По условию теоремы

$$L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1, m}).$$

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{Y_i}\right] = \sum_{i=1}^{m} L[\mathbf{Y_i}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i}. \ ■$$

§ 21. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

21.1. Собственные значения и собственные векторы

В предыдущем параграфе мы использовали линейный дифференциальный оператор для компактной формы записи системы дифференциальных уравнений и доказательства некоторых теорем. Для дальнейшей работы нам необходимо вспомнить ряд понятий, связанных с линейными операторами. А именно, нам понадобятся понятия собственного вектора и собственного значения оператора конечномерных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ**.** *Пусть φ – оператор пространства L. Если для некоторого ненулевого вектора $x \in L$ и числа λ имеем $\varphi(x) = \lambda x$, то число λ называется собственным значением оператора φ, а вектор x называется собственным вектором оператора φ, относящимся к собственному значению λ.*

Укажем свойства, которыми обладают собственные векторы.

1. *Каждый собственный вектор x оператора φ относится к единственному собственному значению.*
2. *Если x_1 и x_2 – собственные векторы оператора φ, относящиеся к одному и тому же собственному значению λ, то их линейная комбинация $\alpha x_1 + \beta x_2$ – собственный вектор оператора φ, относящийся к тому же собственному значению.*

Из второго свойства следует:

а) каждому собственному значению λ соответствует *бесчисленное множество собственных векторов*;

б) если к множеству всех собственных векторов x оператора φ, относящихся к одному и тому же собственному значению λ, присоединить нулевой вектор (нулевой вектор по определению не является собственным), то получим подпространство пространства L. *Это подпространство называется* ***собственным подпространством оператора*** φ и обозначается L_λ.

3. *Собственные векторы* $x_1, x_2, \ldots x_k$ *оператора* φ, *относящиеся к различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Из свойства 3 следует, что *линейный оператор, действующий в* n*-мерном линейном пространстве* L_n*, не может иметь более* n *собственных значений.* Кроме того, *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы.*

Процесс поиска собственных значений и собственных векторов оператора конечномерного пространства на практике сводится к решению алгебраических уравнений и систем.

Действительно, предположим, что $\mathbf{A}$ – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $\mathbf{X}$ – матрица-столбец координат вектора x в том же базисе. Тогда векторное равенство $\varphi(x) = \lambda x$ равносильно матричному равенству

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad \text{или} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}. \tag{21.1}$$

Но матричное уравнение $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Так как собственные векторы ненулевые, то система (21.1) должна иметь нетривиальные решения. Это будет иметь место, если

$$rang(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \neq n$$

или, что то же,

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.}$$

Матрица $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ называется ***характеристической матрицей*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$), а ее определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$, являющийся многочленом относительно λ – ***характеристическим многочленом*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$).

Найдя корни характеристического многочлена, мы определим собственные значения. Подставив конкретное собственное значение в (21.1) и решив получившуюся систему, мы найдем относящиеся к нему собственные векторы.

ПРИМЕР 21.1. Найти собственные векторы и собственные значения оператора, имеющего в некотором базисе матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Запишем характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & -5 & -3 \\ -1 & -2-\lambda & -3 \\ 3 & 15 & 12-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=(3-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18).$$

Корни характеристического многочлена (собственные значения):

$$\lambda_1=6, \ \ \lambda_{2,3}=3.$$

2) Для каждого из найденных собственных значений λ_i запишем систему линейных однородных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$ и найдем ее фундаментальную систему решений. Это будут координаты базисных векторов собственного подпространства L_{λ_i}.

а) Для $\lambda_1=6$ имеем:

$$(\mathbf{A}-6\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 2-6 & -5 & -3 \\ -1 & -2-6 & -3 \\ 3 & 15 & 12-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \ \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 \\ -1 & -8 & -3 \\ 3 & 15 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 – свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases} -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -4x_1 - 5x_2 = 3x_3, \\ -x_1 - 8x_2 = 3x_3; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \Delta=\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}=27, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} 3x_3 & -5 \\ 3x_3 & -8 \end{vmatrix}=-9x_3, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} -4 & 3x_3 \\ -1 & 3x_3 \end{vmatrix}=-9x_3;$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3}, \\ x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Чтобы ее записать, придадим свободной переменной x_3 любое отличное от нуля значение. Например, полагаем $x_3 = -3$. Тогда из общего решения находим $$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Итак, получили: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ – решение фундаментальной системы. Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=6}$ является вектор $$c_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3 = \{1;1;3\}.$$

$$\Rightarrow \quad L_{\lambda=6} = \{\alpha c_1 | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

б) Для $\lambda_{2,3} = 3$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2-3 & -5 & -3 \\ -1 & -2-3 & -3 \\ 3 & 15 & 12-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы имеет три пропорциональные строки и, следовательно, ее ранг равен 1. Выбирая в качестве зависимой переменной x_1 получаем, что ее общее решение имеет вид:

$$x_1 = -5x_2 - 3x_3.$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$x_2 = 1, \ x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5;$$

$$x_2 = 0, \ x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3.$$

Итак, получили: $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – решения фундаментальной системы. Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=3}$ являются векторы

$$c_2 = \{-5;1;0\} \quad \text{и} \quad c_3 = \{-3;0;1\}.$$

$$\Rightarrow \quad L_{\lambda=3} = \{\alpha c_2 + \beta c_3 | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \ \diamond$$

В заключение этого пункта заметим, что говорят также о ***собственных векторах матрицы*** $\mathbf{A}$ порядка n, имея при этом ввиду собственные векторы оператора n-мерного пространства, имеющего $\mathbf{A}$ своей матрицей в некотором базисе. Использование такой терминологии удобно в задачах, в которых на каком-то этапе решения возникает система линейных однородных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$. В этом случае любое решение системы $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$ обычно называют собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, а ее фундаментальную систему решений – линейно независимыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$.

21.2. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+b_i(x)\quad (i=\overline{1,n}), \tag{21.2}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные. Такие системы называют ***системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*** и именно они имеют наибольшее практическое применение.

Систему (21.2) можно решить методом исключения. При этом получится линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами. Мы умеем интегрировать такие дифференциальные уравнения. Проблема лишь в том, что процесс получения дифференциального уравнения порядка n довольно трудоемкий и требует аккуратности.

Другой способ – найти общее решение соответствующей однородной системы, а затем найти общее решение неоднородной системы методом вариации постоянных. Этот путь, как правило, менее трудоемкий, так как оказалось, что фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами связана с собственными векторами ее матрицы. Именно установление этой связи и является целью нашего дальнейшего изложения. Нахождение фундаментальной системы решений с использованием собственных векторов матрицы называется ***методом Эйлера***.

Итак, рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\quad (i=\overline{1,n}). \tag{21.3}$$

Вид уравнений системы (21.3) наводит на мысль, что решения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому частные решения будем искать в виде

$$y_1 = d_1 e^{\lambda x},\ y_2 = d_2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = d_n e^{\lambda x}, \tag{21.4}$$

где $\lambda, d_1, d_2, \ldots, d_n$ – неизвестные действительные числа, которые нужно выбрать так, чтобы функции (21.4) удовлетворяли системе (21.3).

Запишем систему (21.3) в матричном виде:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \tag{21.5}$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По предположению,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\mathbf{D}, \quad \text{где} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} d_1 \lambda e^{\lambda x} \\ d_2 \lambda e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{D}.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в (21.5) и получим

$$\lambda \cdot e^{\lambda x}\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot (e^{\lambda x}\mathbf{D}) \quad \text{или} \quad \lambda \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \lambda\mathbf{D} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{O}. \tag{21.6}$$

Матричное уравнение (21.6) представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Чтобы такая система имела нетривиальные решения необходимо, чтобы

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0.}$$

Но это означает, что λ *должно является действительным характеристическим корнем* (*т. е. собственным значением*) *матрицы* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{D}$ *– ее собственным вектором, относящимся к* λ.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет n характеристических корней, но среди них могут быть комплексные и кратные. Рассмотрим ситуации, которые в связи с этим могут возникнуть.

I. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны и различны*

В этом случае для каждого характеристического корня λ_i $(i=\overline{1,n})$ найдем собственный вектор $\mathbf{D_i}=(d_{ji})$ и запишем решения $\mathbf{Y_i}=e^{\lambda_i x}\mathbf{D_i}$:

$$\mathbf{Y_1}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x}d_{11} \\ e^{\lambda_1 x}d_{21} \\ \dots \\ e^{\lambda_1 x}d_{n1} \end{pmatrix},\ \mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x}d_{12} \\ e^{\lambda_2 x}d_{22} \\ \dots \\ e^{\lambda_2 x}d_{n2} \end{pmatrix}, \dots,\ \mathbf{Y}_n=\begin{pmatrix} e^{\lambda_n x}d_{1n} \\ e^{\lambda_n x}d_{2n} \\ \dots \\ e^{\lambda_n x}d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель Вронского этих решений. Имеем:

$$W\,[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n]=\begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x}\cdot\ldots\cdot e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Действительно, так как все собственные векторы $\mathbf{D_i}$ относятся к различным собственным значениям, то они линейно независимы, т. е. $\alpha_1\mathbf{D_1}+\alpha_2\mathbf{D_2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{D_n}=\mathbf{O}$ только при условии, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. Это означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 d_{11} + \alpha_2 d_{12} + \ldots + \alpha_n d_{1n} = 0, \\ \alpha_1 d_{21} + \alpha_2 d_{22} + \ldots + \alpha_n d_{2n} = 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \alpha_1 d_{n1} + \alpha_2 d_{n2} + \ldots + \alpha_n d_{nn} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное (тривиальное) решение и, следовательно, ее определитель

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Так как $W[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n]\neq 0$, то решения $\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы в этом случае имеет вид

$$\mathbf{Y}=C_1\mathbf{Y}_1+C_2\mathbf{Y}_2+\ldots+C_n\mathbf{Y}_n$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 d_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{1n} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1 d_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{2n} e^{\lambda_n x}, \\ \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \\ y_n = C_1 d_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 21.2. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ \left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right| = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1.$$

Характеристические корни являются собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$. Найдем ее собственные векторы, относящиеся к каждому из собственных значений.

а) Для $\lambda_1 = 5$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \ \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \ x_2 = 2x_1$ – общее решение системы.

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 5$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{5x}\mathbf{D_1} = e^{5x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{5x}\\2e^{5x}\end{pmatrix}.$$

б) Для $\lambda_2 = -1$ имеем:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix}1+1 & 2\\4 & 3+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2x_1 + 2x_2 = 0,\\4x_1 + 4x_2 = 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \; x_2 = -x_1 \text{ – общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{D_2}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_2 = -1$, то решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_2} = e^{-x}\mathbf{D_2} = e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-x}\\-e^{-x}\end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} = C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{5x} + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-x}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases}y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^{-x},\\y_2 = 2C_1e^{5x} - C_2e^{-x}.\end{cases} \diamond$$

II. *Характеристические корни матрицы* A *различны, но среди них есть комплексные*

Так как характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$ имеет действительные коэффициенты, то комплексные корни будут появляться сопряженными парами. Пусть, например, характеристическими корнями являются числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Рассмотрим две системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O} \quad \text{и} \quad (\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}.$$

В алгебре доказано, что если для них выбрать одни и те же переменные свободными и придать им сопряженные значения, то для зависимых переменных тоже получатся сопряженные значения.

Пусть $\mathbf{D}=(d_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Тогда $\overline{\mathbf{D}}=(\overline{d}_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Рассмотрим матрицы-столбцы

$$\mathbf{Z_1}=e^{\lambda_1 x}\mathbf{D}=e^{(\alpha+i\beta)x}\mathbf{D}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}\mathbf{D}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)\mathbf{D},$$

$$\mathbf{Z_2}=e^{\lambda_2 x}\overline{\mathbf{D}}=e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{\mathbf{D}}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}\overline{\mathbf{D}}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x-i\sin\beta x)\overline{\mathbf{D}}.$$

В силу выбора $\mathbf{D}$ и $\overline{\mathbf{D}}$ эти матрицы-столбцы $\mathbf{Z_1}$ и $\mathbf{Z_2}$ будут удовлетворять матричному уравнению $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$. Полагаем далее

$$\mathbf{Y_1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1}+\mathbf{Z_2}\right), \qquad \mathbf{Y_2}=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1}-\mathbf{Z_2}\right).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ состоят из действительных функций и тоже удовлетворяют матричному уравнению $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$. Более того, можно доказать, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ линейно независимы и, следовательно, могут быть включены в фундаментальную систему решений.

Замечание. На практике матрицу-столбец $\mathbf{Z_2}$ не записывают, так как $\mathbf{Z_2}=\overline{\mathbf{Z}}_1$. Действительно,

$$\overline{\mathbf{Z}}_1=\overline{e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)\mathbf{D}}=\overline{e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)}\cdot\overline{\mathbf{D}}=$$
$$=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x-i\sin\beta x)\cdot\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{Z_2}.$$

Следовательно,
$$\mathbf{Y_1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1}+\overline{\mathbf{Z}}_1\right)=\operatorname{Re}\mathbf{Z_1},$$
$$\mathbf{Y_2}=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1}-\overline{\mathbf{Z}}_1\right)=\operatorname{Im}\mathbf{Z_1}.$$

ПРИМЕР 21.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'=y_1-y_2-y_3, \\ y_2'=y_1+y_2, \\ y_3'=3y_1+y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 3 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ \left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=(1-\lambda)[(1-\lambda)^2+4].$$

Найдем характеристические корни:

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)^2+4]=0,$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1=1, \ \lambda_{2,3}=1\pm 2i.$$

2) Действительный корень $\lambda_1=1$ является собственным значением матрицы $\mathbf{A}$. Найдем собственный вектор матрицы, относящийся к этому собственному значению. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1-1 & -1 & -1\\ 1 & 1-1 & 0\\ 3 & 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \ \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases}-x_2 - x_3 = 0,\\ x_1 = 0,\\ 3x_1 = 0.\end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases}x_2 = -x_3,\\ x_1 = 0.\end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3=1$ и находим его:

$$\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^x \mathbf{D_1} = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

