# 3 Теоремы о свойствах решений.

## 3.1 Непрерывная зависимость решений от входных данных. Редукция задач.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(t,x) \\ &x(t_0) = u. \end{aligned} \tag{1}$$

**Определение 23.** Решение задачи (1) непрерывно зависит от начальных данных на отрезке $[t_0, T]$, если

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta : |u_1 - u_2| < \delta \quad |x_1(t) - x_2(t)| < \varepsilon \quad \forall\ t \in [t_0, T],$$

где $x_1(t_0) = u_1,\ x_2(t_0) = u_2$.

Кроме зависимости от начальных данных, важную роль еще играет зависимость от параметров в задаче

$$\begin{aligned} &\dot{y} = f(t,y,v), \\ &y(t_0) = y_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $v \in R^k$ – вектор параметров, а также зависимость от начального момента $s$

$$\begin{aligned} &\dot{z} = f(t,z), \\ &z(s) = z_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Определения непрерывной зависимости от параметров и начального момента формулируются аналогично определению непрерывной зависимости от начальных данных (упражнение 1).

Покажем, что исследование зависимости решений от параметров и начального момента (задачи (2) и (3)) может быть сведено к исследованию зависимости решений от начальных данных, т. е. задачи (1).

Сведение задачи (2) к задаче (1). Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = f(t, y, w) \\
&\dot{w} = 0 \\
& \\
&y(t_0) = y_0 \\
&w(t_0) = v.
\end{aligned} \tag{4}$$

Она, очевидно, эквивалентна исходной задаче (2), так как уравнения на $w$ – фактически фиктивные и благодаря начальным данным имеют решение $w \equiv v$. С другой стороны, формально система (4) является задачей (1), поскольку изменение параметра $v$ является для нее изменением начального значения для вектора неизвестных $x = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}$.

Сведение задачи (3) к задаче (2). Введем новую независимую переменную $\tau = t - s$ и новую неизвестную функцию $y(\tau) = z(t)$.

Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{d\tau}(\tau) = \dot{z}\,(\tau + s) = f(\tau + s,\ z(\tau + s)) = f(\tau + s, y(\tau)) = \\
&= \tilde{f}(\tau, s, y(\tau)). \\
&y(0) = z(s) = z_0.
\end{aligned}$$

Таким образом, задача (3) эквивалентна задаче Коши

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{d\tau} = \tilde{f}(\tau, s, y) \\
&y(0) = z_0,
\end{aligned}$$

являющейся задачей типа (2), поскольку $s$ теперь выступает в роли параметра в правой части. Способом, описанным выше, ее можно свести к задаче (1).

Изложенные выше рассуждения позволяют ограничиться исследованием условий, при которых решение задачи (1) непрерывно зависит от $u$. Достаточные условия непрерывной зависимости решений от параметров и начального момента можно получить отсюда как следствие.

## 3.2 Лемма Гронуолла-Беллмана.

Лемма *(Гронуолла-Беллмана).*

*Пусть* $y(t)$ *– непрерывная, неотрицательная функция на области своего определения удовлетворяет неравенству*

$$y(t) \le y_0 + \left| \int_{t_0}^{t} L(s) y(s) ds \right|,$$

*где* $L(s)$ *тоже непрерывна и неотрицательна. Тогда*

$$y(t) \le y_0 \exp \left\{ \left| \int_{t_0}^{t} L(s) ds \right| \right\}.$$

Пусть $t > t_0$, тогда

$$y(t) \le y_0 + \int_{t_0}^{t} L(s) y(s) ds. \tag{1}$$

Обозначим правую часть (1) через $z(t)$, тогда

$$z(t) - y(t) = \varphi(t) \ge 0. \tag{2}$$

Далее

$$\dot{z}(t) = L(t) y(t) = L(t) z(t) - L(t) \varphi(t),$$

откуда

$$z(t) = \exp\left( \int_{t_0}^{t} L(s) ds \right) \left( y_0 - \int_{t_0}^{t} L(s) \varphi(s) \exp\left( - \int_{t_0}^{s} L(\tau) d\tau \right) ds \right) \le$$
$$\le y_0 \exp\left( \int_{t_0}^{t} L(s) ds \right), \text{ так как второе слагаемое } \le 0.$$

Пусть $t < t_0$, тогда

$$y(t) \le y_0 - \int_{t_0}^{t} L(s) y(s) ds. \tag{3}$$

Обозначим, по-прежнему, правую часть (3) через $z(t)$, тогда (2) остается в силе, а также

$$\dot{z}(t) = -L(t) y(t) = -L(t) z(t) + L(t) \varphi(t),$$

откуда

$$z(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} L(s)ds\right)\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} L(s)\varphi(s)\exp\left(\int_{t_0}^{s} L(\tau)d\tau\right)ds\right) \leq$$
$$\leq y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^{t} L(s)ds\right),$$

так как подинтегральное выражение во втором слагаемом положительно, а $t < t_0$.

## 3.3 Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных.

**Теорема 7.** *(о непрерывной зависимости от начальных данных).*

*Пусть правая часть в задаче Коши*

$$\dot{x} = f(t, x)$$
$$x(t_0) = u$$

*удовлетворяет условиям теоремы 1, тогда ее решение непрерывно зависит от u на любом отрезке* $[t_0, T]$.

Рассмотрим два решения $x_1(t)$ и $x_2(t) : x_1(t_0) = u_1$, $x_2(t_0) = u_2$. Тогда

$$\varphi(t) = |x_1(t) - x_2(t)| =$$
$$= \left|u_1 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))d\tau - u_2 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_2(\tau))d\tau\right| \leq$$
$$\leq |u_1 - u_2| + |\int_{t_0}^{t} |f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_2(\tau))|d\tau| \leq$$
$$\leq |u_1 - u_2| + |\int_{t_0}^{t} L(\tau)\varphi(\tau)d\tau|.$$

Из леммы Гронуолла – Беллмана следует $\forall\ t \in [t_0, T]$

$$\varphi(t) = |x_1(t) - x_2(t)| \leq |u_1 - u_2| \exp\left\{\left|\int_{t_0}^{t} L(\tau)d\tau\right|\right\} \leq$$
$$\leq |u_1 - u_2| \exp\left\{\left|\int_{t_0}^{T} L(\tau)d\tau\right|\right\} = M(T)|u_1 - u_2|.$$

Из последнего неравенства следует непрерывная зависимость (обратите внимание на отсутствие равномерности по $T$).