Сергеева Д.К. РК6-56Б

Задача 5.1

Требуется найти численное решение одной из представленных задач Коши с помощью

метода Эйлера, используя шаг h = 0.5:

2) $\frac{dy}{dt} = \alpha y\left(1 - \frac{y}{\beta}\right), y(0) = \frac{1}{10}, t \in [0; 1]$

Дополнительно требуется найти точное решение соответствующей задачи Коши, продемонстрировать графики численного и точного решений на одной координатной плоскости, а также представить абсолютные погрешности вычислений на каждом рассматриваемом шаге.

Найдём численное решение задачи Коши с помощью метода Эйлера.

Для моей задачи: $\alpha = 0.5$, $\beta = \frac{1}{3}$. Тогда:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y\left(1 - \frac{y}{\beta}\right) = \frac{1}{2}y(1 - 3y), \text{ где } y(0) = 0,\ t \in [0; 1].$$

Обобщенная формулировка метода Эйлера для систем ОДУ 1 порядка:

$$w_0 = y(t_0),$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i; w_i),$$

где $t_i = a + ih$, $i = 1, \dots, m$; $h = \frac{b-a}{m} = t_{i+1} - t_i$.

Распишем для нашего условия с учетом, что $h = \frac{1}{2}$:

$$w_0 = y(t_0) = y(0) = \frac{1}{10},$$

$$w_1 = w_0 + hf(t_0; w_0) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{10} * \left(1 - 3 * \frac{1}{10}\right) = \frac{47}{400},$$

$$w_2 = w_1 + hf(t_1; w_1) = \frac{47}{400} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{47}{400} * \left(1 - 3 * \frac{47}{400}\right) = \frac{87373}{640000}.$$

Найдём точное решение задачи Коши.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y(1 - 3y)$$

$$\frac{dy}{y(1 - 3y)} = \frac{dt}{2}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \int \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \frac{1}{2}\int dt$$

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \frac{t}{2}$$

Вычислим левую часть. Разложим интеграл:

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \int -\frac{dy}{y(3y-1)} = -\int \left(\frac{3}{3y-1} - \frac{1}{y}\right) dy$$
$$= -(\int \frac{3}{3y-1} dy - \int \frac{dy}{y})$$

Заменим $u = 3y - 1$, $\frac{du}{dy} = 3$, $dy = \frac{du}{3}$. Тогда:

$$-\left(\int \frac{3}{u}\frac{du}{3} - \int \frac{dy}{y}\right) = -\left(\int \frac{du}{u} - \ln(|y|)\right) = -(\ln(|u|) - \ln(|y|))$$
$$= -\ln(|u|) + \ln(|y|) = \ln(|y|) - \ln(|3y-1|) = \ln\left(\left|\frac{y}{3y-1}\right|\right)$$

Получаем:

$$\ln\left(\left|\frac{y}{3y-1}\right|\right) = \frac{t}{2} + \mathrm{C}$$

Возведём уравнение в степень: $e^{f_1} = e^{f_2}$, при этом применим свойство: $e^{\ln(a)} = a$. Тогда:

$$e^{\ln\left(\left|\frac{y}{3y-1}\right|\right)} = e^{\frac{t}{2}+C}$$

$$\left|\frac{y}{3y-1}\right| = e^{\frac{t}{2}+C}$$

Т.к. правая часть всегда положительна, раскрываем модуль:

$$\frac{y}{3y-1} = e^{\frac{t}{2}+C}$$

$$y = \frac{1}{Ce^{\frac{t}{2}} - 3} + \frac{1}{3}$$

Найдем C, с учетом начального условия $y(0) = \frac{1}{10}$:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{Ce^{\frac{0}{2}} - 3} + \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{C} = -\frac{9}{7}$$

