Таким образом, задача интегрирования линейного однородного уравнения $n$-го порядка сводится к отысканию фундаментальной системы его решений. Но сделать это для произвольного уравнения очень сложно. Фундаментальные системы решений удается найти лишь для некоторых простейших типов линейных однородных уравнений. Одним из таких типов являются линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

### *14.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами*

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$\boxed{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,} \tag{14.8}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа. Уравнение (14.8) называется ***линейным однородным уравнением n–го порядка с постоянными коэффициентами.*** Класс однородных уравнений с постоянными коэффициентами замечателен тем, что для него нахождение фундаментальной системы решений сводится к решению алгебраического уравнения $n$-й степени.

Вид уравнения (14.8) наводит на мысль, что решения этого уравнения следует искать прежде всего среди таких функций, производные которых «похожи» на сами функции. Среди элементарных функций таким свойством обладает показательная функция. Поэтому решения уравнения (14.8) будем искать в виде

$$\boxed{y = e^{\lambda x},} \tag{14.9}$$

где $\lambda$ – неизвестная постоянная, которую нужно выбрать так, чтобы функция (14.9) обращала уравнение (14.8) в тождество.
Для функции (14.9) имеем:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Подставим $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (14.8) и получим

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

Поскольку $e^{\lambda x} \neq 0$, то решение (14.9) удовлетворяет уравнению, если

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.} \tag{14.10}$$

Уравнение (14.10) называется ***характеристическим уравнением*** для уравнения (14.8), многочлен слева – ***характеристическим многочленом***, корни характеристического уравнения (14.10) – ***характеристическими корнями*** уравнения (14.8).

*Замечание.* Формально характеристическое уравнение получается из уравнения (14.8) заменой производных искомой функции на соответствующие степени $\lambda$, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

Характеристическое уравнение (14.10) есть алгебраическое уравнение *n*-й степени. В алгебре доказывается, что такое уравнение имеет *n* корней, среди которых есть как действительные, так и комплексные числа (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Доказывается также, что комплексные корни такого уравнения попарно сопряжены. Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю фундаментальную систему решений уравнения (14.8). «Недостающие» решения позволяет найти следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 14.11**. *Пусть* $\lambda$ *– характеристический корень уравнения* (14.8). *Тогда*

1) *если* $\lambda$ *– простой действительный корень уравнения* (14.10), *то решением уравнения* (14.8) *является функция* $e^{\lambda x}$;
2) *если* $\lambda$ *– действительный корень кратности* $k$ *уравнения* (14.10), *то решениями уравнения* (14.8) *являются функции*
$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad x^2e^{\lambda x}, \quad \ldots \quad x^{k-1}e^{\lambda x};$$
3) *если* $\lambda = \alpha + \beta i$ *– простой комплексный корень уравнения* (14.10), *то число* $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является простым корнем характеристического уравнения, а решениями уравнения* (14.8) *будут функции*
$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x;$$
4) *если* $\lambda = \alpha + \beta i$ *– комплексный корень кратности* $k$ *уравнения* (14.10), *то число* $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является корнем характеристического уравнения кратности* $k$, *а решениями уравнения* (14.8) *будут функции*
$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad x^2e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x.$$
$$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad x^2e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x, \quad \ldots, \quad x^{k-1}e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x.$$

*Решения, относящиеся к различным характеристическим корням, линейно независимы и найденные таким образом* $n$ *решений уравнения* (14.8) *будут образовывать его фундаментальную систему решений.*

Для удобства запоминания этой теоремы и применения ее при интегрировании дифференциальных уравнений, составим таблицу, в которой отражается зависимость частных решений от вида характеристических корней.

Таблица 14.1

| Вид корня | Решения из фундаментальной системы |
|---|---|
| $\lambda \in \mathbb{R}$ кратность 1 | $y = e^{\lambda x}$ |
| $\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ кратность 1 | $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$ |
| $\lambda \in \mathbb{R}$ кратность $k$ | $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}$, $y_3 = x^2 e^{\lambda x}$, … $y_1 = x^{k-1} e^{\lambda x}$ |
| $\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$ кратность $k$ | $y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$,<br>$y_3 = xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $y_4 = xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$,<br>………, ………,<br>$y_{2k-1} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$, $y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$. |

Итак, чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка с постоянными коэффициентами необходимо:

1) записать его характеристическое уравнение;
2) найти характеристические корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;
3) с помощью теоремы 14.11 (таблицы 14.1) найти частные линейно независимые решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$;
4) записать общее решение $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$.

ПРИМЕР 14.1. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = -3.$

Им соответствуют решения

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-3x}, \quad y_3 = xe^{\lambda_3 x} = xe^{-3x}.$$

Так как это будет фундаментальная система решений, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + C_3 xe^{-3x}. \diamond$$

ПРИМЕР 14.2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

имеет корни $$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = \pm 2i.$$

Тогда частными линейно независимыми решениями будут
$$y_1 = e^{2x}, \quad \underbrace{y_2 = \cos 2x, \quad y_3 = \sin 2x}_{\text{так как } \alpha=0, \quad \beta=2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \diamond$$

ПРИМЕР 14.3. Найти общее решение уравнения
$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 8y'' + 4y' = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение
$$\lambda^5 + 4\lambda^4 + 8\lambda^4 + 8\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

или $$\lambda \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$$

Его корни $$\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = -1 \pm i, \ \lambda_5 = 0.$$

Тогда фундаментальная система решений состоит из функций
$$y_1 = e^{-x}\cos x, \qquad y_2 = xe^{-x}\cos x,$$
$$y_3 = e^{-x}\sin x, \qquad y_4 = xe^{-x}\sin x,$$
$$y_5 = e^{0\cdot x} = 1.$$

Следовательно, общее решение имеет вид
$$y = e^{-x}\left(C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x\right) + C_5. \diamond$$

### *14.5. Уравнения Эйлера*

Еще одним типом линейных однородных дифференциальных уравнений, для которых можно найти фундаментальную систему решений, являются уравнения Эйлера.

