где $\widetilde{C}_i$ – произвольные постоянные. Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left( \varphi_i(x) + \widetilde{C}_i \right) y_i \,. \tag{15.6}$$

### *15.2. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида*

Раскроем скобки в (15.6) и сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$y=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x)+\widetilde{C}_i\right)y_i=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{C}_i y_i+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)y_i\,.$$

Заметим, что первая получившаяся сумма – общее решение соответствующего однородного уравнения, вторая – частное решение неоднородного уравнения (получается из общего решения при $\widetilde{C}_i=0$). Более того, оказалось, что в общем случае справедлива следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 15.1** (О структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). *Общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка равно сумме общего решения* $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)$ *соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения* $\widetilde{y}$ *неоднородного уравнения, т. е. имеет вид*

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x)+\widetilde{y}(x)\,. \qquad (15.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется доказать, что

1) функция (15.7) является решением линейного неоднородного уравнения $n$-го порядка при любых значениях констант $C_1,\ldots,C_n$;
2) любое решение $\hat{y}(x)$ линейного неоднородного уравнения $n$-го порядка может быть получено из (15.7) при некоторых значениях констант $C_1,\ldots,C_n$.

Чтобы убедиться в справедливости первого утверждения, достаточно подставить (15.7) в линейное неоднородное уравнение:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]^{(n)}+a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)+\widetilde{y}(x)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}C_i\underbrace{\left[y_i^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot y_i^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot y_i(x)\right]}_{\substack{0\\ \text{(т.к. } y_i-\text{решение однородного уравнения)}}}+$$

$$+\underbrace{\left[\widetilde{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\widetilde{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\widetilde{y}(x)\right]}_{\substack{f(x)\\ \text{(т.к. } \widetilde{y}-\text{решение неоднородного уравнения)}}}=$$

$$=0+f(x)=f(x)\,.$$

Докажем второе утверждение. Рассмотрим разность $\hat{y}(x)-\widetilde{y}(x)$. Эта функция будет являться решением однородного уравнения. Действительно,

$$\left[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)\right]^{(n)}+a_1(x)\left[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)\right]^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)\left[\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)\right]=$$
$$=\left[\hat{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\hat{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\hat{y}(x)\right]-$$
$$-\left[\tilde{y}^{(n)}(x)+a_1(x)\cdot\tilde{y}^{(n-1)}(x)+\ldots+a_n(x)\cdot\tilde{y}(x)\right]=$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

Но если $\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)$ является решением линейного однородного уравнения, то она является линейной комбинацией фундаментальной системы решений этого однородного уравнения. Т. е. существуют такие значения $\hat{C}_1,\ldots,\hat{C}_n$, что

$$\hat{y}(x)-\tilde{y}(x)=\hat{C}_1y_1(x)+\hat{C}_2y_2(x)+\ldots+\hat{C}_ny_n(x),$$
$$\Rightarrow\ \hat{y}(x)=\hat{C}_1y_1(x)+\hat{C}_2y_2(x)+\ldots+\hat{C}_ny_n(x)+\tilde{y}(x).\ \blacksquare$$

Таким образом, интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения можно свести к интегрированию соответствующего однородного уравнения и нахождению какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Однако обычно нахождение частного решения неоднородного уравнения представляет собой достаточно трудную задачу. Исключение составляют дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью вида

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_s(x)\cos\beta x+P_k(x)\sin\beta x\right],\qquad(15.8)$$

где $P_s(x), P_k(x)$ – многочлены степени $s$ и $k$ соответственно, $\alpha$ и $\beta$ – некоторые числа. Функцию (15.8) принято называть ***функцией специального вида.*** Для таких уравнений удалось выяснить структуру частного решения. А именно, была доказана следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 15.2** (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и правой часть специального вида). *Если правая часть $f(x)$ линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид* (15.8), *то частное решение такого уравнения может быть найдено в виде*

$$\tilde{y}=x^{\ell}e^{\alpha x}\left[R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right],\qquad(15.9)$$

*где $R_m(x)$ и $T_m(x)$ – некоторые многочлены степени $m$* (*где $m$ – большая из степеней многочленов $P_s(x), P_k(x)$ в правой части $f(x)$*), *$\ell$ – кратность характеристического корня $\alpha\pm\beta i$* (*$\ell=0$, если число $\alpha\pm\beta i$ не является характеристическим корнем*).

ПРИМЕРЫ.

1. Если линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет правую часть $f(x) = P_s(x)$, то частное решение такого уравнения имеет вид:

   а) $\tilde{y} = R_s(x)$, если число $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения;

   б) $\tilde{y} = x^{\ell} \cdot R_s(x)$, если число $\lambda = 0$ является корнем кратности $\ell$ характеристического уравнения.

2. Если $f(x) = P_s(x)e^{\alpha x}$, то частное решение имеет вид:

   а) $\tilde{y} = R_s(x)e^{\alpha x}$, если число $\alpha$ не является корнем характеристического уравнения;

   б) $\tilde{y} = x^{\ell} R_s(x)e^{\alpha x}$, если число $\alpha$ является корнем кратности $\ell$ характеристического уравнения.

3. Если $f(x) = P_s(x)\cos\beta x + P_k(x)\sin\beta x$, (где один из многочленов $P_s(x)$ или $P_k(x)$ может быть равен нулю), то частное решение имеет вид:

   а) $\tilde{y} = R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x$, если число $\pm\beta i$ не является характеристическим корнем уравнения;

   б) $\tilde{y} = x^{\ell}\left[R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x\right]$, если число $\pm\beta i$ является корнем кратности $\ell$ характеристического уравнения.

Находя частное решение по теореме 15.2, многочлены $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ записывают с неопределенными коэффициентами, а затем определяют их, подставляя решение в дифференциальное уравнение.

ПРИМЕР 15.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = 8e^{3x}.$$

РЕШЕНИЕ. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть является произведением числа и показательной функции $e^{3x}$:

$$f(x)=8e^{3x} \quad \Rightarrow \quad \alpha=3,\ \beta=0,\ s=0.$$

При этом число $\alpha\pm\beta i=3$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде
$$\tilde{y}=Ae^{3x},$$
где $A$ – неизвестный коэффициент.

Имеем: $$\tilde{y}'=3Ae^{3x}, \quad \tilde{y}''=9Ae^{3x}.$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим
$$9Ae^{3x}-2\cdot 3Ae^{3x}+Ae^{3x}=8e^{3x},$$
$$\Rightarrow \ 4Ae^{3x}=8e^{3x},$$
$$\Rightarrow \ 4A=8 \quad \text{или} \quad A=2.$$

Таким образом, $\tilde{y}=2e^{3x}$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид
$$y=(C_1e^x+C_2xe^x)+2e^{3x}.\diamond$$

ПРИМЕР 15.3. Найти общее решение уравнения
$$y''-3y'+2y=e^x(3-4x).$$

РЕШЕНИЕ. Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение
$$y''-3y'+2y=0.$$

Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2-3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид
$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена первой степени и показательной функции $e^x$:
$$f(x)=e^x(3-4x) \quad \Rightarrow \ \alpha=1,\ \beta=0,\ s=1.$$

При этом число $\alpha\pm\beta i=1$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде
$$\tilde{y}=xe^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx),$$
где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты.

Имеем: $$\tilde{y}'=e^x\left[Ax^2+(B+2A)x+B)\right],$$
$$\tilde{y}''=e^x\left[Ax^2+(B+4A)x+(2A+2B)\right].$$

Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим
$$e^x\left[Ax^2+(B+4A)x+(2A+2B)\right]-3e^x\left[Ax^2+(B+2A)x+B\right]+2e^x\left[Ax^2+Bx\right]=e^x(3-4x),$$

$$\Rightarrow\ e^x\Big[(A-3A+2A)x^2+(4A+B-6A-3B+2B)x+(2A+2B-3B)\Big]=e^x(3-4x),$$

$$\Rightarrow\ -2A\cdot x+(2A-B)=3-4x,$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}-2A=-4,\\ 2A-B=3;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ A=2,\quad B=1.$$

Таким образом, $\widetilde{y}=e^x\cdot x(2x+1)$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=(C_1e^x+C_2e^{2x})+xe^x(2x+1).\diamond$$

ПРИМЕР 15.4. Найти общее решение уравнения

$$y''+2y'+5y=4\cos 2x+\sin 2x.$$

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y''+2y'+5y=0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$. Поэтому общее решение этого однородного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x.$$