Итоговое выражение для $y(t)$:

$$y = \frac{1}{-\frac{9}{7}e^{\frac{t}{2}} - 3} + \frac{1}{3}$$

Вычислим аналитические значения:

$$y(0.5) = 0.118$$

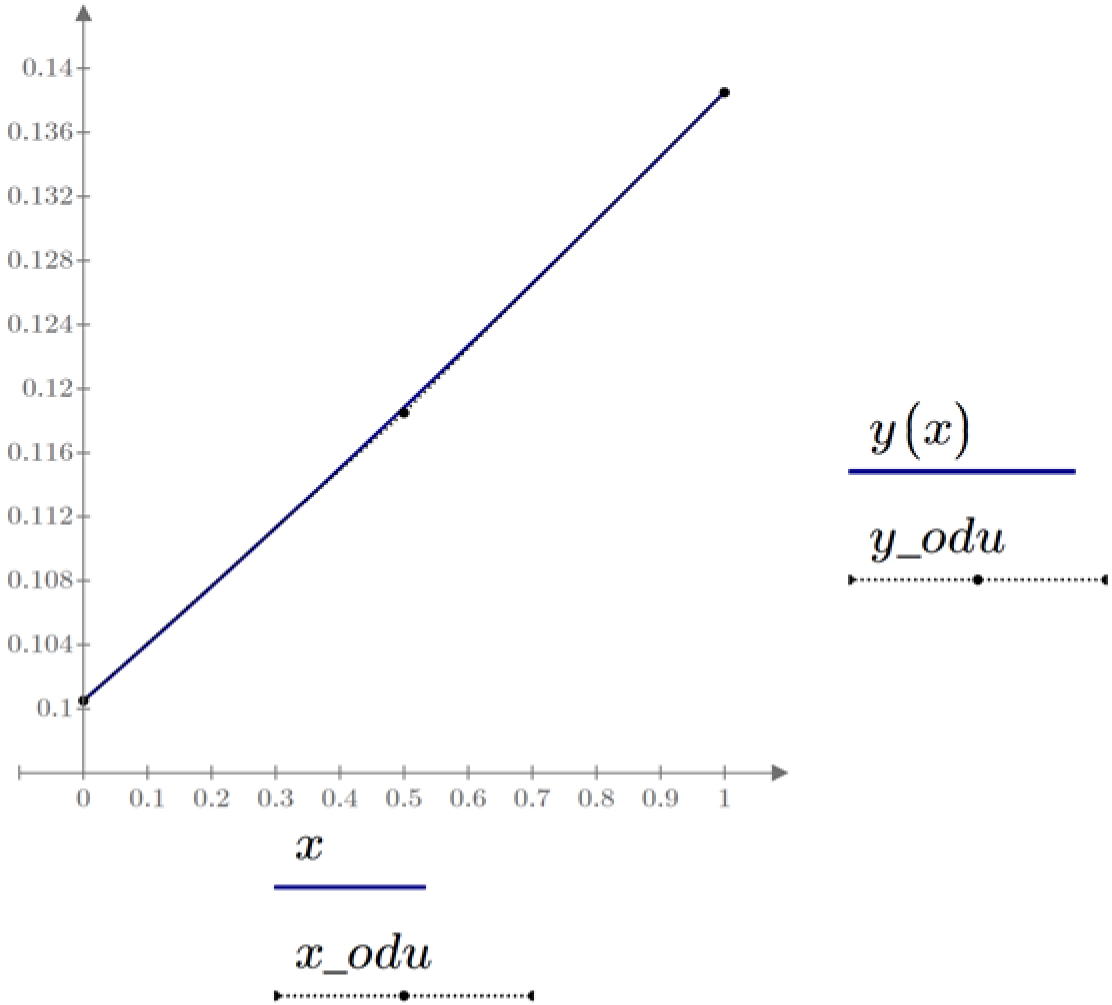
$$y(1) = 0.138$$

Вычислим абсолютные погрешности вычислений на каждом рассматриваемом шаге:

$$|w_1 - y(0.5)| = \left|\frac{47}{400} - 0.118\right| = 0.106$$

$$|w_1 - y(1)| = \left|\frac{87373}{640000} - 0.138\right| = 0.001$$

График:



0.14
0.136
0.132
0.128
0.124
0.12
0.116
0.112
0.108
0.104
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
y(x)
y_odu
x
x_odu