Задача.

$f(x,y)=x^y$ , где $y=\varphi(x)$ . Найти $\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{df}{dx}$ .

*Решение.*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y\,x^{y-1}; \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^y\ln x$$

$$\frac{d f(x,y)}{d x} = \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = y\,x^{y-1}+x^y\ln x\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,x^{\varphi(x)-1}+x^{\varphi(x)}\ln x\,\varphi'(x)$$

Можно и по-другому: сразу подставим $\varphi(x)$ в $f(x,y)$ и получим функцию только от *x*: $x^{\varphi(x)}$ . Дифференцируя её, получим тот же результат.

Задача.

Найти $\frac{du}{dt}$ , где $u=xyz$, $x=t^2+1$, $y=\ln t$, $z=tg\,t$ .

*Решение.*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = yz(2t)+xz\left(\frac{1}{t}\right)+xy\frac{1}{\cos^2 t}$$ , что равно

$$2t\ln t\,tg\,t+(t^2+1)\left(\frac{tg\,t}{t}+\frac{\ln t}{\cos^2 t}\right)$$

Задача. Найти $\frac{d\,y}{d\,x}, \ \frac{d^2 y}{d\,x^2}$ при $x=1$ , если

$F(x,y)=x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$ .

*Решение.*

Если $x=1$ , то $y=0$ или $y=1$ .

$\frac{d\,y}{d\,x}=-\frac{F_x{}'}{F_y{}'}=\frac{2x-2y+1}{-2x+2y+1}$ . Это равно 3 или -1.

$$\frac{d^2 y}{d\,x^2}=-\frac{(F_{xx}''+F_{xy}''y')F_y'-F_x'(F_{yx}''+F_{yy}''y')}{F_y'^2} = -\frac{4(1-y')}{(-2x+2y+1)^2}$$ ,

что равно 8 или -8.

Задача 1878.

*Решение.*

Производная по направлению равна скалярному произведению градиента на единичный вектор направления.

$$grad\,z=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right), \quad e=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Их скалярное произведение в точке (1, 1) равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .