ТРУДЫ XLII КРАЕВОЙ НАУЧНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ И КОМПЬЮТЕРНЫМ НАУКАМ

Красноярск
ИПК СФУ
2009

УДК 51:004(045)
ББК 22.1-32.93
Т78

Труды XLII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам/ Сиб. федер. ут-т; отв. ред. Р.В. Сорокин. - Красноярск: ИПК СФУ, 2009.-52с.

В сборнике представлены материалы докладов XLII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам, проведенной 3 апреля 2009 г.

Содержание

Nataly Bazhenova Comparative Analysis of Approaches for the Determination of Generalized Inverses 5
Аксенова Е.Г. Применение эвентологических методов в кредитной сфере 9
Андрейчикова Т.В. Применение эвентологических методов для разработки маркетинговой стратегии и оценки её эффективности 12
Баканова Е.В. Эвентологическое описание рыночных событий . 13
Бендер О.А. Об одной обратной задаче коши для нелинейной параболической системы уравнений 16
Богатырёва Н.Н. Задача определения оптимального кредитного продукта для потребителя 18
Гульденбальк Ю.В. Принцип симметрии для решений уравнения Гельмгольца 20
Звонков В.В. Генетический алгоритм с вероятностным выбором селекции 22
Зотов И.Н. Локальные автоморфизмы нильпотентных алгебр матриц малых степеней 24
Зубченкова Е.В. О дзета-функции, ассоциированной с набором полиномов многих переменных 26
Козлова Л.В. Краткий обзор проблем Гильберта 27
Коновалова Ю.А. Исследование влияния антропогенного загрязнения воздуха на заболеваемость населения районов Красноярского края 29
Кригер Е.Н. Об идентификации функции источника параболического уравнения в двумерном случае 30
Кузоватов В.И.Принцип симметрии для решений уравнения Гельмгольца 32
Михальченко А.Г. О кратности нуля биномиальных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ 34
Никульская Н.А. Вычислительная сложность алгоритма Магу (K. Maghout) 36
Омельчук Т.А. Выпуклые $(3, 1)$-правильногранники, составленные из наклонной призмы Q_1 и трехскатного купола M_4 . . 38
Семенкина М.Е. О применении алгоритма генетического программирования с оператором равномерного скрещивания . . 39
Терновская М.А. Решение многокритериальных задач оптимизации генетическими алгоритмами с двумя классами хромосом 41

Тимофеенко И.А. Порождающие множества инволюций линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел 43
Чуверова Т.А. Стохастическое прогнозирование динамики и структуры семьи с использованием конечных цепей Маркова . . . 44
Шабалов А.А. СППР на базе многоагентных стохастических алгоритмов для управления реальными инвестициями производственного предприятия 46
Щербакова Т.А. Клеточные автоматы и их применение 48
Шерыкалова М.И. Анализ методов оценки риска банкротства предприятия 50

COMPARATIVE ANALYSIS OF APPROACHES FOR THE DETERMINATION OF GENERALIZED INVERSES

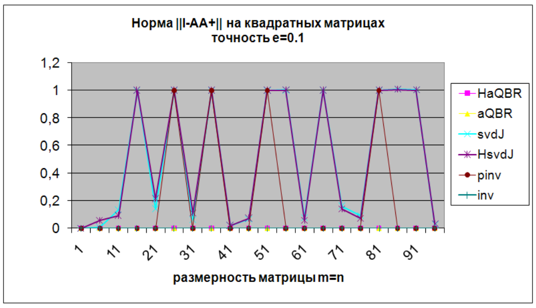
Nataly Bazhenova
Siberian Federal University, Institute of mathematics
Scientific adviser - Prof., Ph.D., Boris Oleinikov.

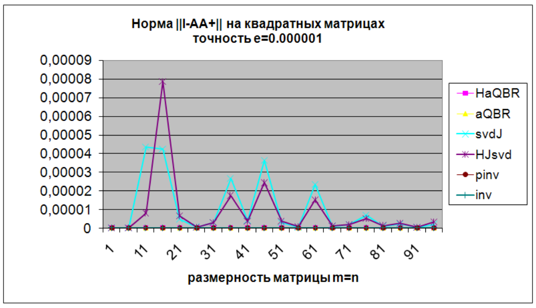
Real-life problems often require finding a solution satisfying a large number of possibly contradictory conditions. If such a problem comes to a system of linear equations, it can turn out to be inconsistent in general: either overdetermined or underdetermined. In either case standard techniques of finding a solution are inapplicable and it can be solved only by some way of a compromise - when all conditions are met only to some extent and not fully.

As it is known, for any $n \times m$ matrix A there exists such a matrix A^+ that for any column vector b of dimension n, $\hat{x} = A^+b$ is a vector with a smallest length among all vectors minimizing a residual $\|b - Ax\|^2$. Thus, in general the problem of solving SLE $Ax = b$ comes to a problem of finding the pseudoinverse. To solve this problem a number of methods were developed. Therefore it becomes necessary to assess the efficiency of these methods, i.e. the time of completion of those algorithms and their precision of computing the pseudoinverse. The following numerical methods of computing the pseudoinverse were chosen for a comparative analysis:

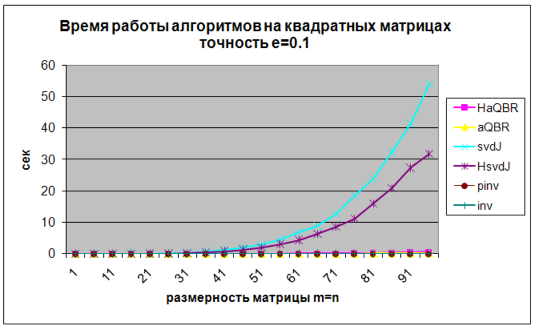
1. Singular value decomposition based on Jacobi rotation (svdJ)
2. Singular value decomposition based on Jacobi rotation and Householder transformation (HsvdJ)
3. $\alpha Q \beta R$ algorithm (Greville's algorithm)
4. Built-in MATLAB function pinv (partially)
5. $\alpha Q \beta R$ algorithm with Householder transformation (partially) (HaQBR)

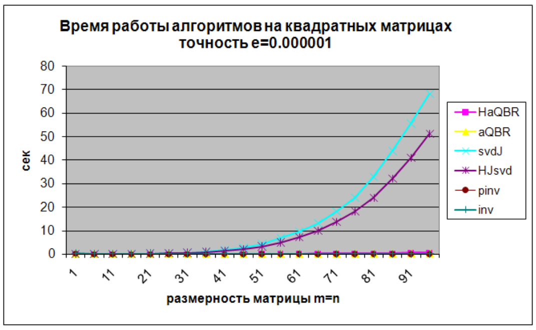
First of all, the case of non-degenerate matrix was examined, when according to the theory the pseudoinverse is equal to the inverse matrix. Results showed (matrices of dimensions from 1×1 to 96×96), that the precision of computing the pseudoinverse to a great extent depends on the prescribed tolerance ϵ for algorithms (1), (2), (4) and practically doesn't depend on it for algorithsms (3), (5), as it is shown on the diagrams:





Another parameter of efficiency assessment - the time required for the completion of the algorithms - is exponentially increasing for the class of algorithms, based on Jacobi rotation. As it can be seen on the diagram, the time of completion depends on prescribed tolerance for algorithms (1), (2) whereas such dependence is practically non-existent for algorithms (3), (5), (4) :





The detailed analysis was made on how the time of completion of algorithms t changes when the matrix dimension changes from 1×1 to 1000×1000. The time of completion is clearly increasing for all the 3 algorithms. Changing the general number of elements of matrix from 1 to 10^6 changes the time of completion of the algorithm (3) in the range $\left(0.0000; 6 \cdot 10^2\right)$ sec. The upper limit of the interval of the time of completion of the algorithm (1) is much greater - $\approx 4 \cdot 10^4$ sec., while the completion time of the algorithm (2) is limited by $1.5 \cdot 10^5$ sec. It should be pointed out that the built-in MATLAB function pinv requires less of time for computing, and that is, undoubtedly, determined by more optimal realization of SVD and probably is related to lower level of programming language, used in creating this program.

Changing only one element of source matrix changes all the elements of generalized inverse and therefore every certain element of pseudoinverse depends on all elements of the source matrix:

$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & \mathbf{3} & 2 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & \mathbf{12} & 2 \end{matrix}$
The Generalized Inverse of Matrix A is:	The Generalized Inverse of Matrix A is:
$\begin{matrix} 0.8334 & -0.6667 & 0.16667 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0.8333 & -0.6667 & 0.1667 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0.3697 & 0.2879 & -0.0788 \\ -0.1273 & -0.0909 & 0.1091 \\ 0.3697 & 0.2879 & -0.0788 \end{matrix}$

Taking into consideration the above-mentioned fact, the stability of pseudo-inverted matrices, computed by using different algorithms, and their sensitivity to small perturbations were analyzed as well. The dynamics of increasing and decreasing of the residual $\|I - AA^{+}\|$ for algorithms (1), (2), (3) with approximation of 2 columns to linearly dependent using as an example a source matrix A of dimension 3×7 with initially only 3 linearly independent columns and prescribed constant tolerance e=0,000001, showed that methods of the Jacobi rotation class are more sensitive to small perturbations in source matrix than method (3) (Pic. 1).

During the analysis of received results based on the values of the $\|I - AA^{+}\|$ two hypothesizes were formulated:

Hypothesis 1

For any $n \times m$ matrix A with real-valued elements and Frobenius norm $\|A\|_{\mathcal{F}}$ if $\|I - AA^{+}\|_{\mathcal{F}} \geq 1$, then

1. $\|I - AA^{+}\|_{\mathcal{F}}^{2} \in \mathbb{N}/\left\{0\right\}$
2. $\max \|I - AA^{+}\|_{\mathcal{F}}^{2} = m - 1$

Hypothesis 2 For any $n \times m$ matrix A with real-valued elements and Frobenius norm $\|A\|_{\mathcal{F}}$

$$\operatorname{rank} A = \begin{cases} \min\left(m, n\right) & \text{if } \|I - AA^{+}\|_{\mathcal{F}} < 1 \\ m - \|I - AA^{+}\|_{\mathcal{F}}^{2} & \text{if } \|I - AA^{+}\|_{\mathcal{F}} \geq 1 \end{cases}$$

Symbolic computing was done to confirm the formulated hypothesis for the following special cases:

- 2×2 matrix with 1 linearly dependent column (rank = 1)
- 3×3 matrix with 1 linearly dependent column (rank = 2)
- 3×3 matrix with 2 linearly dependent columns (rank = 1)
- 4×5 matrix with 3 linearly dependent columns (rank = 2)

In addition to this, C++ program «Tester», which allows the user to confirm these results by himself, was written.

References

[1] Albert A *Regression, Pseudoinverse and Recurrent Estimation, Moskow, Nauka, 1977, 224p. (Russian)*
[2] Gantmaher F.R.*The Matrix Theory. Moskow, Nauka, 1973, 280p. (Russian)*
[3] Fan Y., Kalaba R. *Dynamic programming and pseudo-inverses, School of Engineering, Department of Economics, University of Southern California.*
[4] F. Carlson, *Using the singular value decomposition, Ientilucci, Center for Imaging Science, Rochester Institute of Technologym May 29, 2003//*
[5] Adi Ben-Israel, *The Moore of the Moore-Penrose inverse// The Electronic Journal of Linear Algebra, volume 9. – August 2002 – C. 150-157.*

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В КРЕДИТНОЙ СФЕРЕ

Е.Г.Аксенова
Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель - к.ф.-м.н. Е.Е. Голденок

Банк ставит своей задачей получение прибыли, которая обеспечивает устойчивость и надежность его функционирования и может быть использована для расширения его деятельности. Но ориентация на прибыльность операций всегда связана с различными видами рисков, которые при отсутствии системы их ограничения могут привести к убыткам. Поэтому любой банк при определении стратегии своей деятельности формирует такую систему мероприятий, которая с одной стороны, направлена на получение прибыли, а, с другой стороны, максимально учитывает возможности предотвращения потерь при осуществлении банковской деятельности.