3) Возьмем один из комплексных корней, например $\lambda_2 = 1 + 2i$, и найдем фундаментальную систему решений системы $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -1 & -1 \\ 1 & 1-(1+2i) & 0 \\ 3 & 0 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2ix_2 = 0, \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_2, x_3 будут зависимыми, а x_1 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_1}{2i}, \\ x_3 = \dfrac{3x_1}{2i}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 2i$ и находим его:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $$\mathbf{Z} = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x + i \cdot 2\cos 2x \\ \cos 2x + i \cdot \sin 2x \\ 3\cos 2x + i \cdot 3\sin 2x \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + ie^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

Откуда находим

$$\mathbf{Y_1} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y_2} = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y}_3$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + C_3 e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = \quad - 2C_2 e^x \sin 2x + 2C_3 e^x \cos 2x, \\ y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x, \quad \diamond \\ y_3 = C_1 e^x + 3C_2 e^x \cos 2x + 3C_3 e^x \sin 2x. \end{cases}$$

III. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны, но среди них есть кратные*

Пусть λ – действительный характеристический корень матрицы $\mathbf{A}$ кратности ℓ, $r = rang(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Возможны два случая.

$\boxed{\mathbf{1)}\ \boldsymbol{n - r = \ell}.}$

В этом случае фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из ℓ решений. Следовательно, существуют ℓ линейно независимых собственных векторов $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}, \ldots, \mathbf{D}_\ell$ матрицы $\mathbf{A}$, относящихся к собственному значению λ. Тогда решения системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\mathbf{D_2},\ \ldots,\ \mathbf{Y}_\ell = e^{\lambda x}\mathbf{D}_\ell$$

линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений этой системы.

$\boxed{\mathbf{2)}\ \boldsymbol{n - r \neq \ell}}$ (точнее, $n - r < \ell$, случай $n - r > \ell$ вообще невозможен из алгебраических соображений).

Тогда фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из $k < \ell$ решений. С их помощью мы сможем получить k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений. В такой ситуации существует два возможных способа найти все решения.

Первый способ – искать ℓ решений вида

$$\mathbf{Y}=e^{\lambda x}\begin{pmatrix} a_{10} & + & a_{11}x & + & \ldots & + & a_{1,\ell-1}x^{\ell-1} \\ a_{20} & + & a_{21}x & + & \ldots & + & a_{2,\ell-1}x^{\ell-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & + & a_{n1}x & + & \ldots & + & a_{n,\ell-1}x^{\ell-1} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты многочленов a_{ij} находят, подставляя $\mathbf{Y}$ в исходную систему.

ПРИМЕР 21.4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right| = \lambda^2-4\lambda+4.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2-4\lambda+4=0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2}=2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell=2$. При этом $r=rang(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=1$ (т. к. $\left|\mathbf{A}-2\mathbf{E}\right|=0$). Следовательно,

$$n-r=2-1=1 \quad \text{и} \quad n-r<\ell.$$

Будем искать решения системы в виде

$$\mathbf{Y}=e^{2x}\begin{pmatrix} a & + & bx \\ c & + & dx \end{pmatrix},$$

т. е. полагаем

$$y_1=(a+bx)e^{2x}, \qquad y_2=(c+dx)e^{2x}.$$

Тогда

$$y_1'=(2a+2bx+b)e^{2x}, \qquad y_2'=(2c+2dx+d)e^{2x}.$$

Подставим y_1, y_2, y_1', y_2' в исходную систему и получим:

$$\begin{cases} (2a+b+2bx)e^{2x} = (a+bx-c-dx)e^{2x}, \\ (2c+d+2dx)e^{2x} = (a+bx+3c+3dx)e^{2x} \end{cases}$$

или, после сокращения на e^{2x}:

$$\begin{cases} 2a + b + 2bx = a + bx - c - dx, \\ 2c + d + 2dx = a + bx + 3c + 3dx; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a + b + c) + (b + d)x = 0, \\ (-a - c + d) - (b + d)x = 0. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях *x,* получим:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -a - c + d = 0, \\ -b - d = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Или, после преобразований:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда переменные a, b будут зависимыми, c и d – свободными. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = d - c, \\ b = -d. \end{cases}$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$d = 1,\ c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1,\ b = -1;$$

$$d = 0,\ c = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1,\ b = 0.$$

Первое из решений фундаментальной системы ($a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, $d = 1$) дает для системы дифференциальных уравнений решение

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 - x \\ x \end{pmatrix},$$

второе решение из фундаментальной системы ($a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$) дает решение

$$\mathbf{Y}_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y_2} = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 - x \\ x \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \ \diamond$$

Как показывает рассмотренный пример, чтобы найти решения для системы дифференциальных уравнений второго порядка, нам пришлось решать алгебраическую систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. А если порядок исходной системы будет 3, то алгебраическая система будет содержать в лучшем случае шесть уравнений и шесть неизвестных (а в худшем – девять уравнений и неизвестных). И хотя мы в каждом случае точно знаем количество свободных переменных (их количество совпадает с кратностью корня), задача получается трудоемкая.

