

$$\mathbf{Y}_1 = \operatorname{Re} \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin 2x \\ \cos 2x \\ 3 \cos 2x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \operatorname{Im} \mathbf{Z} = e^x \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ \sin 2x \\ 3 \sin 2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$  образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + C_3 \mathbf{Y}_3 = \\ &= C_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} -2 \sin 2x \\ \cos 2x \\ 3 \cos 2x \end{pmatrix} + C_3 e^x \cdot \begin{pmatrix} 2 \cos 2x \\ \sin 2x \\ 3 \sin 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или, подробнее,

$$\begin{cases} y_1 = & -2C_2 e^x \sin 2x + 2C_3 e^x \cos 2x, \\ y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x, \quad \diamond \\ y_3 = C_1 e^x + 3C_2 e^x \cos 2x + 3C_3 e^x \sin 2x. \end{cases}$$

### III. Характеристические корни матрицы $\mathbf{A}$ действительны, но среди них есть кратные

Пусть  $\lambda$  – действительный характеристический корень матрицы  $\mathbf{A}$  кратности  $\ell$ ,  $r = \operatorname{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ . Возможны два случая.

#### 1) $n - r = \ell$ .

В этом случае фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$  состоит из  $\ell$  решений. Следовательно, существуют  $\ell$  линейно независимых собственных векторов  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_\ell$  матрицы  $\mathbf{A}$ , относящихся к собственному значению  $\lambda$ . Тогда решения системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{Y}_1 = e^{\lambda x} \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{Y}_2 = e^{\lambda x} \mathbf{D}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{Y}_\ell = e^{\lambda x} \mathbf{D}_\ell$$

линейно независимы и входят в фундаментальную систему решений этой системы.

2)  $n - r \neq \ell$  (точнее,  $n - r < \ell$ , случай  $n - r > \ell$  вообще невозможен из алгебраических соображений).

Тогда фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{O}$  состоит из  $k < \ell$  решений. С их помощью мы сможем получить  $k$  линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений. В такой ситуации существует два возможных способа найти все решения.

**Первый способ** – искать  $\ell$  решений вида

$$\mathbf{Y} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} a_{10} + a_{11}x + \dots + a_{1,\ell-1}x^{\ell-1} \\ a_{20} + a_{21}x + \dots + a_{2,\ell-1}x^{\ell-1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n0} + a_{n1}x + \dots + a_{n,\ell-1}x^{\ell-1} \end{pmatrix},$$

где коэффициенты многочленов  $a_{ij}$  находят, подставляя  $\mathbf{Y}$  в исходную систему.

**ПРИМЕР 21.4.** Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

Матрица системы:  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

Запишем ее характеристическую матрицу и найдем характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \lambda^2 - 4\lambda + 4. \end{aligned}$$

Найдем характеристические корни:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2.$$

Итак, имеем характеристический корень кратности  $\ell = 2$ . При этом  $r = \text{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1$  (т. к.  $|\mathbf{A} - 2\mathbf{E}| = 0$ ). Следовательно,

$$n - r = 2 - 1 = 1 \quad \text{и} \quad n - r < \ell.$$

Будем искать решения системы в виде

$$\mathbf{Y} = e^{2x} \begin{pmatrix} a + bx \\ c + dx \end{pmatrix},$$

т. е. полагаем

$$y_1 = (a + bx)e^{2x}, \quad y_2 = (c + dx)e^{2x}.$$

Тогда

$$y_1' = (2a + 2bx + b)e^{2x}, \quad y_2' = (2c + 2dx + d)e^{2x}.$$

Подставим  $y_1, y_2, y_1', y_2'$  в исходную систему и получим:

$$\begin{cases} (2a + b + 2bx)e^{2x} = (a + bx - c - dx)e^{2x}, \\ (2c + d + 2dx)e^{2x} = (a + bx + 3c + 3dx)e^{2x} \end{cases}$$

или, после сокращения на  $e^{2x}$ :

$$\begin{cases} 2a + b + 2bx = a + bx - c - dx, \\ 2c + d + 2dx = a + bx + 3c + 3dx; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a + b + c) + (b + d)x = 0, \\ (-a - c + d) - (b + d)x = 0. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях  $x$ , получим:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -a - c + d = 0, \\ -b - d = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Или, после преобразований:

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ b + d = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2, в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ . Тогда переменные  $a$ ,  $b$  будут зависимыми,  $c$  и  $d$  – свободными. Общее решение при этом будет иметь вид:

$$\begin{cases} a = d - c, \\ b = -d. \end{cases}$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$d = 1, c = 0 \Rightarrow a = 1, b = -1;$$

$$d = 0, c = 1 \Rightarrow a = -1, b = 0.$$

Первое из решений фундаментальной системы ( $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ ) дает для системы дифференциальных уравнений решение

$$\mathbf{Y}_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 - x \\ x \end{pmatrix},$$

второе решение из фундаментальной системы ( $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ ,  $d = 0$ ) дает решение

$$\mathbf{Y}_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения  $\mathbf{Y}_1$ ,  $\mathbf{Y}_2$  образуют фундаментальную систему решений и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 - x \\ x \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \diamond$$

Как показывает рассмотренный пример, чтобы найти решения для системы дифференциальных уравнений второго порядка, нам пришлось решать алгебраическую систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. А если порядок исходной системы будет 3, то алгебраическая система будет содержать в лучшем случае шесть уравнений и шесть неизвестных (а в худшем – девять уравнений и неизвестных). И хотя мы в каждом случае точно знаем количество свободных переменных (их количество совпадает с кратностью корня), задача получается трудоемкая.

**Второй способ решения** – найти  $k$  линейно независимых решений системы дифференциальных уравнений, а недостающие  $\ell - k$  решений искать в виде

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= e^{\lambda x} (D_{k+1,0} + D_{k+1,1}x), \\ Y_{k+2} &= e^{\lambda x} \left( D_{k+2,0} + D_{k+2,1}x + D_{k+2,2} \cdot \frac{x^2}{2} \right), \\ Y_{k+3} &= e^{\lambda x} \left( D_{k+3,0} + D_{k+3,1}x + D_{k+3,2} \cdot \frac{x^2}{2} + D_{k+3,3} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Здесь  $D_{ij}$  – числовые матрицы-столбцы, определяемые так, чтобы  $Y_i$  были решениями системы дифференциальных уравнений.

На первый взгляд кажется, что этот способ такой же трудоемкий, как и предыдущий. Но на самом деле это не так. Рассмотрим его применительно к системам дифференциальных уравнений 3-го порядка, т. е. к системам вида

$$Y' = AY, \quad (21.7)$$

где  $A = (a_{ij})$  – матрица третьего порядка,  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ .

Число характеристических корней матрицы совпадает с ее порядком, следовательно, если матрица  $A$  имеет кратный характеристический корень  $\lambda$ , то его кратность  $\ell$  равна двум или трем. Рассмотрим каждый из этих случаев.

**а) Пусть  $\ell = 2$ ,  $n - r = 1$ .**

В этом случае матрица  $A$  имеет один линейно независимый собственный вектор  $D_1$ , относящийся к собственному значению  $\lambda$  и, следовательно,  $Y_1 = e^{\lambda x} D_1$  – решение системы (21.7). Еще одно решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$Y_2 = e^{\lambda x} (D_{20} + D_{21}x).$$

Тогда

$$Y_2' = e^{\lambda x} (\lambda D_{20} + \lambda D_{21}x + D_{21})$$

и, подставляя  $Y_2$  и  $Y_2'$  в (21.7), получаем:

$$e^{\lambda x}(\lambda D_{20} + \lambda D_{21}x + D_{21}) = A \cdot e^{\lambda x}(D_{20} + D_{21}x).$$

После преобразований будем иметь:

$$\lambda D_{20} + D_{21} + \lambda D_{21}x = AD_{20} + AD_{21}x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , находим:

$$\begin{cases} \lambda D_{21} = AD_{21}, \\ \lambda D_{20} + D_{21} = AD_{20} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} AD_{21} - \lambda D_{21} = O, \\ AD_{20} - \lambda D_{20} = D_{21}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda E)D_{21} = O, \\ (A - \lambda E)D_{20} = D_{21}. \end{cases} \quad (21.8)$$

Первое уравнение системы (21.8) означает, что  $D_{21}$  – собственный вектор матрицы  $A$ , относящийся к собственному значению  $\lambda$  и, следовательно, можем полагать  $D_{21} = D_1$ . Тогда второе уравнение системы (21.8) перепишется в виде:

$$(A - \lambda E)D_{20} = D_1,$$

т. е. в качестве  $D_{20}$  можно взять любое решение системы линейных уравнений  $(A - \lambda E)X = D_1$ .

