

Лектор Шипина Т.Н.

Теоретические разделы

1. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Основные методы интегрирования неопределенных интегралов (интегрирование по частям, внесение под знак дифференциала, замена переменных)
3. Интегрирование рациональных функций
4. Интегрирование иррациональных функций.
5. Интегрирование тригонометрических функций
6. Интегрирование трансцендентных функций
7. Определенный интеграл. Необходимое условие интегрируемости.
8. Нижние и верхние суммы Дарбу. Критерий интегрируемости
9. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.
10. Свойства определенного интеграла.
11. Первая теорема о среднем.
12. Интеграл с переменным верхним пределом.
13. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования.
14. Вторая теорема о среднем.
15. Площадь плоской фигуры. Мера Жордана.
16. Спрямолинейные и гладкие кривые. Длина кривой.
17. Объем тела и его вычисление.
18. Несобственный интеграл и его свойства
19. Критерий Коши существования несобственного интеграла.
20. Признаки сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций.
21. Признак Абеля сходимости несобственного интеграла.
22. Признак Дирихле сходимости несобственного интеграла.
23. Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла.
24. Интеграл в смысле главного значения.

Практические задания

1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}} dx;$$

$$\int \sin x \cos^2 x dx ;$$

$$\int (x-7) \sin 3x dx;$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx ;$$

$$\int \frac{(3x+8)dx}{x^2+3x-10} ;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} ;$$

$$\int \left(x + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} dx;$$

$$\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}} dx;$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} ;$$

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x};$$

$$\int \frac{(6x-1)dx}{x^2-4x+13} ;$$

$$\int \frac{dx}{3+5 \cos x} ;$$

$$\int \frac{\sqrt{x}-2}{x(x^{\frac{1}{3}}+1)} dx ;$$

$$\int x^3 e^{1-x^2} dx;$$

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx;$$

$$\int \arctg x dx ;$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x^2-2x-15} dx;$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{4+\cos x} dx;$$

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \cdot \frac{dx}{x};$$

2. Для функции $f(x) = 2x + 1$ на отрезке $[0; 4]$ записать интегральную сумму и найти ее значение, разбив отрезок $[0; 4]$ на 4 равные части. Точки $\xi_i, i = 1, \dots, 4$, выбрать самостоятельно.

3. Для функции $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ на отрезке $[0; 4]$ записать верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу и найти их значения, разбив отрезок $[0; 4]$ на 4 равные части.
4. Доказать, что функция $F(x) = \int_0^x t^4 \cdot e^{-t^2} dt$ нечетная.
5. Доказать, что функция $F(x) = \int_0^x t^4 \cdot e^{-t^2} dt$ нечетная.
6. Доказать, что функцию $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ можно дифференцировать и найти ее производную.
7. Исследовать на сходимость несобственные интегралы
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$ $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2+1)}{x^2} dx;$ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}};$
 $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{dx}{1-x};$

Список литературы

1. Л.Д. Кудрявцев и др. Сборник задач по математическому анализу. **Том2.** –Москва: ФИЗМАТЛИТ. 2003.
2. А.М.Кытманов и др. Математический анализ с элементами алгебры, геометрии и функционального анализа (учебное пособие) (<http://math.sfu-kras.ru/sites/default/files/matananaliz2.pdf>).

ОБРАЗЕЦ

ВАРИАНТ 0

1. Дать определение:
 - нижней суммы Дарбу;
 - условно сходящегося несобственного интеграла.
2. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на $[a; b]$ и имеет место формула

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

3. Сформулировать критерий Коши сходимости несобственного интеграла.
4. Вычислить интегралы:

$$\int \frac{\cos \ln x}{x} dx,$$

$$\int \frac{(3x+8)dx}{x^2+3x-10}.$$

5. Для функции $f(x) = 2x + 1$ на отрезке $[0; 4]$ записать интегральную сумму и найти ее значение, разбив отрезок $[0; 4]$ на 4 равные части. Точки $\xi_i, i = 1, \dots, 4$, выбрать самостоятельно.
6. Доказать, что функция $F(x) = \int_0^x t^4 \cdot e^{-t^2} dt$ нечетная.