Правая часть уравнения $f(x)=4\cos 2x+\sin 2x$, т. е. $\alpha=0$, $\beta=2$, степени многочленов при синусе и косинусе $s=k=0$. Так как число $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\widetilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

Имеем

$$\widetilde{y}'=2B\cos 2x-2A\sin 2x,\qquad \widetilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x.$$

Подставим $\widetilde{y},\widetilde{y}',\widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим

$$\left(-4A\cos 2x-4B\sin 2x\right)+2\left(2B\cos 2x-2A\sin 2x\right)+5\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)=$$
$$=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ (-4A+4B+5A)\cdot\cos 2x+(-4B-4A+5B)\cdot\sin 2x=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ (A+4B)\cdot\cos 2x+(-4A+B)\cdot\sin 2x=4\cos 2x+\sin 2x,$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}\ \ A+4B=4,\\ -4A+B=1;\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ A=0,\quad B=1.$$

Таким образом $\widetilde{y}=\sin 2x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\sin 2x.\diamond$$

ПРИМЕР 15.5. Найти общее решение уравнения
$$y'' - y = \cos x.$$
РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение
$$y'' - y = 0.$$
Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 1$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена нулевой степени (число 1) и тригонометрической функции $\cos x$:
$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 0.$$
При этом число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде
$$\tilde{y} = A\cos x + B\sin x,$$
где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты.
Имеем:
$$\tilde{y}' = -A\sin x + B\cos x,$$
$$\tilde{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$
Подставим $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим:
$$[-A\cos x + B\sin x] - [A\cos x + B\sin x] = \cos x,$$
$$\Rightarrow \ -2A\cos x - 2B\sin x = \cos x,$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 1, \\ 2B = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0.$$

Таким образом, $\tilde{y} = -\frac{1}{2}\cos x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x. \ \diamond$$

ПРИМЕР 15.6. Найти общее решение уравнения
$$y'' + y = \cos x.$$
РЕШЕНИЕ. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение
$$y'' + y = 0.$$
Так как его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, то общее решение однородного уравнения будет иметь вид
$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения является произведением многочлена нулевой степени (число 1) и тригонометрической функции $\cos x$:

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \ \alpha = 0, \ \beta = 1, \ s = 0.$$

При этом число $\alpha \pm \beta i = \pm i$ является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому частное решение $\widetilde{y}$ неоднородного уравнения надо искать в виде

$$\widetilde{y} = x(A\cos x + B\sin x),$$

где $A$ и $B$ – неизвестные коэффициенты.

Имеем: $\quad \widetilde{y}' = \left[A\cos x + B\sin x\right] + x\cdot[-A\sin x + B\cos x],$

$$\widetilde{y}'' = 2\cdot\left[-A\sin x + B\cos x)\right] + x\cdot[-A\cos x - B\sin x].$$

Подставим $\widetilde{y}, \widetilde{y}', \widetilde{y}''$ в неоднородное уравнение и получим:

$$2\cdot\left[-A\sin x + B\cos x)\right] + x\cdot[-A\cos x - B\sin x] + x\cdot[A\cos x + B\sin x] = \cos x,$$

$$\Rightarrow \ 2\cdot\left[-A\sin x + B\cos x)\right] = \cos x,$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} -2A = 0, \\ \ 2B = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow \ A = 0, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\widetilde{y} = \dfrac{x}{2}\sin x$ – частное решение неоднородного уравнения, а его общее решение имеет вид

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x. \ \diamond$$

При нахождении частных решений линейного неоднородного уравнения часто оказывается полезной следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 15.3** (о наложении решений). *Если* $\widetilde{y}_1(x)$ *и* $\widetilde{y}_2(x)$ *– частные решения уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x)$$

*соответственно, то функция* $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ *будет являться решением уравнения*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x). \quad (15.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы убедится в справедливости теоремы, достаточно подставить функцию $\widetilde{y}(x) = \widetilde{y}_1(x) + \widetilde{y}_2(x)$ в уравнение (15.10):

$$\left[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2\right]^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\left[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2\right]' + a_n(x)\left[\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2\right] =$$

$$=\left[\widetilde{y}_1^{(n)}+a_1(x)\cdot\widetilde{y}_1^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot\widetilde{y}_1'+a_n(x)\cdot\widetilde{y}_1\right]+$$
$$+\left[\widetilde{y}_2^{(n)}+a_1(x)\cdot\widetilde{y}_2^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot\widetilde{y}_2'+a_n(x)\cdot\widetilde{y}_2\right]=$$
$$=f_1(x)+f_2(x).\ \blacksquare$$

