发表论文两篇（OR一篇，IJOC一篇），主持和参与国家自然科学基金青年项目和重点项目各一项。

齐向彤：香港科技大学工业工程与物流管理系教授。他的主要研究方向是最优化和博弈论，并将其应用于生产、物流和供应链管理。他在著名的学术期刊上发表了40多篇论文，有两章和一本书。他的编辑经验包括为IIE交易，IEEE交易自动化科学和亚太运营搜索杂志服务的副编辑。

徐宙 香港理工大学助理教授