

Сибирский Федеральный Университет
Профильная олимпиада СФУ для студентов выпускных курсов
бакалавриата и специалитета

Направления подготовки
010500.68 „Прикладная математика и информатика“
010300.68 „Математика. Компьютерные науки.“

ВАРИАНТ 0

1. Найти интеграл $\int x \ln(4 + x^4) dx$. Ответ: $\frac{1}{2}x^2 \ln(4 + x^4) - x^2 + 2 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + C$
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$z = 0, \quad y = 16\sqrt{2x}, \quad x + z = 2, \quad y = \sqrt{2x}.$$

Ответ: $V = 32$.

3. Убедиться, что в точке $x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$ функция $z = 8x^3 + 8y^3 - 12xy$ имеет минимум.

4. Найти уравнение касательной к окружности $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 8$, проходящей через точку $(6, 7)$. Ответ: $x + y - 13 = 0$.

5. Найти площадь треугольника ABC, если координаты его вершин $A(-1, 2, 3), \quad B(5, -3, 4), \quad C(2, 1, 6)$.

Ответ: $S = \frac{1}{2}\sqrt{502}$.

6. Решить матричное уравнение $AX + B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -\frac{6}{85} & \frac{2}{54} \\ \frac{8}{5} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

7. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 5y = 2 \sin x$.

Ответ: $y = \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \sin x + C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = 4y - 3x \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^t \\ y(t) = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^t \end{cases}$.

9. Найти образ прямой $z(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) + \bar{z}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) = -1$ при отображении дробно-линейной функцией $\omega = \frac{1}{z+1}$.

Ответ: прямая $\omega(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i) + \bar{\omega}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = 0$ на плоскости.

10. Имеется пять урн. В первой, второй и третьей урнах находится по 2 белых и 3 черных шара. В четвертой и пятой урнах - по одному белому и одному черному шару. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова вероятность того, что выбрана четвертая или пятая урна, если извлеченный шар оказался белым?

Ответ: $\frac{5}{11}$

Председатель жюри

профессор Ю.Я. Белов