

1. Математический и физический маятники. Вывод формул для их собственных частот.

* про грузик на пружине — для справки

Грузик на пружине. Пусть грузик массы m , подвешенный на невесомой пружине жесткости κ , совершает вертикальные колебания (рис. 6.3). Возьмем начало O оси X в положении равновесия, где $mg = \kappa \Delta l$, Δl — растяжение пружины в этом положении. Тогда, согласно основному уравнению динамики, $m\ddot{x} = mg - \kappa(x + \Delta l) = -\kappa x$, или

$$\ddot{x} + (\kappa/m)x = 0.$$

Из сопоставления с (6.5) видим, что это уравнение гармонического осциллятора, колеблющегося около положения равновесия с частотой ω_0 и периодом T , равными

$$\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}, \quad T = 2\pi\sqrt{m/\kappa}. \quad (6.8)$$

Математический маятник. Материальная точка массы m , подвешенная на нерастяжимой нити длиной l , совершает колебания в вертикальной плоскости (рис. 6.4). Здесь удобнее всего использовать уравнение динамики (2.16) в проекции на орт τ , направление которого совпадает с положительным направлением отсчета дуговой координаты s (величина алгебраическая, на рисунке изображен момент, когда $s > 0$). Начало отсчета s возьмем в положении равновесия — в точке O .

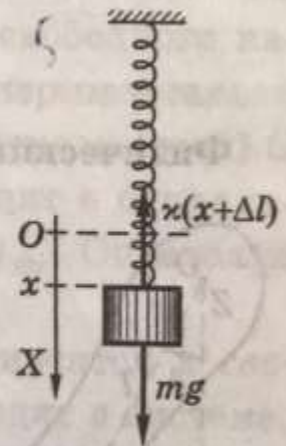


Рис. 6.3

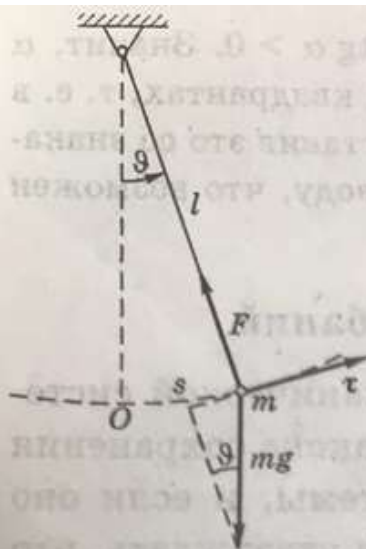


Рис. 6.4

Имея в виду, что $s = l\vartheta$, $\ddot{s} = l\ddot{\vartheta}$ и что проекция силы натяжения $F_\tau = 0$, запишем: $m\ddot{s} = ml\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta$, или $\ddot{\vartheta} + (g/l)\sin\vartheta = 0$.

Из сопоставления с (6.5) видим, что это уравнение, вообще говоря, не является уравнением гармонического осциллятора, поскольку в нем вместо смещения ϑ стоит $\sin\vartheta$. Однако при *малых* колебаниях, когда $\sin\vartheta \approx \vartheta$, уравнение совпадает с (6.5):

$$\ddot{\vartheta} + (g/l)\vartheta = 0,$$

откуда следует, что частота ω_0 и период T математического маятника, совершающего малые колебания, равны

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}, \quad T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (6.9)$$

Физический маятник. Это твердое тело, совершающее колебания вокруг неподвижной оси, жестко связанной с телом. Рассмотрим колебания под действием силы тяжести (рис. 6.5). Выберем положительное направление отсчета угла ϑ против часовой стрелки (ось Z направлена к нам). Тогда проекция момента силы тяжести на ось Z запишется как $M_z = -mgl\sin\vartheta$ и уравнение динамики вращательного движения твердого тела (5.30) примет вид

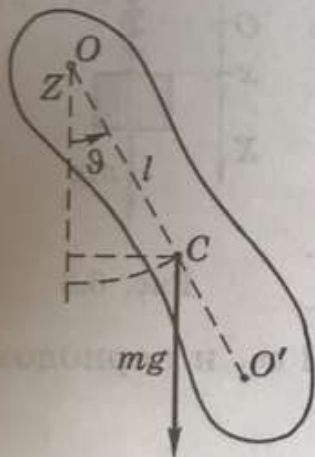


Рис. 6.5

$$I\ddot{\vartheta} = -mgl\sin\vartheta,$$

где I — момент инерции тела относительно оси O , l — расстояние между осью O и центром масс C . Ограничимся рассмотрением *малых* колебаний, при которых $\sin\vartheta \approx \vartheta$. При этом условии предыдущее уравнение можно записать так:

$$\ddot{\vartheta} + (mgl/I)\vartheta = 0.$$

Колебания будут гармоническими с частотой ω_0 и периодом T , равными

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/I}, \quad T = 2\pi\sqrt{I/mgl}. \quad (6.10)$$

Такую же частоту и период имеет математический маятник длины

$$l_{\text{пр}} = I/ml, \quad (6.11)$$

которую называют *приведенной длиной* физического маятника.

