§ 19. Метод интегрируемых комбинаций

Пусть решение системы дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}) \tag{19.1}$$

имеет вид:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, \ldots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}). \tag{19.2}$$

Можно доказать, что в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения, система (19.2) может быть однозначно разрешена относительно C_1, C_2, …, C_n. Т. е. в области D справедливы равенства

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n. \end{cases} \tag{19.3}$$

Совокупность равенств (19.3) называют ***общим интегралом системы*** (19.1), а каждое из равенств системы (19.3) называют ***первым интегралом системы*** (19.1).

Иногда при интегрировании системы дифференциальных уравнений легче найти именно общий интеграл системы. Так, например, если с помощью элементарных преобразований система (19.1) приводится к виду

$$d\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \tag{19.4}$$

то

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_i \quad (i = \overline{1, n})$$

будут первыми интегралами системы, а их совокупность – общий интеграл. Такой способ интегрирования систем называют ***методом интегрируемых комбинаций***.

Замечание. n первых интегралов системы образуют общий интеграл, если они независимы, т. е. ни один из них не может быть получен из оставшихся. Доказано, что если $\Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = C_i$ $(i = \overline{1, k})$ – первые интегралы и для каких-нибудь k функций $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k}$ якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_1}} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_k}} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_1}} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_k}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_1}} & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_2}} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_k}} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)}{\partial(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_k})} \neq 0,$$

то первые интегралы независимы.

ПРИМЕР 19.1. Найти первые интегралы системы

$$\begin{cases} y_1 y_1' + y_2 y_2' + 1 = 0, \\ \dfrac{y_1'}{y_1} + \dfrac{y_2'}{y_2} + y_1 y_2' + y_2 y_1' = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + dx = 0, \\ \dfrac{dy_1}{y_1} + \dfrac{dy_2}{y_2} + y_1 dy_2 + y_2 dy_1 = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} d(y_1^2) + \dfrac{1}{2} d(y_2^2) + dx = 0, \\ d(\ln|y_1|) + d(\ln|y_2|) + d(y_1 y_2) = 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(y_1^2 + y_2^2 + 2x) = 0, \\ d(\ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1) = 0. \end{cases}$$

Значит, общий интеграл системы:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + 2x = C_1, \\ \ln|y_1| + \ln|y_2| + y_2 y_1 = C_2. \end{cases} \diamond$$

Если привести систему к виду (19.4) сложно, но удается найти k ($k < n$) независимых первых интегралов системы, то из них можно выразить k неизвестных функций через остальные $(n-k)$ функций и перейти таким образом к системе с меньшим числом переменных.

ПРИМЕР 19.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Почленно сложим второе и третье уравнения, вычтем первое и получим

$$-\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = -(2y_1 - y_2 - y_3) + (3y_1 - 2y_2 - 3y_3) + (-y_1 + y_2 + 2y_3) = 0$$

или

$$\frac{d}{dx}(-y_1 + y_2 + y_3) = 0.$$

Отсюда первый интеграл системы:

$$-y_1 + y_2 + y_3 = C_1.$$

Этот интеграл позволяет выразить одну из неизвестных функций через две другие, например,

$$y_3 = C_1 + y_1 - y_2. \tag{19.5}$$

Подставим y_3 в первые два уравнения системы и получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными y_1 и y_2:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - (C_1 + y_1 - y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3(C_1 + y_1 - y_2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - C_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_2 - 3C_1. \end{cases}$$

Каждое из уравнений этой системы является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя их, находим:

$$y_1 = C_1 + C_2e^x, \quad y_2 = 3C_1 + C_3e^x.$$

Подставим найденные y_1 и y_2 в (19.5) и найдем y_3:

$$y_3 = C_1 + (C_1 + C_2e^x) - (3C_1 + C_3e^x) = e^x(C_2 - C_3) - C_1.$$

Таким образом, общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2e^x, \\ y_2 = 3C_1 + C_3e^x, \\ y_3 = e^x(C_2 - C_3) - C_1. \end{cases} \qquad \diamond$$

Равенства (19.3), дающие общий интеграл системы (19.1) обладают следующей особенностью: независимая переменная и функции входят в них равноправно. Следовательно, они сохранят свой вид и в том случае, когда мы берем в качестве независимой переменной y_i, хотя сама система дифференциальных уравнений свою форму в этом случае меняет.

Систему дифференциальных уравнений тоже можно записать в виде, который не будет меняться при смене независимого переменного. Действительно, из уравнений

$$y_i' = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (i = \overline{1,n})$$

получаем:
$$dx = \frac{dy_i}{f_i(x, y_1, \ldots, y_n)} \quad (i = \overline{1,n}).$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \ldots, y_n)};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{f(x)} = \frac{dy_1}{f(x) \cdot f_1(x, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \frac{dy_n}{f(x) \cdot f_n(x, y_1, \ldots, y_n)}, \qquad (19.6)$$

где $f(x)$ – любая отличная от нуля функция. Обозначим

$$x = x_1, \; y_1 = x_2, \; \ldots, \; y_n = x_{n+1}.$$

Тогда равенства (19.6) примут вид:

$$\boxed{\frac{dx_1}{F_1(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\frac{dx_2}{F_2(x_1,\ldots,x_{n+1})}=\ldots=\frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})}} \qquad (19.7)$$

Форма (19.7) записи системы дифференциальных уравнений, называется ***симметричной*** (или ***симметрической***)**.** Для метода интегрируемых комбинаций она обычно более удобна.

