§ 22. Линейные уравнения с частными производными первого порядка

22.1. Понятие уравнения с частными производными и его интегрирование

Уравнением с частными производными[1] *называется соотношение, связывающее неизвестную функцию нескольких переменных, ее аргументы и ее частные производные. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение, называется* ***порядком уравнения***.

Функция, обращающая уравнение с частными производными в тождество, называется ***решением*** *этого уравнения. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения с частными производными называется* ***интегрированием*** *этого уравнения.*

Так как обыкновенные дифференциальные уравнения можно рассматривать как частный случай уравнения с частными производными, то можно утверждать, что если уравнение с частными производными имеет решение, то решений будет множество.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n вся совокупность решений (за исключением некоторых) представлялась функцией, зависящей от независимой переменной x и n произвольных постоянных C_1, C_2, … , C_n (общим решением)[2]. Для дифференциальных уравнений с частными производными общее решение будет иметь более сложную структуру. Оно тоже будет содержать некоторые произвольные элементы, но это уже будут не константы, а функции. В этом можно убедиться, рассмотрев несколько простых примеров.

ПРИМЕРЫ.

1) Рассмотрим уравнение $F(x, y, z, z'_x) = 0$, где $z = z(x, y)$.

   Это уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно x, где y – параметр. Общее решение такого уравнения будет иметь вид
   $$z = \varphi(x, y, C(y)),$$
   где $C(y)$ – произвольная функция.

---

[1] Или «***уравнением в частных производных***».

[2] Справедливо и обратное. Т. е. для любого семейства функций $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ существует дифференциальное уравнение порядка n, для которого это семейство является общим решением. Оно получается в результате исключения констант $C_1, \dots, C_n$ из системы $\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n), \\ y' = \varphi'(x, C_1, \dots, C_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x, C_1, \dots, C_n). \end{cases}$

2) Рассмотрим уравнение $z'_x = z'_y$, где $z = z(x,y)$.

Введем новые переменные по формулам

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

Тогда
$$z(x,y) = f(u,v),$$
$$z'_x = f'_u \cdot \underbrace{u'_x}_{1} + f'_v \cdot \underbrace{v'_x}_{1} = f'_u + f'_v,$$
$$z'_y = f'_u \cdot \underbrace{u'_y}_{1} + f'_v \cdot \underbrace{v'_y}_{-1} = f'_u - f'_v.$$

Из уравнения $z'_x = z'_y$ получаем:

$$f'_u + f'_v = f'_u - f'_v,$$
$$\Rightarrow \quad 2f'_v = 0,$$
$$\Rightarrow \quad f(u,v) = \varphi(u) \quad \text{или} \quad z(x,y) = \varphi(x+y),$$

где $\varphi(x+y)$ – произвольная функция.

3) Рассмотрим уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, где $z = z(x,y)$.

Имеем:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} \text{ – не зависит от } y,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) \text{ – произвольная функция;}$$
$$\Rightarrow \quad z = \int \varphi(x)dx + \psi(y) = \omega(x) + \psi(y),$$

где $\omega(x), \psi(y)$ – произвольные функции.

4) Рассмотрим уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, где $z = z(x,y)$.

Имеем:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} \text{ – не зависит от } x,$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(y), \text{ где } \varphi(y) \text{ – произвольная функция;}$$
$$\Rightarrow \quad z = \int \varphi(y)dx + \psi(y) = \varphi(y)x + \psi(y),$$

где $\varphi(y), \psi(y)$ – произвольные функции.

Как показывают рассмотренные примеры, уравнение с частными производными имеет множество решений, которые определяются с точностью до некоторой функции. Поэтому, для выбора одного решения необходимо задавать некоторые условия, которым эта функция должна удовлетворять.

Если уравнение можно разрешить относительно старшей частной производной, т. е. записать, например, в виде

$$\frac{\partial^m z}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial^k z}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\right), \tag{22.1}$$

здесь $k_1 + \ldots + k_n = k \le m$ и $k_1 < m$, то обычно полагают, что

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} z\big|_{x_1=x_{10}} = \varphi_0(x_2,\ldots,x_n), \\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\right|_{x_1=x_{10}} = \varphi_1(x_2,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{\partial^{m-1} z}{\partial x_1^{m-1}}\right|_{x_1=x_{10}} = \varphi_{m-1}(x_2,\ldots,x_n), \end{array}\right\}} \tag{22.2}$$

где x_{10} – заданное значение, $\varphi_0(x_2,\ldots,x_n)$, …, $\varphi_{m-1}(x_2,\ldots,x_n)$ – заданные функции $n-1$ аргумента. Условия (22.2) называют ***начальными условиями для уравнения*** (22.1), а задача нахождения решения уравнения (22.1), удовлетворяющего начальным условиям (22.2), называется ***задачей Коши***.

