1) Стоячая волна. Уравнение стоячей волны (вывод из уравнения бегущей волны). Узлы и пучности.

45. Стоячие волны.

Особым случаем интерференции являются стоячие волны.

Стоячие волны — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Пусть две плоские бегущие волны с одинаковыми амплитудами и частотами распространяются навстречу друг другу вдоль оси x:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx), \qquad \xi_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

Сложив эти уравнения, с учетом $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ и $k = 2\pi/\lambda$, получим ***уравнение стоячей волны***:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos kx\cos\omega t = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t$$

Стоячая волна.

Стоячая волна образуется при наложении двух волн одинаковой частоты, бегущих в противоположных направлениях:

$$\xi = A\cos(\omega t + kx + \alpha_1) + A\cos(\omega t - kx + \alpha_2).$$

Пусть, например, $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, тогда $\xi = 2A\cos(kx)\cos(\omega t + \theta)$.

Величину $A_0 = 2A|\cos(kx)|$ можно назвать амплитудой стоячей волны. Так как амплитуда не может быть отрицательной, то необходимо брать модуль $|\cos(kx)|$. Тогда в тех точках, где $\cos(kx) > 0$ значение θ=0, а в тех точках, где $\cos(kx) < 0$ надо, для учета знака минус, принять θ=π. Точки, где амплитуда стоячей волны максимальная, называются *пучностями*. Эти точки можно найти из условия $|\cos(kx)| = 1$, откуда $kx = \pm\pi \cdot n$ (n – целое число). Следовательно, координаты пучностей $x^{ПУЧ}_n = \pm\dfrac{\pi \cdot n}{k} = \pm\dfrac{\pi \cdot n}{2\pi}\lambda = \pm n\dfrac{\lambda}{2}$. Соседние пучности находятся друг от друга на расстоянии $\dfrac{\lambda}{2}$ - половины длины волны. Точки, где амплитуда стоячей волны равна нулю, называются *узлами*. Эти точки можно найти из условия $|\cos(kx)| = 0$, откуда $kx = \dfrac{\pi}{2} \pm \pi \cdot n$ (n – целое число). Следовательно, координаты узлов

$$x^{УЗ}_n = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot n\right)}{k} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi \cdot n\right)}{2\pi}\lambda = \left(\frac{1}{2} \pm n\right)\frac{\lambda}{2}.$$

Соседние узлы находятся друг от друга на расстоянии $\dfrac{\lambda}{2}$ - половины длины волны.

[redacted]

Следовательно, расстояние между ближайшими соседними узлами и пучностями равно $\dfrac{\lambda}{4}$.

Найдем объемную плотность энергии стоячей волны

$$w = w_K + w_П = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$$

$$w = \frac{1}{2}\rho\left(-\omega 2A\cos(kx)\sin(\omega t + \theta)\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(-k2A\sin(kx)\cos(\omega t + \theta)\right)^2,$$

$$w = 2A^2\rho\omega^2\left(\cos^2(kx)\sin^2(\omega t + \theta) + \sin^2(kx)\cos^2(\omega t + \theta)\right),$$

$$w = 2A^2\rho\omega^2\left(\frac{1 + \cos(2kx)}{2}\frac{1 - \cos(2[\omega t + \theta])}{2} + \frac{1 - \cos(2kx)}{2}\frac{1 + \cos(2[\omega t + \theta])}{2}\right),$$

$$w = A^2\rho\omega^2\left(1 - \cos(2kx)\cos(2[\omega t + \theta])\right).$$

Видно, что плотность энергии тоже является стоячей волной. Т.е. энергия стоячей волной *не переносится*.

2) Кинетическая энергия релятивистской частицы (вывести считай известного основное уравнение релятивистской динамики). Полная энергия и энергия покоя в СТО.

Основное уравнение релятивистской динамики.

В классической механике второй закон Ньютона имеет вид $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$.

Это выражение должно быть справедливым в любой инерциальной системе отсчёта, т.е. и в *релятивистской*. Запишем его в виде $\frac{d}{dt}\vec{p}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{v}\frac{dm}{dt}+m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$.

Но $\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}\right)=m_0\left(-\frac{1}{2}\frac{-2\frac{(\vec{v},\vec{a})}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right)=\frac{m_0(\vec{v},\vec{a})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$, поэтому $\frac{m_0(\vec{v},\vec{a})\vec{v}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}+m\vec{a}=\vec{F}$.

Отсюда видно, что вектор ускорения и вектор силы *не совпадают* по направлению.

1) Если вектор скорости и ускорения перпендикулярны друг другу, то $m\vec{a}=\vec{F}$

2) Если вектор скорости и ускорения параллельны друг другу, то в случае,

если они *сонаправлены* $(\vec{v},\vec{a})\vec{v}=\mathrm{v}a\vec{v}=\mathrm{v}\vec{a}\mathrm{v}=\vec{a}\mathrm{v}^2$ и $\frac{m_0\vec{a}\mathrm{v}^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}+m\vec{a}=\vec{F}$, т.е.

$$\left(\frac{m_0\mathrm{v}^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}+m\right)\vec{a}=\vec{F},\ \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}+1\right)\vec{a}=\vec{F},\ \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\vec{a}=\vec{F}$$

Но если они направлены *противоположно* $(\vec{v},\vec{a})\vec{v}=-\mathrm{v}a\vec{v}=-\mathrm{v}\vec{a}\mathrm{v}=-\vec{a}\mathrm{v}^2$, то

$$\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}\left(1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)\vec{a}=\vec{F},\ m_0\vec{a}\frac{\left(1-2\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=\vec{F}.$$

В общем случае для мощности силы находим, что $\frac{m_0(\vec{v},\vec{a})(\vec{v},\vec{v})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}+m(\vec{v},\vec{a})=(\vec{F},\vec{v})$,

$$\frac{m_0(\vec{v},\vec{a})(\vec{v},\vec{v})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}+\frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}(\vec{v},\vec{a})=(\vec{F},\vec{v}),\ \left(\frac{\frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}+1\right)\frac{m_0(\vec{v},\vec{a})}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}=(\vec{F},\vec{v}),$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{m_0(\vec{v},\vec{a})}{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}=(\vec{F},\vec{v}),\ \frac{m_0(\vec{v},\vec{a})}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}=(\vec{F},\vec{v}),\text{ т.е. }\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=(\vec{F},\vec{v}).$$

По теореме об изменении кинетической энергии должно выполняться равенство

$$W_{КИН\_2}-W_{КИН\_1}=A$$

Следовательно, можно принять в качестве кинетической энергии выражение

$W_{КИН}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+C$. Значения постоянной С определим из условия равенства нулю кинетической энергии при нулевой скорости $0=m_0c^2+C$, откуда $C=-m_0c^2$. Итак

$$W_{КИН}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2.$$

3) Смесь аргона и неона при температуре t = 38°C находится под давлением P = 1.4 кПа. Масса неона составляет 60% от общей массы смеси. Найти концентрацию молекул каждого газа.

$t = 38^\circ C$

$P = 1{,}4 \cdot 10^3$ Па

$m_н = 0{,}6\, m_c$

$n_н - ?$

$n_{Ar} - ?$

Запишем

Основное уравнение МКТ и закон Дальтона

$P = nkT$

$P = P_1 + P_2 \Rightarrow P = (n_н + n_{Ar})kT$

$m_{Ar} = 0{,}4\, m_c$

$m = \nu \mu = \frac{nV}{N_A}\mu$ Подставим

$$0{,}6\, m_c = \frac{n_н V}{N_A}\mu_н$$

$$0{,}4\, m_c = \frac{n_A V}{N_A}\mu_A$$

$$\frac{0{,}6}{0{,}4} = \frac{n_н \mu_н}{n_A \mu_A} \Rightarrow \frac{n_н}{n_A} = \frac{\mu_A \cdot 0{,}6}{\mu_н \cdot 0{,}4} \qquad n_н = \frac{0{,}6}{0{,}4}\frac{\mu_A}{\mu_н} n_A$$

$$P = n_A\left(1 + \frac{0{,}6}{0{,}4}\frac{\mu_A}{\mu_н}\right)kT \Rightarrow n_A = \frac{P}{kT}\left(1 + \frac{0{,}6}{0{,}4}\frac{\mu_A}{\mu_н}\right)^{-1}$$

$$n_н = \frac{P}{kT}\left(1 + \frac{0{,}6}{0{,}4}\frac{\mu_A}{\mu_н}\right)^{-1}\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\frac{\mu_A}{\mu_н}\right)$$

$n_A = 8{,}16 \cdot 10^{22}$ моль/м

$n_н = 2{,}45 \cdot 10^{23}$ моль/л.

$\mu_A = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\mu_н = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль