Instuderingsfrågor i Funktionsteori

Skapad av Ludvig Modin, E23

Förord

Facit erhålls från boken *Funktionsteori av Frank Wikström, 2014*. Vilka bevis som förekommer har till största del avgjorts utifrån vad som tidigare förekommit på tentor, samt mina vilda chansningar på vad som kan komma.

Derivata av komplexvärda funktioner

1. Definiera begreppet komplex derivata och Cauchy-Riemanns ekvationer.

2. Förklara vad en C^1 funktion är för något. Vad har den för egenskaper?

3. Vad innebär det att en funktion är holomorf?

4. Ge ett exempel på en funktion som är kontinuerlig men inte deriverbar i komplex mening.

5. Vad innebär att en komplex funktion är harmonisk?

6. Vad är $f'(z)$ utifrån Cauchy-Riemanns ekvationer?

7. Anta att $f(z)$ är en hel funktion. Vad innebär detta?
   Visa att $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ också är en hel funktion.

8. Bestäm alla holomorfa funktioner vars realdel är $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.
   Svara på formen $f(z)$.
   Ledning: Se 1.12 ;)

Elementära funktioner

9. Definera den komplexa exponentialfunktionen.

10. Undersök om e^z är holomorf och härled isåfall derivatan.

11. Formulera Eulers formler för sin(x) och cos(x).

12. Formulera och förklara triangelolikheten och dess omvändning.

13. Besrkiv en metod för att lösa komplexa andragradsekvationer.

14. Förklara m.h.a triangelolikheten varför $\frac{1}{2}|a_n||z_n|^n \leq |p(z)| \leq 2|a_n||z_n|^n$.

15. Hur definieras den komplexa logaritmen, och vad innebär det att den har flera grenar?

16. Anta att f är en holomorf funktion på ett område Ω sådan att e^f är konstant. Visa att f måste va konstant.

17. Härled följande identitet med hjälp av de *hyperboliska* funktionerna:

$$sinh(x) = -i \cdot sin(ix)$$

    Ledning: Se 2.27

Komplex integralkalkyl

18. Definera kurvintergralen av $f(z)$ längs kurvan γ.

19. Vad är kraven för att det ska existera en primitiv till $f(z)$.

20. Förklara hur man partialbråksuppdelar.

21. Formulera och bevisa ML-olikheten.

22. Formulera, förklara och bevisa Cauchys integralsats (med hjälp av Greens formel). Var noga med kraven.

23. Formulera och förklara Cauchys integralformel och ge ett exempel på dess tillämpning.

24. Formulera Cauchys integralformel för f'.

25. Förklara och bevisa Liouvilles sats.

Rekursionsekvationer

26. Definera vad en rekursionsekvation är för något.

27. Skriv upp den almänna homogena lösningen för en rekursionsekvation av grad 2 med:
 a) två unika rötter b) en dubbelrot

28. Vad för partikulärlösning bör ansättas i fallet där HL(högerledet) $= 2^n \cdot 3n + 5$

29. Vad för partikulärlösning bör ansättas här?
 Den homogena lösningen är $C_1 2^n + n \cdot C_2 2^n$ *och HL*$=3 \cdot 2^n$.

Serier

30. Definera konvergens respektive divergens <u>matematiskt</u>.

31. Definera följande serier/summor och redogör om de är konvergenta eller divergenta:
 a) geometrisk serie b) harmonisk serie c) p-serie d) teleskopsumma

32. För de serier som i föregående uppgift var konvergent härled vad deras summor S_n blir (Ej P-serie).

33. Vad innebär absolutkonvergens?

34. Formulera och förklara *Jämförelsetestet* på vanlig och gränsvärdesform.

35. Formulera och förklara *Kvot*- samt *Rottestet.*

36. Formulera, förklara och visualisera *Leibniz test.* Var noga att definera de 3 kraven.

37. Formulera och förklara integraltestet samt skissa en grafskiss för respektive summa för att övertyga dig om att förhållandet stämmer

38. Visa hur Leibniz test kan användas för att uppskatta en restterm hos en serie.

Funktionsföljder och funktionsserier

39. Vad innebär det att en funktionsföljd konvergerar punktvis respektive Likformigt?

40. Definera *Supremumnormen*.

41. Förklara 3 följder av att en funktionsföljd konvergerar likformigt?

42. Förklara och ge ett exempel på hur en funktionsföljd inte kan vara likformigt konvergent på ett intervall I men likformigt konvergent på alla delintervall av I.
    Tips: använd $f_n(x) = x^n$ på lämpligt intervall.

43. Definera och förklara vad som menas med att en funktionsserie punktvis respektive likformigt konvergerar?

44. Vilka följder får vi om en funktionsserie konvergerar likformigt?

45. Förklara och bevisa *Weierstrass M-test*?

46. Hur kan man gå till väga om $\sum M_k$ i *Weierstrass M-test* visar sig vara en divergent serie?
    Visa att serien
    $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k}$$
    likformigt konvergerar på intervallet $I = [0, 1]$.

47. Ge ett exempel på en funktionsföljd f_n (där varje f_n är definerad på hela $\mathbb{R}$) sådan att följden konvergerar punktvis, men inte likformigt mot $f(x) = x$. Bevisa att ditt exempel fungerar.
    Ledning: Se Tentamen 24-08-23

Fourierserier

48. Formulera och förklara vad som menas med att en funktion är L^p.

49. Formulera och förklara den exponentiella och trigonometriska Fourierserien.

50. Bevisa att $f'(t) = i\Omega k c_k(f)$.
    Ledning: Se 7.15

51. Beräkna fyrkantsvågen samt triangelvågens fourierserie.

52. Förklara vad som menas med att en funktion är jämn respektive udda och vad a_k och b_k i den trigonometriska fourierserien får för värde i respektive fall.

53. Definera och förklara sats *7.16* och sats *7.18*(punktvis konvergent för fourierserier). Var noga med att definera kraven för de två satserna.

54. Definera och förklara de tre olika versionerna av *Parsevals formel.*

Potensserier

55. Definera vad en *potensserie* är för något.

56. Definera konvergensradie R genom att bevisa att potensserier i det allmänna fallet konvergerar.

57. Definera och förklara vad som menas med att $f(z)$ är en *analytisk funktion.*

58. Formulera och förklara *Taylors sats* för holomorfa funktioner.

59. Formulera och förklara *entydighetssatsen* samt delge 3 följder av den.

60. Formulera, förklara och bevisa *faktorsatsen* för holomorfa funktioner.

61. Bestäm $f^{(10)}(0)$ för $f(z) = \frac{z}{(z+1)((z-2)}$ med hjälp av potensserieutvecklingen.

62. Definera vad som menas med *hopningspunkt* och *isolerad punkt.*

63. Definera och förklara *identitetssatsen* (personlig favorit).

64. Anta att f är holomorf på hela $\mathbb{C}$ och visa en av följande påståenden (eller båda):
    Lättare:
    $$f(1/n) = e^{-1/n}$$
    för alla positiva heltal n.
    Svårare:
    $$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$
    för alla $\mathbb{C}$. $f(x) \in \mathbb{R}$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
    Ledning: Sök på 8.17 på LTHs matteforum.

Singulariteter

65. Formulera och förklara vad som menas med en Isolerad singularitet.

66. Beskriv de tre olika typerna av Isolerade singulariteter.

67. Beskriv vad som menas med att en pol är av ordning m.

68. Vad kan man säga om singulariteterna i $h(z) = f(z)g(z)$ om $f(z)$ har en pol av ordning k i $z = \alpha$ och $g(z)$ har ett nollställe av ordning m i $z = \alpha$.

69. Hur många(eventuella) poler har $f(x)$ och av vilken karaktär är (eventuella) resterande singulariteter om
$$f(z) = \frac{z^4}{sinh(z)}.$$

Residykalkyl

70. Definera vad som menas med residyn av en funktion $f(z)$.

71. Formulera och förklara alla (4) residyregler samt bevisa den fjärde med hjälp av den tredje.

72. Vilket variabelbyte är lämpligt när man vill beräkna en trigonometrisk intergral med hjälp av residykalkyl.

73. Visa att residyn av en funktion med endast hävbara singulariteter alltid är 0.
Tips: Vad för krav har Cauchys intregralsats?

74. Beskriv hur vi kan beräkna en integral $\int_{-\infty}^{\infty}$ av en rationell funktion med hjälp av en: *a) halvcirkel b) rektangulär kontur.*

75. Visa med hjälp av M_l*-olikheten* att integralen av en rationell funktion med täljaren = 1, över cirkelskiva C_{R^+} med radie $R \to \infty$ alltid kommer gå mot noll (deg(nämnare) $\geq$ 2).

76. Beräkna integralen
$$\int_o^{\infty} \frac{sin^2 x}{x^2+1} dx.$$

Ledning: Se Tentamen.pdf

Slutord

Jag vet inte om alla frågor är 100 procent korrekt ställda men jag hoppas i alla fall att du som tuggat dig igenom alla frågor blivit lite djurigare på komplex analys och får en fet femma på tentan!! // Ludde