Линейное однородное уравнение вида
$$\boxed{a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0} \tag{14.11}$$
(где $a_i \in \mathbb{R}$), называется ***уравнением Эйлера***.

Уравнение Эйлера заменой $x = e^t$ сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами.

Действительно, если $x = e^t$, то $y(x) = \tilde{y}(t)$ и
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tilde{y}'_t}{x'_t} = \frac{\tilde{y}'_t}{e^t} = \tilde{y}'_t \cdot e^{-t};$$
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(\tilde{y}'_t \cdot e^{-t})'}{e^t} = \frac{\tilde{y}''_t \cdot e^{-t} - \tilde{y}'_t \cdot e^{-t}}{e^t} = (\tilde{y}''_t - \tilde{y}'_t)\cdot e^{-2t};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(y''_x)'_t}{x'_t} = \frac{((\widetilde{y}''_t - \widetilde{y}'_t)\cdot e^{-2t})'}{e^t} = \frac{(\widetilde{y}'''_t - \widetilde{y}''_t)\cdot e^{-2t} + (\widetilde{y}''_t - \widetilde{y}'_t)\cdot(-2e^{-2t})}{e^t} =$$

$$= (\widetilde{y}'''_t - 3\widetilde{y}''_t + 2\widetilde{y}'_t)\cdot e^{-3t};$$

.........................................................

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi\left(\widetilde{y}_t^{(n)}, \widetilde{y}_t^{(n-1)}, \ldots, \widetilde{y}'_t\right)\cdot e^{-nt}.$$

Подставим $x = e^t$ и найденные выражения для $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, … , $\frac{d^ny}{dx^n}$ в (14.11) и получим уравнение

$$a_0\widetilde{y}_t^{(n)} + b_1\widetilde{y}_t^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}\widetilde{y}'_t + b_n\widetilde{y}(t) = 0. \qquad (14.12)$$

где $a_0, b_i \in \mathbb{R}$.

Так как (14.12) – линейное однородное с постоянными коэффициентами, то, согласно теореме 14.11, его фундаментальная система решений может содержать лишь функции вида

$$e^{\lambda t},\quad t^{\ell}e^{\lambda t},\quad e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

Значит, фундаментальная система решений уравнения (14.11) будет состоять из функций вида:

$$e^{\lambda t} = x^{\lambda},\quad t^{\ell}e^{\lambda t} = (\ln^{\ell} x)\cdot x^{\lambda},$$

$$e^{\alpha t}\cos\beta t = x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\quad e^{\alpha t}\sin\beta t = x^{\alpha}\sin(\beta\ln x),$$

$$t^{\ell}e^{\alpha t}\cos\beta t = (\ln^{\ell} x)\cdot x^{\alpha}\cos(\beta\ln x),\quad t^{\ell}e^{\alpha t}\sin\beta t = (\ln^{\ell} x)\cdot x^{\alpha}\sin(\beta\ln x).$$

> *Замечание.* На практике, при решении уравнения Эйлера, уравнение (14.12) не записывают. Записывают сразу его характеристическое уравнение. Это достаточно легко сделать. Действительно, характеристическое уравнение для (14.12) – это условие для $\lambda$, при котором функция $\widetilde{y} = e^{\lambda t}$ является решением уравнения (14.12). Но $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$. Следовательно, то же самое условие для $\lambda$ получим, если потребуем, чтобы функция $y = x^{\lambda}$ являлась решением уравнения (14.11).

ПРИМЕР 14.4. Найти общее решение уравнения

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Введем новую переменную по формуле

$$x = e^t \quad\Rightarrow\quad t = \ln x.$$

В результате получим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Найдем его характеристическое уравнение. Полагаем

$$y = x^{\lambda}.$$

Тогда:

$$y' = \lambda x^{\lambda-1}, \qquad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \qquad y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}.$$

Подставляя выражения для $y, y', y'', y'''$ в исходное уравнение, получаем:

$$x^3 \underbrace{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}}_{y'''} - 3x^2 \underbrace{\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}}_{y''} + 6x \underbrace{\lambda x^{\lambda-1}}_{y'} - 6\underbrace{x^{\lambda}}_{y} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad x^{\lambda}[\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 3\lambda(\lambda-1) + 6\lambda - 6 = 0,$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-1)[\lambda(\lambda-2) - 3\lambda + 6] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0.$$

Полученное характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

Им соответствуют решения

$$\widetilde{y}_1(t) = e^t, \qquad \widetilde{y}_2(t) = e^{2t}, \qquad \widetilde{y}_3(t) = e^{3t},$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = x^2, \qquad y_3(x) = x^3.$$

Тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3. \diamond$$