ПРИМЕР 15.7. Найти общее решение уравнения

$$y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin 2x+2x^2.$$

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение $\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda-8=0$ имеет корни $\lambda_1=2$ и $\lambda_{2,3}=\pm 2i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x.$$

Правая часть $f(x)$ не имеет специального вида, но она состоит из двух слагаемых, каждое из которых имеет специальный вид. Обозначим $f_1(x)=e^{2x}\sin 2x$, $f_2(x)=2x^2$ и найдем частные решения $\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2$ неоднородных уравнений

$$y'''-2y''+4y'-8y=f_1(x) \quad \text{и} \quad y'''-2y''+4y'-8y=f_2(x).$$

Тогда частное решение $\widetilde{y}$ исходного уравнения будет равно сумме этих частных решений, т. е.

$$\widetilde{y}=\widetilde{y}_1+\widetilde{y}_2.$$

1) $f_1(x)=e^{2x}\sin 2x$, т. е. $s=0$, $\alpha=2$, $\beta=2$, $\alpha\pm\beta i=2\pm 2i$. Так как число $\alpha\pm\beta i=2\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_1(x)$ следует искать в виде

$$\widetilde{y}_1=e^{2x}(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Имеем:

$$\widetilde{y}_1'=2e^{2x}\left[(A+B)\cos 2x+(B-A)\sin 2x\right],$$
$$\widetilde{y}_1''=8e^{2x}\left[B\cos 2x-A\sin 2x\right],$$
$$\widetilde{y}_1'''=16e^{2x}\left[(B-A)\cos 2x+(-A-B)\sin 2x\right].$$

Подставим $\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_1',\widetilde{y}_1'',\widetilde{y}_1'''$ в уравнение, и после приведения подобных слагаемых, получим

$$e^{2x}\cdot\left[(8B-16A)\cos 2x+(-8A-16B)\sin 2x\right]=e^{2x}\sin 2x,$$
$$\Rightarrow\ (8B-16A)\cos 2x+(-8A-16B)\sin 2x=0\cdot\cos 2x+\sin 2x,$$
$$\Rightarrow\ \begin{cases}8B-16A=0,\\-16B-8A=1;\end{cases}\quad\Rightarrow\ B=-\frac{1}{20},\quad A=-\frac{1}{40},$$
$$\Rightarrow\ \widetilde{y}_1=e^{2x}\left(-\frac{1}{40}\cos 2x-\frac{1}{20}\sin 2x\right)=-\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right).$$

2) $f_2(x) = 2x^2$, т. е. правая часть представляет собой многочлен степени $s = 2$, $\alpha = \beta = 0$. Так как число $\alpha \pm \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения с правой частью $f_2(x)$ следует искать в виде

$$\widetilde{y}_2 = Ax^2 + Bx + C\,.$$

Имеем
$$\widetilde{y}_2' = 2Ax + B\,, \qquad \widetilde{y}_2'' = 2A\,, \qquad \widetilde{y}_2''' = 0\,.$$

Подставим $\widetilde{y}_2, \widetilde{y}_2', \widetilde{y}_2'', \widetilde{y}_2'''$ в неоднородное уравнение, и после приведения подобных слагаемых, получим:

$$-8Ax^2 + 8(A - B)x - 4(A - B + 2C) = 2x^2\,,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8A = 2, \\ A - B = 0, \\ A - B + 2C = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = 0\,.$$

$$\Rightarrow \quad \widetilde{y}_2 = -\frac{1}{4}(x^2 + x)\,.$$

Итак, частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид

$$\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2 = -\frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right) - \frac{1}{4}(x^2 + x)\,,$$

а его общее решение

$$y = \left(C_1 e^{2x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x\right) - \frac{1}{40}e^{2x}\left(\cos 2x + 2\sin 2x\right) - \frac{1}{4}(x^2 + x)\,.\diamond$$