В заключение этого пункта заметим, что говорят также о ***собственных векторах матрицы*** $\mathbf{A}$ порядка n, имея при этом ввиду собственные векторы оператора n-мерного пространства, имеющего $\mathbf{A}$ своей матрицей в некотором базисе. Использование такой терминологии удобно в задачах, в которых на каком-то этапе решения возникает система линейных однородных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$. В этом случае любое решение системы $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$ обычно называют собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$, а ее фундаментальную систему решений – линейно независимыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$.

21.2. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+b_i(x)\quad (i=\overline{1,n}), \tag{21.2}$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные. Такие системы называют ***системами дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*** и именно они имеют наибольшее практическое применение.

Систему (21.2) можно решить методом исключения. При этом получится линейное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами. Мы умеем интегрировать такие дифференциальные уравнения. Проблема лишь в том, что процесс получения дифференциального уравнения порядка n довольно трудоемкий и требует аккуратности.

Другой способ – найти общее решение соответствующей однородной системы, а затем найти общее решение неоднородной системы методом вариации постоянных. Этот путь, как правило, менее трудоемкий, так как оказалось, что фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами связана с собственными векторами ее матрицы. Именно установление этой связи и является целью нашего дальнейшего изложения. Нахождение фундаментальной системы решений с использованием собственных векторов матрицы называется ***методом Эйлера***.

Итак, рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\quad (i=\overline{1,n}). \tag{21.3}$$

Вид уравнений системы (21.3) наводит на мысль, что решения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому частные решения будем искать в виде

$$y_1 = d_1 e^{\lambda x},\ y_2 = d_2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_n = d_n e^{\lambda x}, \tag{21.4}$$

где $\lambda, d_1, d_2, \ldots, d_n$ – неизвестные действительные числа, которые нужно выбрать так, чтобы функции (21.4) удовлетворяли системе (21.3).

Запишем систему (21.3) в матричном виде:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \tag{21.5}$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

По предположению,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} d_1 e^{\lambda x} \\ d_2 e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n e^{\lambda x} \end{pmatrix} = e^{\lambda x}\mathbf{D}, \quad \text{где} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} d_1 \lambda e^{\lambda x} \\ d_2 \lambda e^{\lambda x} \\ \ldots \\ d_n \lambda e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda x}\mathbf{D}.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в (21.5) и получим

$$\lambda \cdot e^{\lambda x}\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot (e^{\lambda x}\mathbf{D}) \quad \text{или} \quad \lambda \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} - \lambda \mathbf{D} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{O}. \tag{21.6}$$

Матричное уравнение (21.6) представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными. Чтобы такая система имела нетривиальные решения необходимо, чтобы

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.}$$

Но это означает, что λ *должно является действительным характеристическим корнем* (*т. е. собственным значением*) *матрицы* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{D}$ *– ее собственным вектором, относящимся к* λ.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет n характеристических корней, но среди них могут быть комплексные и кратные. Рассмотрим ситуации, которые в связи с этим могут возникнуть.

I. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны и различны*

В этом случае для каждого характеристического корня λ_i $(i=\overline{1,n})$ найдем собственный вектор $\mathbf{D_i}=(d_{ji})$ и запишем решения $\mathbf{Y_i}=e^{\lambda_i x}\mathbf{D_i}$:

$$\mathbf{Y_1}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x}d_{11} \\ e^{\lambda_1 x}d_{21} \\ \dots \\ e^{\lambda_1 x}d_{n1} \end{pmatrix},\ \mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} e^{\lambda_2 x}d_{12} \\ e^{\lambda_2 x}d_{22} \\ \dots \\ e^{\lambda_2 x}d_{n2} \end{pmatrix},\ \dots,\ \mathbf{Y}_n=\begin{pmatrix} e^{\lambda_n x}d_{1n} \\ e^{\lambda_n x}d_{2n} \\ \dots \\ e^{\lambda_n x}d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определитель Вронского этих решений. Имеем:

$$W\,[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n]=\begin{vmatrix} d_{11}e^{\lambda_1 x} & d_{12}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{1n}e^{\lambda_n x} \\ d_{21}e^{\lambda_1 x} & d_{22}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}e^{\lambda_1 x} & d_{n2}e^{\lambda_2 x} & \dots & d_{nn}e^{\lambda_n x} \end{vmatrix}=$$

