Математический анализ. Семестр 3.
(72 часа лекций , 72 часа практических занятий).

Перечень тем и вопросов, выносимых на экзамен.

Осенняя мини-сессия

1. Пространство $\mathbb{R}^n$.
2. Топология пространства $\mathbb{R}^n$.
3. Функции многих переменных. Предел функций многих переменных.
4. Непрерывность функций многих переменных.
5. Свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность функций многих переменных.
6. Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных. Частные производные. Дифференцируемость. Существование производных и дифференцируемость. Дифференциал.
7. Производная по направлению и градиент.
8. Теоремы о среднем.
9. Частные производные и диференциалы высших порядков.
10. Формула Тейлора.
11. Локальный экстремум.
12. Неявные функции. Теорема о неявной функции.
13. Теорема о системе неявных функций.
14. Дифференцируемые отображения. Теорема об обратном отображении.
15. Замена переменных в выражении содержащем производные.
16. Зависимость функций.
17. Условный экстремум. Теорема Лагранжа.
18. Достаточные условия для условного экстремума.

Зимняя мини-сессия

19. Мера Жордана.
20. Двойной интеграл Римана.
21. Тройной и n-кратный интеграл Римана.
22. Свойства кратного интеграла.
23. Теорема Фубини.
24. Геометрический смысл модуля якобиана отображения.
25. Замена переменных в кратном интеграле.
26. Приложения кратного интеграла.
27. Несобственный кратный интеграл.
28. Основные свойства несобственного кратного интеграла.
29. Собственные интегралы, зависящие от параметров.
30. Свойства собственных интегралов, зависящих от параметров. Равномерная сходимость и свойство непрерывности.
31. Дифференцируемость и интегрируемость интегралов, зависящих от параметров. Правило Лейбница.
32. Несобственные интегралы, зависящие от параметров.
33. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметров. Равномерная сходимость и свойство непрерывности.
34. Дифференцируемость и интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметров. Правило Лейбница.

35-36. Интегралы Эйлера.

Рекомендуемая литература.

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. – Т. 1,2,3. – М.: Высшая школа. – 1989.

2. Зорич В.А. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука. – 1984.

3. Никольский С.М. Курс математического анализа. – Т. 1,2. – М.: Наука. – 1983.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 1,2,3. – – М.: Наука. – 1970.

5. Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. – Т. 1,2,3. – М.: Высшая школа. – 1985.

Список типовых теоретических задач

1. Дайте определение ...
2. Сформулируйте и докажите теорему...

Список типовых практических задач осенней мини-сессии

1. Докажите, что множество является областью.
2. Докажите, что множество является компактным.
3. Найдите предел последовательности в $\mathbb{R}^n$.
4. Найдите повторный предел или докажите, что он не существует.
5. Найдите двойной предел или докажите, что он не существует.
6. Найдите кратный предел или докажите, что он не существует.
7. Исследуйте функцию на непрерывность.
8. Исследуйте функцию на равномерную непрерывность.
9. Найдите частную производную, или докажите, что она не существует.
10. Исследуйте функцию на дифференцируемость.
11. Найдите дифференциал.
12. Найдите производные функции старших порядков.
13. Разложите функцию по формуле Тейлора в заданной точке.
14. Исследуйте функцию на локальный экстремум.
15. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на множестве.
16. Найдите матрицу Якоби и якобиан отображения.
17. Найдите обратное отображение к заданному.
18. Исследуйте систему функций на зависимость.

Список типовых практических задач зимней мини-сессии

1. Найдите условный экстремум функции
2. Докажите, что множество является измеримым по Жордану.
3. Найдите меру Жордана плоского множества.
3. Найдите меру Жордана трехмерного множества.
4. Составьте интегральную сумму для двойного интеграла Римана.
5. Составьте интегральную сумму для тройного интеграла Римана.
6. Докажите, что функция интегрируема по Риману.
7. Найдите двойной интеграла Римана как предел интегральных сумм.
8. Найдите тройной интеграла Римана как предел интегральных сумм.
9. Вычислите двойной интеграла Римана с помощью теоремы Фубини.
10. Вычислите тройной интеграла Римана с помощью теоремы Фубини.
11. Сделайте замену переменных двойном интеграле.
12. Сделайте замену переменных тройном интеграле.
13. Исследуйте кратный несобственный интеграл на сходимость.
14. Вычислите кратный несобственный интеграл или докажите его расходимость.
15. Исследуйте собственный интеграл, зависящий от параметра на непрерывность.
16. Исследуйте собственный интеграл, зависящий от параметра на дифференцируемость.
17. Вычислите производную собственного интеграла, зависящего от параметра, по правилу Лейбница.
18. Исследуйте несобственный интеграл, зависящий от параметра на непрерывность.
19. Исследуйте собственный интеграл, зависящий от параметра на дифференцируемость.
20. Вычислите производную несобственного интеграла, зависящего от параметра, по правилу Лейбница.
21. С помощью интегралов Эйлера, вычислите или упростите несобственные интегралы, зависящий от параметра.

"Демо-версия" билета осенней-минисессии

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(семестр 3, Минисессия 1, 2013 г., вариант I)

1. Дайте определение области в $\mathbb{R}^2$ (3 балла).

2. Сформулируйте и докажите теорему Кантора для функций двух переменных (3+4=7 баллов).

3. Для функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0, \end{cases}$$

а) найдите или покажите что не существуют следующие двойной и повторные пределы

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y), \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

и исследуйте функцию $f(x,y)$ на непрерывность в $\mathbb{R}^2$ (5 баллов);

б) найдите первые частные производные функции $f(x,y)$ и ее стационарные точки в $\mathbb{R}^2$ (5 баллов);

в) выясните, является ли $f(x,y)$ дифференцируемой в $\mathbb{R}^2$ (5 баллов);

г) найдите максимум и минимум функции при условии, что $x^2 + y^2 = 1$ (5 баллов).

"Демо-версия" билета зимней-минисессии

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(семестр 3, Минисессия 1, 2013 г., вариант I)

1. Дайте определение двойного интеграла Римана (3 балла).

2. Сформулируйте и докажите теорему Фубини для двойного интеграла (3+4=7 баллов).

3. Вычислите двойной интеграл по четырехугольнику D, ограниченной прямыми $\{y = x\}$, $\{y = x + 4\}$, $\{y = 4\}$, $\{5y = x\}$,

$$\iint_D (xy + 1)dxdy.$$

Графически обоснуйте пределы интегрирования в повторной интеграле (13 баллов).

4. С помощью тройного интеграла найдите объем тела, ограниченного плоскостями $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$, $\{x+y+z = 1\}$, $\{3x+2y+z = 1\}$. Графически обоснуйте пределы интегрирования в повторной интеграле.

5. Исследуйте двойной несобственный интеграл на сходимость (10 баллов):

$$\iint_{0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1} \frac{\sin(1 + x + y)}{(x^2 + y^2)^{1/3}}\, dx\, dy.$$