

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## Минисеместр 4

### Содержание разделов и тем лекционного курса

0. Компактные множества в пространстве непрерывных функций. Теорема Арцела.
1. Линейные операторы. Критерий непрерывности. Теорема о непрерывности и ограниченности. Примеры: линейные операторы в конечномерных пространствах, интегральный оператор в  $L^2(a, b)$ , оператор дифференцирования в  $C[a, b]$  и  $C^1[a, b]$ .
2. Норма оператора. Пространства линейных операторов. Операции с линейными операторами. Теорема о нормированном пространстве линейных ограниченных операторов. Теорема о композиции операторов.
3. Компактные операторы. Теорема о подпространстве компактных операторов. Некомпактность тождественного оператора в бесконечномерном нормированном пространстве. Теорема о композиции компактного и непрерывного операторов.
4. Операторные уравнения. Постановка задачи. Корректность по Адамару. Обратный оператор. Условия обратимости.
5. Непрерывная обратимость. Достаточные условия непрерывной обратимости: ряд Неймана. Примеры обратных операторов.
6. Спектр оператора. Резольвента. Собственные значения и непрерывный спектр. Теорема о спектре непрерывного линейного оператора (замкнутость и граничность спектра).
7. Сопряженный оператор. Определение, линейность, непрерывность сопряженного оператора (для линейного). Теорема о норме сопряженного оператора.
8. Сопряженный оператор в евклидовых пространствах Теорема об аннуляторе ядра.
9. Компактность сопряженного к компактному. Теорема о критерии компактности оператора в полном евклидовом пространстве.
10. Самосопряженные операторы. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора. Спектральная теорема (Гильберта-Шмидта) для компактного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве
11. Теоремы Фредгольма в евклидовых пространствах.

### Содержание тем и разделов практических занятий

1. Линейные операторы в нормированных пространствах. Линейные операторы. Непрерывность и ограниченность, норма оператора.
2. Компактные операторы. Определение. Применение теоремы Хаусдорфа и теоремы Арцела.
3. Сопряженный оператор.
4. Обратные операторы. Непрерывная обратимость.
5. Спектр оператора. Резольвента.
6. Сопряженный оператор в пространствах Гильберта.
7. Теоремы Фредгольма.
8. Интегральные уравнения с вырожденными ядрами.
9. Самосопряженные операторы. Теорема Гильберта-Шмидта

## Список литературы

- [1] Колмогоров А.Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*/А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Физматлит, 2004.
- [2] Треногин В.А. *Функциональный анализ*/ В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.
- [3] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной*/ И.П. Натансон. – М.: Гостехиздат, 1957.
- [4] Шилов Г.Е. *Математический анализ. Второй специальный курс*/ Г.Е. Шилов. – М.: МГУ, 1984.
- [5] Робертсон А. *Топологические векторные пространства*/ А. Робертсон, В. Робертсон. – М.: Мир, 1967.
- [6] Лаврентьев М.М. *Линейные операторы и некорректные задачи*/ М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев. – М.: Наука, 1991.
- [7] Иосида К. *Функциональный анализ*/К. Иосида. – М.: Мир, 1967.
- [8] Канторович А.В. *Функциональный анализ в нормированных пространствах*/ А.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959.
- [9] Треногин В.А. *Задачи и упражнения по функциональному анализу*/ В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. – М.: Физматлит, 2002.
- [10] Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*/ Д.В. Беклемишев. – М.: Наука, 1984.
- [11] Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*/ В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1979.
- [12] Владимиров В.С. *Сборник задач по уравнениям математической физики*/ В.С. Владимиров, А.А. Вашарин. – М.: Физматлит, 2001.
- [13] Пуляев В.Ф. *Задачи по функциональному анализу*/ В.Ф. Пуляев, З.Б. Цалюк. – Краснодар: изд-во КубГУ, 1983.

Замечание. Базовым учебником является книга [1]. В тех случаях, когда предпочтительнее использовать другой источник, это отмечено особо.

**Функциональный анализ, типовые задания к минисессии 4.**

1. Дайте определение компактного оператора (2 балла).
2. Сформулируйте и докажите теорему о спектре (2+2=4 балла).
3. Выясните, является ли множество  $M = \{t^k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  в пространстве  $C[0, 1]$   
а) ограниченным, б) замкнутым, в) предкомпактным, г) компактным (5 баллов).
4. Выясните, является ли оператор  $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ ,

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (10 t^4 s + 11 s^4 t) x(s) ds$$

- 1) линейным,
  - 2) непрерывным,
  - 3) компактным.
- Найдите его норму (4 балла).

5. Решите интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_0^1 (10 t^4 s + 11 s^4 t) x(s) ds = t$$

в пространстве  $C[0, 1]$ . Укажите сколько линейно независимых решений оно имеет при каждом  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (5 баллов).