$$=e^{\lambda_1 x}\cdot e^{\lambda_2 x}\cdot\ldots\cdot e^{\lambda_n x}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Действительно, так как все собственные векторы $\mathbf{D_i}$ относятся к различным собственным значениям, то они линейно независимы, т. е. $\alpha_1\mathbf{D_1}+\alpha_2\mathbf{D_2}+\ldots+\alpha_n\mathbf{D_n}=\mathbf{O}$ только при условии, что $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$. Это означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 d_{11} + \alpha_2 d_{12} + \ldots + \alpha_n d_{1n} = 0, \\ \alpha_1 d_{21} + \alpha_2 d_{22} + \ldots + \alpha_n d_{2n} = 0, \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ \alpha_1 d_{n1} + \alpha_2 d_{n2} + \ldots + \alpha_n d_{nn} = 0 \end{cases}$$

имеет единственное (тривиальное) решение и, следовательно, ее определитель

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Так как $W[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n]\neq 0$, то решения $\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2,\dots,\mathbf{Y}_n$ линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений. Общее решение системы в этом случае имеет вид

$$\mathbf{Y}=C_1\mathbf{Y}_1+C_2\mathbf{Y}_2+\ldots+C_n\mathbf{Y}_n$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1 d_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{12} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{1n} e^{\lambda_n x}, \\ y_2 = C_1 d_{21} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{22} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{2n} e^{\lambda_n x}, \\ \ldots\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad \ldots \\ y_n = C_1 d_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 d_{n2} e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n d_{nn} e^{\lambda_n x}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 21.2. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \ \left| \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} \right| = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0,$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -1.$$

Характеристические корни являются собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$. Найдем ее собственные векторы, относящиеся к каждому из собственных значений.

а) Для $\lambda_1 = 5$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2 \\ 4 & 3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \ \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \ x_2 = 2x_1$ – общее решение системы.

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 5$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^{5x}\mathbf{D_1} = e^{5x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{5x}\\2e^{5x}\end{pmatrix}.$$

б) Для $\lambda_2 = -1$ имеем:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix}1+1 & 2\\4 & 3+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 2\\4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases}2x_1 + 2x_2 = 0,\\4x_1 + 4x_2 = 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x_2 = -x_1 \text{ – общее решение системы.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_1 = 1$ и находим это решение:

$$\mathbf{D_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Так как $\mathbf{D_2}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_2 = -1$, то решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_2} = e^{-x}\mathbf{D_2} = e^{-x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-x}\\-e^{-x}\end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} = C_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{5x} + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-x}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases}y_1 = C_1e^{5x} + C_2e^{-x},\\y_2 = 2C_1e^{5x} - C_2e^{-x}.\end{cases} \diamond$$

II. *Характеристические корни матрицы* A *различны, но среди них есть комплексные*

Так как характеристический многочлен матрицы $\mathbf{A}$ имеет действительные коэффициенты, то комплексные корни будут появляться сопряженными парами. Пусть, например, характеристическими корнями являются числа $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i$.

Рассмотрим две системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O} \quad \text{и} \quad (\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}.$$

В алгебре доказано, что если для них выбрать одни и те же переменные свободными и придать им сопряженные значения, то для зависимых переменных тоже получаться сопряженные значения.

Пусть $\mathbf{D}=(d_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Тогда $\overline{\mathbf{D}}=(\overline{d}_{j1})$ – решение системы $(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\cdot\mathbf{X}=\mathbf{O}$. Рассмотрим матрицы-столбцы

$$\mathbf{Z_1}=e^{\lambda_1 x}\mathbf{D}=e^{(\alpha+i\beta)x}\mathbf{D}=e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}\mathbf{D}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)\mathbf{D},$$

$$\mathbf{Z_2}=e^{\lambda_2 x}\overline{\mathbf{D}}=e^{(\alpha-i\beta)x}\overline{\mathbf{D}}=e^{\alpha x}\cdot e^{-i\beta x}\overline{\mathbf{D}}=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x-i\sin\beta x)\overline{\mathbf{D}}.$$

В силу выбора $\mathbf{D}$ и $\overline{\mathbf{D}}$ эти матрицы-столбцы $\mathbf{Z_1}$ и $\mathbf{Z_2}$ будут удовлетворять матричному уравнению $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$. Полагаем далее

$$\mathbf{Y_1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1}+\mathbf{Z_2}\right), \quad \mathbf{Y_2}=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1}-\mathbf{Z_2}\right).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ состоят из действительных функций и тоже удовлетворяют матричному уравнению $\mathbf{Y}'=\mathbf{AY}$. Более того, можно доказать, что $\mathbf{Y_1}$ и $\mathbf{Y_2}$ линейно независимы и, следовательно, могут быть включены в фундаментальную систему решений.

Замечание. На практике матрицу-столбец $\mathbf{Z_2}$ не записывают, так как $\mathbf{Z_2}=\overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}$. Действительно,

$$\overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}=\overline{e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)\mathbf{D}}=\overline{e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x+i\sin\beta x)}\cdot\overline{\mathbf{D}}=$$

$$=e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x-i\sin\beta x)\cdot\overline{\mathbf{D}}=\mathbf{Z_2}.$$

Следовательно, $$\mathbf{Y_1}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Z_1}+\overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}\right)=\operatorname{Re}\mathbf{Z_1},$$

$$\mathbf{Y_2}=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Z_1}-\overline{\mathbf{Z}}_\mathbf{1}\right)=\operatorname{Im}\mathbf{Z_1}.$$

ПРИМЕР 21.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1'=y_1-y_2-y_3, \\ y_2'=y_1+y_2, \\ y_3'=3y_1+y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как данная система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 3 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ \left|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}\right|=(1-\lambda)[(1-\lambda)^2+4].$$

Найдем характеристические корни:

$$(1-\lambda)[(1-\lambda)^2+4]=0,$$

$$\Rightarrow\ \lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=1\pm 2i.$$

2) Действительный корень $\lambda_1=1$ является собственным значением матрицы $\mathbf{A}$. Найдем собственный вектор матрицы, относящийся к этому собственному значению. Имеем:

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1-1 & -1 & -1\\ 1 & 1-1 & 0\\ 3 & 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad\text{или}\quad\begin{cases}-x_2-x_3=0,\\ x_1=0,\\ 3x_1=0.\end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases}x_2=-x_3,\\ x_1=0.\end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3=1$ и находим его:

$$\mathbf{D_1}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что $\mathbf{D_1}$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, относящийся к собственному значению $\lambda_1 = 1$. Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y_1} = e^x \mathbf{D_1} = e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

3) Возьмем один из комплексных корней, например $\lambda_2 = 1 + 2i$, и найдем фундаментальную систему решений системы $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$. Имеем:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-(1+2i) & -1 & -1 \\ 1 & 1-(1+2i) & 0 \\ 3 & 0 & 1-(1+2i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2ix_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2ix_2 = 0, \\ 3x_1 - 2ix_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} -2i & 0 \\ 0 & -2i \end{vmatrix}$. Тогда переменные x_2, x_3 будут зависимыми, а x_1 свободной. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_1}{2i}, \\ x_3 = \dfrac{3x_1}{2i}. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем $x_3 = 2i$ и находим его:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $$\mathbf{Z} = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e^x \cdot (\cos 2x + i \sin 2x) \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x + i \cdot 2\cos 2x \\ \cos 2x + i \cdot \sin 2x \\ 3\cos 2x + i \cdot 3\sin 2x \end{pmatrix} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + ie^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

Откуда находим

$$\mathbf{Y_1} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y_2} = \operatorname{Im}\mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y}_3$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y_1} + C_2\mathbf{Y_2} + C_3\mathbf{Y_3} =$$

$$= C_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -2\sin 2x \\ \cos 2x \\ 3\cos 2x \end{pmatrix} + C_3 e^x \cdot \begin{pmatrix} 2\cos 2x \\ \sin 2x \\ 3\sin 2x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = \qquad\quad - 2C_2 e^x \sin 2x + 2C_3 e^x \cos 2x, \\ y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x, \\ y_3 = C_1 e^x + 3C_2 e^x \cos 2x + 3C_3 e^x \sin 2x. \end{cases} \diamond$$

III. *Характеристические корни матрицы* $\mathbf{A}$ *действительны, но среди них есть кратные*

Пусть λ – действительный характеристический корень матрицы $\mathbf{A}$ кратности ℓ, $r = rang(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$. Возможны два случая.

$\boxed{\mathbf{1)}\ \boldsymbol{n - r = \ell}.}$

В этом случае фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из ℓ решений. Следовательно, существуют ℓ линейно независимых собственных векторов $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}, \dots, \mathbf{D}_\ell$ матрицы $\mathbf{A}$, относящихся к собственному значению λ. Тогда решения системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Y_1} = e^{\lambda x}\mathbf{D_1},\ \mathbf{Y_2} = e^{\lambda x}\mathbf{D_2},\ \dots,\ \mathbf{Y}_\ell = e^{\lambda x}\mathbf{D}_\ell$$

линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений этой системы.

$\boxed{\mathbf{2)}\ \boldsymbol{n - r \neq \ell}}$ (точнее, $n - r < \ell$, случай $n - r > \ell$ вообще невозможен из алгебраических соображений).

Тогда фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ состоит из $k < \ell$ решений. С их помощью мы сможем получить k линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений. В такой ситуации существует два возможных способа найти все решения.

Первый способ – искать ℓ решений вида

$$\mathbf{Y} = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} a_{10} & + & a_{11}x & + & \dots & + & a_{1,\ell-1}x^{\ell-1} \\ a_{20} & + & a_{21}x & + & \dots & + & a_{2,\ell-1}x^{\ell-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & + & a_{n1}x & + & \dots & + & a_{n,\ell-1}x^{\ell-1} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты многочленов a_{ij} находят, подставляя $\mathbf{Y}$ в исходную систему.

ПРИМЕР 21.4. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности $\ell = 2$. При этом $r = rang(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1$ (т. к. $|\mathbf{A} - 2\mathbf{E}| = 0$). Следовательно,

$$n - r = 2 - 1 = 1 \quad \text{и} \quad n - r < \ell.$$

Будем искать решения системы в виде

$$\mathbf{Y} = e^{2x}\begin{pmatrix} a & + & bx \\ c & + & dx \end{pmatrix},$$

т. е. полагаем

$$y_1 = (a + bx)e^{2x}, \quad y_2 = (c + dx)e^{2x}.$$

Тогда

$$y_1' = (2a + 2bx + b)e^{2x}, \quad y_2' = (2c + 2dx + d)e^{2x}.$$

Подставим y_1, y_2, y_1', y_2' в исходную систему и получим:

$$\begin{cases} (2a + b + 2bx)e^{2x} = (a + bx - c - dx)e^{2x}, \\ (2c + d + 2dx)e^{2x} = (a + bx + 3c + 3dx)e^{2x} \end{cases}$$

или, после сокращения на e^{2x}:

$$\begin{cases} 2a+b+2bx = a+bx-c-dx, \\ 2c+d+2dx = a+bx+3c+3dx; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b+c)+(b+d)x = 0, \\ (-a-c+d)-(b+d)x = 0. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях *x,* получим:

$$\begin{cases} a+b+c = 0, \\ -a-c+d = 0, \\ -b-d = 0, \\ b+d = 0. \end{cases}$$

Или, после преобразований:

$$\begin{cases} a+b+c = 0, \\ b+d = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда переменные a, b будут зависимыми, c и d – свободными. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = d-c, \\ b = -d. \end{cases}$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$d=1,\ c=0 \quad \Rightarrow \quad a=1,\ b=-1;$$

$$d=0,\ c=1 \quad \Rightarrow \quad a=-1,\ b=0.$$

Первое из решений фундаментальной системы ($a=1$, $b=-1$, $c=0$, $d=1$) дает для системы дифференциальных уравнений решение

$$\mathbf{Y_1} = e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix},$$

второе решение из фундаментальной системы ($a=-1$, $b=0$, $c=1$, $d=0$) дает решение

$$\mathbf{Y}_2 = e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_2}$ образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y_2} = C_1e^{2x}\begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix} + C_2e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \ \diamond$$