Таким образом, если  $\ell = 2$  и  $n - r = 1$ , то рассматриваемая система (21.7) имеет решения

$$\boxed{Y_1 = e^{\lambda x} D_1 \text{ и } Y_2 = e^{\lambda x} (D_{20} + D_1 x),} \quad (21.9)$$

где  $D_1$  – собственный вектор матрицы  $A$ , относящийся к собственному значению  $\lambda$ ;

$D_{20}$  – любое решение системы линейных уравнений  $(A - \lambda E)X = D_1$ .

Найденные таким образом решения  $Y_1$  и  $Y_2$  входят в фундаментальную систему решений, так как они линейно независимы.

Действительно, рассматривая

$$\alpha Y_1 + \beta Y_2 = O,$$

получаем

$$(\alpha D_1 + \beta D_{20}) + \beta D_1 x = O,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta D_1 = O, \\ \alpha D_1 + \beta D_{20} = O. \end{cases}$$

По определению собственного вектора  $D_1 \neq O$ . Тогда из этой системы находим

$$\alpha = \beta = 0.$$

А это означает, что  $Y_1$  и  $Y_2$  – линейно независимы.

**Замечание.** При получении формул (21.9) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка  $n$ .

ПРИМЕР 21.5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= \lambda^2 - 4\lambda + 4, \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= 2. \end{aligned}$$

Итак, имеем характеристический корень кратности  $\ell = 2$ . При этом  $r = \text{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 1$  (т. к.  $|\mathbf{A} - 2\mathbf{E}| = 0$ ). Следовательно,

$$n - r = 2 - 1 = 1$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.9).

2) Найдем собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}$ , относящийся к собственному значению  $\lambda = 2$ . Имеем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{O}, \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases} \\ \Rightarrow x_1 &= -x_2 - \text{общее решение системы.} \end{aligned}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем  $x_2 = 1$  и находим это решение:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что  $\mathbf{D}_1$  – собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}$ , относящийся к собственному значению  $\lambda = 2$ . Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y}_1 = e^{2x} \mathbf{D}_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}.$$

3) Второе решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y}_2 = e^{2x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x),$$

где  $\mathbf{D}_{20}$  – любое решение системы линейных уравнений  $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_1$ .  
Имеем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_1, \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \\ \Rightarrow x_1 &= 1 - x_2 - \text{общее решение системы.} \end{aligned}$$

Полагаем  $x_2 = 0$  и находим частное решение:

$$\mathbf{D}_{20} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_{20}$  в  $\mathbf{Y}_2$  и получаем:

$$\mathbf{Y}_2 = e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] = e^{2x} \begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения  $\mathbf{Y}_1$ ,  $\mathbf{Y}_2$  образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{Y} = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1-x \\ x \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

**б) Пусть  $\ell = 3$ ,  $n - r = 1$ .**

В этом случае матрица  $\mathbf{A}$  имеет один линейно независимый собственный вектор  $\mathbf{D}_1$ , относящийся к собственному значению  $\lambda$  и, следовательно,  $\mathbf{Y}_1 = e^{\lambda x} \mathbf{D}_1$  – решение системы (21.7). Необходимо найти еще два решения. Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y}_2 = e^{\lambda x}(\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_{21}x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять  $\mathbf{D}_{20}$  и  $\mathbf{D}_{21}$  были нами уже получены ранее. А именно,  $\mathbf{D}_{21}$  будет собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$ , относящимся к собственному значению  $\lambda$ , и, следовательно, можно считать  $\mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_1$ ;  $\mathbf{D}_{20}$  – любое решение системы линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_1$ .