В частности, для уравнения первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) \tag{22.3}$$

начальное условие будет иметь вид

$$z\big|_{x_1=x_{10}} = \varphi_0(x_2,\ldots,x_n), \tag{22.4}$$

где x_{10} – заданное значение, $\varphi_0(x_2,\ldots,x_n)$ – заданная функция $n-1$ аргумента.

В случае функции $z = z(x,y)$ задача Коши для уравнения с частными производными первого порядка имеет простой *геометрический смысл*. Действительно, для уравнения $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ частное решение $z = \varphi(x,y)$ представляет собой некоторую поверхность в пространстве $Oxyz$ (ее называют ***интегральной поверхностью***). Тогда, общее решение – некоторое семейство поверхностей. Начальное условие $z(x = x_0, y) = \varphi_0(y)$ задает в пространстве некоторую кривую $x = x_0$, $z(y) = \varphi_0(y)$. Следовательно, ***задача Коши представляет собой нахождение поверхности, проходящей через заданную кривую.***

Например, если общее решение $z = \varphi(x^2 + y^2)$ – семейство поверхностей вращения (*рис. 22.1*), то частным решением будет та поверхность, на которой лежит заданная кривая (начальное условие $z(x = x_0, y) = \varphi_0(y)$). Так на рис 22.1 в качестве начального условия выбрана ветка гиперболы $z(x = x_0, y) = \sqrt{x_0^2 + y^2}$ и, следовательно, частным решением является конус, на поверхности которого она лежит.

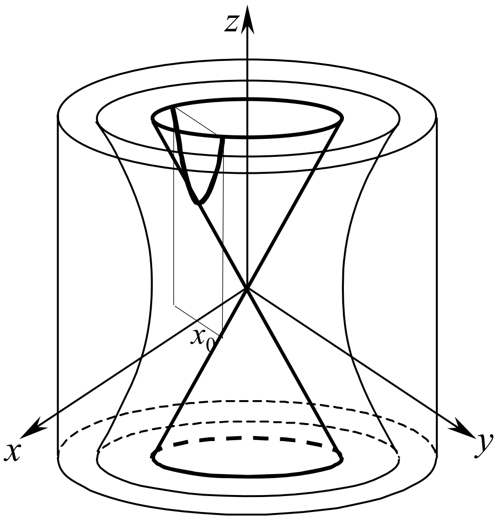

Рис. 22.1.

По аналогии с трехмерным пространством, говорят, что $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ – точка $n+1$-мерного пространства, $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – гиперповерхность (поверхность n измерений) в $n+1$-мерном пространстве, а условие

$$z(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{x_1 = x_{10}} = \varphi_0(x_2, \ldots, x_n)$$

определяют в $n+1$-мерном пространстве гиперповерхность $n-1$-измерения. Поэтому говорят, что *для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка задача Коши в общем случае состоит в нахождении интегральной гиперповерхности, проходящей через заданную гиперповерхность $n-1$-измерения.*

В нашем курсе мы будем рассматривать только линейные уравнения с частными производными первого порядка, поскольку их интегрирование сводится к интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

22.2. Линейные однородные уравнения с частными производными первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным однородным уравнением с частными производными первого порядка***[3] называется уравнение вида

$$\boxed{F_1(x_1,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}+\dots+F_n(x_1,\dots,x_n)\cdot\frac{\partial z}{\partial x_n}=0,} \qquad (22.5)$$

где $F_i(x_1,\dots,x_n)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G\subset\mathbb{R}^n$, $z=z(x_1,\dots,x_n)$ – неизвестная функция.

Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\boxed{\frac{dx_1}{F_1(x_1,\dots,x_n)}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\dots,x_n)}=\dots=\frac{dx_n}{F_n(x_1,\dots,x_n)}.} \qquad (22.6)$$

Ее называют ***соответствующей*** уравнению (22.5). Связь между уравнением (22.5) и системой обыкновенных уравнений (22.6) устанавливает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 22.1. *Функция* $z=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ *является решением уравнения* (22.5) тогда и только тогда, когда $\varphi(x_1,\dots,x_n)=C$ *является первым интегралом системы* (22.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть имеется уравнение

$$\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})=C. \qquad (22.7)$$

Очевидно, что уравнение (22.7) определяет первый интеграл системы (22.6) тогда и только тогда, когда для любого ее решения $x_1,\dots,x_{n+1}$

$$\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})\equiv C.$$

Отсюда

$$d\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})\equiv 0;$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}\equiv 0.$$

Но из (22.6) находим: $\quad dx_i=kF_i(x_1,\dots,x_{n+1})$.

