7.2 Фазовый портрет линейной системы второго порядка.

Рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами 2-го порядка

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

С помощью линейной замены переменных, введем новую неизвестную функцию $y = Tx$, где T - невырожденная матрица. Для новой неизвестной функции получаем систему

$$\dot{y} = T\dot{x} = TAx = TAT^{-1}y = By, \tag{2}$$

где B матрица подобная A. Известно, что матрицу T всегда можно выбрать так, чтобы матрица B совпала с жордановой матрицей J. В этом случае система (2) приобретает наиболее простой вид, а число параметров уменьшается с четырех (элементы матрицы) до двух (собственные числа матрицы). В дальнейшем мы будем анализировать поведение траекторий на фазовой плоскости именно для этой системы

$$\dot{y} = Jy. \tag{3}$$

Сначала разберем случай ВЕЩЕСТВЕННЫХ собственных значений. Рассмотрим классификацию согласно рис.1.

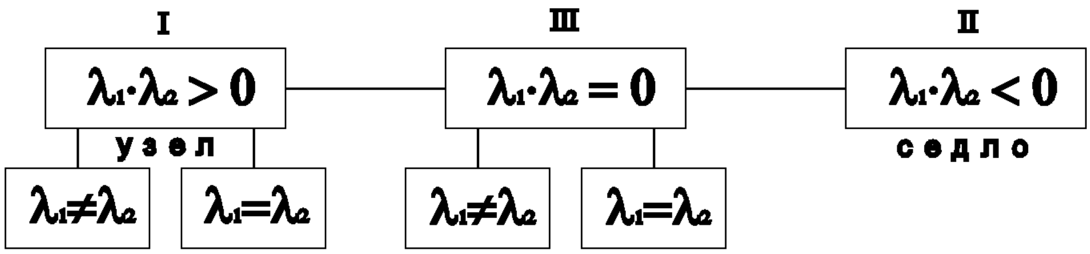

Рис. 1:

I. Собственные числа одного знака $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$

1.1 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

В этом случае жорданова нормальная форма J матрицы A имеет однозначный вид

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (3) имеет вид $y_1 = C_1 \exp(\lambda_1 t), y_2 = C_2 \exp(\lambda_2 t)$. Единственное положение равновесия - точка (0,0). Исключая параметр t (при $C_1 \neq 0$) , получаем явный вид траекторий $y_2 = C y_1^{\alpha}$, где $\alpha = \lambda_2/\lambda_1$. Для определенности можно считать, что $\alpha > 1$, тогда картина траекторий показана на рис. 2. Случаи $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ легко рассматриваются отдельно. Стрелочками на рисунке показано направление времени, здесь оно соответствует случаю отрицательных собственных чисел (при положительных направление всех стрелок меняется на обратное). Такое положение равновесия называется УЗЛОМ. Согласно доказанных выше теорем, при отрицательных собственных значениях узел является асимптотически устойчивым, а при положительных - вполне неустойчивым.

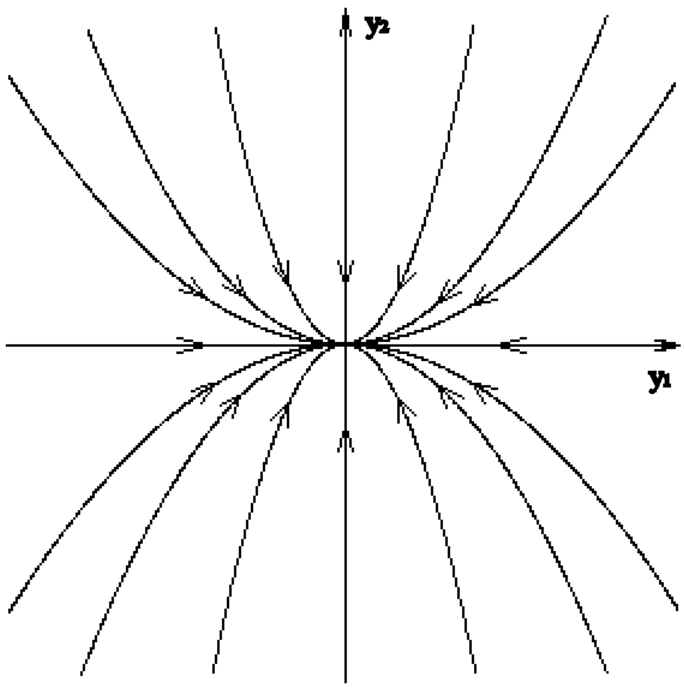

Рис. 2: Устойчивый узел

1.2 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

В этом случае возможны два варианта вида жордановой матрицы J.

a) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

b) $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

В случае a) система (3) имеет общее решение $y_1 = C_1 \exp(\lambda t), y_2 = C_2 \exp(\lambda t)$. Исключая, как и выше параметр t (при $C_1 \neq 0$) , получаем явный вид траекторий $y_2 = C y_1$, т.е. в этом частном случае траектории прямые. Фазовый портрет (для $\lambda < 0$) приведен на рис. 3. В случае b) решение систе-

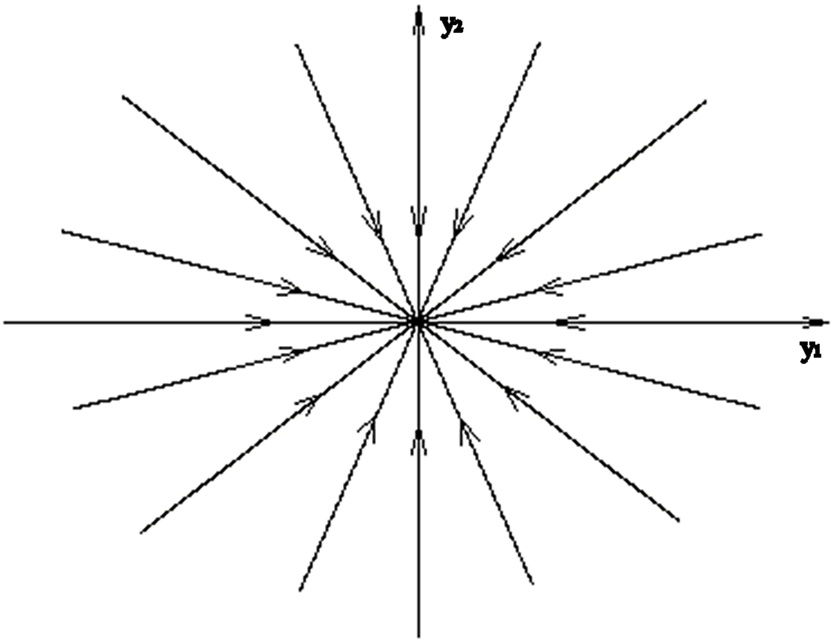

Рис. 3: Устойчивый вырожденный узел

мы имеет вид $y_1 = (C_1 + c_2 t) \exp(\lambda t), y_2 = C_2 \exp(\lambda t)$. Введением нового времени $\tau = t + C_1/C_2$ его можно привести к виду $y_1 = C\tau exp \lambda\tau, y_2 = C \exp(\lambda\tau)$ и $y_1 = C_1 exp \lambda\tau, y_2 = 0$. Эти траектории (для $\lambda < 0$) приведены на рис. 4. Такие положения равновесия называются ВЫРОЖДЕННЫМИ УЗЛАМИ. Их устойчивость определяется знаком λ.

II. Собственные числа разных знаков $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Будем считать для определенности, что $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Тогда жорданова нормальная форма J

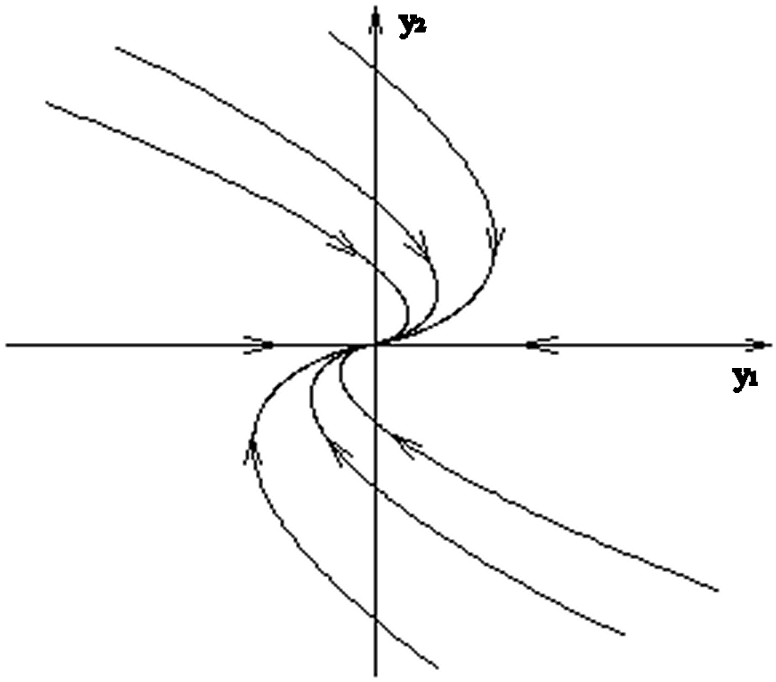

Рис. 4: Устойчивый вырожденный узел

матрицы A опять имеет однозначный вид

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы (3) имеет вид $y_1 = C_1 \exp(\lambda_1 t), y_2 = C_2 \exp(\lambda_2 t)$. Единственное положение равновесия - точка (0,0). Исключая параметр t (при $C_1 \neq C_2$) , получаем явный вид траекторий $y_2 = C y_1^{\alpha}$, где $\alpha = \lambda_2/\lambda_1 < 0$. В отличие от рассмотренного выше случая узла, отрицательный показатель α приводит к семейству гипербол (вместо парабол). Фазовый портрет приведен на рис. 5. Такое положение равновесия называется СЕДЛОМ. Оно всегда неустойчиво (хотя и не является вполне неустойчивым).

III. Вырожденные случаи. Одно или оба собственных числа равны нулю.

3.1 Только одно из собственных чисел равно нулю. Пусть для определенности $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = \lambda \neq 0$. Тогда общее решение имеет вид $y_1 = C \exp(\lambda t), y_2 = C_2$. Вся ось y_2 состоит из положений равновесия. Фазовый портрет (для $\lambda < 0$) приведен на рис. 6. Устойчивость всех положений равновесия зависит от знака λ.

3.2 Оба собственных значения равны нулю.

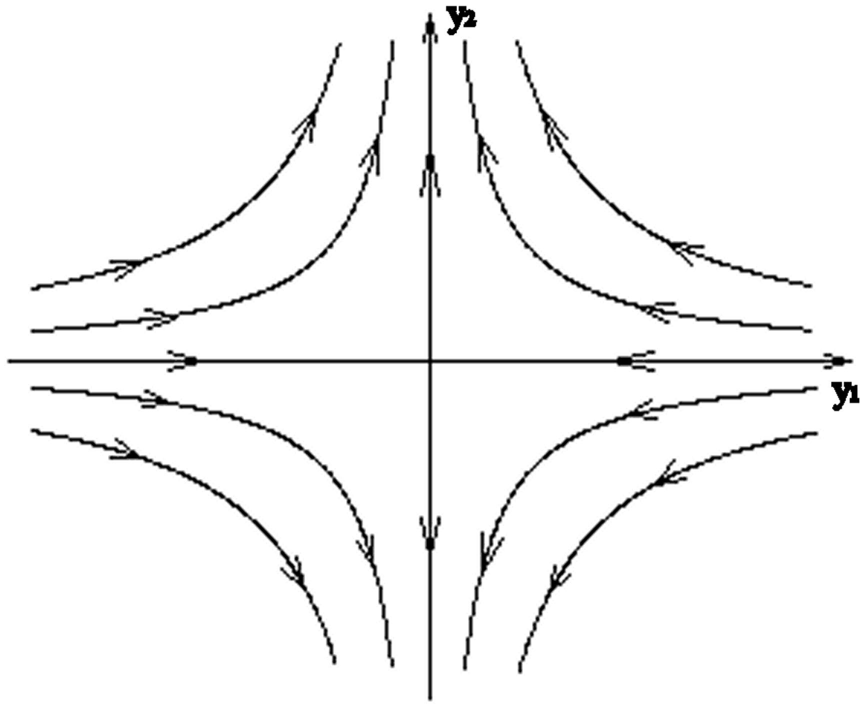

Рис. 5: Седло

Этот случай разбивается на два подслучая.

a) $J = 0$

b)$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ В случае a) вся фазовая плоскость состоит из положений равновесия. Они все устойчивы. Это возможно только для нулевой матрицы A. В случае b) решение имеет вид $y_1 = C_1 + C_2 t, y_2 = C_2$. Здесь ось абсцисс вся состоит из неустойчивых положений равновесия. Фазовый портрет приведен на рис. 7. Этот пример показывает, что при нулевых собственных значениях, положения равновесия могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми.

Теперь рассмотрим случай КОМПЛЕКСНЫХ собственных значений. Т.к. матрица A вещественная, ее собственные значения комплексно сопряжены, а значит различны. Общее вещественное решение исходной системы (1)имеет вид

$$x = C\mathbf{h}\exp(\lambda t) + \bar{C}\bar{\mathbf{h}}\exp(\bar{\lambda} t), \qquad (4)$$

где $\mathbf{h}, \bar{\mathbf{h}}$ собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda, \bar{\lambda}$.

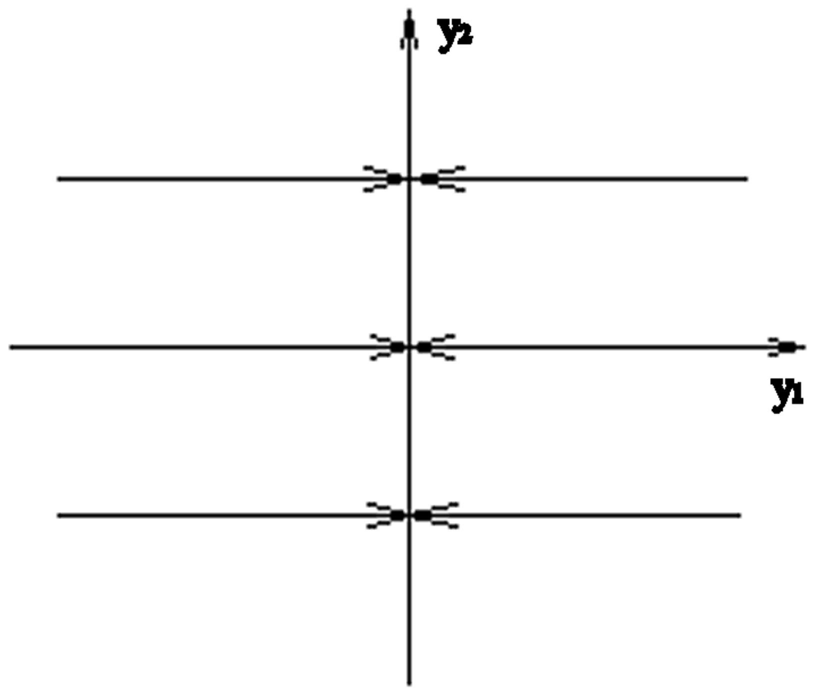

Рис. 6: Вырожденные случаи

Единственное положение равновесия - точка (0,0). Обозначим $\mu = Re(\lambda), \nu = Im(\lambda)$. Введем вещественные векторы $e_1 = \mathbf{h} + \bar{\mathbf{h}}, \quad e_2 = i(\mathbf{h} - \bar{\mathbf{h}})$. Их линейная независимость легко следует из линейной независимости $\mathbf{h}$ и $\bar{\mathbf{h}}$. Постоянную C представим в тригонометрическом виде $C = R\exp(i\phi)$. Тогда общее решение (4) можно привести к виду $x = \xi_1(t)\mathbf{e}_1 + \xi_2(t)\mathbf{e}_2$, где $\xi_1(t) = R\exp(\mu t)\cos(\nu t + \phi), \xi_2(t) = R\exp(\mu t)\sin(\nu t + \phi)$ это координаты вектора $x(t)$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. На рис. 8-10 приведены траектории системы в плоскости ξ_1, ξ_2. Первые два положения равновесия называются ФОКУСОМ (устойчивым и неустойчивым). Последнее ЦЕНТРОМ, который всегда устойчив.

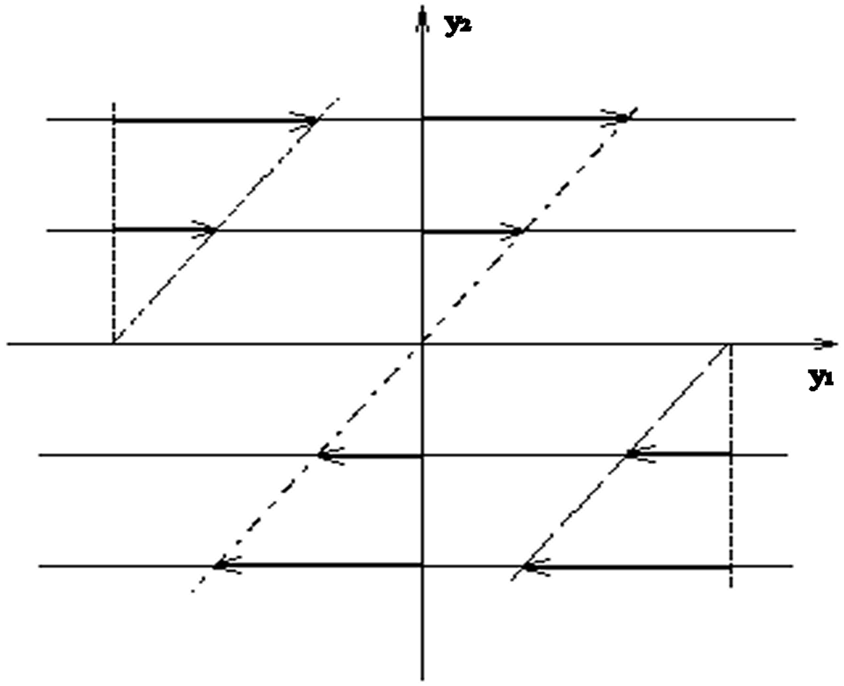

Рис. 7: Вырожденные случаи

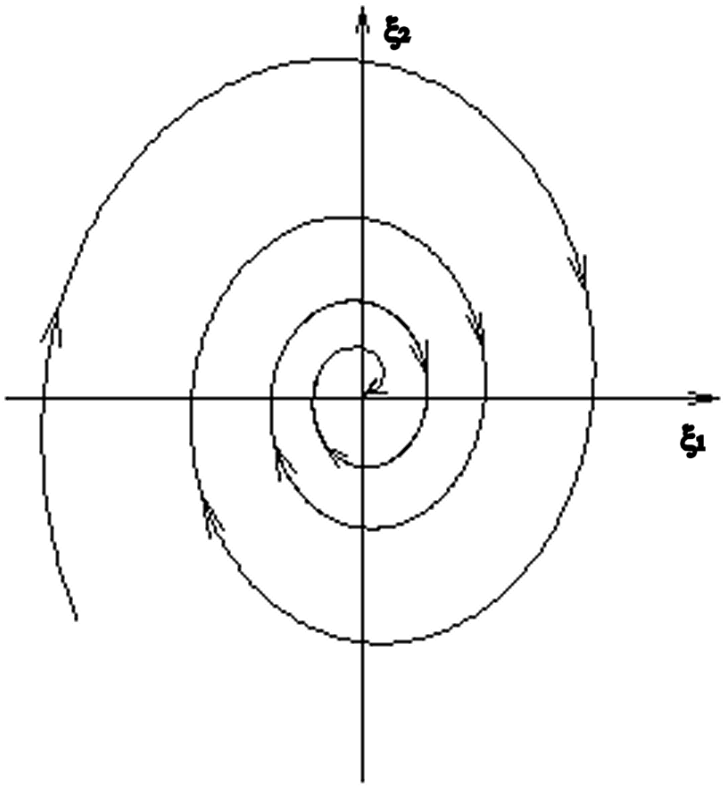

Рис. 8: Устойчивый фокус, $\mu < 0$

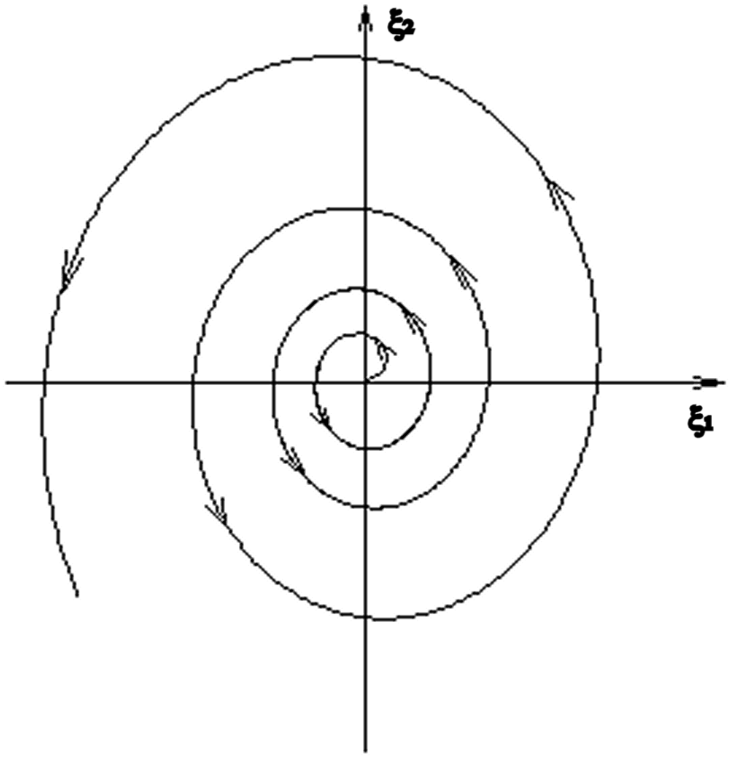

Рис. 9: Неустойчивый фокус, $\mu > 0$

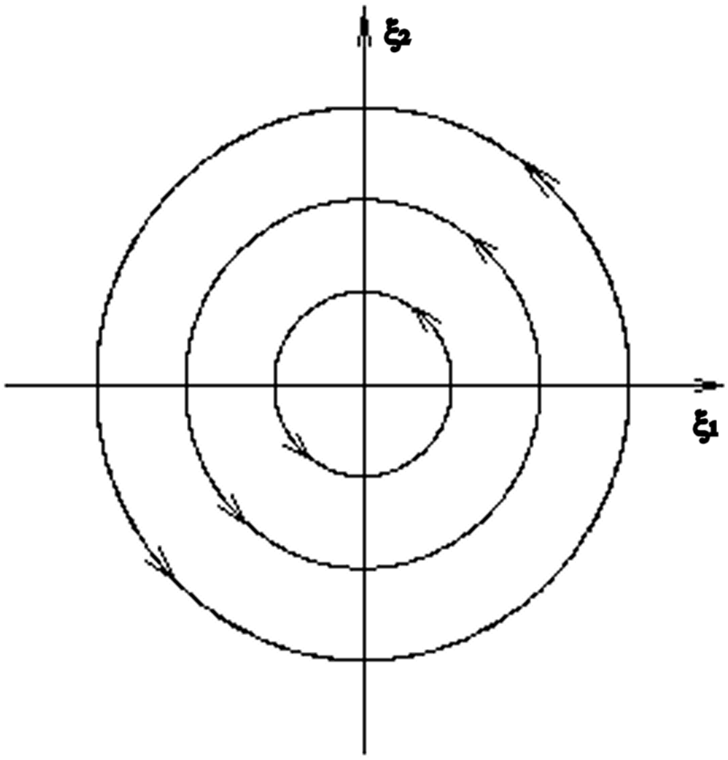

Рис. 10: Центр, $\mu = 0$