20.2. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}. \qquad (20.13)$$

Если известно общее решение соответствующей однородной системы

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}, \qquad (20.14)$$

то можно найти общее решение неоднородной системы (20.13) изложенным ниже методом, который называют ***методом вариации постоянных***.

Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – фундаментальная система решений линейной однородной системы (20.14). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$\mathbf{Y} = C_1\mathbf{Y}_1 + C_2\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n\mathbf{Y}_n, \qquad (20.15)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что решение линейной неоднородной системы по структуре совпадает с решением соответствующей однородной системы, т. е. имеет вид

$$\mathbf{Y} = C_1(x)\mathbf{Y}_1 + C_2(x)\mathbf{Y}_2 + \ldots + C_n(x)\mathbf{Y}_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i, \qquad (20.16)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые пока неизвестные функции. Тогда

$$\mathbf{Y}' = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i'.$$

Подставим $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Y}'$ в неоднородную систему $\mathbf{Y}' - \mathbf{AY} = \mathbf{B}$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i' - \mathbf{A}\cdot\sum_{i=1}^{n} C_i(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)(\mathbf{Y}_i' - \mathbf{AY}_i) = \mathbf{B}.$$

Т.к. $\mathbf{Y}_i$ – решения однородной системы, то $\mathbf{Y}_i' - \mathbf{AY}_i = \mathbf{O}$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{Y}_i = \mathbf{B},$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} C_1'(x)y_{11} + C_2'(x)y_{21} + \ldots + C_n'(x)y_{n1} = b_1(x), \\ C_1'(x)y_{12} + C_2'(x)y_{22} + \ldots + C_n'(x)y_{n2} = b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_{1n} + C_2'(x)y_{2n} + \ldots + C_n'(x)y_{nn} = b_n(x). \end{cases} \qquad (20.17)$$

Это линейная неоднородная система относительно неизвестных функций $C_i'(x)$. Ее определитель – определитель Вронского для системы линейно независимых решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$, и, следовательно, он отличен от нуля. Значит система (20.7) имеет единственное решение

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = \overline{1,n}),$$

откуда интегрированием находим

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \quad (i = \overline{1,n}), \tag{20.18}$$

где C_i – произвольные постоянные.

Подставим найденные функции $C_i(x)$ в (20.16) и получим общее решение неоднородной системы (20.13):

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \left(\int \varphi_i(x)dx + C_i \right) \mathbf{Y}_i .$$

ПРИМЕР 20.3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 . \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$$y_1'' = y_2' \quad \Rightarrow \quad y_1'' = -y_1 .$$

Получили линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристические корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и, следовательно, общее решение уравнения

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Тогда из первого уравнения системы

$$y_2 = y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x .$$

Таким образом, общее решение однородной системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}$$

или, в матричном виде,

$$\mathbf{Y}_{oo} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что общее решение неоднородной системы имеет вид

$$\mathbf{Y}_{он} = C_1(x)\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2(x)\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x, \\ y_2 = -C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x. \end{cases}$$

Тогда функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ должны удовлетворять системе (20.17)

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, находим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix} = -tgx, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Rightarrow \quad C_1'(x) = -tgx, \qquad C_2'(x) = 1.$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1(x) = \ln\left|\cos x\right| + C_1, \qquad C_2(x) = x + C_2.$$

Следовательно, общее решение неоднородной системы будет иметь вид

$$\mathbf{Y}_{он} = (\ln\left|\cos x\right| + C_1)\cdot\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + (x + C_2)\cdot\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} =$$

$$= C_1\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}\cdot\ln\left|\cos x\right| + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}\cdot x$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\cdot\ln\left|\cos x\right| + x\sin x, \\ y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x - \sin x\cdot\ln\left|\cos x\right| + x\cos x. \end{cases} \diamond$$

З а м е ч а н и е. Общее решение (20.18) линейной неоднородной системы (20.13) можно переписать в виде

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i\mathbf{Y}_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(x)dx\right)\mathbf{Y}_i .$$

Здесь слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\mathbf{Y}_i$ – общее решение соответствующей однородной системы, а слагаемое $\overline{\mathbf{Y}} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int \varphi_i(x)dx\right)\mathbf{Y}_i$ – частное решение системы (20.13) (получается из общего решения при $C_i = 0$ $(i = \overline{1,n})$).