Следовательно,

$$k\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot F_1(x_1,\dots,x_{n+1})+\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\cdot F_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})\right]\equiv 0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot F_1(x_1,\dots,x_{n+1})+\dots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\cdot F_{n+1}(x_1,\dots,x_{n+1})\equiv 0. \qquad (22.8)$$

[3] или «***линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка***»

Таким образом, функция

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

является решение уравнения (22.5).

2) Необходимость ($\Rightarrow$). Легко проверить, что условие (22.8) является не только необходимым, но и достаточным условием того, что уравнение $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C$ определяет первый интеграл системы дифференциальных уравнений (22.6). Следовательно, если $z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ – решение уравнения (22.5), то уравнение $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = C$ определяет первый интеграл системы (22.6). ■

Пусть найдена система независимых[4] первых интегралов системы дифференциальных уравнений (22.15), образующих ее общий интеграл:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

По теореме 22.1 функции $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = \overline{1, n-1})$ являются решениями уравнения (22.5), причем справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 22.2. *Если* $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = C_i$ $(i = \overline{1, n-1})$ *– независимые первые интегралы системы* (22.6) *и* Φ *– произвольная непрерывно дифференцируемая функция* $n-1$ *аргумента, то* $z = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *– общее решение уравнения* (22.5).

ПРИМЕР 22.1. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $u = u(x, y, z)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Из равенства первой и третьей дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z},$$

---

[4] т. е. ни один из них не следует из остальных.

$$\Rightarrow \ \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \quad \text{или} \quad \frac{z}{x} = C_1 .$$

Из равенства второй и третьей дроби получим другой первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{z},$$

$$\Rightarrow \ \ln|z| = \ln|y| + \ln C_2 \quad \text{или} \quad \frac{z}{y} = C_2 .$$

Первые интегралы $\frac{z}{x} = C_1$ и $\frac{z}{y} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$u = \Phi\left(\frac{z}{x}; \frac{z}{y}\right). \ \diamond$$

Теперь покажем, как найти решение задачи Коши для линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка.

Пусть дано уравнение

$$F_1(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + F_n(x_1, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \qquad (22.5)$$

где $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция. Требуется найти его решение, удовлетворяющее условию

$$z(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = x_{n0}) = \Phi_0(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\Phi_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$ – заданная функция $n-1$ аргумента.

Найдем систему независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений (22.6), образующих ее общий интеграл:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}. \end{cases}$$

Обозначим

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_1, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\varphi}_{n-1}. \end{cases} \qquad (22.9)$$

Разрешим (22.9) относительно $x_1,\dots,x_{n-1}$ (это всегда можно сделать в окрестности точки $M_0(x_{10},x_{20}\dots,x_{n0})$, такой что $F_i(M_0)\neq 0$). Получим:

$$\begin{cases} x_1=\omega_1(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\dots,\overline{\varphi}_{n-1}),\\ x_2=\omega_2(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\dots,\overline{\varphi}_{n-1}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\dots,\overline{\varphi}_{n-1}). \end{cases} \tag{22.10}$$

Тогда решение уравнения (22.5), удовлетворяющее условию

$$z(x_1,\dots,x_{n-1},x_n=x_{n0})=\Phi_0(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

будет иметь вид

$$\boxed{z=\Phi_0[\omega_1(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}),\omega_2(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}),\dots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})].} \tag{22.11}$$