Третье решение системы запишем в виде

$$\mathbf{Y}_3 = e^{\lambda x} \left( \mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x + \mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2} \right).$$

Тогда

$$\mathbf{Y}'_3 = e^{\lambda x} \left( \lambda \mathbf{D}_{30} + \lambda \mathbf{D}_{31}x + \lambda \mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}x \right)$$

и, подставляя  $\mathbf{Y}_3$  и  $\mathbf{Y}'_3$  в (21.7), получаем:

$$e^{\lambda x} \left( \lambda \mathbf{D}_{30} + \lambda \mathbf{D}_{31}x + \lambda \mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2} + \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32}x \right) = \mathbf{A} \cdot e^{\lambda x} \left( \mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x + \mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2} \right).$$

После преобразований будем иметь:

$$(\lambda \mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}) + (\lambda \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32})x + \lambda \mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2} = \mathbf{A}\mathbf{D}_{30} + \mathbf{A}\mathbf{D}_{31}x + \mathbf{A}\mathbf{D}_{32} \cdot \frac{x^2}{2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , находим:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda \mathbf{D}_{32} = \mathbf{A}\mathbf{D}_{32}, \\ \lambda \mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{32} = \mathbf{A}\mathbf{D}_{31}, \\ \lambda \mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31} = \mathbf{A}\mathbf{D}_{30}; \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{D}_{32} - \lambda \mathbf{D}_{32} = \mathbf{O}, \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_{31} - \lambda \mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{32}, \\ \mathbf{A}\mathbf{D}_{30} - \lambda \mathbf{D}_{30} = \mathbf{D}_{31}; \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{D}_{32} = \mathbf{O}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{32}, \\ (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{D}_{30} = \mathbf{D}_{31}. \end{cases} \end{aligned} \quad (21.10)$$

Первое уравнение системы (21.10) означает, что  $\mathbf{D}_{32}$  – собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}$ , относящийся к собственному значению  $\lambda$  и, следовательно, можем полагать  $\mathbf{D}_{32} = \mathbf{D}_1$ . Тогда второе уравнение системы (21.10) переписывается в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_1,$$

т. е. в качестве  $\mathbf{D}_{31}$  можно взять любое решение системы линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_1$ . Так как  $\mathbf{D}_{20}$  тоже является решением этой системы, то можем полагать

$$\mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{20}.$$

С учетом этого, третье уравнение системы (21.10) переписывается в виде:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{D}_{30} = \mathbf{D}_{20},$$

т. е. в качестве  $\mathbf{D}_{30}$  можно взять любое решение системы линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{20}$ .



Таким образом, если  $\ell = 3$  и  $n - r = 1$ , то рассматриваемая система (21.7) имеет решения

$$\boxed{Y_1 = e^{\lambda x} D_1, \quad Y_2 = e^{\lambda x} (D_{20} + D_1 x), \quad Y_3 = e^{\lambda x} \left( D_{30} + D_{20} x + D_1 \cdot \frac{x^2}{2} \right)}, \quad (21.11)$$

где  $D_1$  — собственный вектор матрицы  $A$ , относящийся к собственному значению  $\lambda$ ;

$D_{20}$  — любое решение системы линейных уравнений  $(A - \lambda E)X = D_1$ ;

$D_{30}$  — любое решение системы линейных уравнений  $(A - \lambda E)X = D_{20}$ .

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения  $Y_1, Y_2, Y_3$  будут линейно независимыми.

**Замечание.** При получении формул (21.11) нигде не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка. Следовательно, они останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка  $n$ .

**ПРИМЕР 21.6.** Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3, \\ y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Система является линейной однородной с постоянными коэффициентами. Следовательно, ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6 - \lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda - 1)^3, \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 1. \end{aligned}$$

Итак, имеем характеристический корень кратности  $\ell = 3$ . При этом

$$\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-1 & -3 & 3 \\ -2 & -6-1 & 13 \\ -1 & -4 & 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r = \text{rang}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2.$$

Следовательно,

$$n - r = 3 - 2 = 1$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.11).