2. Энтропия в статистической форме. Статистический вес. Статистическое образование второго начала термодинамики. Формула Больцмана для статистической энтропии. Аддитивность энтропии.

Энтропия в статистической физике определяется как логарифм. ф-я вероятности равновесного состояния системы частиц

$$S = k \cdot \ln W - \text{формула Больцмана} \left[\frac{Дж}{К} \right]$$

k - пост. Больцмана

W - число микросостояний, соотв. макросост. системы (термод. вероятн.)

Термодинамическая вер-ть W - максимальна, когда система находится в равновесном состоянии. (Энтропия максимальна тоже)

Статистический вес - физ. вел., определяющая число различных состояний атома, имеющих одну и ту же энергию.

$$\Omega_k = C_{2N}^k = \frac{(2N)!}{k!(2N-k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N \quad (\Omega_{1+2} = \Omega_1 \cdot \Omega_2)$$

статистический вес неаддитивен, но св-во аддитивности обладает логарифм статистического веса

$$\ln \Omega = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2 = \dots = \sum_{i=1}^n \ln \Omega_i$$

Энтропия - аддитивная величина

$$S_{1+2} = k \ln(\Omega_1 \cdot \Omega_2)$$

$$S_{1+2} = k (\ln \Omega_1 + \ln \Omega_2)$$

$$S_{1+2} = S_1 + S_2$$

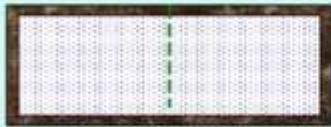
(Энтропия совокупности тел = сумме энтропий каждого тела, входящего в систему)

11.5. Статистическое обоснование второго начала термодинамики

1. Макроскопические и микроскопические состояния идеального газа.

Статистический вес макросостояния

Рассмотрим идеальный газ, заключенный при отсутствии внешних сил в адиабатическую оболочку объема V . Пусть в этом объеме содержится $2N$ молекул. Считая все молекулы различимыми, пронумеруем их от 1 до $2N$. Разделим мысленно сосуд с газом на две равные половины и будем говорить, что газ находится в состоянии A_k , если в левой половине находится ровно k молекул, а во второй – $2N - k$ остальных.



Назовем это состояние **макросостоянием** газа. Очевидно, что всего возможны $2N + 1$ макросостояний:

Рис.9 $A_0, A_1, \dots, A_k, \dots, A_{2N}$ (68)

Так как молекулы различимы и пронумерованы, то каждое макросостояние может быть реализовано различными способами в зависимости от того, какие конкретно молекулы находятся в левой половине сосуда. Каждую такую реализацию будем называть **микросостоянием** газа. Таким образом, каждому макросостоянию A_k соответствует свой набор реализующих его микросостояний. Число таких микросостояний равно числу способов выбора k молекул из общего их числа $2N$.

36

Это число называется **статистическим весом макросостояния** и определяется формулой:

$$\Omega_k = C_{2N}^k = \frac{(2N)!}{k!(2N - k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N \quad (69)$$

2. Статистический вес и вероятность макросостояния. Распределение вероятностей для макросостояний

Так как в соответствии с гипотезой о характере молекулярного движения все положения молекул равновероятны, вероятность макросостояния можно представить в виде:

$$P(A_k) = \frac{\Omega_k}{\sum_{i=0}^{2N} \Omega_i} = \frac{C_{2N}^k}{2^{2N}} = \frac{(2N)!}{k!(2N - k)!2^{2N}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N \quad (70)$$

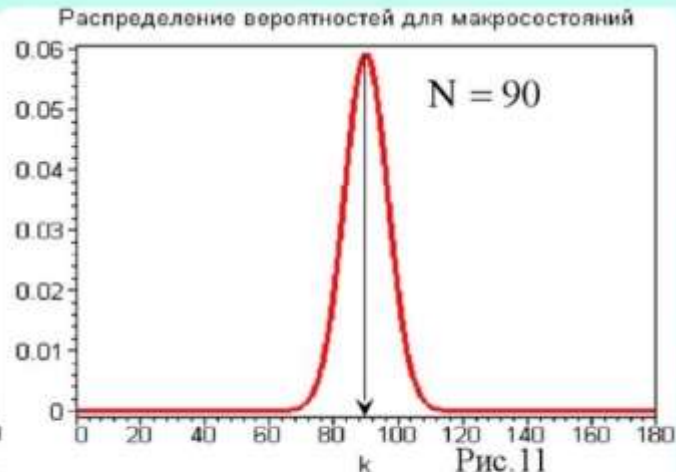
Формула (70) характеризует распределение вероятностей для макросостояний.

Анализ показывает, что максимум вероятности (70) достигается при

$$k = N \quad (71)$$

что иллюстрируется графиками функции (70), приведенными на рис.10 и 11.

