Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Сергеева Диана Константиновна
Группа	РК6-56Б
Тип задания	лабораторная работа
Тема лабораторной работы	Использование аппроксимаций для численной оптимизации

Студент ____________________ **_Сергеева Д.К.__**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель ____________________ **_Соколов А.П. __**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Москва, 2021 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу

Методы аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе мы рассмотрим одну из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки $(x, y) = (0,0)$ достигнет точки $(x, y) = (a, y_a)$ под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось y направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая $y(x)$, которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

$$\mathrm{F}[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gy(x)}}\, dx, \qquad (1)$$

где g обозначает ускорение свободного падение, и $y'(x) = dy/dx$. Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2}\sin(2t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

где $t \in [0; \mathrm{T}]$ и C, T являются константами, значения которых находятся из граничного условия. В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается $a = 2$ и $y_a = 1$. Константы циклоиды для этого граничного условия равны $C = 1.03439984$, $T = 1.75418438$.

Требуется (базовая часть):

1. Написать функцию composite_simpson(a, b, n, f), численного интегрирования функции f на интервале $[a, b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.
2. Написать функцию composite_trapezoid (a, b, n, f), численного интегрирования функции f на интервале $[a, b]$ по n узлам с помощью составной формулы трапеций.

3. Рассчитать интеграл (1) для функции $y(x)$, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций для множества значений $n \in [3; 9999]$. Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.
4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.
5. Для обоих формул сравните порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – изучение составные формулы Симпсона и трапеций. Изучение порядка точности формулы и его определения с помощью графика.

Выполненные задачи

1. Разработана программа для численного интегрирования функции на интервале по узлам с помощью составной формулы Симпсона.
2. Разработана функция численного интегрирования функции на интервале по узлам с помощью составной формулы трапеций.
3. Рассчитан интеграл для функции, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций.
4. Построен log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул: Симпсона и трапеций. Определён порядок точности формулы. Проведено сравнение с аналитическим порядком точности.

1. Реализация программы для численного интегрирования функции на интервале по узлам с помощью составной формулы Симпсона

Реализуем функцию composite_simpson(a, b, n, f), на вход которой подаются границы интервала $[a, b]$, количество узлов – n, функция - f.

Пусть $x_i = a + (i-1)h$, $h = \frac{(b-a)}{n}$ и $i = 1, \dots, n+1$, где n – четное число. Тогда $\exists \xi \in (a; b)$ для $f(x) \in C^4[a; b]$, что составная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi). \quad (3)$$

Требуется найти значение интеграла (3) на интервале.

Остаточный член предполагается достаточно малым, и можно его отбросить. Для нашей задачи пределы интервала равны: $a = 0$, $b = 2$. Так как в точке 0 имеется разрыв, то левую границу берём равной 0.001. Равномерно берём значения из интервала в зависимости от количества точек. В каждой точке x на интервале рассчитываем функционал (1). Решение вычисления интеграла приведён в пункте 3.

2. Реализация программы численного интегрирования функции на интервале по узлам с помощью составной формулы трапеций

Реализуем функцию composite_trapezoid(a, b, n, f), на вход которой подаются границы интервала $[a, b]$, количество узлов – n, функция – f.

Пусть $x_i = a + (i-1)h$, $h = \frac{(b-a)}{n}$ и $i = 1, \dots, n+1$, где $n \in \mathrm{N}$. Тогда $\exists \xi \in (a; b)$ для $f(x) \in C^2[a; b]$, что составная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{n} f(x_i) + f(x_{n+1})\right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi). \quad (4)$$

Вычислить значение интеграла (4).

Остаточный член предполагается достаточно малым и можно его отбросить. Для нашей задачи пределы интервала равны: $a = 0$, $b = 2$. Так как в точке 0 имеется разрыв, то левую границу берём равной 0.001. Равномерно берём значения из интервала в зависимости от количества точек. Аналогичным способом в каждой точке x на интервале рассчитываем функционал (1).

3. Вычисление интеграла для функции, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций

Для того, чтобы рассчитать интеграл для функционала (1), требуется понять как найти $y(x)$ и $y'(x)$.

Чтобы рассчитать $y'(x)$, воспользуемся формулой:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{5}$$

Находим для заданного x соответствующее значение t. Для этого воспользуемся функцией scipy.optimize.fsolve(f, x0, arg), которая возвращает корень переданной функции $f(x) = 0$. В нашем случае функция f является функцией $x(t)$ из (2). Для нахождения соответствующего значения t для заданного x, который мы передаём в качестве аргумента arg, будем находить $x(t) - x = 0$. Аргумент t подставляем в каждую функцию в (2), находим $y(t)$ и $x(t)$. Берём от них производную и находим значение (5). Аналогичным способом находится $y(x)$. Также находим t для заданного x с помощью функции scipy.optimize.fsolve(f, x0, arg), и подставляем его в функцию $y(t)$ в (2).