2) Найдем собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}$ , относящийся к собственному значению  $\lambda = 1$ . Имеем:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{O},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 2 и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор  $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}$ . Тогда переменные  $x_1, x_2$  будут зависимыми, а  $x_3$  свободной. Отбрасываем третье уравнение системы и находим общее решение:

$$\begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = 3x_3, \\ 2x_1 + 7x_2 = 13x_3; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3, \\ x_1 = 3x_3 \end{cases} - \text{общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из одного решения. Полагаем  $x_3 = 1$  и находим это решение:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что  $\mathbf{D}_1$  – собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}$ , относящийся к собственному значению  $\lambda = 1$ . Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y}_1 = e^x \mathbf{D}_1 = e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

3) Второе решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y}_2 = e^x (\mathbf{D}_{20} + \mathbf{D}_1 x),$$

где  $\mathbf{D}_{20}$  – любое решение системы линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_1$ .

Имеем:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_1,$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = 1, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Выбирая переменные  $x_1, x_2$  зависимыми, а  $x_3$  свободной, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_3, \\ x_1 = 3 + 3x_3. \end{cases}$$

Полагаем  $x_3 = 0$  и находим частное решение:

$$\mathbf{D}_{20} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_{20}$  в  $\mathbf{Y}_2$  и получаем:

$$\mathbf{Y}_2 = e^x \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] = e^x \begin{pmatrix} 3 + 3x \\ -1 + x \\ x \end{pmatrix}.$$

4) Третье решение системы дифференциальных уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y}_3 = e^{\lambda x} \left( \mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{20}x + \mathbf{D}_1 \cdot \frac{x^2}{2} \right),$$

где  $\mathbf{D}_{30}$  – любое решение системы линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{20}$ .

Имеем:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{20},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3x_2 + 3x_3 = 3, \\ -2x_1 - 7x_2 + 13x_3 = -1, \\ -x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Выбирая переменные  $x_1, x_2$  зависимыми, а  $x_3$  – свободной, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_2 = -1 + x_3, \\ x_1 = 4 + 3x_3. \end{cases}$$

Полагаем  $x_3 = 0$  и находим частное решение:

$$\mathbf{D}_{30} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_{20}$  и  $\mathbf{D}_{30}$  в  $\mathbf{Y}_3$  и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^x \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] = e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + 1,5x^2 \\ -1 - x + 0,5x^2 \\ 0,5x^2 \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$  образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + C_3 \mathbf{Y}_3 = \\ &= C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \left[ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x \right] + C_3 e^x \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{x^2}{2} \right] = \\ &= C_1 e^x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} 3 + 3x \\ -1 + x \\ x \end{pmatrix} + C_3 e^x \begin{pmatrix} 4 + 3x + 1,5x^2 \\ -1 - x + 0,5x^2 \\ 0,5x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или, более подробно,

$$\begin{cases} y_1 = 3C_1 e^x + C_2 e^x (3 + 3x) + C_3 e^x (4 + 3x + 1,5x^2), \\ y_2 = C_1 e^x + C_2 e^x (-1 + x) + C_3 e^x (-1 - x + 0,5x^2), \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^x \cdot x + C_3 e^x \cdot 0,5x^2. \end{cases} \diamond$$

**в) Пусть  $\ell = 3, n - r = 2$ .**

В этом случае матрица  $\mathbf{A}$  имеет два линейно независимых собственных вектора  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$ , относящихся к собственному значению  $\lambda$  и, следовательно,  $\mathbf{Y}_1 = e^{\lambda x} \mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{Y}_2 = e^{\lambda x} \mathbf{D}_2$  – решения системы (21.7). Необходимо найти еще одно решение. Третье решение системы дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$\mathbf{Y}_3 = e^{\lambda x} (\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31} x).$$

Условия, которым при этом будут удовлетворять  $\mathbf{D}_{30}$  и  $\mathbf{D}_{31}$ , нами получены ранее. А именно,  $\mathbf{D}_{31}$  будет собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$ , относящимся к собственному значению  $\lambda$ ;  $\mathbf{D}_{30}$  – любое решение системы линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{31}$ .

В нашем случае размерность собственного подпространства матрицы  $\mathbf{A}$  для собственного значения  $\lambda$  равна двум, а в качестве его базиса выбраны  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$ . Следовательно,

$$\mathbf{D}_{31} = \alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2,$$

где  $\alpha, \beta$  – некоторые числа, *одновременно не равные нулю*, которые следует выбрать так, чтобы система линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{31}$  была совместна.