Кредитная операция является одной из главных банковских операций. Отметим, что именно кредитная деятельность - эта та деятельность, ради которой банк и создается как кредитная организация. И хотя с течением времени банки, безусловно, расширяют комплекс оказываемых услуг, именно доходы от кредитных операций остаются для них основным источником получения прибыли.

Любое кредитование связано с определенным риском, тем более в условиях развивающейся рыночной экономики. Когда, на любом этапе может возникнуть риск.

Управление рисками является основным в банковском деле. Хотя первоначально банки только принимали депозиты, они быстро созрели, став посредниками при передаче средств, тем самым приняв на себя другие риски, например кредитный. Кредит стал основой банковского дела и базисом, по которому судили о качестве и о работе банка. В настоящее время кредит имеет огромное значение. Он решает проблемы, стоящие перед всей экономической системой. Так при помощи кредита можно преодолеть трудности, связанные с тем, что на одном участке высвобождаются временно свободные денежные средства, а на других возникает потребность в них. Кредит - это предоставление товаров или денег в долг (в рассрочку). Как правило, кредит предоставляется с уплатой процентов. Кредит является неотъемлемым элементом товарно-денежных отношений. Особого внимания заслуживает процесс управления кредитным риском, потому что от его качества зависит успех работы банка. Ключевыми элементами эффективного управления являются: хорошо развитые кредитная политика и процедуры; хорошее управление портфелем; эффективный контроль за кредитами.

Кредитный риск - риск банка-кредитора, связанный с непогашением заемщиком основного долга и процентов по выданным кредитам. Именно по причине неплатежеспособности заемщики не могут выполнять обязательства по кредитному договору. До недавних пор кредитный энтузиазм банкиров сдерживался невозможностью быстро оценить кредитоспособность заемщика. Кредитный потенциал заемщика каждый банк оценивает посвоему. Еще совсем недавно любой претендент на кредит должен был пройти долгую и мучительную процедуру проверки - его финансовую надежность исследовали по самым разным параметрам. От него требовалось собрать массу справок и документов, подтверждавших платежеспособность. В результате предоставление кредита растягивалось как минимум недели на две.

Ситуация изменилась, как только в нашу жизнь вошел кредитный скоринг. Теперь все больше банков пользуются технологией "быстрой оценки"не только при выдаче потребительских кредитов физическим лицам, но и кредитуя малый бизнес. Скоринг представляет собой математическую или статистическую модель, с помощью которой на основе кредитной истории "прошлых"клиентов банк пытается определить, насколько велика вероятность, что конкретный потенциальный заемщик вернет кредит в срок.

Предлагается метод определения кредитоспособности отдельного клиента при помощи метода эвентологического скоринга, который обобщает традиционный банковский скоринг. В отличие от традиционного банковского скоринга эвентологический скоринг позволяет учитывать структуру зависимостей базовых событий, предлагая три формулы для определения вероятности целевого события (возврата кредита) в случае трех основных структур зависимостей базовых событий: наименее пересекающейся, независимой, вложенной.

Однако, чтобы определить структуру базовых событий, анкета, предлагаемая клиенту, должна содержать не только вопросы о базовых событиях, но и вопросы о пересечении базовых событий. В принципе это вполне возможно, но в этом случае значительно возрастет количество вопросов в анкете. В реальной банковской деятельности анкета составлена таким образом, что определить эту структуру не представляется возможным. В данной работе представлены результаты - вероятности возврата кредита клиентами, вычисленные для трех структур зависимостей базовых событий (наименее пересекающейся, вложенной, независимой).

К сожалению, банки и банковские системы периодически потрясают банкротства и кризисы. Управление кредитными рисками является основным в банковском деле. Банку необходимо строго отслеживать капитал, который предоставляется для кредитования для того, чтобы предотвратить чрезмерную концентрацию кредитов, предоставляемых в одной отрасли, большие портфели неработающих кредитов, убытки по кредитам и неплатежеспособность. Таким образом, с максимальной выгодой для банка менеджеры должны распределить определенный капитал между различными видами кредита. Каждый кредит характеризуется вероятностью возвратности, определенной с помощью метода эвентологического скоринга. Предоставление кредита зависит от характеристик клиента, т.е кредитоспособности, т.к выданные банком деньги клиент должен вернуть. В реальной жизни существуют случаи, когда клиенты не возвращают деньги банку, тогда вероятность возврата отдельного вида кредита зависит от того, как поведет себя клиент.

Сформируем кредитный портфель, состоящий из трех видов кредита, для Енисейского Объединенного банка. Методом эвентологичекого скоринга определим вероятность возвратности каждого из видов для трех различных структур зависимостей базовых событий. Решения прямой эвентологической задачи Марковица (построение трех эвентологических пуль Марковица) позволит определить оптимальное распределение капитала между видами кредита банка в случае трех структур зависимостей базовых событий. А каждой точке пули будет соответствовать определенный портфель кредитов. Руководство банка может выбрать оптимальный с точки зрения вероятности возвратности и риска кредитный портфель. В результате увидим, что наиболее выгодные портфели можно составить из множеств событий с непересекающейся структурой. Непересекающиеся события имеют отрицательные ковариации и статистически отталкиваются друг от друга. Наименее выгодными являются портфели, составленные из событий с вложенной структурой. Такие события имеют положительные ковариации и статистически притягиваются друг к другу.

Список литературы

[1] О.Ю. Воробьев. *Эвентологические структуры и эвентологический скоринг, ФАМ Записки, Красноярск: ИВМ СО РАН, 2004-№8, с73-111.*

[2] О.Ю. Воробьев. *Эвентология//Эвентология и ее применение. Красноярск,2007, с273-287*

[3] О.Ю. Воробьев, С.В. Клочков. *Эвентология риска// Эвентологический анализ задач распределения и заполнения ресурсов. Красноярск,2007.*

ПРИМЕНЕНИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ МАРКЕТИНГОВОЙ СТРАТЕГИИ И ОЦЕНКИ ЕЁ ЭФФЕКТИВНОСТИ

Т.В. Андрейчикова
Сибирский федеральный университет, Институт математки
Научный руководитель - доц. Е.Е. Голденок

В работе рассматривается деятельность фирмы-дистрибьютера. На конкурентоспособность фирмы влияет множество факторов. В зависимости от выбранной руководством фирмы стратегии разрабатывается комплекс управленческих решений для данной фирмы.

В первой части работы определяется наиболее выгодное решение на основе балльных оценок экспертов. Для этого используется модифицированная модель БКГ, основанная на трех показателях: затраты на проведение мероприятия, эффект от внедрения и устойчивость положения на рынке.

Матрица БКГ - это трехмерная матрица, её координатами служат эти комплексные показатели, каждый из которых характеризуется набором критериев. Методика расчета показателей основана на балльных оценках критериев и их коэффициентах значимости, устанавливаемых экспертами. В качестве экспертов могут выступать специалисты службы перспективного развития, отдела маркетинга и руководители фирмы.

На основе матрицы БКГ предлагается составить матрицу выигрышей. Затем полученная матричная игра приводится к задаче линейного программирования, решение находится симплексным методом.

Во второй части работы предлагается провести анализ качества работы экспертов. Для этого используется аналог классической задачи Марковица из портфельного анализа - эвентологическая задача Марковица. В результате решения этой задачи получается эвентологическая пуля, каждой точке которой соответствует определенный набор некоторых мероприятий по повышению конкурентоспособности фирмы. Если точка, соответствующая оценкам экспертов, оказывается вблизи оптимальной границы, то можно считать, что эксперты предложили "правильный набор управленческих решений", правильно оценили комплексные показатели.

Список литературы

[1] Б. Кузин, В. Юрьев, Г. Шахдинарев. *Методы и модели управления фирмой.// СПб:Питер, 2001.-432с.*

[2] О.Ю. Воробьев. *Эвентология//Сиб. фед. ун-т.-Красноярск, 2007, 435с.*

ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РЫНОЧНЫХ СОБЫТИЙ

Е.В.Баканова
Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель - к.ф.-м.н. Е.Е. Голденок

Математическая Эвентология — новое направление в теории вероятностей, изучающее события и их взаимодействие. Эвентология предлагает перейти на другой уровень анализа: вместо вероятностей событий или случайных величин (на числовом уровне), предлагается анализировать сами события, соответствующие этим вероятностям или случайным величинам, иными словами перейти с числового уровня на уровень множеств (событий). На сегодняшний день, одной из важных проблем в эвентологии является изучение структур зависимостей событий. Структуры зависимостей событий могут быть самыми разнообразными: от наименее пересекающихся до совершенно противоположных им вложенных. В случае с наименее пересекающимися событиями наступление одного события исключает наступление другого, вложенными же являются только те события, наступление одного из которых влечёт наступление другого события. Среднее же в этом ряду занимает структура независимых событий, вероятность пересечения которых равна произведению их вероятностей. Одним из наиболее ярких примеров, демонстрирующих данное разнообразие структур зависимостей событий, является товарный рынок. С точки зрения эвентологии любой рынок товара — это всегда событийный рынок: рынок событий – спроса и событий – предложения данного товара. Оба события: событие – спрос и событие – предложение являются результатом деятельности разумных субъектов (агентов) участников рынка. Эта деятельность связана с товаром, поэтому любой событийный рынок определяется и товаром и некоторым множеством агентов, имеющих отношение к данному товару. Иными словами, основываясь на базовом эвентологическом понятии события, которое определяется как способ сосуществования бытия и агента, мы можем говорить, что событие – спрос и событие – предложение возникает тогда и только тогда, когда происходит взаимодействие агента (разумного субъекта) с окружающей средой (бытием). Данный эвентологический взгляд на общеизвестное понятие рынка, которое в классической экономической теории определяется как: совокупность форм и организаций сотрудничества людей друг с другом, предназначенных для того, чтобы свести вместе в коммерческих целях продавцов и покупателей и дать возможность первым продать, а вторым - купить товары; позволил построить графическое соотношение кривых спроса и предложения относительно ценового фактора в ситуации рыночного взаимодействия (крест Маршалла) для любой структуры зависимостей событий, что существенно расширило классические представления о рыночном конфликте спроса и предложения. А именно, в ходе построения эвентологической модели рынка вместо одной классической точки равновесия (в классической точке равновесия событие – спрос и событие – предложение совпадают, и их вероятности равны) был получен целый интервал равновесных цен, который определяется максимумом совпадения и минимумом различия события спроса и предложения. Таким образом, были получены три точки, которые различаются между собой. Пересечение кривых спроса и предложения говорит только о совпадении вероятностей событий. В то время как максимальная вероятность покупки – продажи (пересечение спроса и предложения), а также минимальная вероятность неудовлетворённого спроса и невостребованности предложения достигаются при других значениях цены товара. Интервал равновесных цен может вовсе не содержать классическую точку равновесия. При изменении структуры зависимостей событий интервал равновесных цен меняется. Рассматривая структуры взаимодействия различных событий нельзя забывать о том, что данные события, а именно событие – спрос и событие – предложение, не могут существовать без рыночного агента, в силу того, что они являются результатом их деятельности. В свою очередь "внутри" каждого разумного субъекта (рыночного агента) постоянно функционирует так называемый субъективный рыночный механизм, который формирует индивидуально для каждого субъекта конкретную модель товарного рынка, в соответствии с его вкусами и предпочтениями. Каждое "со-бытие", связанное с товаром определяется колмогоровскими событиями: спроса *(d-demand)* товар x, предложения *(s-supply)* товара x, восприятия *(p-perhaps)* товара x, деятельности *(a-activity)* над товаром x. Таким образом, сосуществование бытия и агента означает, что агент создаёт и/или воспринимает событие, связанное с товаром, что существенно усложняет структуру зависимостей самих событий. В связи с этим, основываясь на базовом эвентологическом принципе дуальности события, построена интерпретационная модель рыночных событий – событийная модель пространства исходов рыночного бытия для производителя и потребителя товара. Данная модель демонстрирует некоторые известные состояния рынка, которые возникают в результате наступления четырех рыночных событий (события-спроса *(d)*, события-предложения *(s)*, события-восприятия *(p)*, события-деятельности *(a)*), создаваемых как производителем товара, так и потребителем. Базовые события: событие – спрос, событие –

не спрос, событие – предложение и событие – не предложение, в результате взаимодействия между собой приводят к наступлению таких событий как: событие неудовлетворённое предложение для потребителя/производителя, событие неудовлетворённый спрос для потребителя/производителя, событие компромисс для потребителя/производителя и событие отсутствие рынка. Данные события описывают четыре общих возможных ситуаций на рынке, в условиях которых могут находиться потребитель/производитель. В зависимости от того с какой рыночной ситуацией сталкивается рыночный агент (потребитель/производитель) формируется его индивидуальная "внутренняя" модель рынка. Взаимодействуя между собой субъективные модели, в зависимости от наступления, а также не наступления таких событий как: событие – деятельность/событие – не деятельность и событие – восприятие/событие – не восприятие, в условиях конкретного состояния рынка приводят к более конкретным экономическим ситуациям (событиям), характеризующим эффективность взаимодействия спроса и предложения. К примеру, в ситуации рыночного компромисса для потребителя при одновременном наступлении события – восприятия и события – деятельности рыночного агента (потребителя), мы можем говорить о наступлении события – терраски — "Сделка". При наступлении данного события потребитель и производитель достигают согласования уровня цены, по которой производитель готов продать данный товар, а покупатель готов его купить. Иными словами совершается сделка. Всё пространство исходов рыночного бытия, в результате взаимодействия события – спроса, события – предложения, события – деятельности и события – восприятия, разбивается на 16 террасок, каждая из которых свидетельствует о наступлении конкретного рыночного события, аналогичного приведенному выше. В результате, в данной модели каждой из 16-ти террасок поставлено в соответствие известное из экономики состояние рынка. Данное сопоставление не является однозначным. Оно лишь отображает одну из возможных интерпретаций наступления конкретного события-терраски.

Список литературы

[1] Голденок Е.Е. *Eventological models of market behavior under uncertainty, Сибирский федеральный университет, 2009.*

[2] Воробьев О.Ю. *Эвентология//Сибирский федеральный университет, Красноярск, 2007. с.31-58.*

[3] Липсиц И.В. *Экономика без тайн//Москва "Дело", 1993.*

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

О.А.Бендер

Сибирский федеральный университет, Институт математки

Научный руководитель - к.ф.-м.н. Т.Н. Шипина

В работе исследуется разрешимость обратной задачи для нелинейной параболической системы уравнений с данными Коши. Обратные задачи для систем составного типа исследовались в работах [1],[2]. Предполагается, что неизвестный коэффициент имеет вид $g(t)m_1(t,x)$, где $g(t)$ — неизвестная функция, а $m_1(t,x)$ — известная. "Локальная"разрешимость обратной задачи установлена в классе гладких ограниченных функций.

В полосе $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|t \in [0,T], x \in E_1\}$ рассматривается задача нахождения действительнозначных функций $U(t,x)$, $V(t,x)$, $g(t)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + UV + b_{11}(t)U + b_{12}(t)V + m_1(t,x), \\ V_t = V_{xx} + b_{21}(t)U + b_{22}(t)V + g(t)m_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

начальным условиям

$$U(0,x) = U_0(x),\ \ V(0,x) = V_0(x),\ \ x \in E_1, \tag{2}$$

и условию переопределения

$$V(t,0) = \beta(t),\ \ t \in [0,T], \tag{3}$$

где $b_{11}(t), b_{12}(t), b_{21}(t), b_{22}(t), m_1(t,x), m_2(t,x), U_0(x), V_0(x), \beta(t)-$ заданные действительнозначные функции.

Относительно входных данных предполагаем

$$b_{ij}(t) \in C([0,T]), \quad \beta(t) \in C^1([0,T]), \quad |m_2(t,0)| \geq \delta > 0,$$

$$U_0(x) \in C^6(E_1), \qquad V_0(x) \in C^6(E_1), \tag{4}$$

$$m_i(t,x) \in C^{0,6}(\Pi_{[0,T]}), \quad i = 1,2, \quad j = 1,2.$$

$$|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_0(x)| + |\frac{\partial^k}{\partial x^k}V_0(x)| + \sum_{i=1}^{2} |\frac{\partial^k}{\partial x^k}m_i(t,x)| \leq C, k = \overline{0,6}. \tag{5}$$

Считаем, что выполнено условие согласования $V_0(0) = \beta(0)$.

Обозначим

$Z_{[0,t^*]} = \{U(t,x), V(t,x), g(t) | U \in C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}), V \in C^{1,4}_{t,x}(\Pi_{[0,t^*]}),$ $g(t) \in C([0,t^*])\}$, где $t^* \in [0,T]$ и определяется соотношением $e^{2M(S(0)+1)t^*} \leq 2,\ S(0) = \sum_{k=0}^{4} \Big(\sup_{x\in E_1} \Big| \frac{d^k}{dx^k} U_0(x) \Big| + \sup_{x \in E_1} \Big| \frac{d^k}{dx^k} V_0(x) \Big| \Big),$

$$M = \max\{1 + \max_{t\in[0,T]} |b_{12}(t)| + 2 \max_{t\in[0,T]} |b_{21}(t)|; \max_{t\in[0,T]} |b_{11}(t)| + \max_{t\in[0,T]} |b_{22}(t)|;$$

$$\sup_{\Pi_{[0,T]}} |m_1(t,x)| + \sup_{\Pi_{[0,T]}} |m_2(t,x)| \max_{t\in[0,T]} |m_2^{-1}(t,0)| \max_{t\in[0,T]} |\beta^{'}(t)|\}.$$

Используя условие переопределения (3) неизвестный коэффициент $g(t)$ во втором уравнении системы (1) заменяется на выражение

$$g(t) = \frac{\beta^{'}(t) - V_{xx}(t,0) - b_{21}(t)U(t,0) - b_{22}(t)\beta(t)}{m_2(t,0)}. \tag{7}$$

В итоге имеем прямую задачу Коши для системы дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} U_t = U_{xx} + UV + b_{11}(t)U + b_{12}(t)V + m_1(t,x), \\ V_t(t,x) = V_{xx} + b_{21}(t)U + b_{22}(t)V + \\ \qquad + m_2(t,x) m_2^{-1}(t,0)(\beta^{'}(t) - V_{xx}(t,0) - b_{21}(t)U(t,0) - b_{22}(t)\beta(t)), \end{cases}$$

$$U(0,x) = U_0(x),\ \ V(0,x) = V_0(x).$$

В основе доказательства теоремы о разрешимости полученной прямой задачи лежит метод слабой аппроксимации [3].

Теорема. *Пусть выполняются условия (4),(5). Тогда существует и единственно решение $U(t,x), V(t,x), g(t)$ задачи (1)–(3) в классе $Z_{[0,t^*]}$, удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{k=0}^{2} (|\frac{\partial^k}{\partial x^k} U(t,x)| + |\frac{\partial^k}{\partial x^k} V(t,x)|) \leq C, (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}.$$

.

Список литературы

[1] Yu.Ya. Belov, T.N. Shipina. *The problem of determining the source function for a system of composite type //I.Iuv.Ill-Posed.Problems. –1998. –V. 6. – № 4. –P. 287–308.*

[2] Р.В. Сорокин, Т.Н. Шипина. *О разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа//Вычислительные технологии. 2003. т.8, ч.3. с.139-146.*

[3] Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. *Метод слабой аппроксимации., КрасГУ, 1999.*

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КРЕДИТНОГО ПРОДУКТА ДЛЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

Н.Н.Богатырёва
Сибирский федеральный университет, Институт математки
Научный руководитель - к.ф.-м.н. И.В. Баранова

Обычно каждым банком предлагается достаточное количество кредитных продуктов с различными условиями. Очевидно, что перед потребителем возникает проблема определения оптимального кредитного продукта (или приближённых к нему) с точки зрения процентной ставки, единовременной комиссии за выдачу кредита, штраф за досрочное погашение кредита и др. Значит перед потребителем стоит задача: проранжировать все предлагаемые кредитные продукты по указанным признакам, то есть определить какие из них лучше, а какие хуже отвечают данным признакам.

Система кредитных продуктов, рассматриваемая в работе, представляет собой сложную систему, а сами кредитные продукты - её элементы. Сложная система - совокупность большого числа элементов, обладающая сложной структурой зависимостей между ними. Поведение всей системы определяется поведением каждого её элемента. Любой кредитный продукт может быть представим в виде множества показателей, определяющих его. Довольно часто на практике встречается ситуация, когда поведение сложной системы характеризуется разнотипными данными, одни из которых являются числовыми, а другие множественными. Трудность изучения подобных систем обусловлена большой размерностью и сложной структурой зависимостей между элементами, а также разнотипностью данных, описывающих их поведение.

В работе предлагается применить эвентологический подход к изучению систем и рассматривать системы как системы событий, лежащих в основе их поведения.

И. В. Барановой был предложен метод двудольных множеств событий, позволяющий решать различные задачи системного анализа сложных систем, поведение которых описывается числовыми и множественными данными. Основная идея метода заключается в представлении любой сложной системы с помощью двудольной эвентологической модели, в которой каждый элемент системы характеризуется двудольным множеством событий: его первая доля определяется случайными величинами, а вторая - случайными множествами событий. А затем анализ поведения элементов системы сводится к анализу эвентологических распределений, соответствующих им двудольных множеств событий. Сравнение эвентологических распределений двудольных множеств событий предлагается осуществить с помощью сет-операции симметрической разности по Минковскому двудольных множеств событий.

Целью данной работы является решение задачи ранжирования 6 кредитных продуктов четырёх Красноярских банков при помощи математического аппарата эвентологии и метода двудольных множеств событий с точки зрения потребителя на основе числовых и множественных показателей каждого кредита. Данные представлены реальной статистикой по кредитным продуктам 2007-2008 года. Решение задачи ранжирования кредитных продуктов с помощью метода двудольных множеств событий будет заключаться в следующем: будет находиться расстояние между каждым кредитным продуктом и идеальным "наилучшим"с помощью нахождения вероятности сет-операции симметрической разности по Минковскому между эвентологическими распределениями, соответствующих им двудольных множеств событий, а ранжирование будет производится на основе полученных значений расстояний.

Список литературы

[1] О.Ю Воробьёв *Эвентология.,Сиб. фед. ун-т, 2007. - 435с.*

[2] О.Ю. Воробьёв, И.В. Баранова. *Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем, Ин-т естеств. и гуманит. наук, 2007. - 132с.*

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЕТРОВОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОТОЧНОМ ВОДОЕМЕ (двумерный случай).

Ю.Б. Гульденбальк
Сибирский федеральный университет, Институт математики
Научный руководитель - к.ф.-м.н., доцент Л.А. Компаниец

Рассматривается задача определения скорости ветрового движения вязкой жидкости в проточном водоеме при следующих предположениях:

- рассматривается движение в вертикальной плоскости;
- течение является стационарным;
- бассейн имеет прямоугольную форму;
- возвышение свободной поверхности мало и влияние ветра рассматривается на невозмущенной поверхности;
- движение является медленным и нелинейными членами в уравнениях движения можно пренебречь.

Тогда задача сводится к решению следующей краевой задачи

$$\begin{cases} K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

$$u(x,z)|_{x=0} = f_1(z),$$

$$u(x,z)|_{x=L} = f_2(z),$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \beta, \quad \beta(x) = \frac{\tau}{\rho_0},$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=-H} = K_b \int_{-H}^{0} u dz,$$

$$w(x,z)|_{z=0} = 0,$$

$$w(x,z)|_{z=-H} = -u \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$0 \leq x \leq L, -H \leq z \leq 0.$$

Здесь $u = u(x,z)$, $w = w(x,z)$ — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости течения; $K_x, K_z > 0$ — коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена; g —ускорение свободного падения; η — возвышение свободной поверхности; f_1, f_2 — потоки жидкости через границы; τ — касательное напряжение ветра на водной поверхности; ρ_0 — плотность воды; $H > 0$ — глубина бассейна; $K_b = const$ — коэффициент придонного касательного напряжения.

Рассматривался случай $K_b = 0$, что соответствует условию скольжения без трения.

Проведено сравнение решения, полученного для модели с учетом горизонтальной вязкости, и ранее известным решением для более простой модели Экмана, без учета горизонтальной вязкости. В отличии от модели Экмана [1,2] полученное решение для модели с учетом горизонтальной вязкости позволяет уточнить поведение течения вблизи границы.

При малых значениях K_x две модели: более простая модель Экмана и модель с учетом горизонтальной вязкости в середине бассейна дают одинаковое значение скорости, и применение простой модели Экмана оправдано. При больших значениях K_x значения скоростей отличаются даже в середине бассейна.

Список литературы

[1] В.Н. Зырянов, А.П. Фролов. *Природные компенсационные противотечения в водохранилищах равнинного типа.// Вод. ресурсы. — 2006. — Т.1, №1. — С.5–13*

[2] Л.А. Компаниец, Т.В. Якубайлик, Л.В. Гаврилова, К.Ю. Гуревич. *Модели экмановского типа в задачах гидродинамики. – Новосибирск: Наука, 2007. — 156с.*

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ ВЫБОРОМ СЕЛЕКЦИИ

В.Б. Звонков

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, Институт информатики и телекоммуникаций

Научный руководитель – д.т.н., профессор Е.С. Семенкин

Предлагается модифицированный генетический алгоритм, позволяющий пользователю отказаться от выбора селекции. Корректность и эффективность его работы проверена на тестовых задачах. Выполнено сравнение эффективности со стандартным генетическим алгоритмом.

Для решения сложных задач оптимизации (смешанные переменные, алгоритмическое задание функций, и т.п.) целесообразно применять стохастические оптимизационные процедуры, в частности генетический алгоритм (ГА), который обеспечивает приемлемую эффективность при приемлемых затратах при правильно выбранных настройках. Так как правильная настройка ГА требует значительных вычислительных затрат и многократного решения одной и той же задачи, необходимо разрабатывать схемы ГА с меньшим числом настраиваемых параметров. В настоящее время известны подходы, исключающие настройку типа скрещивания (вероятностный ГА) и уровня мутации (адаптивная мутация). В данной работе предлагается модификация ГА, исключающая настройку вида селекции.

Предлагаемый алгоритм автоматически определяет нужный тип селекции и основан на подсчете вероятностей участия селекций в формировании индивидов на следующем поколении. Изначально вероятности выбора всех типов селекции равны, а в дальнейшем вероятность селекции, давшей индивидов с лучшей пригодностью, увеличивается, а вероятности остальных селекций уменьшаются.

Проводилось сравнительное тестирование стандартного и модифицированного генетических алгоритмов на различных тестовых функциях.

Усредненные результаты тестирования по шести функциям (хромосомы по 24-30 бит, ресурсы – 40 индивидов на 40 поколений):

- Разброс надежности стандартного ГА при различных настройках составляет от 0.1% до 95.2%. Лучший результат показал алгоритм с двухточечным скрещиванием, сильной мутацией и турнирной селекцией с размером турнира 9.
- Алгоритм с вероятностным выбором селекции оказался на пятом месте

среди всех алгоритмов (87.2%). Причем, часто он проигрывает остальным алгоритмам только по скорости сходимости к решению.
- Разброс надежностей модифицированного ГА составляет от 63% до 87.2%.
- На первом месте в тестах на различных функциях оказываются разные алгоритмы. Усредненные результаты тестирования по десяти функциям (хромосомы по 40-50 бит, ресурсы 100*100):
- Разброс надежностей стандартного ГА от 0% до 93.7%. Лучший алгоритм – двухточечное скрещивание, средняя мутация, турнирная селекция с размером турнира 4.
- Алгоритм с вероятностным выбором селекции оказался на втором месте в данной серии тестов (92.3 %).
- Разброс надежностей модифицированного ГА составляет от 80% до 92.3%.
- На первом месте в тестах на различных функциях оказываются разные алгоритмы.

Усредненные результаты тестирования по двум функциям (хромосомы по 40 бит, ресурсы 400*400):

- Разброс надежностей стандартного ГА составляет от 0% до 72.5%. Лучший алгоритм – одноточечное скрещивание, сильная мутация, турнирная селекция с размером турнира 9.
- Алгоритм с вероятностным выбором селекции оказался на первом месте в турнирной таблице (76.2%).
- Разброс надежностей модифицированного ГА составляет от 45.5% до 76.2%.

При тестировании алгоритмов наблюдалась статистическая устойчивость.

Таким образом, при решении задач малой размерности, когда требуется незначительное количество вычислений целевой функции, применение алгоритма с вероятностным выбором селекции нецелесообразно, т.к. он не успевает набрать достаточную статистику для адекватной оценки распределения вероятностей. При решении задач большой размерности, требующих значительного количества вычислений целевой функции, предложенная модификация ГА может быть рекомендована к использованию вместо стандартного ГА, т.к. не только уменьшает число настраиваемых параметров, но и обеспечивают лучшую надежность. Дополнительным преимуществом предложенного алгоритма является то, что при выборе параметров работы алгоритма (скрещивание, мутация, селекция) наугад стандартный ГА выдает решение с большим разбросом надежности, а модифицированный ГА дает намного меньший разброс, т.е. обеспечивает большую надежность и при случайном выборе параметров.

ЛОКАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР МАТРИЦ МАЛЫХ СТЕПЕНЕЙ

И.Н. Зотов

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель - д.ф.-м.н. В.М. Левчук

Биективное K-линейное отображение $\varphi : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ алгебры A, которое на каждый её элемент действует как некоторый автоморфизм алгебры (вообще говоря, зависящий от выбора элемента) называют *локальным автоморфизмом алгебры* A . Автоморфизмом алгебры называют её биективное отображение на себя, сохраняющее основные операции. Ларсон и Соуроу доказали, что локальные автоморфизмы полной алгебры $M_n(C)$ всех комплексных $n \times n$ матриц исчерпывают её автоморфизмы и антиавтоморфизмы [1, Теорема 2.2].

Локальные автоморфизмы различных комплексных треугольных алгебр матриц изучались с 1990 года в [1] – [3]. Автоморфизмы алгебры – это тривиальные локальные автоморфизмы, остальные локальные автоморфизмы называют нетривиальными. Первый пример нетривиальных локальных автоморфизмов построен в работе Криста [2] для определенной подалгебры треугольной трехмерной комплексной алгебры.

Автоморфизмы алгебры $NT(n, K)$ (нижних) нильтреугольных $n \times n$ матриц над кольцом K (то есть с нулями на и над главной диагональю) описаны в [4]. Основная задача работы заключается в построении нетривиальных локальных автоморфизмов нильпотентных алгебр $NT(4, K)$.

Примеры нетривиальных локальных автоморфизмов алгебр $NT(4, K)$ известны для двух колец коэффициентов K классов вычетов целых чисел: $K = Z_4$ и $K = Z_8$.

Следующая теорема указывает нетривиальные локальные автоморфизмы в алгебрах $NT(4, K)$ над более общими кольцами K.

Теорема. Пусть K - ассоциативное коммутативное кольцо с единицей и элементом $d \neq 0$ таким, что главный идеал (d) лежит во всех ненулевых идеалах кольца K.Тогда отображение:

$$\varphi : \|a_{ij}\| \longrightarrow \|a_{ij}\| + d(a_{31} + a_{42})E_{41} \qquad (\|a_{ij}\| \in NT(4, K)) \tag{1}$$

есть нетривиальный локальный автоморфизм алгебры $NT(4, K)$.

Замечание. Условию теоремы удовлетворяет кольцо $K = Z_{p^t}$, где p - простое число, $t \geq 1$ и $d = p^{t-1}$. Частные случаи теоремы, когда $K = Z_4$ и $K = Z_8$ известны (2008 г.).

Кратко о схеме доказательства. Пусть d – некоторый элемент из K и $\varphi : NT(4,K) \to NT(4,K)$ – линейное преобразование, действующее по правилу (1). Преобразование φ не является автоморфизмом кольца $NT(4,K)$, поскольку φ неединично и на порождающих множествах KE_{i+1i} $(i = 1,2,3)$ кольца действует тождественно.

Находим при каких d отображение φ – есть локальный автоморфизм $NT(4,K)$. Пусть $\|a_{ij}\| = A$. Если $a_{32} = 0$, то действие φ на A согласовано с внутренним автоморфизмом $\varphi(A) = XAX^{-1}$, где сопрягающую унитреугольную матрицу берем в виде $X = E + dE_{21} - dE_{43}$. В случае, когда $a_{32} \neq 0$, рассмотрим центральный автоморфизм

$$\xi(\lambda) : \ \|a_{ij}\| \to \|a_{ij}\| + \lambda(a_{32})E_{41} \qquad (\lambda \in End(K^+)).$$

Достаточно доказать, что существует λ с условием $\lambda(a_{32}) = d(a_{31} + a_{42})$. В силу выбора d в теореме выполняется включение главных идеалов $(d) \subseteq (a_{32})$ и, следовательно, $d = a_{32}r$ для некоторого $r \in K$. Поэтому

$$\lambda(a_{32}) = a_{32}r(a_{31} + a_{42}) = d(a_{31} + a_{42}), \qquad \varphi(A) = \xi(\lambda)(A).$$

Список литературы

[1] D.R. Larson, A.R. Sourour. *Local derivations and local automorphisms of $B(H)$)//Proc. Sympos. Pure Math. 51 (1990) 187-194.*

[2] R. Crist. *Local automorphisms//Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000) 1409-1414.*

[3] P. Semrl. *Local automorphisms and derivations on $B(H)$//Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997) 2677-2680.*

[4] В.М. Левчук. *Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. II. Группы автоморфизмов//Сиб. матем. журн., 24 (1983), №4, 543-557.*

О ДЗЕТА-ФУНКЦИИ, АССОЦИИРОВАННОЙ С НАБОРОМ ПОЛИНОМОВ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Е.В. Зубченкова

Сибирский федеральный университет, Институт математки

Научный руководитель - д.ф.-м.н., профессор А.К. Цих

Рассмотрим функцию

$$Z(P;s) = Z(P_1,...,P_m,s_1,...,s_m) = \sum_{k\in N^{*n}} \frac{1}{P_1(k)^{s_1}...P_m(k)^{s_m}},$$

где $P_j(k)-$ полиномы с вещественными коэффициентами. Полагая $x,y\in\mathbb{R}^n$ определим следующие условия на полиномы (где $D-$ некоторое число из $(0;1)$ и $\varepsilon>0$):

(i) $\qquad P_j(x)\to+\infty$ при $\|x\|\to+\infty$ в ортанте $[D;+\infty)^n$;

(ii) $\qquad P_j(x+iy)\neq 0$ для всех $x\in[D;+\infty)^n$ и $\|y\|<\varepsilon$.

Теорема 1. Функция $Z(P;s)$ с условием (i) голоморфна в ортанте

$$\{s\in\mathbb{C}^m : Res_j>\sigma_j, j=1,...,m\},$$

где константы $\sigma_j=\sigma_j(P_j)>0$.

Теорема 2. Функция $Z(P;s)$ с условиями (i) и (ii) допускает мероморфное продолжение в $\mathbb{C}^m$ с полюсами из конечного семейства гиперплоскостей

$$\langle\alpha^q;s\rangle = -\frac{r}{M_q}, r\in\mathbb{N}, q=1,...,Q,$$

где $M_q=M_q(P)\in\mathbb{N}^*, \alpha^q=\alpha^q(P)\in(N^*)^m$.

Для доказательства Теоремы 2 было получено представление функции $Z(P;s)$ в виде кратного интеграла по границе области

$$L_\varepsilon=\{z\in\mathbb{C}^n : Rez_k\geq D, |Imz_k|<\varepsilon, k=1,...,n\}$$

с помощью логарифмического вычета.

Мероморфное продолжение последнего было доказано распространенным способом разрешения особенностей, т.е. с использованием теоремы Хиронаки, а также с использованием метода интегрирования по частям. Теоремы 1 и 2 обобщают соответствующие результаты статьи [1], где рассматривается случай $m=1$.

Список литературы

[1] D. Essouabri. *Singularité des séries de dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications en théorie analytique des nombres*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 47, 2 (1997), 429-483.

КРАТКИЙ ОБЗОР ПРОБЛЕМ ГИЛЬБЕРТА

Л.В.Козлова

Сибирский федеральный университет, Институт математки

Научный руководитель - доцент И.В.Баранова

Проблемы гильберта-это список из 23 кардинальных проблем математики,который представил Давид Гильберт на II Конгрессе математиков в Париже в 1900 году. В своем докладе он сформулировал те проблемы, которые, на его взгляд, являлись наиболее значимыми для математики начинающегося XX столетия. Эти проблемы относятся к самым разным областям математики: снования математики (1,2), алгебра (13,14,17), теория чисел (7-12), геометрия (3,4,18), топология (16), алгебраическая геометрия (12-16,22), группы Ли (5,14,18), вещественный и комплексный анализ (13,22), дифференциальные уравнения (16,19-21), математическая физика и теория вероятностей (6), вариационное исчисление (23).

Список проблем

1. Проблема Кантора о мощности континуума (Континуум-гипотеза).
2. Непротиворечивость аксиом арифиетики.
3. Равносоставность равновеликих многогранников.
4. Перечислить метрики, в которых прямые являются геодезическими.
5. Все ли непрерывные групы являются группами Ли?
6. Математическое изложение аксиом физики.
7. Доказать, что число $2^{\sqrt{2}}$ является трансцендентным (или хотя бы иррациональным).
8. Проблема простых чисел (гипотеза Римана и проблема Гольдбаха).
9. Доказательство наиболее общего закона взаимности в любом числовом поле.
10. Задача о разрешимости диофантовых уравнений.
11. Исследование квадратичных форм с произвольными алгебраическими числовыми коэффициентами.
12. Распространение теоремы Кронекера об абелевых полях на произвольную алгебраическую область рациональности.
13. Невозможность решения общего уравнения седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух переменных.

14. Доказательство конечной порождённости алгебры инвариантов алгебраической группы.
15. Строгое обоснование исчислительной геометрии Шуберта.
16. Топология алгебраических кривых и поверхностей.
17. Представление определенных форм в виде суммы квадратов (Семнадцатая проблема Гильберта).
18. Конечность числа кристаллографических групп; нерегулярные заполнения пространства конгруэнтными многогранниками; наиболее плотная упаковка шаров.
19. Всегда ли решения регулярной вариационной задачи Лагранжа являются аналитическими?
20. Общая задача о граничных условиях.
21. Доказательство существования линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии.
22. Униформизация аналитических зависимостей с помощью автоморфных функций.
23. Развитие методов вариационного исчисления.

На данный момент решены 16 проблем из 23. Ещё 2 не являются корректными математическими проблемами (одна сформулирована слишком расплывчато, чтобы понять, решена она или нет(4), другая, далёкая от решения, - физическая, а не математическая(6)). Из оставшихся 5 проблем две не решены никак(8,12), а три решены только для некоторых случаев(9,15,16). Начался новый век, и возможно найдется математик, который сможет, подобно Гильберту, сформулировать такие задач, которые определят развитие математики будущего столетия.

Список литературы

[1] П.С. Александров *Проблемы Гилберта.,Москва, 1969.*

[2] А.А. Болибрух *Проблемы Гильберта (100 лет спустя).,* *http://evrika.tsi.lv/*

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АНТРОПОГЕННОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУХА НА ЗАБОЛЕВАЕМОСТЬ НАСЕЛЕНИЯ РАЙОНОВ КРАСНОЯРСКОГО КРАЯ

Ю.А. Коновалова

Сибирский федеральный университет, Институт математки

Научный руководитель - доцент И.В.Баранова

В работе [1] рассматривалась задача классификации районов Красноярского края по состоянию здоровья их населения. Система районов края представляет собой сложную систему, в которой состояние здоровья населения каждого района характеризуется числовыми и множественными показателями. С помощью метода двудольных множеств случайных событий была решена задача классификации районов по состоянию здоровья их населения. Основная идея метода двудольных множеств случайных событий в эвентологическом системном анализе заключается в представлении любой сложной системы с помощью двудольной эвентологической модели, в которой поведение каждого элемента системы характеризуется двудольным множеством событий: его первая доля определяется случайным величинами, а вторая - случайными множествами событий, и сведение анализа поведения элементов системы к анализу эвентологических распределений соответствующих им двудольных множеств событий. Зная Э-распределения, можно производить любые действия над двудольными множествами случайных событий с помощью вводимых в сет-операций по Минковскому.

Практическая задача классификации районов Красноярского края основана на обширной статистике показателей здоровья населения края за 1991–1998гг, предоставленной Институтом комплексных проблем гигиены и профессиональных заболеваний Сибирского отделения Российской Академии медицинских наук (НИИ КПГПЗ СО РАМН). Всего рассматривалось 74 показателя, из них — 72 числовых и 2 множественных: химический состав загрязнения почв данного района (т.е. множество химических элементов, найденных в его почве) и множество заболеваний населения района.

Список литературы

[1]] О.Ю. Воробьев , И.В. Баранова. *Метод двудольных множеств событий в эвентологическом анализе сложных систем., Институт естественных и гуманитарных наук, 2007.*

[2] О.Ю. Воробьев. *Эвентология., Сибирский федеральный университет, 2007 .*

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Е.Н.Кригер

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель - к.ф.-м.н. И.В. Фроленков

В области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)|\ 0 \le t \le T,\ x,z \in \mathbb{R}\}$ рассмотрим задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + f(t,x,z)(\lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)), \tag{1}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z),\ x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x),\ x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(t,\beta,z) = \psi(t,z),\ z \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]. \tag{4}$$

Одновременно с решением $u(t,x,z)$ определению подлежит функция $\lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)$. В предположении достаточной гладкости и ограниченности входных данных доказаны теоремы существования и единственности решения задачи (1)-(4) в классе

$$\mathbb{Z}(T) = \{u(t,x,z), \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)|\ u(t,x,z) \in \mathbb{C}^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,T]}),$$
$$\lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z) \in \mathbb{C}^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,T]})\},$$

где

$$\mathbb{C}^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,T]}) = \{u(t,x,z)|\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^{k_1+k_2} u}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}} \in \mathbb{C}(G_{[0,T]}),\ k_1,k_2 = 0,1,2\},$$

удовлетворяющего условию:

$$\sum_{k_1=0}^{4}\sum_{k_2=0}^{4}|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u(t,x,z)| + \sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2}|\lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)| \le C.$$

Идея доказательства состоит в следующем: исходная обратная задача на основании условий переопределения сводится к вспомогательной прямой. Для доказательства разрешимости прямой задачи используется метод слабой аппроксимации [1]. Единственность решения обратной задачи доказывается путем доказательства тождественного равенства нулю разности двух возможных решений.

Список литературы

[1] Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. *Метод слабой аппроксимации.,КрасГУ, 1999.*

[2] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений., Доклады Академии Наук, 2005, Т.404, №5, с.583-585.*

[3] Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков. *О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения с условиями переопределения, заданными на гладкой кривой., Специальный выпуск журнала "Вычислительные технологии", посвященный 85-летию академика Н.Н. Яненко, 2006, Т.11, ч.1, с.46-54.*

[4] А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. *Уравнения математической физики., Наука, 1977.*

[5] В.П. Михайлов. *Дифференциальные уравнения в частных производных., Наука, 1976.*

ПРИНЦИП СИММЕТРИИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В.И. Кузоватов

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель - д.ф.-м.н. А.М. Кытманов

Данная работа посвящена принципу симметрии для функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца в полупространстве. На данный момент такой принцип отражения имеет место для гармонических функций, а также для функций, являющихся решениями уравнения Гельмгольца вне шара [1], [3].

Теорема. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^k$ – область, симметричная относительно $\mathbb{R}^{k-1}$, т. е. если $(x', x_k) = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k) \in D$, то $(x', y_k) \in D$, где $y_k \in [-x_k, x_k]$. Обозначим через $\mathbb{R}^{k-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \,|\, x_k = 0\}$, $\Gamma = D \cap \mathbb{R}^{k-1}$. Если непрерывная на $D \cup \Gamma$ функция f удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta_k f + \lambda f = 0$ в "верхней половине" $D^+ = \{(x', x_k) \in D \,|\, x_k > 0\}$ области D и $f = 0$ на Γ, то она аналитически продолжается в D и удовлетворяет уравнению Гельмгольца во всей области D.*

Доказательство основано на представлении решения уравнения Гельмгольца в виде

$$f(x_1, \ldots, x_k) = h(x_1, \ldots, x_k) + \int_0^{x_k} K(y_k, x_k, \lambda)\, h(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k)\, dy_k, \quad (1)$$

где функция $h(x_1, \ldots, x_k) \in C(D \cup \Gamma)$ есть решение уравнения $\Delta h = 0$ такое, что $h(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0) = 0$.

Подставляя (1) в уравнение Гельмгольца и интегрируя по частям, показывается, что (1) будет решением при условии, что функция K удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$K''_{y_k y_k}(y_k, x_k, \lambda) - K''_{x_k x_k}(y_k, x_k, \lambda) - \lambda K(y_k, x_k, \lambda) = 0 \quad (2)$$

и начальным данным

$$K(0, x_k, \lambda) = 0, \qquad K(x_k, x_k, \lambda) = -\frac{\lambda}{2}\, x_k. \quad (3)$$

Заменой

$$x_k = \xi + \eta, \quad y_k = \eta \quad (4)$$

мы преобразуем (2) – (3) в задачу Гурса

$$\widetilde{K}''_{\eta\eta}(\xi, \eta, \lambda) - 2\widetilde{K}''_{\xi\eta}(\xi, \eta, \lambda) - \lambda \widetilde{K}(\xi, \eta, \lambda) = 0, \quad (5)$$

$$\widetilde{K}\,(\xi,0,\lambda)=0, \qquad \widetilde{K}\,(0,\eta,\lambda)=-\frac{\lambda}{2}\,\eta, \tag{6}$$

где функция $\widetilde{K}\,(\xi,\eta,\lambda)$ получается из функции $K\,(y_k,x_k,\lambda)$ подстановкой замены координат вида (4).

Отметим, что задача (5) – (6) имеет единственное аналитическое решение [1], [2].

Нетрудно показать, что при заданной функции $K\,(y_k,x_k,\lambda)$ и данной функции f, решение интегрального уравнения Вольтерра (1) является гармоническим. Применяя принцип симметрии для гармонических функций [3] и используя аналитичность интеграла с переменным верхним пределом, получим утверждение теоремы.

Список литературы

[1] D.L. Colton. *Analytic theory of partial differential equations, Pitman advanced publishing program, 1980.*

[2] В.С. Владимиров. *Уравнения математической физики, Наука, 1981.*

[3] И. Стейн, Г. Вейс. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, 1974.*

О КРАТНОСТИ НУЛЯ БИНОМИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{C}^n$

А.Г. Михальченко
Сибирский федеральный университет, Институт математки
Научный руководитель - д.ф.-м.н. А.К. Цих

Рассматриваются преобразования

$$f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$

где

$$f_k = z^{\alpha_1^k} - z^{\alpha_2^k}, k = 1, \dots, n.$$

Здесь $\alpha_i^k = (\alpha_{i1}^k, \dots, \alpha_{in}^k) \in \mathbb{Z}_+^n,\ i = 1, 2.$

Известная теорема Бернштейна позволяет вычислить число N изолированных нулей такого отображения f в комплексном торе $\mathbb{T}^n$. А именно, это число равно модулю определителя

$$N = \left|\det\left(\alpha_{1j}^k - \alpha_{2j}^k\right)\right|$$

Задача состоит в вычислении кратности μ_0 нуля преобразования f в начале координат $z = 0$.

Для формулировки основного результата вводятся следующие определения:

Определение 1. *Биматрица* — это пара матриц

$$A = (\alpha_{ij}^k),$$

где $i = 1, 2,\ k = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, n.$

Определение 2. *Перманент биматрицы* A — это

$$\operatorname{per} A = \sum_{\varepsilon} \sum_{\tau} \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_{\varepsilon(k), \tau(k)}^k \right) \qquad (1)$$

где $\tau = (\tau(1), \dots, \tau(n))$ — перестановки, ε принимает значение 1 или 2.

Если n — нечетно, то

$$\operatorname{per} A = \operatorname{per}_1 A + \operatorname{per}_2 A,$$

где per_j — сумма тех слагаемых в (1), для которых ε принимает значение j более, чем на половине значений $k \in \{1, \dots, n\}$.

Таким образом, $N = |\operatorname{per}_1 A - \operatorname{per}_2 A|$.

Если n — нечетно, то

$$\mu_0 = \min\left\{\operatorname{per}_1 A, \operatorname{per}_2 A\right\}.$$

Для доказательства пользуемся двумя интегральными представлениями для кратности в нуле:

$$\mu_0 = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\substack{|f_1|=\varepsilon \\ \vdots \\ |f_1|=\varepsilon}} \frac{df_1}{f_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

$$\mu_0 = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial U_0} \omega(f, \bar{f}) \frac{df \wedge d\bar{f}}{J_f},$$

где $\omega(f, \bar{f})$ — ядро Бохнера-Мартинелли.

Для цикла ∂U_0 строится так называемая резольвента, ассоциированая с покрытием проколотой окрестности $U_0^* = U_0 \setminus \{0\}$ с помощью семейства n открытых множеств:

$$U_j = U_0 \setminus \{f_j = 0\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Далее, по лемме (Gleason)

$$\mu_0 = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{J_f}{f_1 \cdots f_n} dz_1 \ldots dz_n, \tag{2}$$

где Γ — цикл, J_f — якобиан отображения f.

Из (2) уже можем заключить, что

$$\mu_0 = \min\{\operatorname{per}_1 A, \operatorname{per}_2 A\}.$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ АЛГОРИТМА МАГУ (K. MAGHOUT)

Н.А.Никульская

Сибирский федеральный университет, Институт математки

Научный руководитель - к.т.н., профессор В.В.Быкова

Рассмотрим алгоритм Магу на примере задачи о нахождении наибольшего независимого множества вершин орграфа.

Пусть орграф $G = (V, E)$ задан матрицей смежности $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$.

Шаг 1. Сопоставим каждой вершине $v_i \in V$ булевую переменную Y_i ($i = \overline{1, n}$). Построим для графа G логическую функцию

$$F(Y_1, \ldots, Y_n) = \bigwedge_{a_{ij}=1} (\overline{Y_i} \vee \overline{Y_j}),$$

в которой число сомножителей (конъюнктов) равно числу единиц матрицы смежности $A = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ орграфа G.

Шаг 2. Приведем функцию $F(Y_1, \ldots, Y_n)$ к ДНФ с использованием правил:

$$\begin{aligned}
&A \equiv A \vee (A\&B),\\
&A \vee A \equiv A,\\
&A\&A \equiv A,\\
&(A \vee B)\&(A \vee C)\&\ldots\&(A \vee D) \equiv A \vee (B\&C\&\ldots\&D).
\end{aligned}$$

Шаг 3. Полученная ДНФ дает результат, который определяется так: каждая конъюнкция вида $\overline{Y_{i_1}}\ \&\ \overline{Y_{i_2}}\ \&\ldots\&\ \overline{Y_{i_k}}$ задает независимое множество вершин $V \setminus \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$. Наибольшее по числу вершин независимого множества является ответом поставленной задачи.

Рассмотрим пример. Пусть орграф $G = (V, E)$ задан матрицей смежности

$$A(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

$$F(Y_1,\dots,Y_n)=\bigwedge_{a_{ij}=1}(\overline{Y_i}\vee\overline{Y_j})=$$
$$=(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_2})\&(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_3})\&(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_4})\&(\overline{Y_2}\vee\overline{Y_1})\&(\overline{Y_3}\vee\overline{Y_1})\&(\overline{Y_4}\vee\overline{Y_3})\equiv$$
$$=(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_2})(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_3})(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_4})(\overline{Y_2}\vee\overline{Y_1})(\overline{Y_3}\vee\overline{Y_4})(\overline{Y_4}\vee\overline{Y_3})=$$
$$=(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_2})(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_3})(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_4})(\overline{Y_3}\vee\overline{Y_4})=(\overline{Y_1}\vee\overline{Y_2}\,\overline{Y_3}\,\overline{Y_4})(\overline{Y_3}\vee\overline{Y_4})=$$
$$=\overline{Y_1}\,\overline{Y_4}\vee\overline{Y_1}\,\overline{Y_3}\vee\overline{Y_2}\,\overline{Y_3}\,\overline{Y_4}\,\overline{Y_4}\vee\overline{Y_2}\,\overline{Y_3}\,\overline{Y_4}\,\overline{Y_3}\equiv\overline{Y_1}\,\overline{Y_4}\vee\overline{Y_1}\,\overline{Y_3}\vee\overline{Y_2}\,\overline{Y_3}\,\overline{Y_4}.$$

Далее сокращение невозможно. Следовательно, искомыми независимыми множествами вершин орграфа G являются множества

$$\{v_2,v_3\},\quad \{v_2,v_4\},\quad \{v_1\}.$$

Оценим сложность данного алгоритма. Для построения функции $F(Y_1,\dots,Y_n)=\bigwedge\limits_{a_{ij}=1}(\overline{Y_i}\vee\overline{Y_j})$ требуется число элементарных операций, непревышающее числа элементов матрицы смежности A (т. е. порядка n^2). Такая ситуация соответствует худшему случаю, т. е. наибольшему числу возможных конъюктивных членов в F.

Правило $(A\vee B)\&(A\vee C)\&\dots\&(A\vee D)\equiv A\vee(B\&C\&\dots\&D)$ дает следующий промежуточный результат

$$F=(Y_1\vee Y_2\,Y_3\,Y_4)\&(Y_2\vee Y_1\,Y_3\,Y_4)\&(Y_3\vee Y_1\,Y_2\,Y_4)\&(Y_4\vee Y_1\,Y_2\,Y_3),$$

содержащий $(n-1)$ сомножителей.

Очевидно, что раскрытие всех скобок приводит к 2^{n-1} конъюктивных членов. Многие из них в дальнейшем поглотятся (сработает закон поглощения). Тем не менее, в худшем случае возможны промежуточные результаты длина которых сопоставима с 2^{n-1}. Это свидетельствует о неполиномиальности сложности вычисления наибольшего независимого множества вершин. Такую же сложность имеет алгоритм Магу при вычислении наибольшей клики графа.

Список литературы

[1] Д. Хопкрофт, Р. Мотвани, Д. Ульман. *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений.//М.: Издательский дом "Вильямс", 2008.*
[2] В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. *Курс дискретной математики.//М.: Издательство МАИ, 1992.*

ВЫПУКЛЫЕ $(3,1)$-ПРАВИЛЬНОГРАННИКИ, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ Q_1 И ТРЕХСКАТНОГО КУПОЛА M_4

Т.А. Омельчук

Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева

Научный руководитель - к.ф.-м.н. А.В. Тимофеенко.

Определение (А. В. Тимофеенко). Пусть n — натуральное число, m — целое неотрицательное число, и длины рёбер многогранника измеряются натуральными числами. Тогда выпуклым (n,m)-*правильногранником* назовём такой выпуклый многогранник, что каждая его грань составлена максимум из n выпуклых правильных многоугольников, каждое ребро содержит не более m условных вершин, разбивающих ребра на единичные отрезки, причём грань, разбиваемую на правильные многоугольники, нельзя составить из меньшего числа таких многоугольников.

Выпуклые $(n,0)$-правильногранники описаны, [1,2], причем оказалось, что $n \leq 3$. Следующая теорема начинает описывать многогранники с условными вершинами. Применены обозначения из [2].

Теорема.*Пусть $n \in \{1,2,3\}$ и $m \in \{0,1\}$. Тогда перебором прилеганий трехскатного купола M_4 и скошенной призмы Q_1 можно построить только следующие (n,m)-правильногранники: M_4+M_4, M_4+M_4', M_4+Q_1, Q_1+Q_1; $M_4+Q_1+M_4$. Для каждого из них создана алгебраическая и компьютерная модели.*

Литература

[1] Гурин А. М., Залгаллер В. А. *К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями составленными из правильных*, Труды Математического Общества Санкт-Петербурга, **14** (2008), 215–294.

[2] Тимофеенко А. В. *О соединении несоставных многогранников*, Алгебра и анализ, **21**, № 3(2009), 164–208.

О ПРИМЕНЕНИИ АЛГОРИТМА ГЕНЕТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ОПЕРАТОРОМ РАВНОМЕРНОГО СКРЕЩИВАНИЯ

М.Е.Семенкина

Сибирский федеральный университет, Институт математки

Научный руководитель - к.т.н. Л.В. Липинский

Проектирование интеллектуальных информационных технологий (ИИТ) само по себе является достаточно сложной интеллектуальной процедурой, включающей, кроме всего прочего, выбор их эффективных структур. Автоматизация проектирования ИИТ смогла бы решить часть трудностей, возникающих при их разработке. Но для автоматизации проектирования ИИТ должны использоваться оптимизационные процедуры, позволяющие осуществлять комбинаторный поиск на сложных структурах. Так как обычные методы математического программирования здесь не работают, применяют методы эволюционного поиска. В частности, автоматизировать построение интеллектуальных информационных технологий позволяют алгоритмы генетического программирования. Их эффективность существенно зависит от выбора настроек, что затрудняет применение не только конечными пользователями, но и специалистами. Поэтому разработка операторов и алгоритмических схем генетического программирования, уменьшающих число настраиваемых параметров, является актуальной научной задачей. Имеет смысл попытка перенести идеи, дающие существенные результаты для генетических алгоритмов [1], на алгоритмы генетического программирования.

В процессе работы была разработана следующая процедура равномерного скре-щивания, применимого к деревьям:

1. Создание дерева обобщенных структур;

2. Для каждого узла дерева обобщенных структур случайным образом выбирается номер претендента.

Если скрещиванию подвергается ген из правой ветви, претендентом может являться ген, принадлежащий правым ветвям родителей или лежащий под вершиной одноместной функции.

Если скрещиванию подвергается ген из левой ветви, претендентом может являться ген, принадлежащий левым ветвям родителей или лежащий в правой ветке двухместной функции, в случае, когда геном сверху была одиночная функция.

Для алгоритма генетического программирования с равномерным скрещиванием, реализованным по данной схеме, было проведено сравнение по эффективности операторов скрещивания. В результате выяснилось, что равномерное скрещивание: превосходит одноточечное скрещивание по эффективности; сопоставимо со стандартным скрещиванием по надежности; превосходит стандартное скрещивание по скорости; при сопоставимых результатах не допускает чрезмерного разрастания деревьев.

В результате проведенных исследований выяснилось, что для эффективного решения практических задач следует использовать алгоритм генетического программирования с равномерным скрещиванием и как минимум семью родителями.

Данный алгоритм был опробован на следующих задачах: моделирования прожиточного минимума населения регионов России, прогнозирования временных рядов.

Список литературы

[1] Е.С. Семенкин, М.Е. Семенкина. *Применение генетического алгоритма с модифицированным оператором равномерной рекомбинации при автоматизированном формировании интеллектуальных информационных технологий//Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академик М. Ф. Решетнева. – Вып. 3 (16) - 2007. с. 27-33.*

РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ГЕНЕТИЧЕСКИМИ АЛГОРИТМАМИ С ДВУМЯ КЛАССАМИ ХРОМОСОМ

М.А. Терновская

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель - д.т.н. Е.С. Семенкин

Генетические алгоритмы принадлежат к классу эволюционных алгоритмов. Они основаны на генетических процессах биологических организмов и обладают рядом характеристик, делающих их более предпочтительными, чем классические методы оптимизации.

Целью данной работы является повышение эффективности решения многокритериальных задач оптимизации генетическими алгоритмами за счет применения модификаций известных алгоритмических схем.

В связи с этим предложенный ранее модифицированный гибридный генетический алгоритм был адаптирован к многокритериальным задачам. Эффективность данного алгоритма при решении оптимизационных задач с одним критерием была выявлена при его тестировании на большом количестве задач различной сложности, а также при решении практической задачи составления расписания посадок самолетов в аэропорту с одной взлетно-посадочной полосой [1]. Главная идея алгоритма заключается в разделении индивидов на два класса, каждый из которых обладает разными свойствами. Один из них отвечает за скорость адаптации за счет более быстрого изменения генома, второй – за закрепление найденных свойств. На этапе адаптации в алгоритме используется локальный поиск по Ламарку или по Дарвину, а для воспроизводства потомком требуется участие двух индивидов, по одному из каждого класса.

При решении многокритериальных задач ЛПР, принимая некоторую альтернативу в качестве решения, всегда должно идти на компромисс – допускать ухудшение значений одних частных критериев для улучшения других. Математическая модель компромисса в оптимизации обычно основывается на понятии множества Парето [2]. В данной работе представлены четыре генетических алгоритма многокритериальной оптимизации: VEGA, FFGA, NPGA и SPEA [3]. Они строятся на основе общей схемы эволюционного алгоритма, при этом отличие их друг от друга состоит в способе назначения пригодности и селекции.

В результате сравнительного исследования эффективности представленных алгоритмов и их модификаций было установлено, что разделение популяций на классы и добавление локального поиска в алгоритмы позволяют получить более представительную аппроксимацию множества Парето и повысить точность решения тестовых задач безусловной многокритериальной оптимизации, а наиболее эффективным при решении данных задач является модифицированный гибридный алгоритм SPEA.

Список литературы

[1] Терновская М.А., *Гибридный генетический алгоритм с локальным поиском и двумя классами хромосом / М.А. Терновская, Решетневские чтения. – Материалы XII Международной научной конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф.Решетнева. – Красноярск: Редакционно-издательский отдел СибГАУ, 2008. – С. 319-321.*

[2] Подиновский В. В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – с.256.*

[3] Гуменникова, А.В. *Эволюционные алгоритмы для многокритериальной и многоэкстремальной оптимизации / А.В. Гуменникова, М.Н. Емельянова, В.М. Клешков // Вестник НИИ СУВПТ, №13: Сб. научн. трудов. – Красноярск: НИИ СУВПТ, 2003. – Вып. 13, с. 237-248.*

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА ИНВОЛЮЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП РАЗМЕРНОСТИ 2 НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

И.А.Тимофеенко

Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий

Научный руководитель - д.ф.-м.н., профессор Я.Н.Нужин

Пусть $GL_2(\mathbb{Z})$ — группа всех обратимых матриц размерности 2 над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, $SL_2(\mathbb{Z})$ — её подгруппа матриц с определителем 1, а $PGL_2(\mathbb{Z})$, $PSL_2(\mathbb{Z})$ — их фактор-группы по центру соответственно.

Будем говорить, что группа G является:

I-*порождаемой*, если она порождается каким-либо множеством инволюций;

$(2,2,2)$-*порождаемой*, если она порождается тремя инволюциями;

$(2\times 2,2)$-*порождаемой*, если она порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Доказана

Теорема. *Пусть G — одна из следующих групп:*

$$GL_2(\mathbb{Z}), PGL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Z}), PSL_2(\mathbb{Z}).$$

Тогда наличие или отсутствие в группе G приведенных выше свойств указано в таблице 1, причем порождающие множества построены в явном виде в случае положительного ответа.

Таблица 1.

Свойство	$GL_2(\mathbb{Z})$	$PGL_2(\mathbb{Z})$	$SL_2(\mathbb{Z})$	$PSL_2(\mathbb{Z})$
I – порождаемость	$+$	$+$	$-$	$-$
$(2,2,2)$ – порождаемость	$+$	$+$	$-$	$-$
$(2\times 2,2)$ – порождаемость	$-$	$+$	$-$	$-$

Установлено, что группа $GL_2(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, группа $PGL_2(\mathbb{Z})$ порождается их образами, причем образы первых двух матриц будут перестановочны в $PGL_2(\mathbb{Z})$.

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ И СТРУКТУРЫ СЕМЬИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЕЧНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Т.А. Чуверова

Сибирский федеральный университет, Институт математки

Научный руководитель - к.ф.-м.н. Д.В. Семёнова

Состав семьи влияет на множество самых различных демографических процессов, основным из которых является воспроизводство населения. При этом прогнозирование численности и состава семей - одна из наименее разработанных областей демографической науки. Причина этого - в сложности и изменчивости элементов структуры семьи. Моделирование трансформации структуры семьи в процессе ее жизнедеятельности представляет значительные алгоритмические трудности и плохо обеспечено статистической информацией. Марковский подход представляется одним из самых адекватных способов моделирования рассматриваемых социологических процессов.

Стохастическое прогнозирование – это исследование, позволяющее осуществлять прогноз в области случайных явлений.

Марковская стохастическая модель {C, A, Q} определяется множеством состояний C, вектором начальных вероятностей A и матрицей переходных вероятностей Q. С их помощью можно вычислить вероятность каждого состояния в любой момент времени.

Множеством *состояний* модели может служить любое конечное множество C.

Пример. Для описания динамики *размера* семьи выбирается множество $C = \{L, M, G\}$.

Начальными вероятностями $A = (a[1], \ldots, a[m])$ для множества состояний $C = \{1, \ldots, m\}$ могут служить любые положительные числа, в сумме равные единице:

$$a[i] \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \quad \sum_{i=1}^{m} a[i] = 1.$$

Вероятностями перехода из состояние в состояние за один шаг для множества состояний C могут служить любые числа, обладающие свойствами:

$$q[i,j] \geq 0 \quad (1 \leq i, j \leq m), \quad \sum_{i=1}^{m} q[i,j] = 1.$$

Рассмотрим марковскую модель $\{C, A, Q\}$ с множеством состояний $C = \{1, \ldots, m\}$, строкой начальных вероятностей $A = (a[1], \ldots, a[m])$ и матрицей вероятностей перехода $Q = (q[i, j]) \quad (1 \le i, j \le m)$. Начальные и переходные вероятности позволяют вычислять вероятности состояний в любой момент $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть $p[i, n]$ – вероятность i-го состояния в момент n и $P[n] = (p[i, n], \ldots, p[m, n])$. В частности, $p[i, 0] = a[i], P[0] = A$. Тогда последовательные вычисления дают:

$$p[j, 1] = \sum_{i=1}^{m} a[i] q[i, j],$$

$$p[j, 2] = \sum_{i=1}^{m} p[i, 1] q[i, j],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p[j, n] = \sum_{i=1}^{m} p[i, n-1] q[i, j].$$

В матричной форме результат имеет вид:

$$P[n] = AQ^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Вычисление вероятностей $P[n] = (p[1, n], \ldots, p[m, n])$ состояний $1, \ldots, m$ в момент n позволяет прогнозировать поведение моделируемого процесса в стационарных условиях.

