Другой первый интеграл системы получим используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy_1+dy_2}{\ln x+2y_1-\ln x}=\frac{d\,x}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow \quad dy_1+dy_2=-d\,x,$$

$$\Rightarrow \quad y_1+y_2=-x+C_2 \quad \text{или} \quad y_1+y_2+x=C_2.$$

Убедимся, что найденные первые интегралы

$$y_1^{\,2}+x(\ln x-1)=C_1 \quad \text{и} \quad y_1+y_2+x=C_2$$

независимы (см. замечание на стр. 129). Имеем:

$$\Phi_1=y_1^{\,2}+x(\ln x-1), \quad \Phi_2=y_1+y_2+x,$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2y_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2y_1\neq 0.$$

Таким образом, первые интегралы действительно независимы и общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1^{\,2}+x(\ln x-1)=C_1, \\ y_1+y_2+x=C_2. \end{cases} \quad \diamond$$

§ 20. Системы линейных дифференциальных уравнений

Нормальная система дифференциальных уравнений (18.3) *называется **линейной**, если функции* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *линейны относительно неизвестных функций*, т. е. если она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\ldots+a_{1n}(x)y_n+b_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\ldots+a_{2n}(x)y_n+b_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\ldots+a_{nn}(x)y_n+b_n(x), \end{cases} \tag{20.1}$$

или, более кратко,

$$\boxed{\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j+b_i(x) \quad (i=\overline{1,n}),}$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ – известные функции от x, $y_i(x)$ – искомые функции.

Если все $b_i(x) \equiv 0 \ (i = \overline{1,n})$, то система (20.1) называется ***однородной***.

Систему линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) можно записать в более компактной *матричной* (*векторно-матричной*) форме. Обозначим матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (20.1) можно записать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{B} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{B}. \tag{20.2}$$

Для однородной системы матричная форма записи имеет вид

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{O}, \tag{20.3}$$

где $\mathbf{O}$ – нулевая матрица-столбец длины n.

Чтобы упростить дальнейшее изложение, свяжем также систему линейных дифференциальных уравнений с действием некоторого линейного оператора.

Пусть $C_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывные на отрезке $[a;b]$, $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$. Легко доказать, что оба этих множества образуют линейное пространство над $\mathbb{R}$, причем $D_n[a,b]$ является подпространством $C_n[a,b]$.

Пусть L – оператор, действующий из $D_n[a,b]$ в $C_n[a,b]$ по следующему правилу

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{Y}' - \mathbf{A}\mathbf{Y}, \quad \forall \mathbf{Y} \in D_n[a,b].$$

Тогда система (20.1) означает, что

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{B}. \tag{20.4}$$

Равенство (20.4) называется ***операторной формой неоднородной системы***. Операторная форма однородной системы имеет вид:

$$L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}. \tag{20.7}$$

В дальнейшем, мы чаще всего будем использовать именно такую форму записи систем линейных дифференциальных уравнений.

Заметим, что оператор $L\left[\mathbf{Y}\right]$ является линейным, т. к. обладает следующими свойствами:

1. $L\left[C\,\mathbf{Y}\right]=CL\left[\mathbf{Y}\right],\ \forall C\in\mathbb{R};$ (20.5)

2. $L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right].$ (20.6)

Действительно, по свойствам матриц,

1) $L\left[C\,\mathbf{Y}\right]=(C\,\mathbf{Y})'-\mathbf{A}(C\,\mathbf{Y})=C\,\mathbf{Y}'-C\,\mathbf{AY}=C(\mathbf{Y}'-\mathbf{AY})=CL\left[\mathbf{Y}\right];$

2) $L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)'-\mathbf{A}(\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2)=\mathbf{Y}_1'+\mathbf{Y}_2'-\mathbf{AY}_1-\mathbf{AY}_2=$

$$=(\mathbf{Y}_1'-\mathbf{AY}_1)+(\mathbf{Y}_2'-\mathbf{AY}_2)=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right].\ \blacksquare$$

Изучение СЛДУ будем проводить по той же схеме, что и изучение линейных дифференциальных уравнений n-го порядка: сначала изучим однородные СЛДУ, а затем – неоднородные.

20.1. Интегрирование однородных систем дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейную однородную систему

$$L\left[\mathbf{Y}\right]=\mathbf{O},\tag{20.7}$$

в которой все коэффициенты $a_{ij}(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Тогда в области

$$D=\{(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\,\big|\,x\in[a;b],\ \forall y_i\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^{\mathrm{n+1}}$$

для системы (20.7) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения и, следовательно, для любого $x_0\in[a;b]$ и любого $y_{i0}\in\mathbb{R}$ существует единственное решение системы (20.7), удовлетворяющее условию

$$y_1(x_0)=y_{10},\quad y_2(x_0)=y_{20},\quad \ldots,\quad y_n(x_0)=y_{n0}.$$

Так как оператор $L\left[\mathbf{Y}\right]$ – линейный, то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.1. *Если* $\mathbf{Y}_1$ *и* $\mathbf{Y}_2$ *– решения линейной однородной системы* (20.7)*, то* $\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2$ *и* $C\mathbf{Y}_1$ $(\forall C\in\mathbb{R})$ *тоже являются решениями линейной однородной системы* (20.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо убедиться, что $\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2$ и $C\mathbf{Y}_1$ удовлетворяют системе $L\left[\mathbf{Y}\right]=\mathbf{O}$. Из условия (20.5) получаем:

$$L\left[C\,\mathbf{Y}_1\right]=C\cdot L\left[\mathbf{Y}_1\right]=C\cdot\mathbf{O}=\mathbf{O}.$$

Из условия (20.6) получаем:

$$L\left[\mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2\right]=L\left[\mathbf{Y}_1\right]+L\left[\mathbf{Y}_2\right]=\mathbf{O}+\mathbf{O}=\mathbf{O}.\quad\blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 20.2. *Если* $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_k$ *– решения линейной однородной системы* (20.7), *то для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *линейная комбинация решений*

$$\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i = C_1 \mathbf{Y}_1 + C_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + C_k \mathbf{Y}_k$$

тоже является решением системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (20.5) и (20.6) следует справедливость равенства

$$L\left[\sum_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i\right] = \sum_{i=1}^{k} C_i L\left[\mathbf{Y}_i\right] = \sum_{i=1}^{k} C_i \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O},$$

где C_i – произвольные постоянные. Но это и означает, что $\sum\limits_{i=1}^{k} C_i \mathbf{Y}_i$ – решение однородной системы (20.7). ■

Обозначим через $S_n[a,b]$ множество матриц-столбцов порядка n, элементы которых являются решениями системы (20.7). Так как функции любого решения системы (20.7) является непрерывно дифференцируемыми, то

$$S_n[a,b] \subset D_n[a;b],$$

где $D_n[a,b]$ – множество матриц-столбцов длины n, элементами которых являются функции, непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a;b]$. Более того, в силу теоремы 20.1, $S_n[a,b]$ ***является подпространством линейного пространства*** $D_n[a,b]$. Оказалось также, что линейное пространство $S_n[a,b]$ конечномерное. Чтобы доказать это, необходимо нам сначала получить условие линейной независимости векторов пространства $S_n[a,b]$.

Возьмем в пространстве $D_n[a,b]$ n векторов:

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}. \tag{20.8}$$

Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a,b]$, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и

$$\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{Y}_n \equiv 0.$$

Это тождество означает, что система

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + \ldots + \alpha_n y_{1n} \equiv 0, \\ \alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + \ldots + \alpha_n y_{2n} \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + \ldots + \alpha_n y_{nn} \equiv 0 \end{cases} \tag{20.9}$$

имеет нетривиальные решения. А это возможно только в том случае, когда определитель матрицы системы (20.9) тождественно равен нулю.

Матрица системы (20.9)

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}} \tag{20.10}$$

называется ***интегральной матрицей***, а ее определитель называется ***определителем Вронского (вронскианом)*** векторов $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ и обозначается

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \quad \text{или} \quad W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x).$$

Таким образом, мы показали что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.3 (необходимое условие линейной зависимости n векторов пространства $D_n[a,b]$). *Если векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю*.

Теорема 20.3 дает необходимое условие линейной зависимости векторов $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$. Достаточным это условие для произвольных n элементов пространства $D_n[a,b]$ не будет, т. е. если $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n] \equiv 0$, то векторы $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ могут оказаться как линейно зависимыми, так и линейно независимыми.

ПРИМЕР 20.1. Для векторов $\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2] = \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Однако эти векторы линейно независимы, так как из $\alpha_1 \mathbf{Y}_1 + \alpha_2 \mathbf{Y}_2 \equiv 0$ следует

$$\begin{cases} \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0, \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 \equiv 0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x \equiv 0 \quad \text{или} \quad \alpha_1 x + \alpha_2 \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Но ситуация меняется, если $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – решения линейной однородной системы (20.7). Здесь справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 20.4 (условие линейной независимости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений)**.** *Если n решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейной однородной системы* (20.7) *линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$ такое, что

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = \begin{vmatrix} y_{11}(x_0) & y_{12}(x_0) & \ldots & y_{1n}(x_0) \\ y_{21}(x_0) & y_{22}(x_0) & \ldots & y_{2n}(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}(x_0) & y_{n2}(x_0) & \ldots & y_{nn}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим систему n линейных однородных уравнений, матрицу которой составляют числа $y_{ij}(x_0)$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_0) + \alpha_2 y_{12}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{1n}(x_0) = 0, \\ \alpha_1 y_{21}(x_0) + \alpha_2 y_{22}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{2n}(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 y_{n1}(x_0) + \alpha_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_{nn}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{20.11}$$

Определитель матрицы системы (20.11)

$$\det \mathbf{M} = W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = 0.$$

Следовательно, система (20.11) имеет нетривиальные решения.

Пусть $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ – одно из нетривиальных решений системы (20.11). Рассмотрим матрицу-столбец

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{Y}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n \mathbf{Y}_n.$$

Так как $\mathbf{Y}_i$ – решения линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$, то $\tilde{\mathbf{Y}}$ – решение той же системы, удовлетворяющее в силу (20.11), начальным условиям $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{O}$.

С другой стороны, однородная система $L[\mathbf{Y}] = \mathbf{O}$ всегда имеет нулевое решение $\mathbf{Y}(x) \equiv \mathbf{O}$, которое тоже удовлетворяет начальному условию $\mathbf{Y}(x_0) = \mathbf{O}$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия определяют единственное решение, получаем:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\alpha}_1 \mathbf{Y}_1 + \tilde{\alpha}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \tilde{\alpha}_n \mathbf{Y}_n = \mathbf{O},$$

причем среди коэффициентов $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ есть ненулевые. Но это означает, что $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ линейно зависимы на $[a;b]$, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, предположение было неверным и

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x) \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]. \ \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 20.5 (теоремы 20.3 и 20.4). Пусть $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – *решения системы* (20.7). *Тогда их определитель Вронского* $W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n]$ *либо тождественно равен нулю, и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно зависимы*; *либо не обращается в нуль ни в одной точке* $x \in [a,b]$, *и это означает, что решения* $\mathbf{Y}_i$ *линейно независимы.*

Следствие 20.5 позволяет доказать следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 20.6. *Пространство решений* $S_n[a,b]$ *линейной однородной системы* (20.7) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком системы, т. е.* $\dim S_n[a;b] = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Покажем, что для системы (20.7) можно найти n линейно независимых решений.

Возьмем любое $x_0 \in [a;b]$ и любой определитель Δ_n порядка n, отличный от нуля. Например, пусть

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

По теореме существования и единственности решения получаем, что существуют n решений системы (20.7)

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \ldots\ldots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

определенных в окрестности точки x_0 и удовлетворяющих условиям:

1) $y_{11}(x_0) = 1,\ y_{21}(x_0) = 0,\ \ldots\ldots\ldots,\ y_{n1}(x_0) = 0$

(где $1, 0, \ldots, 0$ – числа из первого столбца определителя Δ_n);

2) $y_{12}(x_0) = 0,\ y_{22}(x_0) = 1,\ \ldots\ldots\ldots,\ y_{n2}(x_0) = 0$

(где $0, 1, \ldots, 0$ – числа из второго столбца определителя Δ_n);

………………………………………………………………

n) $y_{1n}(x_0) = 0,\ y_{2n}(x_0) = 0,\ \ldots\ldots\ldots,\ y_{nn}(x_0) = 1$

(где $0, 0, \ldots, 1$ – числа из n-го столбца определителя Δ_n).

Для найденных таким образом решений $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) = \Delta_n \neq 0,$$

и, следовательно, по следствию 20.5, $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – линейно независимы.

2) Покажем, что любое решение однородной системы (20.7) может быть представлено как линейная комбинация ее n линейно независимых решений.

Пусть $\mathbf{Y}_1 = (y_{i1}), \mathbf{Y}_2 = (y_{i2}), \ldots, \mathbf{Y}_n = (y_{in})$ – некоторые линейно независимые решения системы (20.7), $\hat{\mathbf{Y}} = (\hat{y}_i)$ – решение системы (20.7), удовлетворяющее условию $\hat{\mathbf{Y}}(x_0) = \mathbf{Y_0}$, т. е.

$$\hat{y}_1(x_0) = y_{10},\ \hat{y}_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ \hat{y}_n(x_0) = y_{n0}.$$

Рассмотрим систему n линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} y_{10} = C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{12}(x_0) + \ldots + C_n y_{1n}(x_0), \\ y_{20} = C_1 y_{21}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{2n}(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n0} = C_1 y_{n1}(x_0) + C_2 y_{n2}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0). \end{cases} \tag{20.12}$$

Так как $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n$ – линейно независимые решения системы (20.7), то для матрицы системы $\mathbf{M}$ имеем:

$$\det \mathbf{M} = W[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_n](x_0) \neq 0.$$

Следовательно, система (20.12) имеет единственное решение $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_n$.

Рассмотрим матрицу-столбец $\widetilde{\mathbf{Y}} = \widetilde{C}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{C}_n \mathbf{Y}_n = (\widetilde{y}_i)$. В силу следствия (18.5) она будет являться решением системы (20.7), причем

$\widetilde{y}_1(x_0) = y_{10}$ (из 1-го уравнения системы (20.12)),

$\widetilde{y}_2(x_0) = y_{20}$ (из 2-го уравнения системы (20.12)),

…………………………………………………

$\widetilde{y}_n(x_0) = y_{n0}$ (из n-го уравнения системы (20.12)).

Но начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}$$

удовлетворяет и решение $\hat{\mathbf{Y}}$.

Поскольку, по теореме существования и единственности решения, начальные условия определяют единственное решение, получаем:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \widetilde{C}_1 \mathbf{Y}_1 + \widetilde{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \ldots + \widetilde{C}_n \mathbf{Y}_n = \widetilde{\mathbf{Y}}. \ \blacksquare$$

Система n линейно независимых решений линейной однородной системы порядка n (базис пространства $S_n[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений***.

Если матрицы-столбцы

$$\mathbf{Y}_1=\begin{pmatrix} y_{11}(x)\\ y_{21}(x)\\ \dots\dots\\ y_{n1}(x)\end{pmatrix},\quad \mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} y_{12}(x)\\ y_{22}(x)\\ \dots\dots\\ y_{n2}(x)\end{pmatrix},\ \dots,\ \mathbf{Y}_n=\begin{pmatrix} y_{1n}(x)\\ y_{2n}(x)\\ \dots\dots\\ y_{nn}(x)\end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений линейной однородной системы $L[\mathbf{Y}]=\mathbf{O}$, то общее решение этой системы имеет вид

$$\boxed{\mathbf{Y}=\sum_{i=1}^{n} C_i\mathbf{Y}_i}$$

или, подробнее

$$\begin{cases} y_1(x)=C_1y_{11}(x)+C_2y_{12}(x)+\ldots+C_ny_{1n}(x),\\ y_2(x)=C_1y_{21}(x)+C_2y_{22}(x)+\ldots+C_ny_{2n}(x),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n(x)=C_1y_{n1}(x)+C_2y_{n2}(x)+\ldots+C_ny_{nn}(x).\end{cases}$$

Итак, задача интегрирования линейной однородной системы свелась к отысканию фундаментальной системы ее решений. Но сделать это для произвольной системы очень сложно. Позже мы рассмотрим один класс однородных систем, для которых практически всегда удается найти фундаментальную систему решений – линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

ПРИМЕР 20.2. Доказать, что $\mathbf{Y_1}=\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}$ и $\mathbf{Y_2}=\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$ образуют фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} y_1'=y_2,\\ y_2'=-y_1.\end{cases}$$

Записать общее решение этой системы.

РЕШЕНИЕ. Имеем:

$$W[\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2]=\begin{vmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Следовательно, $\mathbf{Y}_1,\mathbf{Y}_2$ – линейно независимы (по следствию (20.7)) и образуют фундаментальную систему решений (по теореме 20.6). Поэтому общее решение можно записать в виде

$$\mathbf{Y}=C_1\mathbf{Y}_1+C_2\mathbf{Y}_2=\begin{pmatrix} C_1\cos x+C_2\sin x\\ -C_1\sin x+C_2\cos x\end{pmatrix}.\ \diamond$$