

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1(c - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = k_2(c - x - y), \end{cases}$$

где k_1 и k_2 – коэффициенты пропорциональности скорости образования каждого из веществ P и Q , $x = x(t)$, $y = y(t)$ – искомые функции, описывающие закон изменения количества веществ P и Q .

Не останавливаясь подробно на процессе решения этой системы и нахождении коэффициентов k_1, k_2 запишем окончательный ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{c}{4}(1 - 2^{-t}), \\ y = \frac{3c}{4}(1 - 2^{-t}). \end{cases}$$

График искомых функций $x(t)$ и $y(t)$ (рис. 3.1) демонстрирует характер образования веществ P и Q в процессе химической реакции разложения вещества A .

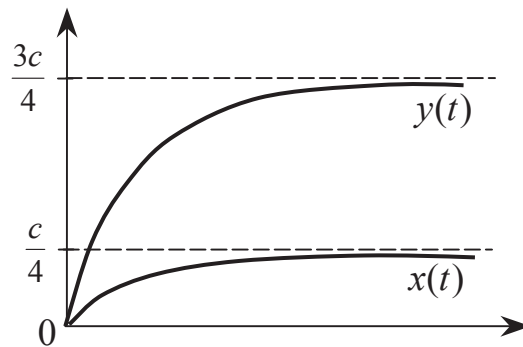


Рис. 3.1.

Задача 2 (о движении материальной точки в пространстве под действием переменной силы). Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон движения материальной точки в пространстве, где t – время, $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ (т.е. в момент времени t точка имеет координаты $\{x(t), y(t), z(t)\}$). Если точка движется под действием силы $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$, где $\dot{\vec{r}} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\} = \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$ – скорость, то по II закону Ньютона вектор $\vec{r}(t)$ должен удовлетворять уравнению движения

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Это векторное уравнение эквивалентно системе трех скалярных уравнений

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \end{cases}$$

где $\vec{F} = \{X, Y, Z\}$. Если считать неизвестными еще и проекции скорости $\dot{x} = u, \dot{y} = v, \dot{z} = w$, то система переписывается в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t), \\ \frac{dy}{dt} = v(t), \\ \frac{dz}{dt} = w(t), \\ m \frac{du}{dt} = X(t, x, y, z, u, v, w), \\ m \frac{dv}{dt} = Y(t, x, y, z, u, v, w), \\ m \frac{dw}{dt} = Z(t, x, y, z, u, v, w). \end{cases}$$

Или, в более компактной форме:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}, \\ m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{V}), \end{cases}$$

где \vec{V} – вектор с проекциями (u, v, w) .

Таким образом, мы убедились, что физические задачи приводят нас к необходимости рассмотрения систем дифференциальных уравнений. Причем, в зависимости от постановки задачи, число уравнений может быть достаточно большим. В таких случаях удобнее использовать более компактные формы записи (например, векторную, матричную).

§ 18. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Метод исключения

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

[illegible]

где x – независимая переменная, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – искомые функции, F_1, F_2, \dots, F_n – известные функции.

Совокупность n функций $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_n = y_n(x)$ называется **решением системы** (18.1) на интервале (a, b) , если она обращает на (a, b) каждое уравнение этой системы в тождество.

Замечание. Всегда будем предполагать, что число уравнений системы равно числу неизвестных функций. На практике встречаются системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных. Такие системы дифференциальных уравнений называются уравнениями Монжа. В нашем курсе мы их рассматривать не будем.

Система, которая может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в нее функций, называется **канонической**:

[illegible]

где x – независимая переменная, $y_i(x)$ – искомые функции, $f_i(x)$ – заданные в некоторой области функции.

Класс систем дифференциальных уравнений, решение которых можно найти аналитическим путем, достаточно узок. Поэтому мы будем изучать главным образом системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, для которых существует законченная теория построения общего решения, и несложные системы нелинейных уравнений, для которых, как правило, можно подобрать интегрируемые комбинации. Для всех остальных случаев на практике используют численные методы, которые выходят за рамки нашего курса.

Частный случай канонической системы – *система уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной всех искомых функций, т. е. система вида:*

$$(18.3)$$

Число уравнений системы (18.3) называется ее **порядком**. В дальнейшем будем рассматривать только нормальные системы, т. к. каноническую систему (18.2) всегда можно заменить эквивалентной ей нормальной системой $k = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ уравнений. Для этого достаточно ввести k новых функций

полагая, что

ПРИМЕР. Рассмотрим систему трех уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y_1'' = f_1(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_2'' = f_2(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'), \\ y_3'' = f_3(x, y_1, y_2, y_3, y_1', y_2', y_3'). \end{cases}$$

$$y_{10} = y_1, y_{20} = y_2, y_{30} = y_3, y_{11} = y'_1, y_{21} = y'_2, y_{31} = y'_3.$$

Тогда исходная система будет эквивалентна следующей системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_{11} = f_1(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y'_{21} = f_2(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y'_{31} = f_3(x, y_{10}, y_{20}, y_{30}, y_{11}, y_{21}, y_{31}), \\ y'_{10} = y_{11}, \\ y'_{20} = y_{21}, \\ y'_{30} = y_{31}. \end{array} \right. \quad \diamond$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1)$$

можно рассматривать как частный случай системы дифференциальных уравнений. Ее решением будет функция $y_1(x) = \varphi(x)$, которая с геометрической точки зрения представляет собой кривую на плоскости (в двумерном пространстве). Для системы 2-го порядка

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

решением будет пара функций $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x), \end{cases}$ которые можно рассматри-

вать как уравнения кривой в пространстве трех измерений. Обобщая геометрическую терминологию, будем считать, что решение $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$ системы (18.3) представляет собой интегральную кривую $(n+1)$ -мерного пространства переменных x, y_1, y_2, \dots, y_n .

Задача Коши для систем дифференциальных уравнений ставится также, как для одного уравнения: найти решение системы, удовлетворяющее **начальным условиям**

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (18.4)$$

Справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 18.1 (о существовании и единственности решения задачи Коши). Пусть в системе (18.3) функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ удовлетворяют двум условиям:

- 1) функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ непрерывны как функции $(n+1)$ -ой переменной x, y_1, y_2, \dots, y_n в некоторой области D $(n+1)$ -мерного пространства;
- 2) их частные производные по переменным y_1, y_2, \dots, y_n в области D

ограничены (т. е. $\exists M > 0$ такое, что $\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq M, i, j = \overline{1, n}$).

Тогда для любой фиксированной точки $M_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ области D существует, и притом единственное, решение

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$$

системы (18.3), определенное в некоторой окрестности точки x_0 , и удовлетворяющее начальным условиям (18.4).

Из теоремы 18.1 следует, что, закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значения $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ (так, чтобы точка $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ принадлежала области D), мы будем для каждой системы чисел $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ получать свое решение. Следовательно, в области D система (18.3) имеет бесчисленное множество решений и эта совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Совокупность n функций

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, \dots, C_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n), \end{aligned} \quad (18.5)$$

зависящих от x и n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n , называется общим решением системы (18.3), если:

- 1) при любых допустимых значениях постоянных C_1, C_2, \dots, C_n она обращает все уравнения системы (18.3) в тождество, т. е. определяет решение системы;
- 2) для любых допустимых начальных условий найдутся такие значения констант, при которых функции совокупности (18.5) удовлетворяют заданным начальным условиям.

Любое решение, которое получается из общего при конкретных постоянных C_i , будем называть **частным**.

Для нормальных систем справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 18.2. Всякое дифференциальное уравнение n -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

может быть заменено эквивалентной ему нормальной системой порядка n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$y = z_1, \quad y' = z_2, \quad y'' = z_3, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = z_n.$$

Тогда

$$y' = \frac{dz_1}{dx} = z_2, \quad y'' = \frac{dz_2}{dx} = z_3, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = \frac{dz_{n-1}}{dx} = z_n, \quad y^{(n)} = \frac{dz_n}{dx} = f(x, z_1, \dots, z_n),$$

т. е. получили нормальную систему

$$\begin{cases} z_1' = z_2, \\ z_2' = z_3, \\ \dots\dots\dots \\ z_{n-1}' = z_n, \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n), \end{cases}$$

эквивалентную заданному уравнению. ■

Справедливо также и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 18.3. *Всякая нормальная система n -го порядка может быть заменена эквивалентным ей дифференциальным уравнением порядка n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана нормальная система

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases} \quad (18.6)$$

Дифференцируем по x обе части первого уравнения системы:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Заменим $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ их выражениями через x, y_1, \dots, y_n из системы (18.6) и получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n$$

или, переобозначая правую часть, имеем:

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Дифференцируя полученное уравнение по x и, заменяя производные их выражениями из системы (18.6), будем иметь

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Продолжая этот процесс, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots \dots \dots \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (18.7)$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (18.7) находим y_2, y_3, \dots, y_n , которые будут выражаться через $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \psi_3(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}), \\ \dots \dots \dots \\ y_n = \psi_n(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \end{cases} \quad (18.8)$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы (18.7), приходим к дифференциальному уравнению n -го порядка относительно переменной y_1 :

$$y_1^{(n)} = F(x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}). \blacksquare \quad (18.9)$$

$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$

Дифференцируя найденную функцию y_1 $(n-1)$ раз и, подставляя $y_1^{(i)}$ ($i = \overline{1, n-1}$) в (18.8), находим искомое решение нормальной системы дифференциальных уравнений:

[illegible]

Замечание. Уравнение (18.9) было получено в предположении, что из системы (18.8) можно выразить y_2, y_3, \dots, y_n как функции $x, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$. Но в ряде случаев это сделать невозможно (например, если первое уравнение имеет вид $y_1' = f(x, y_1)$). Тогда следует получить систему вида (18.8) для i -го ($i \neq 1$) уравнения системы и заменить систему уравнением порядка n относительно функции y_i . Для системы дифференциальных уравнений нельзя получить эквивалентного ей уравнения порядка n только тогда, когда система распадается на отдельные уравнения, т.е. является не системой, а совокупностью уравнений.

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 + 4x - 1, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Продифференцируем второе уравнение системы:

Заменим y_1' ее выражением из первого уравнения системы:

Из второго уравнения системы находим:

Подставляя выражение для y_1 в (18.10) получим уравнение:

Его общее решение:

$$y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Дифференцируя y_2 и подставляя y_2 и y_2' в выражение для y_1 находим:

$$y_1 = 5C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 5C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - x, \\ y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}. \end{cases}$$

Найдем значение постоянных C_1 и C_2 , при которых частное решение будет удовлетворять начальным условиям $y_1(0) = 11$, $y_2(0) = 3$.

Подставив в общее решение $x_0 = 0$, $y_1 = 11$, $y_2 = 3$, будем иметь

$$\begin{cases} 11 = 5C_1 + C_2, \\ 3 = C_1 + C_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = 10e^{3x} + e^{-x} - x, \\ y_2 = 2e^{3x} + e^{-x}. \end{cases} \diamond$$

ПРИМЕР 18.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = y_2 + y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. 1) Дифференцируем первое уравнение системы по x два раза, каждый раз заменяя y_2' и y_3' их выражениями из второго и третьего уравнений системы:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3; \\ y_1'' &= y_2' + y_3' = \underbrace{(y_1 + y_2 - y_3)}_{y_2'} + \underbrace{(y_2 + y_3)}_{y_3'}, \\ &\Rightarrow y_1'' = y_1 + 2y_2. \\ y_1''' &= y_1' + 2y_2' = (y_2 + y_3) + 2(y_1 + y_2 - y_3), \\ &\Rightarrow y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \end{aligned} \tag{18.11}$$

Получили систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2, \\ y_1''' = 2y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

Из системы уравнений $\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3, \\ y_1'' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$ находим y_2 и y_3 :

$$\begin{aligned} y_2 &= 0,5 \cdot (y_1'' - y_1), \\ y_3 &= y_1' - 0,5 \cdot (y_1'' - y_1). \end{aligned}$$

Подставляя выражения для y_2 и y_3 в уравнение (18.11) получим

$$\begin{aligned} y_1''' &= 2y_1 + 1,5 \cdot (y_1'' - y_1) - y_1' + 0,5 \cdot (y_1'' - y_1), \\ \Rightarrow y_1''' - 2y_1'' + y_1' &= 0. \end{aligned}$$

Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$. Следовательно, общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3x).$$

2) Теперь найдем y_2 и y_3 . Имеем:

$$\begin{aligned} y_2 &= 0,5 \cdot (y_1'' - y_1), \\ y_3 &= y_1' - 0,5 \cdot (y_1'' - y_1). \end{aligned}$$

Из $y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3x)$ находим

$$y_1' = e^x(C_2 + C_3 + C_3x) \quad \text{и} \quad y_1'' = e^x(C_2 + 2C_3 + C_3x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_2 &= 0,5 \cdot [e^x(C_2 + 2C_3 + C_3x) - C_1 - e^x(C_2 + C_3x)], \\ \Rightarrow y_2 &= 0,5 \cdot [e^x(C_2 + 2C_3 + C_3x - C_2 - C_3x) - C_1], \\ \Rightarrow y_2 &= -0,5 \cdot C_1 + C_3e^x; \\ y_3 &= e^x(C_2 + C_3 + C_3x) - (-0,5 \cdot C_1 + C_3e^x), \\ \Rightarrow y_3 &= 0,5 \cdot C_1 + e^x(C_2 + C_3x). \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + e^x(C_2 + C_3x), \\ y_2 = -0,5 \cdot C_1 + C_3e^x, \\ y_3 = 0,5 \cdot C_1 + e^x(C_2 + C_3x). \end{cases} \quad \diamond$$

§ 19. Метод интегрируемых комбинаций

Пусть решение системы дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = \overline{1, n}) \quad (19.1)$$

имеет вид:

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n) \quad (i = \overline{1, n}). \quad (19.2)$$

Можно доказать, что в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, в которой выполняются условия теоремы существования и единственности решения, система (19.2) может быть однозначно разрешена относительно C_1, C_2, \dots, C_n . Т. е. в области D справедливы равенства

[illegible]

Совокупность равенств (19.3) называют *общим интегралом системы* (19.1), а каждое из равенств системы (19.3) называют *первым интегралом системы* (19.1).

Иногда при интегрировании системы дифференциальных уравнений легче найти именно общий интеграл системы. Так, например, если с помощью элементарных преобразований система (19.1) приводится к виду

$$d\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \quad (19.4)$$

TO

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_i \quad (i = \overline{1, n})$$

будут первыми интегралами системы, а их совокупность – общий интеграл. Такой способ интегрирования систем называют *методом интегрируемых комбинаций*.

Замечание. n первых интегралов системы образуют общий интеграл, если они независимы, т. е. ни один из них не может быть получен из оставшихся. Доказано, что если $\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_i$ ($i = \overline{1, k}$) – первые интегралы и для каких-нибудь k функций $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k}$ якобиан

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_2}} & \dots \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{i_k}} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_2}} & \dots \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{i_k}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_1}} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_2}} & \dots \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_{i_k}} \end{array} \right| = \frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k)}{\partial(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k})} \neq 0,$$

то первые интегралы независимы.

ПРИМЕР 19.1. Найти первые интегралы системы

$$\begin{cases} y_1 y'_1 + y_2 y'_2 + 1 = 0, \\ \frac{y'_1}{y_1} + \frac{y'_2}{y_2} + y_1 y'_2 + y_2 y'_1 = 0. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + dx = 0, \\ \frac{dy_1}{y_1} + \frac{dy_2}{y_2} + y_1 dy_2 + y_2 dy_1 = 0; \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \frac{1}{2} d(y_1^2) + \frac{1}{2} d(y_2^2) + dx = 0, \\ d(\ln |y_1|) + d(\ln |y_2|) + d(y_1 y_2) = 0; \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} d(y_1^2 + y_2^2 + 2x) = 0, \\ d(\ln |y_1| + \ln |y_2| + y_2 y_1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Значит, общий интеграл системы:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + 2x = C_1, \\ \ln |y_1| + \ln |y_2| + y_2 y_1 = C_2. \end{cases} \quad \diamond$$

Если привести систему к виду (19.4) сложно, но удастся найти k ($k < n$) независимых первых интегралов системы, то из них можно выразить k неизвестных функций через остальные $(n - k)$ функций и перейти таким образом к системе с меньшим числом переменных.

ПРИМЕР 19.2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Почленно сложим второе и третье уравнения, вычтем первое и получим

$$-\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = -(2y_1 - y_2 - y_3) + (3y_1 - 2y_2 - 3y_3) + (-y_1 + y_2 + 2y_3) = 0$$

или
$$\frac{d}{dx}(-y_1 + y_2 + y_3) = 0.$$

Отсюда первый интеграл системы:

$$-y_1 + y_2 + y_3 = C_1.$$

Этот интеграл позволяет выразить одну из неизвестных функций через две другие, например,

$$y_3 = C_1 + y_1 - y_2. \quad (19.5)$$

Подставим y_3 в первые два уравнения системы и получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными y_1 и y_2 :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2 - (C_1 + y_1 - y_2), \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2 - 3(C_1 + y_1 - y_2), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - C_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2 - 3C_1. \end{cases}$$

Каждое из уравнений этой системы является уравнением с разделяющимися переменными. Интегрируя их, находим:

$$y_1 = C_1 + C_2 e^x, \quad y_2 = 3C_1 + C_3 e^x.$$

Подставим найденные y_1 и y_2 в (19.5) и найдем y_3 :

$$y_3 = C_1 + (C_1 + C_2 e^x) - (3C_1 + C_3 e^x) = e^x (C_2 - C_3) - C_1.$$

Таким образом, общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^x, \\ y_2 = 3C_1 + C_3 e^x, \\ y_3 = e^x (C_2 - C_3) - C_1. \end{cases} \quad \diamond$$

Равенства (19.3), дающие общий интеграл системы (19.1) обладают следующей особенностью: независимая переменная и функции входят в них равноправно. Следовательно, они сохраняют свой вид и в том случае, когда мы берем в качестве независимой переменной y_i , хотя сама система дифференциальных уравнений свою форму в этом случае меняет.