37



Таким образом, из (71) следует, что наиболее вероятным макросостоянием газа является состояние с максимальным статистическим весом (69), которому соответствует равномерное распределение молекул по обеим половинам сосуда (71).

Вместе с тем, в любой конкретный момент времени число молекул в левой половине сосуда K является величиной случайной, значение которой от опыта к опыту колеблется (флуктуирует) около наиболее вероятного значения (71), которое в данном случае совпадает с ее средним значением. Для характеристики этих флуктуаций в теории вероятностей используется среднее квадратичное отклонение

38

$$\sigma = \sqrt{\langle (K - N)^2 \rangle} \quad (72)$$

Вычисления показывают, что в данном случае среднее квадратичное значение равно половине ширины графика функции распределения (рис. 10 и 11) на уровне 0,6 от максимального ее значения и определяется формулой:

$$\sigma = \sqrt{\frac{N}{2}} \quad (73)$$

а его отношение к общему числу молекул равно

$$\frac{\sigma}{N} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \quad (74)$$

В нормальных условиях в 1 см^3 газа содержится $2N = 2,687 \cdot 10^{19}$ молекул. В этом случае отношение (74) равно $1,9 \cdot 10^{-8} \approx 0,000002\%$, т.е. пренебрежимо мало. Подсчеты показывают, что для 1 см^3 газа отклонение числа молекул в левой половине сосуда от среднего значения с вероятностью 0,9999999 не превышает величины

$$0,7 \cdot 10^{-9} \cdot N = 0,0000000007 \cdot N$$

Приведенные оценки дают основание считать, что реальные значения числа молекул в обеих половинах сосуда практически все время одинаковы.

39

3. Статистическое определение энтропии. Вероятностный характер второго начала термодинамики

Знаменитая формула Больцмана определяет **энтропию** как характеристику макросостояния, связанную с его статистическим весом:

$$S = S(A_k) = k \ln \Omega_k \quad (75)$$

Из определения статистического веса (69) следует, что энтропия может рассматриваться как мера упорядоченности системы – чем она меньше, тем более упорядочена система (меньше число микросостояний, реализующих данное макросостояние).

Максимального значения энтропия достигает тогда, когда статистический вес макросостояния максимален – в случае рассмотренного выше примера с газом это соответствует наиболее вероятному макросостоянию, которому отвечает равномерное распределение молекул.

Следовательно, при переходе от менее вероятных состояний к более вероятным состояниям энтропия возрастает и, наоборот, рост энтропии свидетельствует о движении системы в направлении более вероятного макросостояния.

40

Переход системы от одного макросостояния к другому является процессом случайным, при этом теоретически не исключается и переход системы от более вероятного к менее вероятному макросостоянию, однако на опыте такие переходы не наблюдаются – представленная самой себе замкнутая термодинамическая система всегда движется к наиболее вероятному состоянию и рано или поздно переходит в это состояние, имеющее максимально возможную энтропию и остается в нем сколь угодно долго. Поэтому реальные термодинамические процессы в замкнутой системе всегда сопровождаются либо ростом, либо постоянством энтропии.

Эти соображения позволяют сформулировать второе начало термодинамики следующим образом (Больцман, 1877):

В любой замкнутой термодинамической системе наиболее вероятным является процесс, сопровождающийся неубыванием энтропии.

Отметим в заключение, что вычисление энтропии по формуле (75) дает те же результаты, что и вычисление ее значения в соответствии с термодинамическим определением (формула (7) темы № 10).

41

3.

№3. Определить среднее значение полной кинетической энергии одной молекулы неона, хлора и водяного пара при температуре $T = 120^\circ\text{C}$.
Атомная масса неона 20 а.е.м., хлора 35,5 а.е.м.

Дано:

Решение:

$$T = 120^\circ\text{C} = 393\text{ K}$$

$$\text{Ne, Cl}_2, \text{H}_2\text{O}$$

$$i=3 \quad i=5 \quad i=6$$

$$\langle E_{\text{кNe}} \rangle = ?$$

$$\langle E_{\text{кCl}_2} \rangle = ?$$

$$\langle E_{\text{кH}_2\text{O}} \rangle = ?$$

Полная кинетическая энергия молекулы:

$$\langle E \rangle = \frac{i}{2} kT$$

$$\langle E_{\text{кNe}} \rangle = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 393 = 8,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$$

$$\langle E_{\text{кCl}_2} \rangle = \frac{5}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 393 = 13,6 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$$

$$\langle E_{\text{кH}_2\text{O}} \rangle = \frac{6}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 393 = 16,3 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$$

Ответ: $\langle E_{\text{кNe}} \rangle = 8,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$

$$\langle E_{\text{кCl}_2} \rangle = 13,6 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$$

$$\langle E_{\text{кH}_2\text{O}} \rangle = 16,3 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$$