В общем случае оказалась справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.7 (о структуре общего решения неоднородной системы дифференциальных уравнений). *Общее решение неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B}$$

с непрерывными на $[a,b]$ *коэффициентами* $a_{ij}(x)$ *и правыми частями* $b_i(x)$, *равно сумме общего решения соответствующей однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$ *и частного решения* $\overline{\mathbf{Y}}$ *рассматриваемой неоднородной системы, т. е.*

$$\boxed{\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}},} \qquad (20.19)$$

где $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ *– фундаментальная система решений однородной системы* $\mathbf{Y}' = \mathbf{AY}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}.$$

По условию теоремы $\quad L[\overline{\mathbf{Y}}] = \mathbf{B}$, $L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{O}$.

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i} + \overline{\mathbf{Y}}\right) = L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{Y_i}\right) + L(\overline{\mathbf{Y}}) = \sum_{i=1}^{n} C_i L(\mathbf{Y_i}) + L(\overline{\mathbf{Y}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \mathbf{O} + \mathbf{B} = \mathbf{B}. \ \blacksquare$$

Таким образом, задача нахождения общего решения неоднородной системы может быть сведена к нахождению одного частного решения этой системы и фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы. В этом случае может оказаться полезной и следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.8 (о наложении решений). *Если* $\mathbf{Y_i}$ *– решения неоднородных систем* $\qquad \mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1,m})$,

то их сумма $\mathbf{Y_1} + \mathbf{Y_2} + \ldots + \mathbf{Y_m}$ *является решением неоднородной системы*

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + (\mathbf{B_1} + \mathbf{B_2} + \ldots + \mathbf{B_m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к операторному представлению систем:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \mathbf{B_i} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B_i},$$

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{AY} + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i} \quad \leftrightarrow \quad L[\mathbf{Y}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i}.$$

По условию теоремы

$$L[\mathbf{Y_i}] = \mathbf{B_i} \quad (i = \overline{1,m}).$$

Тогда, в силу линейности оператора L, имеем:

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} \mathbf{Y_i}\right] = \sum_{i=1}^{m} L[\mathbf{Y_i}] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{B_i}\,. \ \blacksquare$$

§ 21. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

21.1. Собственные значения и собственные векторы

В предыдущем параграфе мы использовали линейный дифференциальный оператор для компактной формы записи системы дифференциальных уравнений и доказательства некоторых теорем. Для дальнейшей работы нам необходимо вспомнить ряд понятий, связанных с линейными операторами. А именно, нам понадобятся понятия собственного вектора и собственного значения оператора конечномерных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ**.** *Пусть φ – оператор пространства L. Если для некоторого ненулевого вектора $x \in L$ и числа λ имеем $\varphi(x) = \lambda x$, то число λ называется собственным значением оператора φ, а вектор x называется собственным вектором оператора φ, относящимся к собственному значению λ.*

Укажем свойства, которыми обладают собственные векторы.

1. *Каждый собственный вектор x оператора φ относится к единственному собственному значению.*
2. *Если x_1 и x_2 – собственные векторы оператора φ, относящиеся к одному и тому же собственному значению λ, то их линейная комбинация $\alpha x_1 + \beta x_2$ – собственный вектор оператора φ, относящийся к тому же собственному значению.*

Из второго свойства следует:

а) каждому собственному значению λ соответствует *бесчисленное множество собственных векторов*;

б) если к множеству всех собственных векторов x оператора φ, относящихся к одному и тому же собственному значению λ, присоединить нулевой вектор (нулевой вектор по определению не является собственным), то получим подпространство пространства L. *Это подпространство называется* ***собственным подпространством оператора*** φ и обозначается L_{λ}.

3. *Собственные векторы* $x_1, x_2, \ldots x_k$ *оператора* φ, *относящиеся к различным собственным значениям* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, *линейно независимы.*

Из свойства 3 следует, что *линейный оператор, действующий в* n*-мерном линейном пространстве* L_n, *не может иметь более* n *собственных значений*. Кроме того, *в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы*.

