

Задача 7.3

Требуется доказать, что метод Якоби, примененный к $Ax = b$, вне зависимости от начального условия всегда сходится к единственному решению x , если матрица A обладает строгим диагональным преобладанием.

В матричном виде метод Якоби предполагает разложение матрицы A на диагональную, нижнюю треугольную и верхнюю треугольную составляющие:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Или:

$$A = D - L - U,$$

Или из курса лекций мы знаем, что можно переписать:

$$x^{(k)} = D^{-1}(L + U)x^{(k-1)} + D^{-1}b.$$

Причем:

$$T = D^{-1}(L + U),$$

$$c = D^{-1}b.$$

Начнём с нахождения верхней границы для $\|T\|_\infty$.

Формула векторной нормы для матрицы:

$$\|T\|_\infty = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^m |t_{ij}|$$

То есть:

$$\begin{aligned} \|T\|_\infty &= \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |t_{ij}| = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n \left| \frac{(l_{ij} + u_{ij})}{d_{ii}} \right| = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n \frac{|(l_{ij} + u_{ij})|}{|d_{ii}|} \\ &= \max_{i \in [1, n]} \frac{\sum_{j=1}^n |(l_{ij} + u_{ij})|}{|d_{ii}|} \end{aligned}$$

Из условия $A = D - L - U$ заметим, что $|(l_{ij} + u_{ij})| = |a_{ij}|$ при $i \neq j$ и что $|(l_{ij} + u_{ij})| = 0$ при $i = j$. Также из матричного вида метода Якоби видно, что $|d_{ii}| = |a_{ii}|$.

Тогда перепишем:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{i \in [1, n]} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

По условию задачи наша матрица должна обладать строгим диагональным преобладанием, то есть должно выполняться условие:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Из этого условия следует:

$$\frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

То есть:

$$\|T\|_{\infty} < 1$$

Теорема: последовательность $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, сгенерированная итерацией $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$, сходится к единственному решению уравнения $x = Tx + c$, т.е. неподвижной точке x , для любого $x^{(0)} \in R^n$ тогда и только тогда, когда $\rho(T) < 1$.

Для спектрального радиуса существует свойство:

Теорема: пусть $A \in R^{n \times n}$. Тогда $\rho(T) \leq \|T\|$ для любой индуцированной матричной нормы.

Тогда из теорем следует, что так как $\|T\|_{\infty} < 1$, то и $\rho(T) < 1$, то есть метод Якоби, примененный к $Ax = b$, вне зависимости от начального условия всегда сходится к единственному решению x , если матрица A обладает строгим диагональным преобладанием.