Álgebra Lineal
Ejercicios sobre determinantes

1. Usando las propiedades del determinante, verificar que el determinante de cada una de las siguientes matrices es igual a cero

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & x+z \\ 1 & z & x+y \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x & 3x & 4x \\ x & 5x & 6x \\ x & 7x & 8x \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Calcular el determinante de la matriz $B = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, sabiendo que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 5$

3. Si $\det \begin{bmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{bmatrix} = K$ calcular el siguiente determinante

$$\det \begin{bmatrix} b+c & b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ c+a & c_1+a_1 & c_2+a_2 \\ a+b & a_1+b_1 & a_2+b_2 \end{bmatrix}$$

4. ¿Para qué valores de k cada matriz dada es singular (no invertible)?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & k & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} k & k-1 & 1 \\ 0 & k+1 & 4 \\ k & 0 & k \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} k & k^2 & 0 \\ 0 & k^3 & 4 \\ -k & 0 & k \end{bmatrix}$$

5. Determinar los valores de k tales que la matriz dada sea no singular (invertible)

$$A = \begin{bmatrix} k+1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -k & k-1 & k+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-k & k+3 & k+7 \end{bmatrix}$$

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{bmatrix}$. Resolver la ecuación $\det(A) = 1 - 7x$

7. Sea $B = \begin{bmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{bmatrix}$. Resolver la ecuación y $\det(B) = x^3 - 3$

8. Para cada una de las siguientes matrices, determinar los valores de λ (léase lambda) tales que $\det(A - \lambda I_3) = 0$, donde I_3 es la matriz identidad 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9. Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar la matriz de cofactores, la matriz adjunta de A ($adj(A)$) y la matriz inversa de A. Usando la matriz inversa resolver el sistema $AX = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

10. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Verificar que si $\det(A + I_2) = 1 + \det(A)$ entonces $a + d = 0$

11. Sean A y B matrices de tamaño 5×5 tales que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Completar la tabla con el resultado de calcular el determinante requerido

	Respuesta
$\det(A^T B^{-1})$	
$\det(4B)$	
$\det\left((3B)^{-1} A^2\right)$	
$\det\left((2A)(3B^T)^{-1}\right)$	
$\det\left((3A)(2AB^T)^{-1}\right)$	

12. Mostrar con un ejemplo que el siguiente enunciado es falso:
    Sean A y B una matrices $n \times n$, entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

13. Usando las propiedades de las matrices, demostrar cada uno de los siguientes enunciados.
    (a) Sean A y B matrices $n \times n$, entonces $\det(AB) = \det(BA)$.
    (b) Si A es una matriz $n \times n$ tal que $AA^T = I_n$, entonces $\det(A) = 1$ o $\det(A) = -1$.
    (c) Sean A y P son matrices $n \times n$, con P invertible, entonces $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

Referencias

[1] García, O., Villegas, J.A. y Castaño, J.I. (2012) Álgebra lineal. Fondo Editorial Universidad EAFIT. Medellín.

[2] Grossman, S. (1996). Álgebra Lineal con Aplicaciones. 5ta. Ed. McGraw-Hill. México.

[3] Hill, R. (1996). Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones. Prentice Hall. México.

[4] Kolman, B. (1999). Álgebra Lineal con Aplicaciones y Matlab. 6ta. Ed. Prentice Hall. México.

[5] Lay, D. (1999). Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. 2a. Ed. Prentice Hall, México.