

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский
университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

**Домашнее задание №3 по дисциплине
«Прикладная механика»**

Вариант 1(18)

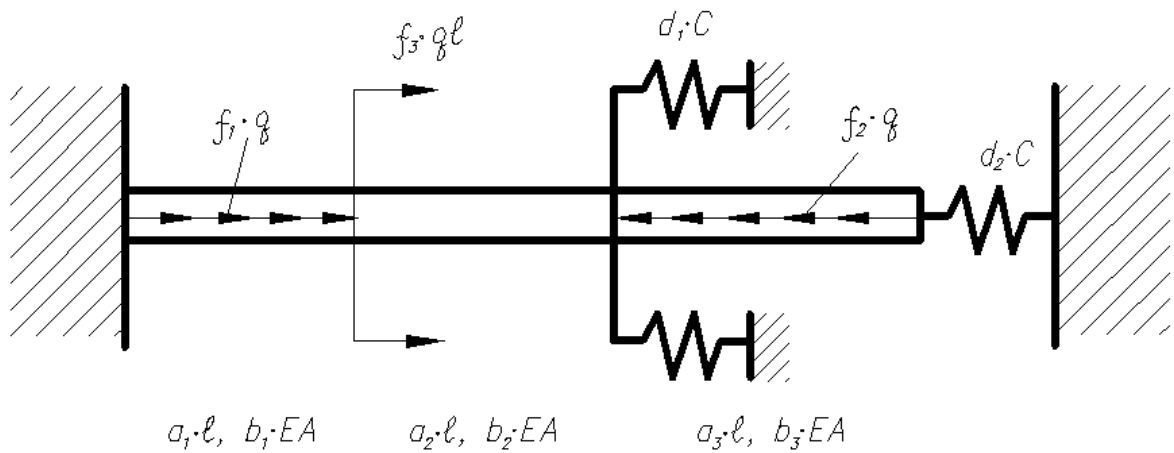
Выполнил: студент группы РК6-36Б Сергеева Д.К.
Проверил: декан факультета РК, Шашурин Г.В.

Москва
2020

Метод конечных элементов в задаче растяжения-сжатия.

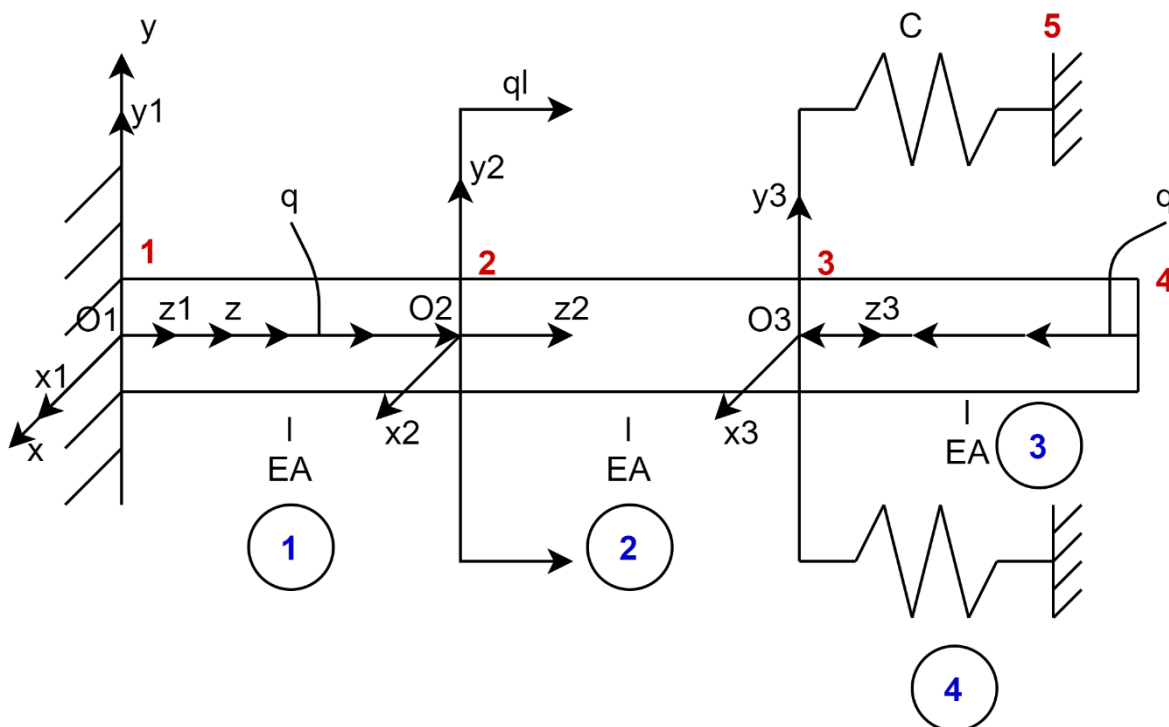
Для заданной системы требуется:

1. Разбить систему на конечные элементы. Ввести локальные и глобальную систему координат, записать матрицы жесткости каждого конечного элемента.
2. Сформировать СЛАУ для нахождения узловых перемещений системы. Найти узловые перемещения системы.
3. При $C \rightarrow 0$ и при $C \rightarrow \infty$ вычислить наибольшее значения осевой силы в системе.



No	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	d_1	d_2	f_1	f_2	f_3
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1

1) Введем глобальную и локальную систему координат. Разобьём стержень на 4 конечных элемента и введём 5 узлов:



Запишем матрицы жесткости для всех конечных элементов:

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix}$$

2) СЛАУ для нахождения узловых перемещений в стержне:

$$[K] * \{u\} = \{f\}$$

$[K]$ – матрица жесткости системы

$\{u\}$ – вектор узловых перемещений

$\{f\}$ – вектор сил

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} \\ \frac{3ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Таблица индексов:

N_e	N_1	N_2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	3	5

Составим матрицу жесткости с помощью ассемблирования:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} + C & -\frac{EA}{l} & -C \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & C \end{bmatrix}$$

С учётом граничных условий:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{2EA}{l} + C & -\frac{EA}{l} & -C \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ W_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} \\ \frac{3ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Перепишем:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & \frac{-EA}{l} & 0 \\ \frac{-EA}{l} & \frac{2EA}{l} + C & -\frac{EA}{l} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \end{Bmatrix}$$

Решим СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EA}{l} & \frac{-EA}{l} & 0 \\ \frac{-EA}{l} & \frac{2EA}{l} + C & -\frac{EA}{l} \\ 0 & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot ql \cdot (C \cdot l^2 + EA \cdot l)}{4 \cdot C \cdot EA \cdot l + 2 \cdot EA^2} - \frac{l \cdot ql}{2 \cdot C \cdot l + EA} \\ \frac{-(l \cdot ql)}{4 \cdot C \cdot l + 2 \cdot EA} \\ -\frac{(2 \cdot C \cdot l^2 + 3 \cdot EA \cdot l) \cdot ql}{4 \cdot C \cdot EA \cdot l + 2 \cdot EA^2} + \frac{l \cdot ql}{4 \cdot C \cdot l + 2 \cdot EA} \end{bmatrix}$$

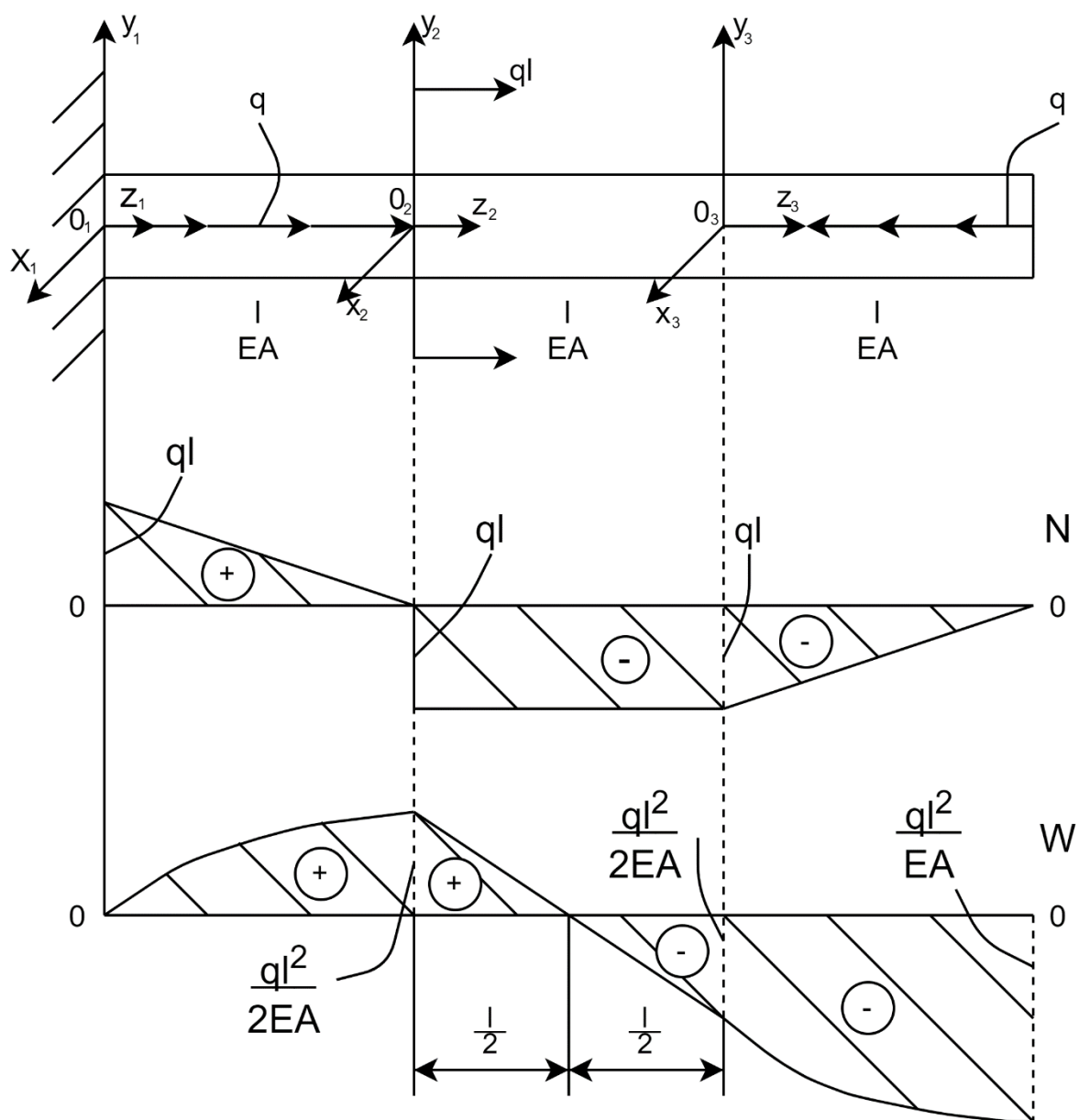
Тогда:

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ql^2(3Cl + EA)}{2EA(2Cl + EA)} \\ -ql^2 \\ \frac{4CL + 2EA}{ql^2(-Cl - EA)} \\ \frac{EA(2Cl + EA)}{0} \end{pmatrix}$$

Вычислим узловые перемещения при $C \rightarrow 0$:

$$\lim_{C \rightarrow 0} W = \begin{pmatrix} 0 \\ \lim_{C \rightarrow 0} \frac{ql^2(3Cl + EA)}{2EA(2Cl + EA)} \\ \lim_{C \rightarrow 0} \frac{-ql^2}{4CL + 2EA} \\ \lim_{C \rightarrow 0} \frac{ql^2(-Cl - EA)}{EA(2Cl + EA)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ql^2}{2EA} \\ -ql^2 \\ \frac{2EA}{-ql^2} \\ \frac{EA}{0} \end{pmatrix}$$

Сравним с результатами, полученные в ДЗ №1:



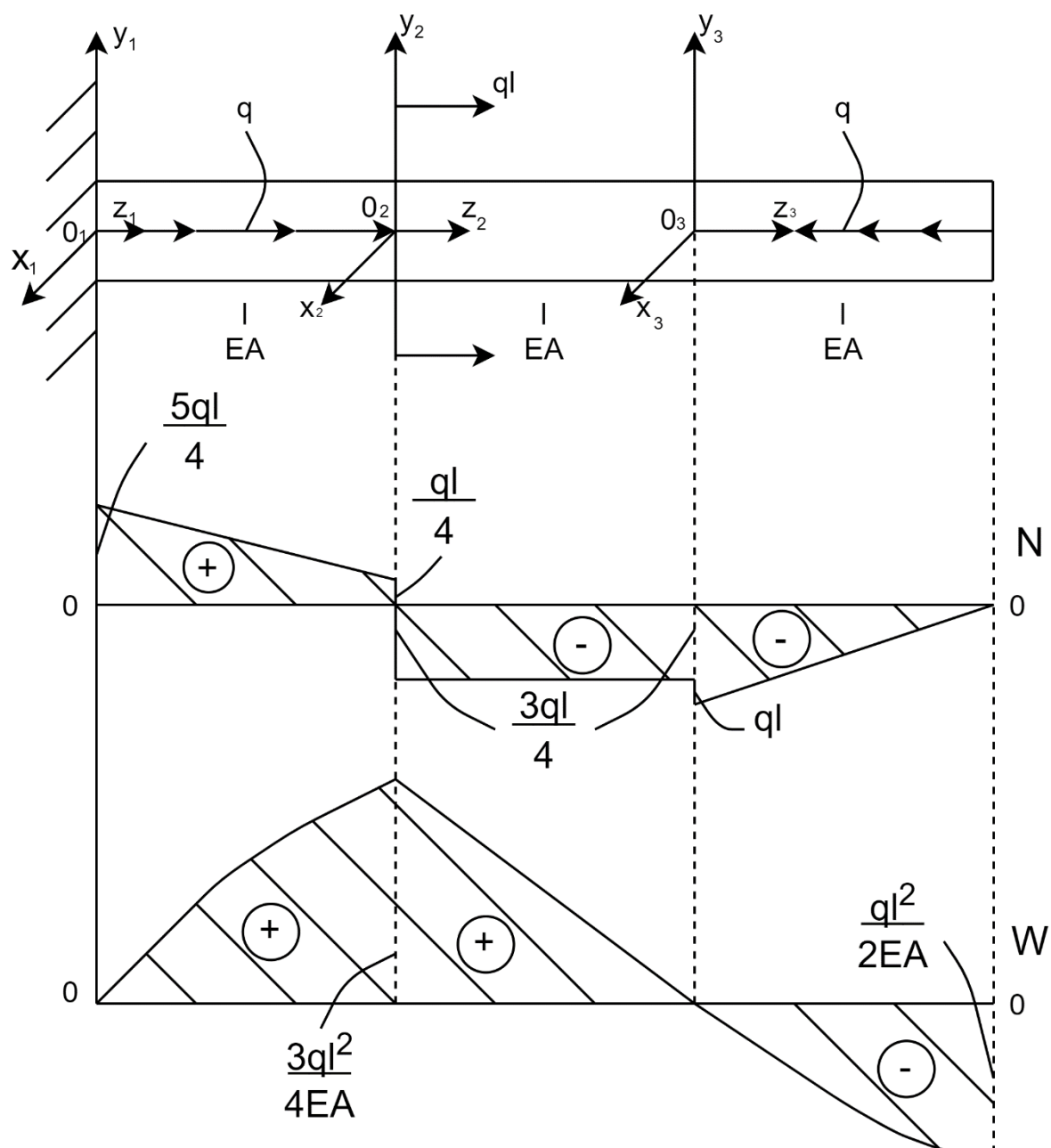