Подставляя соответствующие точки x в составные формулы Симпсона и трапеций и вычисляя от них функционал, вычисляем значение интеграла.

4. Построение log-log графика зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для формул Симпсона и трапеций. Определение порядка точности формулы. Сравнение с аналитическим порядком точности

Шаг интегрирования равен:

$$h = \frac{b-a}{n}, \tag{6}$$

где a и b являются границами интервала интегрирования, а n – количество точек на этом интервале.

Абсолютная погрешность численного интегрирования для формулы Симпсона имеет вид:

$$\mathrm{E}_1 = \frac{(b-a)h^4}{180}. \tag{7}$$

Варьируем значение n – количество точек и строим графики log-log для формул Симпсона и трапеций.

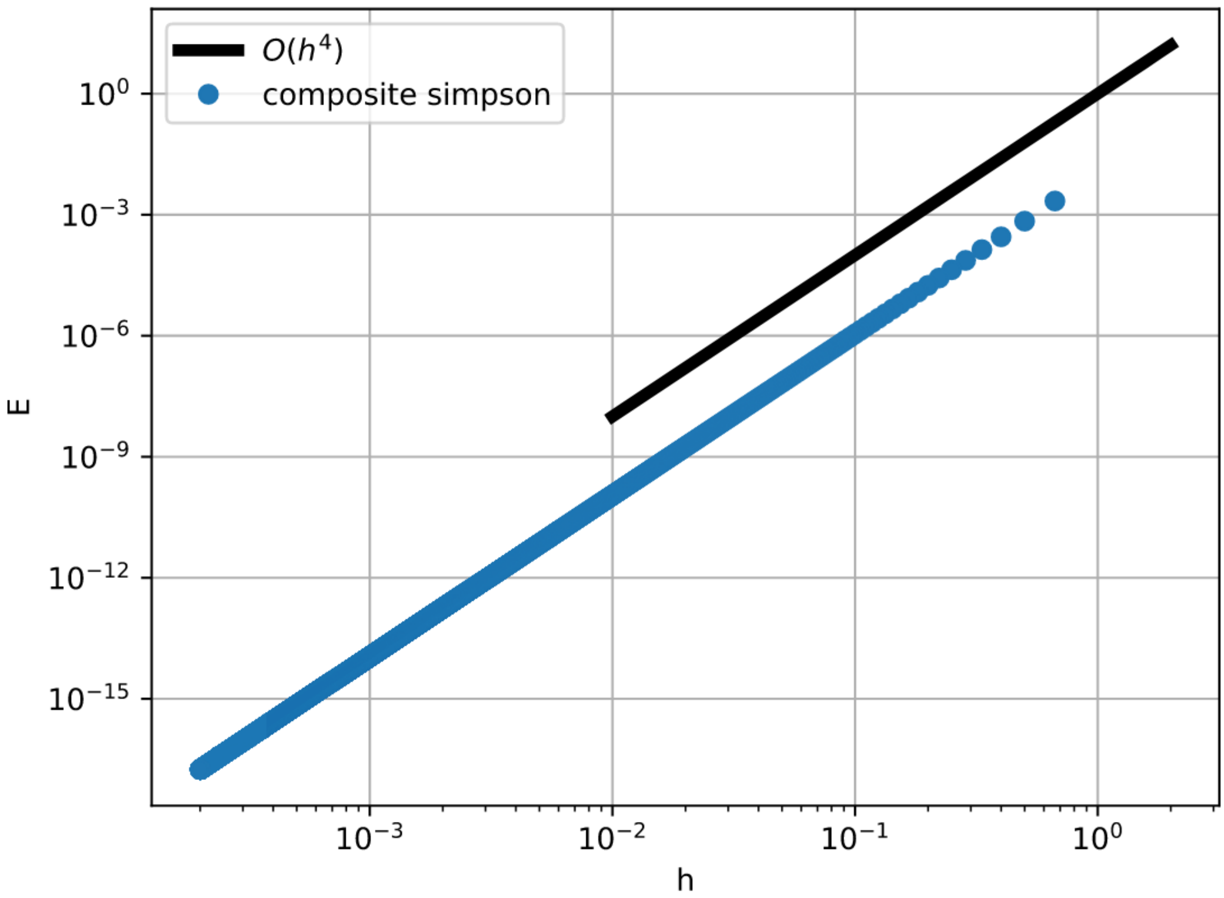

Рис. 1 – Зависимость абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для формулы Симпсона

На рис. 1 по прямой $O(h^4)$ видно, что зависимость абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для формулы Симпсона будет пропорциональна h^4, что соответствует аналитическому порядку точности в формуле (7).