*Замечание.* Если  $\alpha = \beta = 0$ , то  $\mathbf{D}_{31} = \alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2 = \mathbf{O}$  и, следовательно,  $\mathbf{D}_{31}$  не будет собственным вектором.

Таким образом, если  $\ell = 3$  и  $n - r = 2$ , то рассматриваемая система (21.7) имеет решения

$$\mathbf{Y}_1 = e^{\lambda x} \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{Y}_2 = e^{\lambda x} \mathbf{D}_2, \quad \mathbf{Y}_3 = e^{\lambda x} (\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x), \quad (21.12)$$

где  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$  – линейно независимые собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$ , относящиеся к собственному значению  $\lambda$ ;

$\mathbf{D}_{31} = \alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2$ ,  $\alpha, \beta$  – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{31}$  была совместна;

$\mathbf{D}_{30}$  – любое решение системы уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{31}$ .

При этом легко доказать, что найденные таким образом решения  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$  будут линейно независимыми.

*Замечание.* Формулы (21.12) останутся справедливыми и для линейной однородной системы порядка  $n$ , так как при их получении не использовался тот факт, что система дифференциальных уравнений третьего порядка.

**ПРИМЕР 21.7.** Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1, \\ y_2' = y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

**РЕШЕНИЕ.** Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 2)^3, \\ \Rightarrow \lambda_{1,2,3} &= 2. \end{aligned}$$

Итак, имеем характеристический корень кратности  $\ell = 3$ . При этом

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - 2\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-2 & -1 \\ 0 & 1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow r = \text{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$n - r = 3 - 1 = 2$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.12).

2) Найдем собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$ , относящиеся к собственному значению  $\lambda = 2$ . Имеем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Выбрав  $x_3$  в качестве зависимой переменной, а  $x_1, x_2$  — свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 0 \cdot x_1 - x_2.$$

Находим фундаментальную систему решений:

$$x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = -1.$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2$  – линейно независимые собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$ , относящиеся к собственному значению  $\lambda = 2$ . Следовательно, решения системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y}_1 = e^{2x} \mathbf{D}_1 = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = e^{2x} \mathbf{D}_2 = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y}_3 = e^{\lambda x} (\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x),$$

где  $\mathbf{D}_{31} = \alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2$ ,  $\alpha, \beta$  – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{31}$  была совместна;

$\mathbf{D}_{30}$  – любое решение системы уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{31}$ .

Исследуем на совместность систему линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2$ . Имеем:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 = \alpha, \\ 0 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = \beta, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = -\beta. \end{cases}$$

Система будет совместна при  $\alpha = 0$  и  $\forall \beta \in \mathbb{R}$ . Пусть  $\alpha = 0$  и  $\beta = -1$ . Тогда

$$\mathbf{D}_{31} = 0 \cdot \mathbf{D}_1 + (-1) \cdot \mathbf{D}_2 = -\mathbf{D}_2$$

и система для нахождения  $\mathbf{D}_{30}$  имеет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Выбрав  $x_3$  в качестве зависимой переменной, а  $x_1, x_2$  – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 1 - 0 \cdot x_1 - x_2.$$

Полагаем  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  и находим частное решение:

$$\mathbf{D}_{30} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляем  $\mathbf{D}_{31} = -\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{D}_{30}$  в  $\mathbf{Y}_3$  и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x \right] = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ 1+x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$  образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + C_3 \mathbf{Y}_3 = \\ &= C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2x} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x \right] = \\ &= C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ 1+x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или, более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x}, \\ y_2 = C_2 e^{2x} - C_3 x e^{2x}, \\ y_3 = -C_2 e^{2x} + C_3 (1+x) e^{2x}. \end{cases} \quad \diamond$$

ПРИМЕР 21.8. Найти общее решение системы  $\mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}$ , где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Так как система – линейная однородная с постоянными коэффициентами, то ее общее решение может быть найдено методом Эйлера.