Все

Значения перемещений совпадают.

Вычислим узловые перемещения при $C \rightarrow \infty$:

$$\lim_{C \rightarrow \infty} W = \begin{pmatrix} 0 \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{ql^2(3Cl + EA)}{2EA(2Cl + EA)} \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{-ql^2}{4CL + 2EA} \\ \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{ql^2(-Cl - EA)}{EA(2Cl + EA)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3ql^2}{4EA} \\ 0 \\ \frac{-ql^2}{2EA} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сравним с результатами, полученные в ДЗ №1:

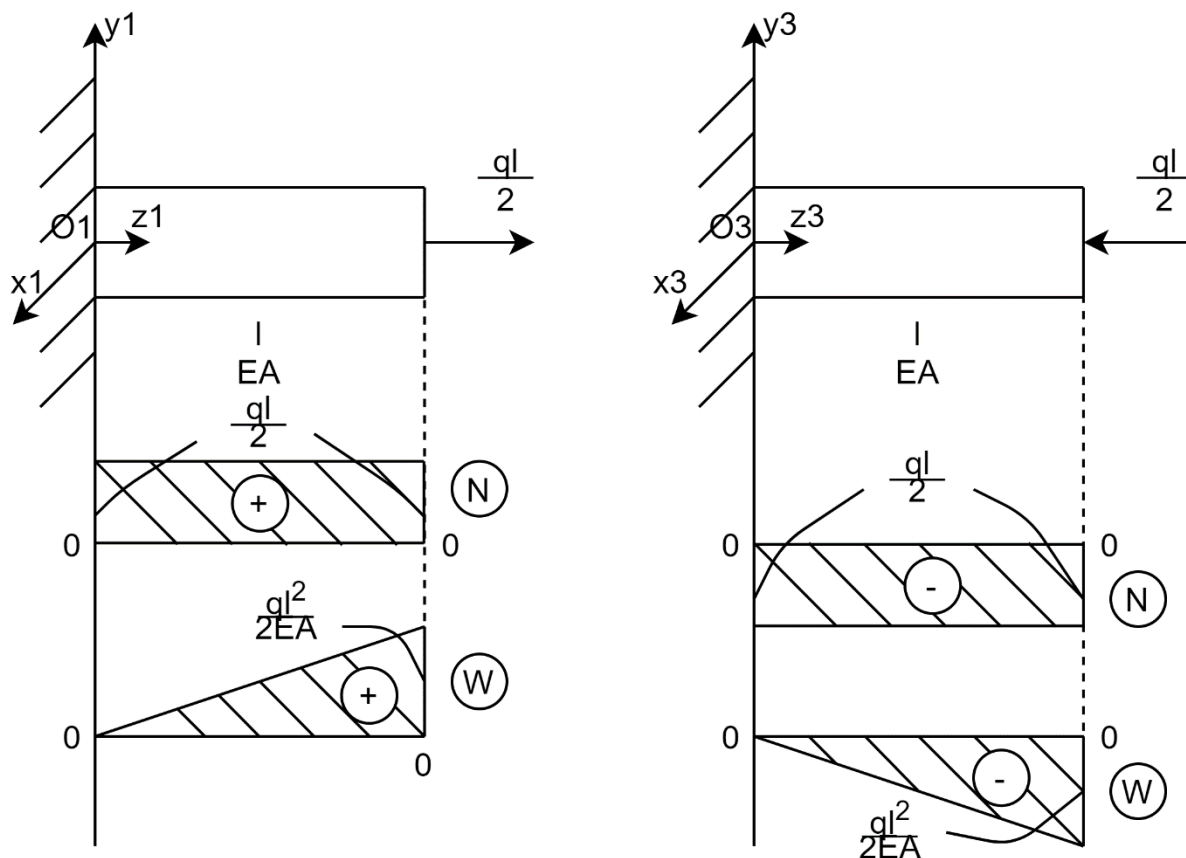


Значения перемещений совпадают.

