Сергеева Диана РК6-56Б

Задача 3.3. Требуется найти аппроксимацию значения интеграла:

$\int_0^b f(x)dx$, где $(x) \in F = \{x2e{-}x; x3e{-}x; x2e{-}2x\}$, $b \in B = \{1,2,3\}$
с помощью формул трапеций и средних, сравнить ее с точным значением и для каждой из формул найти верхнюю границу погрешности такой аппроксимации.

Для моего варианта:

$$b = 1$$

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

Вычислим значение интеграла:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Воспользуемся интегрированием по частям: $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = x^2, du = 2x dx$$

$$dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x}$$

Тогда:

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = x^2(-e^{-x})|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} 2x dx = \frac{-1}{e} + 2\int_0^1 e^{-x} x dx$$

Опять воспользуемся интегрированием по частям:

$$u = x, du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x}$$

Тогда:

$$\frac{-1}{e} + 2\int_0^1 e^{-x} x dx = \frac{-1}{e} + 2(x(-e^{-x})|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx)$$
$$= \frac{-1}{e} + 2x(-e^{-x})|_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x} dx = \frac{-1}{e} + \frac{-2}{e} - 2e^{-x}|_0^1$$
$$= \frac{-3}{e} - 2(\frac{1}{e} - 1) = 2 - \frac{5}{e} = 0{,}1606027941$$

Формула средних (n=1):

$$\int_0^b f(x)dx = f(x_1)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3,$$

где $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$ и $\xi \in (a;b)$.

Так как $b = 1$, то: $x_1 = \frac{(0+1)}{2} = \frac{1}{2}$.

Тогда:

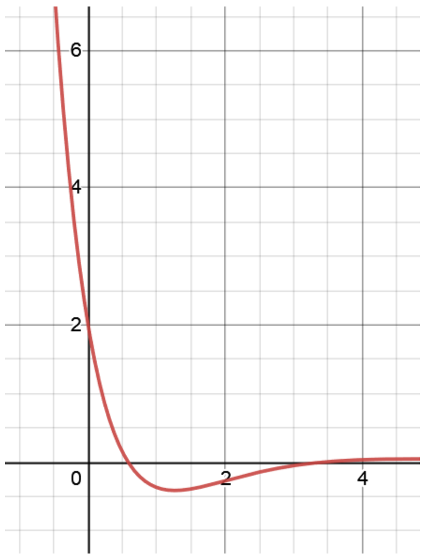
$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left((\frac{1}{2})^2 e^{-\frac{1}{2}}\right)(1-0) + \frac{f''(\xi)}{24}(1-0)^3 = \left((\frac{1}{2})^2 e^{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{f''(\xi)}{24}$$
$$= 0{,}1516326649 + \frac{f''(\xi)}{24}$$

Точное значение равно $0{,}1606027941$. Значения не сильно различаются.

Найдём верхнюю границу погрешности, для этого найдём максимальное значение остаточного члена: $\frac{f''(\xi)}{24}$. Найдём:

$$f''(x) = (x^2e^{-x})'' = (2xe^{-x} - e^{-x}x^2)' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - (-e^{-x}x^2 + 2xe^{-x})$$
$$= 2e^{-x} - 2xe^{-x} + e^{-x}x^2 - 2xe^{-x} = e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x}$$
$$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2),$$

где $\xi \in (0;1)$.



Функция $f''(x)$ выглядит так:

Максимальное значение $f''(x)$ будет при $\xi = 0$: $f''(\xi) = 2$. Тогда получаем: $f''(x)_{max} < 2$, а верхняя граница погрешности равна: $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

Формула трапеций (n=2):

$$\int_0^b f(x)dx = \frac{h}{2}\big(f(x_1) + f(x_2)\big) - \frac{h^3}{12}f''(\xi),$$

где:

$$x_1 = a = 0,$$

$$x_2 = b = 1,$$

$$h = b - a = 1 - 0 = 1$$

и $\xi \in (0; 1)$.

Тогда:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}((0^2 e^{-0}) + (1^2 e^{-1})) - \frac{1^3}{12} f''(\xi) = \frac{1}{2}\frac{1}{e} - \frac{1}{12} f''(\xi)$$
$$= 0{,}1839397205 - \frac{1}{12} f''(\xi)$$

Точное значение равно 0.1606027941. Разница между точным и приближенным значением, вычисленным методом трапеции, получилась больше чем в методе средних.

Найдём верхнюю границу погрешности, для этого найдём максимальное значение остаточного члена: $\frac{1}{12} f''(\xi)$. Найдём:

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2),$$

где $\xi \in (0; 1)$.

Аналогично с предыдущем пунктом, максимальное значение $f''(x)$ будет при $\xi = 0$: $f''(\xi) = 2$. Тогда получаем: $f''(x)_{max} < 2$, а верхняя граница погрешности равна: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.