Список литературы

[1] Гончарова Г.С. *Структурные характеристики семей / Г.С. Гончарова, Л.Я. Савельев. – Новосибирск, 2002. – 86с.*

[2] Гончарова Г.С. *Семейно-брачные отношения у народов Сибири: проблемы, тенденции, перспективы / Г.С. Гончарова, Л.Я. Савельев. – Новосибирск: Издательство "Нонпарель", 2004. – 288с.*

[3] Волков А.Г. *Семья – объект демографии / А.Г. Волков. – М., 1986.*

СППР НА БАЗЕ МНОГОАГЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ РЕАЛЬНЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

А.А.Шабалов

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Институт информатики и телекоммуникаций

Научный руководитель - к.т.н. профессор Е.С. Семенкин

При реструктуризации предприятия его руководство создает систему, которая позволяет определенным подразделениям стать материально заинтересованными в выборе новой продукции, развитии и увеличении объемов производства. Это так называемые Центры финансовой ответственности (ЦФО). Каждый ЦФО может реализовать собственную инвестиционную программу по созданию, модернизации и развитию производств товаров. При этом ЦФО формирует свой пакет реальных инвестиций, максимизируя прибыль при выполнении ряда ограничений. Центральный офис предприятия реализует инвестиционную политику совместной деятельности своих ЦФО и других участников объединения. С этой целью он концентрирует ресурсы и вкладывает их в новые инновационные проекты, реконструкцию и модернизацию ЦФО и обслуживающих подразделений [1]. Модель формирования инновационной программы позволяет определить возможность включения (или невключения) той или иной инновации в общий портфель в соответствии с ее прибыльностью, обеспеченностью финансами и рискованностью внедрения. Меру риска определяют на основании экспертной оценки рискованности каждого отдельного проекта[2].

Математическая модель данной задачи представляет собой задачу условной оптимизации с бинарными переменными. Для решения поставленной проблемы были применены эволюционные алгоритмы, представляющие собой стохастическую оптимизационную процедуру, имитирующую процессы естественной эволюции [3]. На основе математической модели и эволюционных алгоритмов была разработана система поддержки принятия решений при управлении реальными инвестициями реструктурируемого предприятия.

Проверка эффективности генетического алгоритма проводились на множестве тестовых задач безусловной и условной оптимизации. В большинстве случаев наиболее эффективным оказывается генетический алгоритм с равномерным скрещиванием. Равномерное скрещивание допускает модификацию, состоящую в использовании многих родителей и организации селективного давления на этапе скрещивания. По результатам исследования СППР формирования инвестиционных программ были получены следующие результаты: равномерное турнирное скрещивание не увеличивает эффективности алгоритма, равномерное равновероятное и равномерное пропорциональное имеют примерно одинаковую эффективность, в среднем более высокую, чем одноточечное и двухточечное, равномерное ранговое скрещивание более эффективно, чем остальные виды скрещивания. Наиболее эффективное количество родителей - 7.

СППР прошла успешную апробацию при решении реальной задачи формирования инновационной программы Химзавода-филиала ФГУП "Красмаш".

Список литературы

[1] С.В. Хайниш, В.М. Клешков. *Российское предприятие ВПК: выжить и развиваться. - М.: ЛЕНАНД, 2007. - 264 с.*

[2] В.М. Клешков, Е.С. Семенкин. *Модели и алгоритмы распределения общих ресурсов при управлении инновациями реструктурированного машиностроительного предприятия // Проблемы машиностроения и автоматизации, № 3. - 2006. - С. 24-31.*

[3] Л.А. Гладков, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик. *Генетические алгоритмы. - М.: Физматлит, 2006. - 320 с.*

КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Т.А. Щербакова

Сибирский федеральный университет, Институт математики

Научный руководитель - к.т.н., профессор В.В.Быкова

Определение 1. Клеточные автоматы являются дискретными динамическими системами, поведение которых полностью определяется в терминах локальных зависимостей.

Клеточные автоматы используются для моделирования гидродинамических и газодинамических течений. Примитивные одномерные клеточные автоматы могут моделировать процесс горения различного характера. Клеточные автоматы применимы также в биологии, экономике, социологии, информатике и т.д. С помощью клеточных автоматов успешно решались задачи моделирования течений со свободной границей, распространения тепловых потоков, роста и динамики доменов, роста дендритов, описания движения толпы. Их можно использовать при составлении генетических алгоритмов. Еще одно применение клеточных автоматов в информатике - шифрование и сжатие данных. Клеточные автоматы применимы при реализации эффективной системы распознавания образов. Так же клеточные автоматы применяются для численного решения сложных дифференциальных уравнений. Они с успехом могут быть использованы для тех задач, которые не требуют решения в реальном времени.

Игра "Жизнь" была создана в 1970 году Джоном Хортоном Конуэем. Возникающие в процессе игры ситуации похожи на реальные процессы, происходящие в колонии живых организмов. Рассматривается бесконечная плоская решётка квадратных ячеек-клеток. Время в этой игре дискретно. Клетка может быть живой или мёртвой. Изменение её состояния в следующий момент времени $t + 1$ определяется состоянием её соседей в момент времени t.

Правила:

1. Выживание. Каждая клетка, имеющая две или три соседние живые клетки, выживает и переходит в следующее поколение.
2. Гибель. Каждая клетка, у которой больше трёх соседей, погибает из-за перенаселённости. Каждая клетка, вокруг которой свободны все соседние клетки или же занята всего одна клетка, погибает от одиночества.
3. Рождение. Если число занятых клеток, с которыми граничит какая-нибудь пустая клетка, в точности равно трём, то на этой клетке про-

исходит рождение нового организма.

Принципы выбора именно этих правил:

1. Не должно быть исходной конфигурации, для которой существовало бы простое доказательство возможности неограниченного роста популяции.
2. Должны существовать такие начальные конфигурации, которые заведомо обладают способностью беспредельно развиваться.
3. Должны существовать простые начальные конфигурации, которые в течении значительного промежутка времени растут, претерпевают различные изменения.

Закономерности:

1. Свойство локализации - структуры, разделённые двумя "мёртвыми" (пустыми) клетками не влияют друг на друга.
2. Система клеток, развивается необратимо.
3. Конфигурации, не обладавшие в начале игры симметрией, обнаруживают тенденцию к переходу в симметричные формы.

В результате жизнедеятельности (или специального построения) появляются различные конфигурации интересные своим поведением (например, "корабли", "глайдерные пушки", "Паровозы", "Стационары", "Периодические" и т.д.)

Мной была разработана программа в среде программирования Delphi, наглядно демонстрирующая все эти правила и принципы, а так же позволяющая выявлять, фиксировать, выделять и сохранять различные интересные конфигурации, а так же наносить их на поле из базы объектов одним щелчком по полю, изменять размер поля, масштабировать поле, изменять его конфигурацию (например, делать его не только ограниченным полем, но и тором или листом Мебиуса).

Список литературы

[1] Г.Б. Астафьев, А.А. Короновский, А.Е. Храмов. Клеточные автоматы. Учебно-методическое пособие. Саратов: ГосУНЦ "Колледж", 2003. 24c.

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ РИСКА БАНКРОТСТВА ПРЕДПРИЯТИЯ

М.И. Шерыкалова

Сибирский федеральный университет, Институт математки

Научный руководитель - к.ф.-м.н. Д.В. Семенова

Степень риска банкротства представляет собой комплексный показатель, характеризующий как финансовое положение предприятия, так и качество управления им, которое получает свое выражение в финансовом эквиваленте.

В работе рассматривается два известных классических подхода: количественный (базируется на финансовых данных и включает умение читать баланс и оперирование некоторыми коэффициентами) и качественный подход (исходит из сравнения данных по обанкротившимся компаниям с соответствующими данными исследуемой компании).

Количественный подход имеет ряд существенных недостатков, проявляющихся в том, что испытывающие трудности предприятия, часто задерживают публикацию своих отчетов, и, таким образом, конкретные данные могут долгое время оставаться недоступными.

Любой прогноз, полученный при использовании качественных методик прогнозирования банкротства является субъективным, а рассчитанные значения критериев носят скорее характер информации к размышлению, нежели побудительных стимулов для принятия немедленных решений.

В работе было показано, что подход анализа риска банкротства, основанный на применении нечетких множеств, позволяет, учитывая все недостатки существующих количественных и качественных подходов, анализировать риск банкротства, настраиваясь на страну, период времени, отрасль, а также на экономическую и управленческую специфику.

Также в данной работе была сделана попытка применения эвентологической теории для задач оценки риска банкротства предприятия.

К рассмотрению предлагается пара э-лингвистических переменных:

$$\left\langle \mathcal{L}^1,\ \mathfrak{X}^1,\ \Omega^1,\ \mathcal{G}_E^1,\ \mathcal{M}_E^1 \right\rangle, \tag{1}$$

$$\left\langle \mathcal{L}^2,\ \mathfrak{X}^2,\ \Omega^2,\ \mathcal{G}_E^2,\ \mathcal{M}_E^2 \right\rangle. \tag{2}$$

Поясним предназначение эвентологической переменной первого вида (1): $\mathcal{L}^1$ — *уровень фактора, характеризующего риск банкротства предприятия*, $\mathfrak{X}^1 = \{$*очень низкий, низкий, средний, высокий, очень высокий*$\}$.

Пусть $(\Omega^1, \mathfrak{F}^1, \mathbf{P}^1)$ — вероятностное пространство. Тогда определим множество элементарных событий Ω^1 как отрезок действительной оси [0,1]. Элементарное событие $\omega \in \Omega$ является точкой отрезка [0,1].

Э-лингвистическая переменная вида (2): $\mathcal{L}^2$ — *Степень риска банкротства предприятия*, $\mathfrak{X}^2 = \{$*запредельный риск банкротства предприятия, высокий риск банкротства, пограничный риск, приемлемый риск, незначительный риск банкротства предприятия*$\}$. Определим вероятностное пространство $(\Omega^2, \mathfrak{F}^2, \mathbf{P}^2)$. Тогда определим множество элементарных событий Ω^2 как некоторый отрезок действительной оси [0,100]. Элементарное событие $\omega \in \Omega$ является точкой отрезка [0,100].

Любое предприятие характеризуется определенным набором факторов, — поэтому каждому фактору ставится в соответствие э-лингвистическая переменная первого вида (1).

После проведения ряда нечетких экспериментов для каждого фактора, используемого для оценки риска банкротства предприятия, получается множество $\mathfrak{X}^N_{\mathfrak{M}}$ — набор матриц $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}$ избранных случайных событий, количество которых равно N — количеству рассматриваемых факторов.

Далее представляется возможным построение эвентологических функций принадлежностей, описывающих каждый уровень для каждого из рассматриваемого фактора, и дальнейшее применение алгоритма Недосекина на полученных данных для оценки рсика банкротства предприятия. Необходимость этого возникает потому, что на данном этапе нет законченного эвентологического механизма для оценки риска банкротства предприятия.

Но, тем не менее, даже на данном этапе прослеживаются преимущества введения нечетких событий: отсутствует необходимость в сборах статистики для построения классифицирующей таблицы, производится индивидуальная настройка на конкретное предприятие (эксперты — люди, заинтересованные в благополучии данного предприятия, ориентирующиеся на конкретные показатели развития предприятия и на определенный уровень факторов, характеризующих состояние предприятия).

Литература

[1] Воробьев О.Ю. *Эвентология / О.Ю.Воробьев: Сиб.фед.ун-т. — Красноярск, 2007, 435с.*

[2] Семенова Д.В. *Звентологическая концепция лингвистической переменной / Д.В. Семенова, 2009г.*

[3] Недосекин А.О. *Методологические основы моделирования финансовой деятельности с использованием нечетко-множественных описаний: дис. д.эк.н. / А.О.Недосекин, С-Пб, 280с., 2003.*

.

Научное издание

ТРУДЫ XLII КРАЕВОЙ НАУЧНОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ И КОМПЬЮТЕРНЫМ НАУКАМ

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка Р.В. Сорокин

Подписано в печать 01.12.09
Печать плоская
Усл. печ. л. 3,0
Тираж 50 экз.

Формат 60x84/16
Бумага офсетная
Заказ

Издательско-полиграфический комплекс
Сибирского федерального университета
660041 Красноярск, пр. Свободный, 82а