Систему дифференциальных уравнений тоже можно записать в виде, который не будет меняться при смене независимого переменного. Действительно, из уравнений

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = \overline{1, n})$$

получаем:
$$dx = \frac{dy_i}{f_i(x, y_1, \dots, y_n)} \quad (i = \overline{1, n}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dx &= \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)}; \\ \Rightarrow \frac{dx}{f(x)} &= \frac{dy_1}{f(x) \cdot f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f(x) \cdot f_n(x, y_1, \dots, y_n)}, \end{aligned} \quad (19.6)$$

где $f(x)$ – любая отличная от нуля функция. Обозначим

$$x = x_1, \quad y_1 = x_2, \quad \dots, \quad y_n = x_{n+1}.$$

Тогда равенства (19.6) примут вид:

$$\frac{dx_1}{F_1(x_1, \dots, x_{n+1})} = \frac{dx_2}{F_2(x_1, \dots, x_{n+1})} = \dots = \frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})} \quad (19.7)$$

Форма (19.7) записи системы дифференциальных уравнений, называется **симметричной** (или **симметрической**). Для метода интегрируемых комбинаций она обычно более удобна.

Замечание. При интегрировании системы методом интегрируемых комбинаций часто оказывается полезным **свойство равных дробей** (или **производных пропорций**):

$$\text{если } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad \text{то } \frac{a_1}{b_1} = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3}.$$

Действительно, пусть

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k,$$

$$\Rightarrow a_1 = k \cdot b_1, \quad a_2 = k \cdot b_2, \quad a_3 = k \cdot b_3.$$

Тогда

$$\frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3}{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3} = \frac{\alpha_1 k b_1 + \alpha_2 k b_2 + \alpha_3 k b_3}{\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3} = k = \frac{a_1}{b_1}. \quad \blacksquare$$

ПРИМЕР 19.3. Решить систему методом интегрируемых комбинаций

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -\frac{\ln x}{2y_1}, \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{\ln x}{2y_1} - 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Запишем систему в симметричной форме:

$$\frac{dy_1}{-\frac{\ln x}{2y_1}} = \frac{dy_2}{\frac{\ln x}{2y_1} - 1} = \frac{dx}{1},$$

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{\ln x} = \frac{dy_2}{2y_1 - \ln x} = \frac{dx}{-2y_1}.$$

Из равенства первой и третьей дроби получим один первый интеграл:

$$\frac{dy_1}{\ln x} = \frac{dx}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow -2y_1 dy_1 = \ln x dx,$$

$$\Rightarrow -y_1^2 = x(\ln x - 1) + C_1 \quad \text{или} \quad y_1^2 + x(\ln x - 1) = C_1.$$

Другой первый интеграл системы получим используя свойства равных дробей:

$$\frac{dy_1 + dy_2}{\ln x + 2y_1 - \ln x} = \frac{dx}{-2y_1},$$

$$\Rightarrow dy_1 + dy_2 = -dx,$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = -x + C_2 \quad \text{или} \quad y_1 + y_2 + x = C_2.$$

Убедимся, что найденные первые интегралы

$$y_1^2 + x(\ln x - 1) = C_1 \quad \text{и} \quad y_1 + y_2 + x = C_2$$

независимы (см. замечание на стр. 129). Имеем:

$$\Phi_1 = y_1^2 + x(\ln x - 1), \quad \Phi_2 = y_1 + y_2 + x,$$

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 2y_1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = 2y_1 \neq 0.$$

Таким образом, первые интегралы действительно независимы и общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases} y_1^2 + x(\ln x - 1) = C_1, \\ y_1 + y_2 + x = C_2. \end{cases} \quad \diamond$$

§ 20. Системы линейных дифференциальных уравнений

Нормальная система дифференциальных уравнений (18.3) называется **линейной**, если функции f_1, f_2, \dots, f_n линейны относительно неизвестных функций, т. е. если она имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x), \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x), \end{cases} \quad (20.1)$$

или, более кратко,

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j + b_i(x) \quad (i = \overline{1, n}),$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $b_i(x)$ – известные функции от x , $y_i(x)$ – известные функции.