Второй способ решения – найти k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений, а недостающие $\ell - k$ решений искать в виде

$$\mathbf{Y_{k+1}} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{k}}_{+1,0} + \mathbf{D_{k}}_{+1,1}x),$$

$$\mathbf{Y_{k+2}} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{k+2}}_{,0} + \mathbf{D_{k}}_{+2,1}x + \mathbf{D_{k}}_{+2,2}\cdot\frac{x^2}{2}\right),$$

$$\mathbf{Y_{k+3}} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D_{k}}_{+3,0} + \mathbf{D_{k}}_{+3,1}x + \mathbf{D_{k}}_{+3,2}\cdot\frac{x^2}{2} + \mathbf{D_{k}}_{+3,3}\cdot\frac{x^3}{3}\right) \text{ и т.д.}$$

Здесь $\mathbf{D_{ij}}$ – числовые матрицы-столбцы, определяемые так, чтобы $\mathbf{Y_i}$ были решениями системы дифференциальных уравнений.

На первый взгляд кажется, что этот способ такой же трудоемкий, как и предыдущий. Но на самом деле это не так. Рассмотрим его применительно к системам дифференциальных уравнений 3-го порядка, т. е. к системам вида

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \tag{21.7}$$

где $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица третьего порядка, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Число характеристических корней матрицы совпадает с ее порядком, следовательно, если матрица $\mathbf{A}$ имеет кратный характеристический корень λ, то его кратность ℓ равна двум или трем. Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) Пусть $\ell = 2$, $n - r = 1$.

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет один линейно независимый собственный вектор $\mathbf{D_1}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}$ – решение системы (21.7). Еще одно решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}}x).$$

Тогда
$$\mathbf{Y_2'} = e^{\lambda x}(\lambda\mathbf{D_{20}} + \lambda\mathbf{D_{21}}x + \mathbf{D_{21}})$$

и, подставляя $\mathbf{Y_2}$ и $\mathbf{Y_2'}$ в (21.7), получаем:

$$e^{\lambda x}(\lambda\mathbf{D_{20}} + \lambda\mathbf{D_{21}}x + \mathbf{D_{21}}) = \mathbf{A}\cdot e^{\lambda x}(\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}}x).$$

После преобразований будем иметь:

$$\lambda\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}} + \lambda\mathbf{D_{21}}x = \mathbf{A}\mathbf{D_{20}} + \mathbf{A}\mathbf{D_{21}}x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{D_{21}} = \mathbf{A}\mathbf{D_{21}}, \\ \lambda\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_{21}} = \mathbf{A}\mathbf{D_{20}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{D_{21}} - \lambda\mathbf{D_{21}} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{A}\mathbf{D_{20}} - \lambda\mathbf{D_{20}} = \mathbf{D_{21}}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{21}} = \mathbf{O}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{20}} = \mathbf{D_{21}}. \end{cases} \qquad (21.8)$$

Первое уравнение системы (21.8) означает, что $\mathbf{D_{21}}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, можем полагать $\mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_1}$. Тогда второе уравнение системы (21.8) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{20}} = \mathbf{D_1},$$

т. е. в качестве $\mathbf{D_{20}}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$.

Таким образом, *если* $\ell = 2$ и $n - r = 1$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{20}} + \mathbf{D_1}x),} \qquad (21.9)$$

где $\mathbf{D_1}$ – *собственный вектор матрицы* $\mathbf{A}$, *относящийся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D_{20}}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$.

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y}_2$ входят в фундаментальную систему решений, так как они линейно независимы.

Действительно, рассматривая

$$\alpha\mathbf{Y_1} + \beta\mathbf{Y_2} = \mathbf{O},$$

получаем

$$(\alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_{20}}) + \beta\,\mathbf{D_1}x = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta\,\mathbf{D_1} = \mathbf{O}, \\ \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_{20}} = \mathbf{O}. \end{cases}$$

По определению собственного вектора $\mathbf{D_1} \neq \mathbf{O}$. Тогда из этой системы находим

$$\alpha = \beta = 0.$$

А это означает, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y}_2$ – линейно независимы.

> *Замечание*. При получении формул (21.9) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n.

ПРИМЕР 21.5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 2$. При этом $r = rang(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1$ (т. к. $|\mathbf{A} - 2\mathbf{E}| = 0$). Следовательно,

$$n - r = 2 - 1 = 1$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.9).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 2$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \text{ – общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_2 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 2$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\mathbf{D_1} = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

3) Второе решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде $$\mathbf{Y_2} = e^{2x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x),$$
где $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{D_1},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x_1 = 1 - x_2 \text{ – общее решение системы.}$$

Полагаем $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{20}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_{20}}$ в $\mathbf{Y_2}$ и получаем:

$$\mathbf{Y_2} = e^{2x}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}x\right] = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}. \ \diamond$$

б) Пусть $\ell = 3$, $n - r = 1$.

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет один линейно независимый собственный вектор $\mathbf{D_1}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1}$ – решение системы (21.7). Необходимо найти еще два решения. Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_{21}x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять $\mathbf{D_{20}}$ и $\mathbf{D_{21}}$ были нами уже получены ранее. А именно, $\mathbf{D_{21}}$ будет собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, относящимся к собственному значению λ, и, следовательно, можно считать $\mathbf{D_{21}} = \mathbf{D_1}$; $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$.

Третье решение системы запишем в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x + \mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2}\right).$$

Тогда

$$\mathbf{Y}_3' = e^{\lambda x}\left(\lambda\,\mathbf{D}_{30} + \lambda\,\mathbf{D}_{31}x + \lambda\,\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}x\right)$$

и, подставляя $\mathbf{Y_3}$ и $\mathbf{Y_3'}$ в (21.7), получаем:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda\mathbf{D}_{30} + \lambda\mathbf{D}_{31}x + \lambda\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}x\right) = \mathbf{A}\cdot e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x + \mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2}\right).$$

После преобразований будем иметь:

$$(\lambda\,\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}) + (\lambda\,\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32})x + \lambda\,\mathbf{D}_{32}\cdot\frac{x^2}{2} = \mathbf{AD}_{30} + \mathbf{AD}_{31}x + \mathbf{AD}_{32}\cdot\frac{x^2}{2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$$\begin{cases} \lambda\mathbf{D}_{32} = \mathbf{AD_{32}}, \\ \lambda\mathbf{D_{31}} + \mathbf{D_{32}} = \mathbf{AD_{31}}, \\ \lambda\mathbf{D_{30}} + \mathbf{D_{31}} = \mathbf{AD_{30}}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{AD_{32}} - \lambda\mathbf{D_{32}} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{AD_{31}} - \lambda\mathbf{D_{31}} = \mathbf{D_{32}}, \\ \mathbf{AD_{30}} - \lambda\mathbf{D_{30}} = \mathbf{D_{31}}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{32}} = \mathbf{O}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{31}} = \mathbf{D_{32}}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{30}} = \mathbf{D_{31}}. \end{cases} \tag{21.10}$$

Первое уравнение системы (21.10) означает, что $\mathbf{D_{32}}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению λ и, следовательно, можем полагать $\mathbf{D_{32}} = \mathbf{D_1}$. Тогда второе уравнение системы (21.10) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{31}} = \mathbf{D_1},$$

т. е. в качестве $\mathbf{D_{31}}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$. Так как $\mathbf{D_{20}}$ тоже является решением этой системы, то можем полагать

$$\mathbf{D_{31}} = \mathbf{D_{20}}.$$

С учетом этого, третье уравнение системы (21.10) перепишется в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{D_{30}} = \mathbf{D_{20}},$$

т. е. в качестве $\mathbf{D_{30}}$ можно взять любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{20}}$.

Таким образом, *если* $\ell = 3$ и $n - r = 1$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x),\ \mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D_{20}}x + \mathbf{D_1}\cdot\frac{x^2}{2}\right),} \quad (21.11)$$

где $\mathbf{D_1}$ – *собственный вектор матрицы* $\mathbf{A}$, *относящийся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D_{20}}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$;

$\mathbf{D_{30}}$ – *любое решение системы линейных уравнений* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{20}}$.

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$ будут линейно независимыми.

Замечание. При получении формул (21.11) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n.

ПРИМЕР 21.6. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3, \\ y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Система является линейной однородной с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3,$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 3$. При этом

$$\mathbf{A}-1\cdot\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1-1 & -3 & 3\\ -2 & -6-1 & 13\\ -1 & -4 & 8-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & -7\end{vmatrix}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad r=rang(\mathbf{A}-\mathbf{E})=2\,.$$

Следовательно, $\quad n-r=3-2=1$
и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.11).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda=1$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}0 & -3 & 3\\ -2 & -7 & 13\\ -1 & -4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2+3x_3=0,\\ -2x_1-7x_2+13x_3=0,\\ -x_1-4x_2+7x_3=0.\end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 2 и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & -7\end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases} -3x_2+3x_3=0,\\ -2x_1-7x_2+13x_3=0;\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 3x_2=3x_3,\\ 2x_1+7x_2=13x_3;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} x_2=x_3,\\ x_1=3x_3\end{cases} \text{ – общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3=1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda=1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1}=e^x\mathbf{D_1}=e^x\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^x\\ e^x\\ e^x\end{pmatrix}.$$

3) Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде $\mathbf{Y_2} = e^x(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x)$,

где $\mathbf{D_{20}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_1}$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D_1},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 1, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Выбирая переменные x_1, x_2 зависимыми, а x_3 свободной, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_3, \\ x_1 = 3 + 3x_3. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{20}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_{20}}$ в $\mathbf{Y_2}$ и получаем:

$$\mathbf{Y_2} = e^x \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] = e^x \begin{pmatrix} 3+3x \\ -1+x \\ x \end{pmatrix}.$$

4) Третье решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде $\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}\left(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D_{20}} x + \mathbf{D_1} \cdot \dfrac{x^2}{2} \right)$,

где $\mathbf{D}_{30}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{20}}$.

Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D_{20}},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = -1, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Выбирая переменные x_1, x_2 зависимыми, а x_3 – свободной, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_3, \\ x_1 = 4 + 3x_3. \end{cases}$$

Полагаем $x_3 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_{20}}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^x \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] = e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + 1{,}5x^2 \\ -1 - x + 0{,}5x^2 \\ 0{,}5x^2 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y_2} + C_3 \mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] + C_3 e^x \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] =$$

$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 3 + 3x \\ -1 + x \\ x \end{pmatrix} + C_3 e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + 1{,}5x^2 \\ -1 - x + 0{,}5x^2 \\ 0{,}5x^2 \end{pmatrix}$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} y_1 = 3C_1 e^x + C_2 e^x (3 + 3x) + C_3 e^x (4 + 3x + 1{,}5x^2), \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^x (-1 + x) + C_3 e^x (-1 - x + 0{,}5x^2), \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^x \cdot x + C_3 e^x \cdot 0{,}5x^2. \end{cases} \diamond$$

в) Пусть $\ell = 3$, $n - r = 2$.

В этом случае матрица $\mathbf{A}$ имеет два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$, относящихся к собственному значению λ и, следовательно, $\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x} \mathbf{D_1}$, $\mathbf{Y_2} = e^{\lambda x} \mathbf{D_2}$ – решения системы (21.7). Необходимо найти еще одно решение. Третье решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x} (\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31} x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять $\mathbf{D_{30}}$ и $\mathbf{D_{31}}$, нами получены ранее. А именно, $\mathbf{D_{31}}$ будет собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, относящимся к собственному значению λ; $\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы линейных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$.

В нашем случае размерность собственного подпространства матрицы $\mathbf{A}$ для собственного значения λ равна двум, а в качестве его базиса выбраны $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D_2}$. Следовательно,

$$\mathbf{D_{31}}=\alpha\mathbf{D_1}+\beta\mathbf{D_2},$$

где α,β – некоторые числа, ***одновременно не равные нулю***, которые следует выбрать так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$ была совместна.

Замечание. Если $\alpha=\beta=0$, то $\mathbf{D_{31}}=\alpha\mathbf{D_1}+\beta\mathbf{D_2}=\mathbf{O}$ и, следовательно, $\mathbf{D_{31}}$ не будет собственным вектором.

Таким образом, *если* $\ell=3$ и $n-r=2$, *то рассматриваемая система* (21.7) *имеет решения*

$$\boxed{\mathbf{Y_1}=e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \ \mathbf{Y_2}=e^{\lambda x}\mathbf{D_2},\ \ \mathbf{Y_3}=e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30}+\mathbf{D}_{31}x),} \tag{21.12}$$

где $\mathbf{D_1},\mathbf{D_2}$ – *линейно независимые собственные векторы матрицы* $\mathbf{A}$, *относящиеся к собственному значению* λ;

$\mathbf{D_{31}}=\alpha\mathbf{D_1}+\beta\mathbf{D_2}$, α,β – *числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений* $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D_{31}}$ *была совместна*;

$\mathbf{D_{30}}$ – *любое решение системы уравнений* $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{D}_{31}$.

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1},\mathbf{Y}_2,\mathbf{Y}_3$ будут линейно независимыми.

Замечание. Формулы (21.12) останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка n, так как при их получении не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка.

ПРИМЕР 21.7. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'=2y_1,\\ y_2'=y_2-y_3,\\ y_3'=y_2+3y_3.\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=-(\lambda-2)^3,$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{1,2,3}=2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell=3$. При этом

$$\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 1 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ r=rang(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=1.$$

Следовательно, $\qquad n-r=3-1=2$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.12).