Действительно, в силу теоремы 2, функция (22.11) определяет решение уравнения (22.5). А при $x_n=x_{n0}$ имеем

$$z(x_1,\dots,x_{n-1},x_n=x_{n0})=$$

$$\Phi_0(\omega_1(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}),\dots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}))\big|_{x_n=x_{n0}}=$$

$$=\Phi_0\left(\omega_1\big(\underbrace{\varphi_1\,|_{x_n=x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_1},\dots,\underbrace{\varphi_{n-1}\,|_{x_n=x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_{n-1}}\big),\dots,\omega_{n-1}\big(\underbrace{\varphi_1\,|_{x_n=x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_1},\dots,\underbrace{\varphi_{n-1}\,|_{x_n=x_{n0}}}_{\overline{\varphi}_{n-1}}\big)\right)=$$

$$=\Phi_0\left(\underbrace{\omega_1(\overline{\varphi}_1,\dots,\overline{\varphi}_{n-1})}_{x_1},\dots,\underbrace{\omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1,\dots,\overline{\varphi}_{n-1})}_{x_{n-1}}\right)=$$

$$=\Phi_0(x_1,\dots,x_{n-1}).$$

Замечание. Алгоритм нахождения решения задачи Коши показывает, что решение начальными данными определяется однозначно.

ПРИМЕР 22.2. Найти решение уравнения $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{z}{2}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, удовлетворяющее начальному условию $u(1,y,z)=y+z^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $u=u(x,y,z)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z/2}.$$

Из равенства 1-й и 3-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x}=\frac{2dz}{z},$$

$$\Rightarrow\quad 2\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1 \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{x} = C_1.$$

Из равенства 2-й и 3-й дроби получим другой первый интеграл:

$$\frac{dx}{y} = \frac{2dz}{z},$$

$$\Rightarrow\quad 2\ln|z| = \ln|y| + \ln C_2 \quad \text{или} \quad \frac{z^2}{y} = C_2.$$

Первые интегралы $\frac{z^2}{x} = C_1$ и $\frac{z^2}{y} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$u = \Phi\left(\frac{z^2}{x}; \frac{z^2}{y}\right).$$

2) Имеем: $\qquad \varphi_1(x,y,z) = \frac{z^2}{x}, \quad \varphi_2(x,y,z) = \frac{z^2}{y}.$

Тогда $\qquad \overline{\varphi}_1 = \varphi_1(1,y,z) = z^2, \quad \overline{\varphi}_2 = \varphi_2(1,y,z) = \frac{z^2}{y}.$

$$\Rightarrow\quad z = \pm\sqrt{\overline{\varphi}_1}, \qquad y = \frac{z^2}{\overline{\varphi}_2} = \frac{\overline{\varphi}_1}{\overline{\varphi}_2}.$$

Подставляя найденные выражения для y и z в начальное условие и «теряя черточки», получаем искомое частное решение:

$$u(x,y,z) = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \left(\pm\sqrt{\varphi_1}\right)^2 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \varphi_1 = \frac{z^2/x}{z^2/y} + \frac{z^2}{x},$$

$$\Rightarrow\quad u(x,y,z) = \frac{y}{x} + \frac{z^2}{x}. \ \diamond$$

ПРИМЕР 22.3. Найти решение уравнения $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $z(x,0) = x - 1$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное однородное. Искомая функция $z = z(x,y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Она имеет единственный первый интеграл (общий интеграл дифференциального уравнения):

$$-xdx = ydy,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \text{или} \quad y^2 + x^2 = C.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$z = \Phi\left(y^2 + x^2\right).$$

С геометрической точки зрения, общее решение представляет собой всевозможные поверхности вращения с осью Oz.

2) Имеем: $\varphi(x, y) = y^2 + x^2$.

Тогда $\overline{\varphi} = \varphi(x,0) = x^2$,

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\overline{\varphi}}.$$

Подставляя найденное выражения для x в начальное условие и «теряя черточку», получаем искомое частное решение:

$$z(x, y) = \pm\sqrt{\varphi} - 1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

С геометрической точки зрения, это частное решение представляет собой конус $(z+1)^2 = x^2 + y^2$, т.е. поверхность вращения, проходящую через прямую

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = x - 1. \end{cases} \quad \diamond$$

22.3. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным неоднородным уравнением с частными производными первого порядка*** называется уравнение вида

$$F_1(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + \ldots + F_n(x_1, \ldots, x_n, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = P(x_1, \ldots, x_n, z), \quad (22.12)$$

где $F_i(x_1, \ldots, x_n, z)$, $P(x_1, \ldots, x_n, z)$ – заданные функции, непрерывно дифференцируемые в рассматриваемой области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ – неизвестная функция.