1) Матрица системы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическая матрица:

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 & 2 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ -4 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| &= -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda) = -\lambda^3, \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0. \end{aligned}$$



Итак, имеем характеристический корень кратности  $\ell = 3$ . При этом

$$\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4-0 & -4 & 2 \\ 2 & -2-0 & 1 \\ -4 & 4 & -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow r = \text{rang}(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E}) = 1.$$

Следовательно,

$$n - r = 3 - 1 = 2$$

и для нахождения решений можно воспользоваться формулами (21.12).

2) Найдем собственный вектор матрицы  $\mathbf{A}$ , относящийся к собственному значению  $\lambda = 0$ . Имеем:

$$(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E})\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Как уже указывали выше, ранг матрицы системы равен 1 и в качестве базисного минора можно выбрать, например, минор  $|1|$ . Тогда переменная  $x_3$  будет зависимой, а  $x_1, x_2$  – свободными. Отбрасываем первое и третье уравнение системы и находим общее решение:

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,$$

$$\Rightarrow x_3 = -2x_1 + 2x_2 \text{ – общее решение.}$$

Фундаментальная система решений состоит из двух решений. Полагая  $x_1 = 1, x_2 = 0$  и  $x_1 = 0, x_2 = 1$ , находим их:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, получили, что  $\mathbf{D}_1$  и  $\mathbf{D}_2$  – собственные векторы матрицы  $\mathbf{A}$ , относящиеся к собственному значению  $\lambda = 0$ . Следовательно, решение системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{Y}_1 = e^{0 \cdot x} \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{Y}_2 = e^{0 \cdot x} \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) Третье решение системы уравнений найдем в виде

$$\mathbf{Y}_3 = e^{\lambda x} (\mathbf{D}_{30} + \mathbf{D}_{31}x),$$

где  $\mathbf{D}_{31} = \alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2$ ,  $\alpha, \beta$  – числа, одновременно не равные нулю, которые выбираются так, чтобы система линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{31}$  была совместна;

$\mathbf{D}_{30}$  – любое решение системы уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{D}_{31}$ .

Исследуем на совместность систему линейных уравнений  $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2$ . Имеем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{E})\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \\ \alpha \mathbf{D}_1 + \beta \mathbf{D}_2 &= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix}; \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Умножим вторую строку на  $-2$  и  $2$  и прибавим к первой и третьей строке соответственно. В результате получим систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ \beta \\ -2\alpha + 4\beta \end{pmatrix}.$$

Система будет совместна при  $\alpha - 2\beta = -2\alpha + 4\beta = 0$ , где  $\beta$  – любое действительное число. Пусть

$$\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 2.$$

Тогда 
$$\mathbf{D}_{31} = 2 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

и система для нахождения  $\mathbf{D}_{30}$  имеет вид

$$\{2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,$$

Выбрав  $x_3$  в качестве зависимой переменной, а  $x_1, x_2$  – свободными, получаем общее решение:

$$x_3 = 1 - 2x_1 + 2x_2.$$

Полагаем  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  и находим частное решение:

$$\mathbf{D}_{30} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляем  $\mathbf{D}_{31} = 2 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{D}_{30}$  в  $\mathbf{Y}_3$  и получаем:

$$\mathbf{Y}_3 = e^{0 \cdot x} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \right] = \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix}.$$

Найденные таким образом решения  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3$  образуют фундаментальную систему и, следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + C_3 \mathbf{Y}_3 = \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} x \right] = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2x \\ x \\ 1-2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или, более подробно

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + 2C_3x, \\ y_2 = C_2 + C_3x, \\ y_3 = -2C_1 + 2C_2 + C_3(1-2x). \end{cases} \quad \diamond$$

Итак, мы рассмотрели метод Эйлера в трех случаях:

- 1) характеристические корни матрицы  $\mathbf{A}$  действительны и различны;
- 2) характеристические корни матрицы  $\mathbf{A}$  различны, но среди них есть комплексные;
- 3) характеристические корни матрицы  $\mathbf{A}$  действительны, но среди них есть кратные.

Не рассмотренным остался случай, когда среди характеристических корней матрицы  $\mathbf{A}$  есть кратные комплексные корни. В этой ситуации алгебраические трудности метода Эйлера возрастают настолько, что лучше использовать другие методы интегрирования.