2) Найдем собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda=2$. Имеем:

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0\cdot x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 0\cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3=0\cdot x_1-x_2.$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$x_1=1,\ x_2=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=0;$$

$$x_1=0,\ x_2=1 \quad \Rightarrow \quad x_3=-1.$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{D_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{D_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}$ – линейно независимые собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda = 2$. Следовательно, решения системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\mathbf{D_1} = e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y_2} = e^{2x}\mathbf{D_2} = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D_{30}} + \mathbf{D_{31}}x),$$

где $\mathbf{D_{31}} = \alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_2}$, α, β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$ была совместна;

$\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$.

Исследуем на совместность систему линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_2}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

$$\alpha\mathbf{D_1} + \beta\mathbf{D_2} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\beta\end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\-\beta\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 = \alpha, \\ 0\cdot x_1 - x_2 - x_3 = \beta, \\ 0\cdot x_1 + x_2 + x_3 = -\beta. \end{cases}$$

Система будет совместна при $\alpha = 0$ и $\forall\beta \in \mathbb{R}$. Пусть $\alpha = 0$ и $\beta = -1$. Тогда

$$\mathbf{D_{31}} = 0\cdot\mathbf{D_1} + (-1)\cdot\mathbf{D_2} = -\mathbf{D_2}$$

и система для нахождения $\mathbf{D_{30}}$ имеет вид

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 0\cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 1 - 0\cdot x_1 - x_2.$$

Полагаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_{31}} = -\mathbf{D_2}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right] = e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3e^{2x}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}x\right] =$$

$$= C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_3e^{2x}\begin{pmatrix}0\\-x\\1+x\end{pmatrix}$$

или, более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^{2x}, \\ y_2 = C_2e^{2x} - C_3xe^{2x}, \\ y_3 = -C_2e^{2x} + C_3(1+x)e^{2x}. \end{cases} \qquad \diamond$$

ПРИМЕР 21.8. Найти общее решение системы $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда $$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda) = -\lambda^3,$$

$$\Rightarrow \ \lambda_{1,2,3} = 0.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 3$. При этом

$$\mathbf{A} - 0\cdot\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-0 & -4 & 2 \\ 2 & -2-0 & 1 \\ -4 & 4 & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ r = rang(\mathbf{A} - 0\cdot\mathbf{E}) = 1.$$

Следовательно,

$$n - r = 3 - 1 = 2$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.12).

2) Найдем собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda = 0$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 0\cdot\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 1 и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $|1|$. Тогда переменная x_3 будет зависимой, а x_1, x_2 – свободными. Отбрасываем первое и третье уравнение системы и находим общее решение:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

$$\Rightarrow\ x_3 = -2x_1 + 2x_2 \ \text{– общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из двух решений. Полагая $x_1 = 1,\ \ x_2 = 0$ и $x_1 = 0,\ \ x_2 = 1$, находим их:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ и $\mathbf{D}_2$ – собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$, относящиеся к собственному значению $\lambda = 0$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{0\cdot x}\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y}_2 = e^{0\cdot x}\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y_3} = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x),$$

где $\mathbf{D_{31}} = \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2}$, α, β – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$ была совместна;

$\mathbf{D_{30}}$ – любое решение системы уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D_{31}}$.

Исследуем на совместность систему линейных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - 0\cdot\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha\,\mathbf{D_1} + \beta\,\mathbf{D_2} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на –2 и 2 и прибавим к первой и третьей строке соответственно. В результате получим систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \beta \\ -2\alpha + 4\beta \end{pmatrix}.$$

Система будет совместна при $\alpha - 2\beta = -2\alpha + 4\beta = 0$, где β – любое действительное число. Пусть

$$\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2.$$

Тогда
$$\mathbf{D_{31}} = 2\cdot\mathbf{D_1} + \mathbf{D_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

и система для нахождения $\mathbf{D_{30}}$ имеет вид

$$\{2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$$

Выбрав x_3 в качестве зависимой переменной, а x_1, x_2 – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_2.$$

Полагаем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и находим частное решение:

$$\mathbf{D_{30}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\mathbf{D_{31}} = 2 \cdot \mathbf{D_1} + \mathbf{D_2}$ и $\mathbf{D_{30}}$ в $\mathbf{Y_3}$ и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^{0 \cdot x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \right] = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}$ образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y_2} + C_3 \mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \right] = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix}$$

или, более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + 2C_3 x, \\ y_2 = C_2 + C_3 x, \\ y_3 = -2C_1 + 2C_2 + C_3(1-2x). \end{cases} \qquad \diamond$$

Итак, мы рассмотрели метод Эйлера в трех случаях:

1) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ действительны и различны;
2) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ различны, но среди них есть комплексные;
3) характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ действительны, но среди них есть кратные.

Не рассмотренным остался случай, когда среди характеристических корней матрицы $\mathbf{A}$ есть кратные комплексные корни. В этой ситуации алгебраические трудности метода Эйлера возрастают настолько, что лучше использовать другие методы интегрирования.