З а м е ч а н и е . При интегрировании системы методом интегрируемых комбинаций часто оказывается полезным ***свойство равных дробей*** (или ***производных пропорций***):

$$\boxed{\text{если } \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}, \quad \text{то } \frac{a_1}{b_1}=\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}.}$$

Действительно, пусть

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k,$$

$$\Rightarrow \quad a_1=k\cdot b_1, \quad a_2=k\cdot b_2, \quad a_3=k\cdot b_3.$$

Тогда

$$\frac{\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}=\frac{\alpha_1 k b_1+\alpha_2 k b_2+\alpha_3 k b_3}{\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\alpha_3 b_3}=k=\frac{a_1}{b_1}. \quad \blacksquare$$

ПРИМЕР 19.3. Решить систему методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=-\dfrac{\ln x}{2y_1}, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=\dfrac{\ln x}{2y_1}-1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем систему в симметричной форме:

$$\frac{dy_1}{-\dfrac{\ln x}{2y_1}}=\frac{dy_2}{\dfrac{\ln x}{2y_1}-1}=\frac{dx}{1},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy_1}{\ln x}=\frac{dy_2}{2y_1-\ln x}=\frac{dx}{-2y_1}.$$

Из равенства первой и третьей дроби получим один первый интеграл:

$$\frac{dy_1}{\ln x}=\frac{dx}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow \quad -2y_1 dy_1=\ln x\, dx,$$

$$\Rightarrow \quad -y_1^{\,2}=x(\ln x-1)+C_1 \quad \text{или} \quad y_1^{\,2}+x(\ln x-1)=C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy_1 + dy_2}{\ln x + 2y_1 - \ln x} = \frac{d\,x}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow \quad dy_1 + dy_2 = -d\,x,$$

$$\Rightarrow \quad y_1 + y_2 = -x + C_2 \quad \text{или} \quad y_1 + y_2 + x = C_2.$$

Убедимся, что найденные первые интегралы

$$y_1^{\ 2} + x(\ln x - 1) = C_1 \quad \text{и} \quad y_1 + y_2 + x = C_2$$

независимы (см. замечание на стр. 129). Имеем:

$$\Phi_1 = y_1^{\ 2} + x(\ln x - 1), \quad \Phi_2 = y_1 + y_2 + x,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y_1 \neq 0.$$

Таким образом, первые интегралы действительно независимы и общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1^{\ 2} + x(\ln x - 1) = C_1, \\ y_1 + y_2 + x = C_2. \end{cases} \diamond$$

§ 20. Системы линейных дифференциальных уравнений

Нормальная система дифференциальных уравнений (18.3) *называется* ***линейной***, *если функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *линейны относительно неизвестных функций*, т. е. если она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{cases} \tag{20.1}$$

или, более кратко,

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + b_i(x) \quad (i = \overline{1,n}),}$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ – известные функции от x, $y_i(x)$ – искомые функции.

Если все $b_i(x) \equiv 0$ $(i=\overline{1,n})$, то система (20.1) называется ***однородной***.

Систему линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) можно записать в более компактной *матричной* (*векторно-матричной*) форме. Обозначим матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}'=\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (20.1) можно записать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{Y}'=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y}+\mathbf{B} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}'-\mathbf{A}\mathbf{Y}=\mathbf{B}. \tag{20.2}$$

Для однородной системы матричная форма записи имеет вид

$$\mathbf{Y}'=\mathbf{A}\cdot\mathbf{Y} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}'-\mathbf{A}\mathbf{Y}=\mathbf{O}, \tag{20.3}$$

где $\mathbf{O}$ – нулевая матрица-столбец длины n.

Чтобы упростить дальнейшее изложение, свяжем также систему линейных дифференциальных уравнений с действием некоторого линейного оператора.

Пусть $C_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывные на отрезке $[a;b]$, $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$. Легко доказать, что оба этих множества образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$, причем $D_n[a,b]$ является подпространством $C_n[a,b]$.

Пусть L – оператор, действующий из $D_n[a,b]$ в $C_n[a,b]$ по следующему правилу

$$L[\mathbf{Y}]=\mathbf{Y}'-\mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad \forall \mathbf{Y}\in D_n[a,b].$$

Тогда система (20.1) означает, что

$$L[\mathbf{Y}]=\mathbf{B}. \tag{20.4}$$

Равенство (20.4) называется ***операторной формой неоднородной системы***. Операторная форма однородной системы имеет вид:

$$L[\mathbf{Y}]=\mathbf{O}. \tag{20.7}$$

В дальнейшем, мы чаще всего будем использовать именно такую форму записи систем линейных дифференциальных уравнений.

Заметим, что оператор $L\left[\mathbf{Y}\right]$ является линейным, т. к. обладает следующими свойствами:

1. $L\left[C\,\mathbf{Y}\right]=CL\left[\mathbf{Y}\right],\ \forall C\in\mathbb{R};$ (20.5)

2. $L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right].$ (20.6)

Действительно, по свойствам матриц,

1) $L\left[C\,\mathbf{Y}\right]=(C\,\mathbf{Y})'-\mathbf{A}(C\,\mathbf{Y})=C\,\mathbf{Y}'-C\,\mathbf{AY}=C(\mathbf{Y}'-\mathbf{AY})=CL\left[\mathbf{Y}\right];$

2) $L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)'-\mathbf{A}(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)=\mathbf{Y}_1'+\mathbf{Y}_2'-\mathbf{AY}_1-\mathbf{AY}_2=$

$$=(\mathbf{Y}_1'-\mathbf{AY}_1)+(\mathbf{Y}_2'-\mathbf{AY}_2)=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right].\ \blacksquare$$

Изучение СЛДУ будем проводить по той же схеме, что и изучение линейных дифференциальных уравнений n-го порядка: сначала изучим однородные СЛДУ, а затем – неоднородные.