Интегрирование уравнения (22.12) сводится к интегрированию некоторого линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка. Действительно, предположим, что уравнение

$$u(x_1, \ldots, x_n, z) = 0 \quad (22.13)$$

задает в неявном виде решение уравнения (22.12). Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{u'_{x_i}}{u'_z}$$

и из уравнения (22.12) находим:

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-\frac{u'_{x_1}}{u'_z}\right)+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-\frac{u'_{x_n}}{u'_z}\right)=P(x_1,\ldots,x_n,z),$$

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-u'_{x_1}\right)+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\left(-u'_{x_n}\right)=P(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot u'_z.$$

$$F_1(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+F_n(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n}+P(x_1,\ldots,x_n,z)\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0. \quad (22.14)$$

Уравнение (22.14) – линейное однородное первого порядка, в котором искомая функция u зависит от $n+1$ переменной $x_1,\ldots,x_n,z$. Соответствующая ему система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_n,z)}=\ldots=\frac{dx_n}{F_n(x_1,\ldots,x_n,z)}=\frac{dz}{P(x_1,\ldots,x_n,u)} \quad (22.15)$$

имеет n независимых первых интегралов

$$\varphi_1(x_1,\ldots,x_n,z)=C_1,\quad \ldots,\quad \varphi_n(x_1,\ldots,x_n,z)=C_n$$

и, следовательно, общее решение уравнения (22.14) будет иметь вид

$$u=\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n).$$

Но тогда уравнение $\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)=0$ будет определять в неявном виде общее решение (22.12).

Замечание. На практике, при интегрировании линейных неоднородных уравнений с частными производными первого порядка, уравнение (22.14) обычно не записывают. Записывают сразу его соответствующую систему (22.15).

ПРИМЕР 22.4. Найти общее решение уравнения

$$(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение – линейное неоднородное. Искомая функция $z=z(x,y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Из равенства 2-й и 3-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2},$$

$$\Rightarrow\ 0{,}5z=y+C_1 \quad \text{или} \quad z-2y=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим, используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz-dx-dy}{2-(1+\sqrt{z-x-y})-1},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{1}=\frac{d(z-x-y)}{\sqrt{z-x-y}},$$

$$\Rightarrow \quad y-2\sqrt{z-x-y}=C_2.$$

Первые интегралы $z-2y=C_1$ и $y-2\sqrt{z-x-y}=C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\Phi\left(z-2y; y-2\sqrt{z-x-y}\right)=0. \ \diamond$$

ПРИМЕР 22.5. Найти решение уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2$, удовлетворяющее начальному условию $z(x,1)=x^2$.

РЕШЕНИЕ. 1) Данное уравнение – линейное неоднородное. Искомая функция $z=z(x,y)$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{x^2+y^2}.$$

Из равенства 1-й и 2-й дроби получим один первый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-2y},$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y},$$

$$\Rightarrow \quad 2\ln|x|=-\ln|y|+\ln C_1 \quad \text{или} \quad x^2y=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим, используя свойства равных дробей:

$$\frac{xdx}{x^2}=\frac{-0{,}5ydy}{y^2}=\frac{dz}{x^2+y^2},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{xdx-0{,}5ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{x^2+y^2},$$

$$\Rightarrow \quad xdx - 0{,}5ydy = dz \quad \text{или} \quad d\left(z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) = 0,$$

$$\Rightarrow \quad z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = C_2.$$

Первые интегралы $x^2 y = C_1$ и $z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = C_2$ независимы и образуют общий интеграл системы дифференциальных уравнений. Следовательно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\Phi\left(x^2 y; z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}\right) = 0.$$

Разрешая это уравнение относительно второй переменной, получим общее решение неоднородного уравнения в явном виде:

$$z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = f(x^2 y),$$

$$\Rightarrow \quad z = f(x^2 y) + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4}.$$

2) Найдем искомое частное решение. Имеем:

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 y, \qquad \varphi_2(x, y, z) = z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}.$$

Тогда $\qquad \overline{\varphi}_1 = \varphi_1(x,1,z) = x^2, \quad \overline{\varphi}_2 = \varphi_2(x,1,z) = z - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}.$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\overline{\varphi}_1}, \qquad z = \overline{\varphi}_2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} = \overline{\varphi}_2 + \frac{\overline{\varphi}_1}{2} - \frac{1}{4}.$$

Подставляя найденные выражения для x и z в начальное условие $z(x,1) = x^2$ и «теряя черточки», получаем искомое частное решение:

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{4} = \left(\pm\sqrt{\varphi_1}\right)^2,$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_2 + \frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{4} = \varphi_1 \quad \text{или} \quad \varphi_2 - \frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad z - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{x^2 y}{2} - \frac{1}{4} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{x^2 y}{2} + \frac{1}{4}. \diamond$$