Процесс поиска собственных значений и собственных векторов оператора конечномерного пространства на практике сводится к решению алгебраических уравнений и систем.

Действительно, предположим, что $\mathbf{A}$ – матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $\mathbf{X}$ – матрица-столбец координат вектора x в том же базисе. Тогда векторное равенство $\varphi(x) = \lambda x$ равносильно матричному равенству

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} \quad \text{или} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}. \tag{21.1}$$

Но матричное уравнение $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$ представляет собой матричную запись системы n линейных однородных уравнений с n неизвестными.

Так как собственные векторы ненулевые, то система (21.1) должна иметь нетривиальные решения. Это будет иметь место, если

$$rang(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \neq n$$

или, что то же,

$$\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0.}$$

Матрица $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}$ называется ***характеристической матрицей*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$), а ее определитель $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$, являющийся многочленом относительно λ – ***характеристическим многочленом*** оператора φ (матрицы $\mathbf{A}$).

Найдя корни характеристического многочлена, мы определим собственные значения. Подставив конкретное собственное значение в (21.1) и решив получившуюся систему, мы найдем относящиеся к нему собственные векторы.

ПРИМЕР 21.1. Найти собственные векторы и собственные значения оператора, имеющего в некотором базисе матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. 1) Запишем характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2-\lambda & -5 & -3\\ -1 & -2-\lambda & -3\\ 3 & 15 & 12-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ |\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}|=(3-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18).$$

Корни характеристического многочлена (собственные значения):

$$\lambda_1=6,\ \ \lambda_{2,3}=3.$$

2) Для каждого из найденных собственных значений λ_i запишем систему линейных однородных уравнений $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{O}$ и найдем ее фундаментальную систему решений. Это будут координаты базисных векторов собственного подпространства L_{λ_i}.

а) Для $\lambda_1=6$ имеем:

$$(\mathbf{A}-6\mathbf{E})\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2-6 & -5 & -3\\ -1 & -2-6 & -3\\ 3 & 15 & 12-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathbf{O},$$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix}-4 & -5 & -3\\ -1 & -8 & -3\\ 3 & 15 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}-4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0,\\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0,\\ 3x_1 + 15x_2 + 6x_3 = 0.\end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор $\begin{vmatrix}-4 & -5\\ -1 & -8\end{vmatrix}$. Тогда переменные x_1, x_2 будут зависимыми, а x_3 – свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases}-4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0,\\ -x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 0;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}-4x_1 - 5x_2 = 3x_3,\\ -x_1 - 8x_2 = 3x_3;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \Delta=\begin{vmatrix}-4 & -5\\ -1 & -8\end{vmatrix}=27,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}3x_3 & -5\\ 3x_3 & -8\end{vmatrix}=-9x_3,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}-4 & 3x_3\\ -1 & 3x_3\end{vmatrix}=-9x_3;$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3},\\[2mm] x_2 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-\dfrac{x_3}{3}.\end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Чтобы ее записать, придадим свободной переменной x_3 любое отличное от нуля значение. Например, полагаем $x_3 = -3$. Тогда из общего решения находим $$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Итак, получили: $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ – решение фундаментальной системы.

Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=6}$ является вектор $$c_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 - 3 \cdot e_3 = \{1;1;3\}.$$

$$\Rightarrow \quad L_{\lambda=6} = \{\alpha c_1 | \forall \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

б) Для $\lambda_{2,3} = 3$ имеем:

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2-3 & -5 & -3 \\ -1 & -2-3 & -3 \\ 3 & 15 & 12-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Матрица системы имеет три пропорциональные строки и, следовательно, ее ранг равен 1. Выбирая в качестве зависимой переменной x_1 получаем, что ее общее решение имеет вид:

$$x_1 = -5x_2 - 3x_3.$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$x_2 = 1, \ x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -5;$$

$$x_2 = 0, \ x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3.$$

Итак, получили: $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – решения фундаментальной системы. Следовательно, базисом собственного подпространства $L_{\lambda=3}$ являются векторы

$$c_2 = \{-5;1;0\} \quad \text{и} \quad c_3 = \{-3;0;1\}.$$

$$\Rightarrow \quad L_{\lambda=3} = \{\alpha c_2 + \beta c_3 | \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \ \diamond$$