Абсолютная погрешность численного интегрирования для формулы трапеций имеет вид:

$$E_2 = \frac{(b-a)h^2}{12}. \quad (8)$$

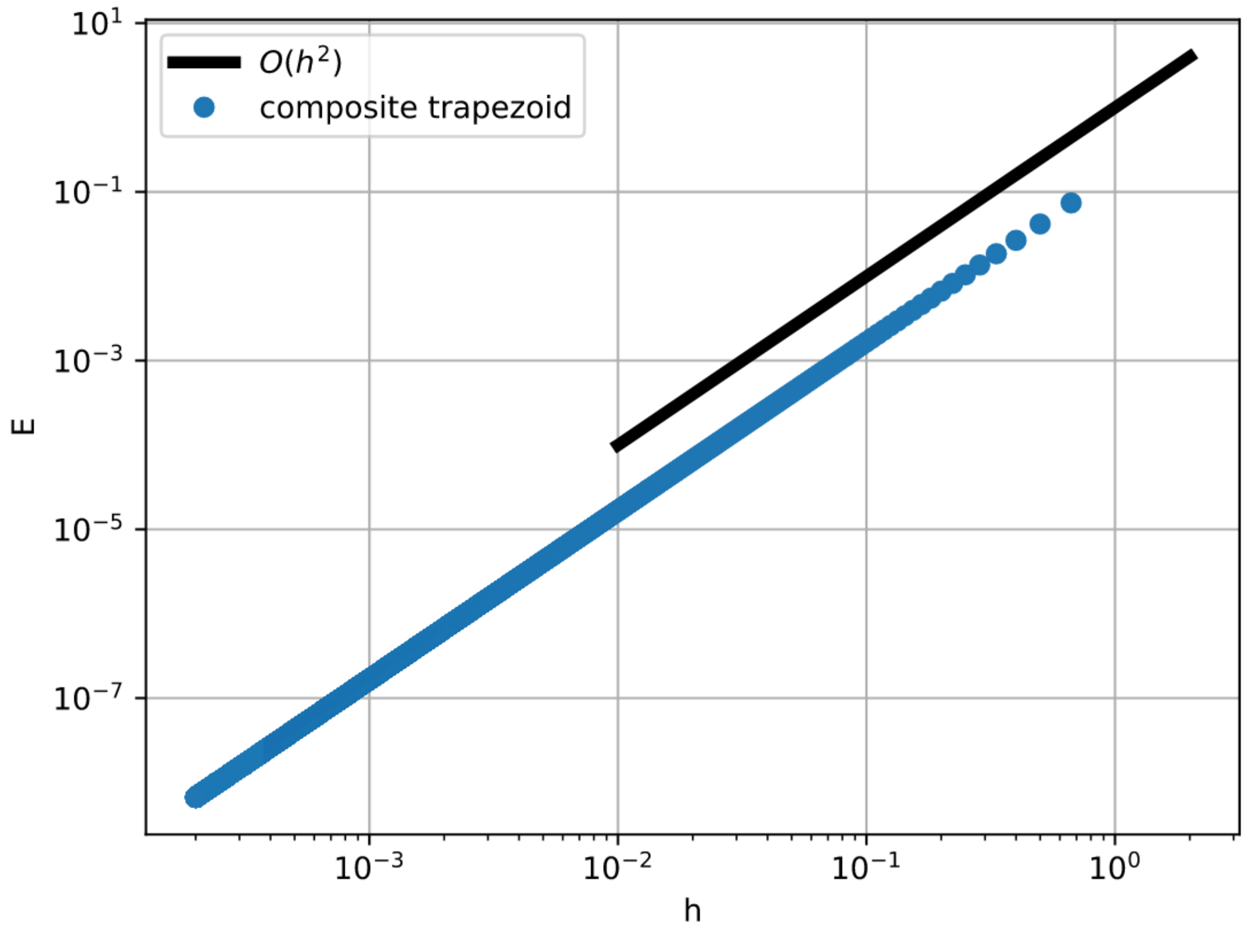

Рис. 2 – Зависимость абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для формулы трапеций

На рис. 2 по прямой $O(h^2)$ видно, что зависимость абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для формулы трапеций будет пропорциональна h^2, что соответствует аналитическому порядку точности в формуле (8).

Для оптимального шага интегрирования нужно взять как можно меньше шаг интегрирования, а количество узлов наоборот увеличить, что следует из формулы (6). Чем больше n тем меньше h.

Заключение

По результатам лабораторной работы мы научились применять составные формулы Симпсона и трапеций для численного интегрирования, сравнивать порядок точности, полученный на графике, с аналитическим порядком точности.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика. Москва, 2018-2021, С. 140.