Перечень тем и вопросов, выносимых на экзамен по дисциплине "Теория функций действительного переменного" (3 курс, 2013-2014 уч. г., лектор Полынцева С.В.)

1. Понятие множества. Операции над множествами. Отображение множеств.
2. Мощность множеств. Сравнение мощностей. Множества мощности континуума.
3. Понятие эквивалентности и счетности множеств.
4. Несчетность множества действительных чисел.
5. Теорема Кантора - Бернштейна.
6. Построение взаимно-однозначных соответствий между различными множествами мощности континуум.
7. Элементы метрических пространств. Евклидово пространство. Предельные, изолированные и граничные точки.
8. Строение открытых и замкнутых множеств на прямой.
9. Совершенные множества. Канторово множество.
10. Понятие точки конденсации.
11. Теоремы: Линделефа, Кантора-Бендиксона, Бореля-Лебега.
12. Элементарные множества. Мера элементарных множеств.
13. Мера Лебега. Свойства меры Лебега.
14. Признак Валле-Пуссена. σ - аддитивность меры Лебега.
15. Пример неизмеримого множества.
16. Измеримость объединения и пересечения счетного числа измеримых множеств.
17. Измеримость открытых и замкнутых множеств.
18. Измеримость по Лебегу множества, измеримого по Жордану.
19. Обобщение понятия меры Лебега.
20. Понятия кольца, σ - кольца,σ- алгебры.
21. Понятие измеримых функций.
22. Свойства измеримых функций.
23. Понятие эквивалентности измеримых функций.
24. Сходимость почти всюду и по мере.
25. Теорема Егорова.
26. Теорема Лузина.
27. Интеграл Лебега от простых функций и его свойства.
28. Общее определение интеграла Лебега и его свойства.
29. Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега.
30. Теорема Лебега.
31. Теорема Леви.
32. Теорема Фату.
33. Сравнение интегралов Римана и Лебега.
34. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.
35. Понятие прямого произведения мер. Теорема Фубини.

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. СПб.:"Лань".1999. - 560с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 572 с.

Дополнительная литература

1. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. М.: Просвещение, 1981.
2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Специальный курс. М.: Просвещение, 1961.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982.
4. Клементьев З.И. Курс лекций по теории функций действительного переменного. Томск: Ротапринт ТГУ, 1968.

Некоторые типовые задачи

1. Показать, что для элементарного множества A $m'(A) = \mu^*(A)$.

2. Доказать, что объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств также являются элементарными множествами.

3. Доказать, что $\frac{1}{4} \in F$, где F – канторово множество.

4. Показать, что $m'(A)$ – σ аддитивна.

5. Доказать, что $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

6. Показать, что множество рациональных чисел счетно.

7. Доказать, что если $\{A_n\}$ – последовательность измеримых множеств, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots A_n \subset \ldots$ и $A = \bigcup\limits_n A_n$, то $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

8. Доказать, что $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2}$ удовлетворяет трем аксиомам.

9. Доказать, что всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

10. Интегрируема ли по Риману функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{в иррациональных точках,} \\ 1 & \text{в рациональных точках} \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$? Интегрируема ли она по Лебегу? Чему равен ее интеграл на отрезке $[0, 1]$?

11. Доказать, что интегралы $\int_A f(x)d\mu$, $\int_A |f(x)|d\mu$ существуют или не существуют одновременно.

12. Доказать, что непрерывные на отрезке $[a, b]$ эвивалентные функции совпадают.

13. Доказать, что функция $f(x)$, принимающая не более чем счетное число различных значений $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ измерима в том и только в том случае, если все множества $A_n = \{x : f(x) = y_n\}$ измеримы.

14. Если $f \sim g$, и f - измерима, то g - измерима.

Экзаменационный билет. Теория функций действительного переменного. январь 2014 г.

Вариант 0

1. Доказать, что если $A_1, \ldots, A_n$ – измеримые множества, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, то $\mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$.

2. Доказать, что если $A = \cup_n A_n$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu,$$

причем из существования интеграла в левой части вытекает существование интегралов и абсолютная сходимость ряда в правой части.

3. Сформулировать теорему Кантора-Бендиксона.
4. Дать определение точки конденсации.
5. Доказать, что $\frac{1}{4} \in F$, где F – канторово множество.
6. Сформулировать и доказать теорему Фату.