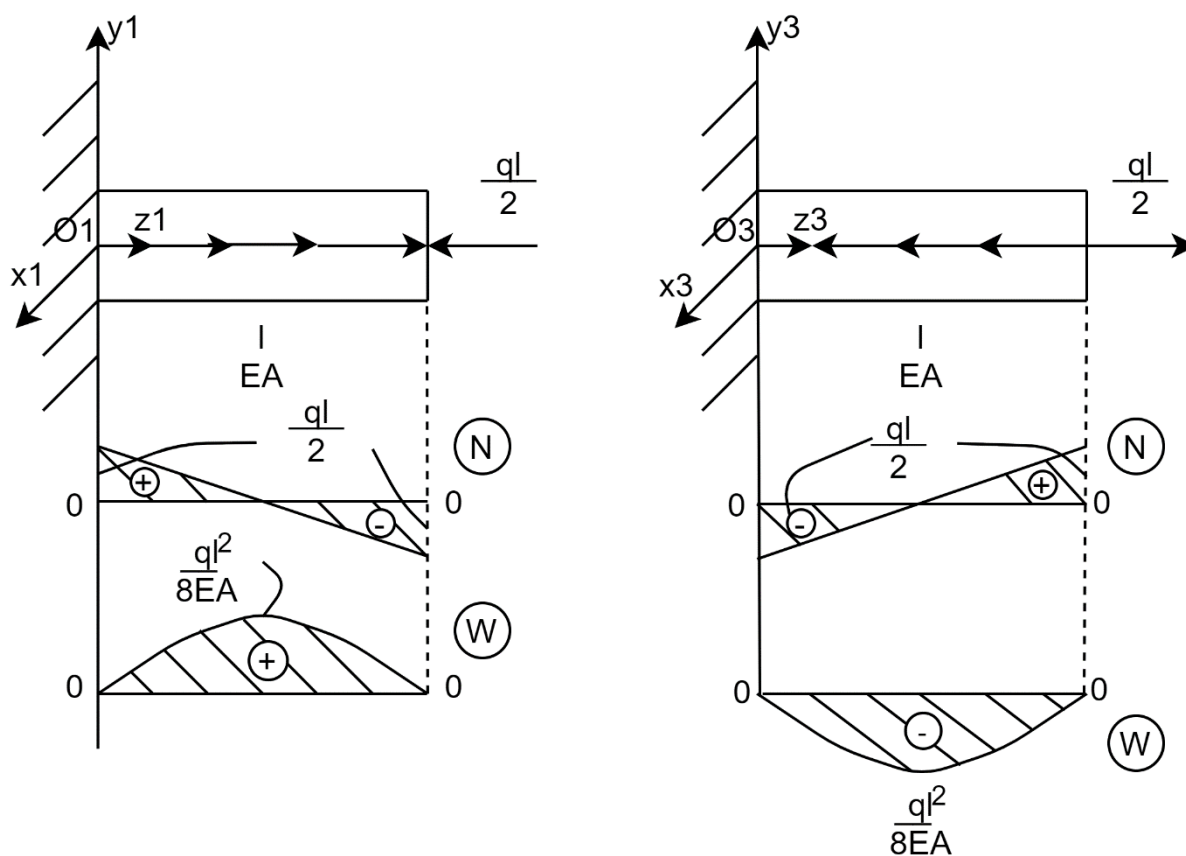
3)

При $C \rightarrow 0$:

Эпюры узловых перемещений на 1 и 3 участке:



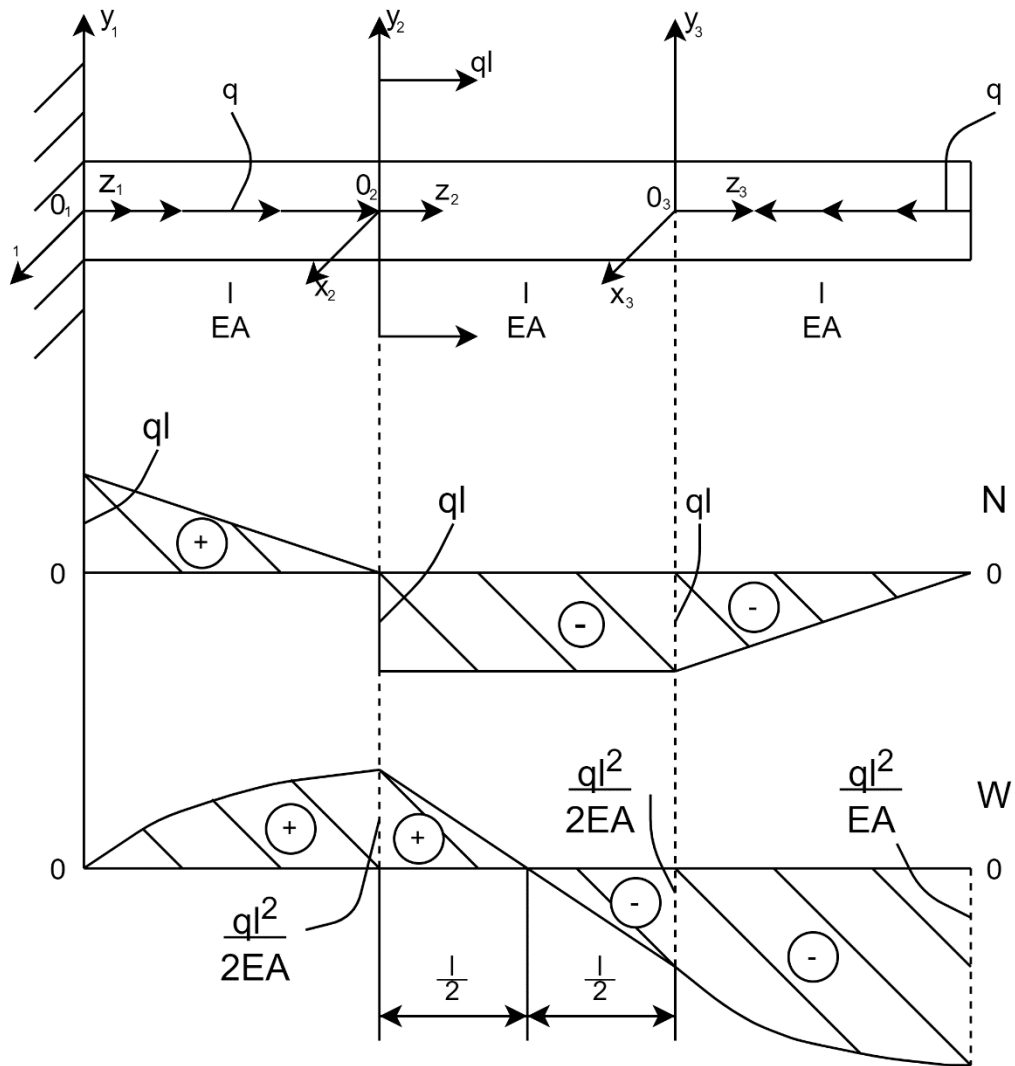
Эпюры распределенных нагрузок на 1 и 3 участке:



Тогда:

$$N(0) = \begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} + \frac{ql}{2} \\ 0 - ql \\ -\frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql \\ -ql \\ -ql \end{Bmatrix} \quad N(l_i) = \begin{Bmatrix} \frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} \\ -ql \\ -\frac{ql}{2} + \frac{ql}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -ql \\ 0 \end{Bmatrix}$$

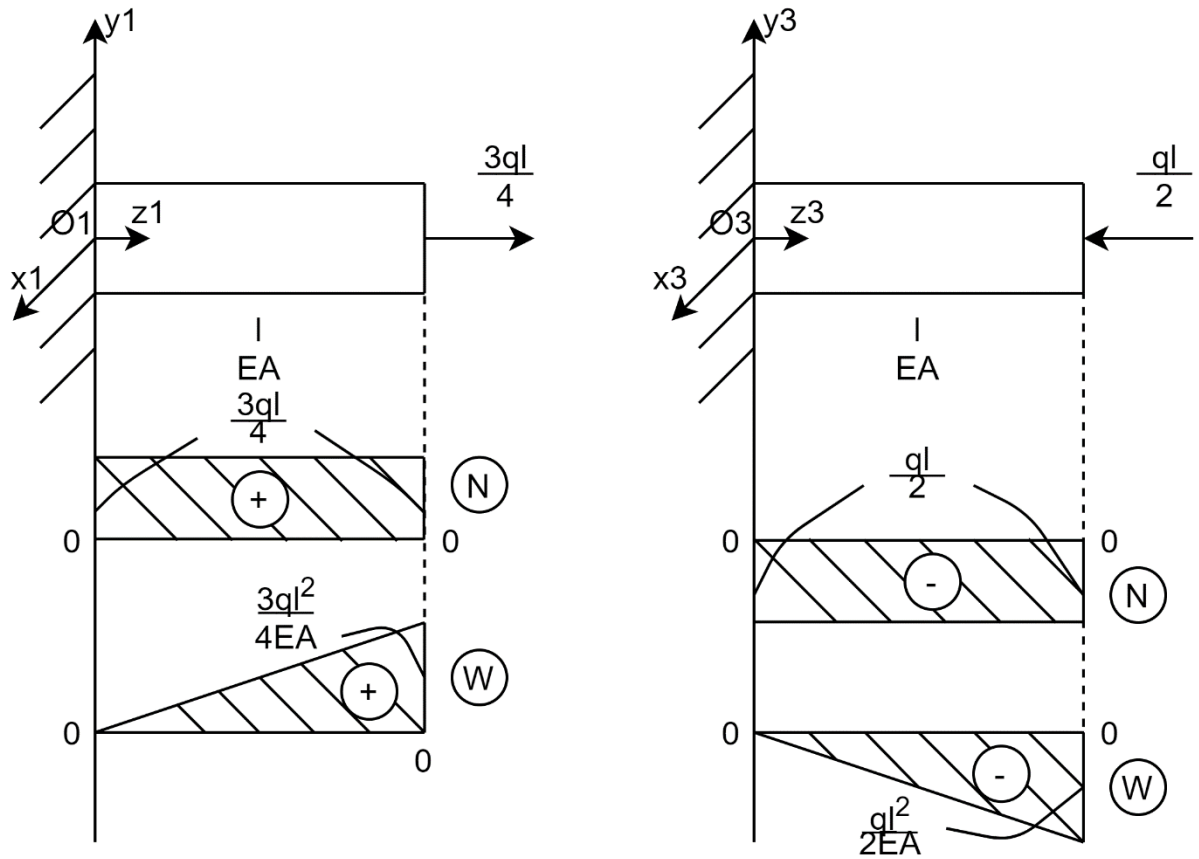
Сравним с 1 ДЗ:



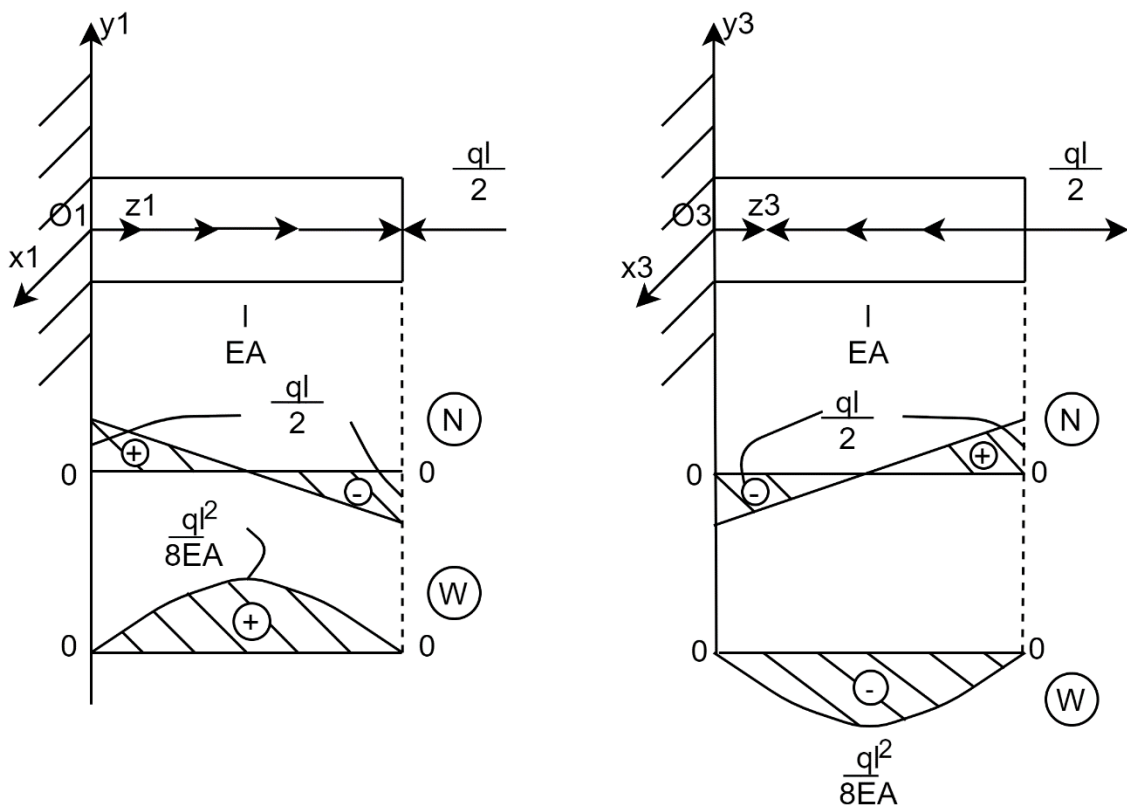
Значения совпали, тогда $N_{max} = ql$.

При $C \rightarrow \infty$:

Эпюры узловых перемещений на 1 и 3 участке:



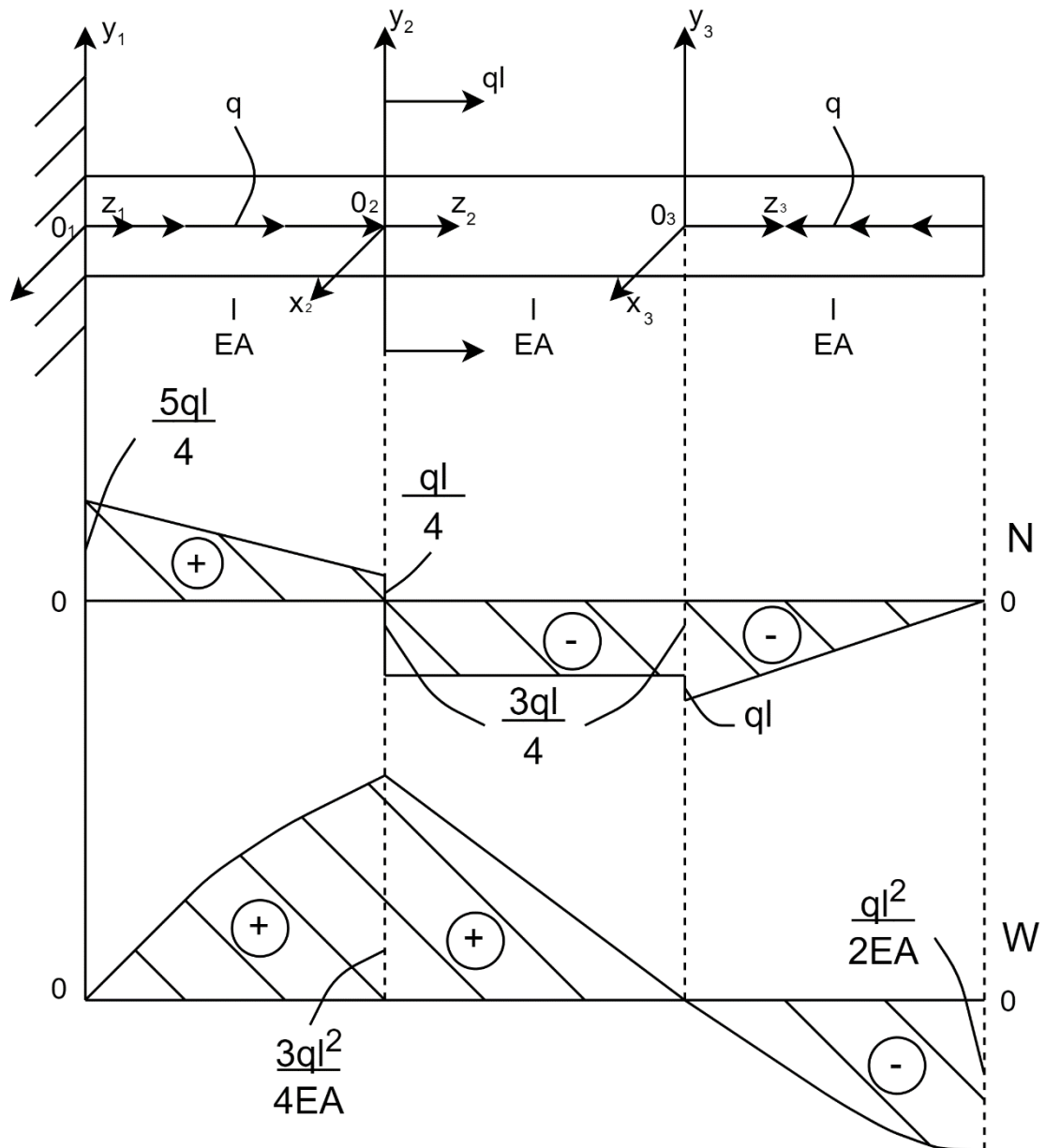
Эпюры распределенных нагрузок на 1 и 3 участке:



Тогда

$$N(0) = \begin{Bmatrix} -\frac{3ql}{4} - \frac{ql}{2} \\ -\frac{ql}{4} - ql \\ -\frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{5ql}{4} \\ -\frac{3ql}{4} \\ -ql \end{Bmatrix} \quad N(l_i) = \begin{Bmatrix} \frac{3ql}{4} - \frac{ql}{2} \\ -\frac{3ql}{4} \\ \frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{ql}{4} \\ -\frac{3ql}{4} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Сравним с 1 ДЗ:



Значения совпали, тогда $N_{max} = \frac{5ql}{4}$.