Билет 6 2020г

1.______Свободные затухающие колебания. Дифф ур-е (вывод на примере любой колебательной системы с вязким трением и квазиупругой силой). Его решение. Частота свободных затухающих колебаний.

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний постепенно уменьшается (затухает).

Во многих случаях в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях силы, вызывающие затухание колебаний, пропорциональны величине скорости (например маятник). Тогда *сила трения* (или *сопротивления*):

$$\vec{F}_{тр} = -r\vec{\upsilon} ,$$

где r – коэффициент сопротивления, $\vec{\upsilon}$ – скорость движения.

Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси *x*:

$$ma_x = -kx - r\upsilon_x ,$$

где kx – возвращающая сила, $r\upsilon_x$ – сила трения. Это уравнение можно переписать:

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$, отсюда следует: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$.

Введем обозначения: $\frac{r}{2m} = \beta$; $\frac{k}{m} = \omega_0^2$.

Тогда однородное ***дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее затухающее колебательное движение***, запишем так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 . \qquad (3.1.1)$$

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид (при $\beta \le \omega_0$):

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t - \phi_0) .$$

Здесь A_0 и φ_0 определяются из краевых условий задачи (начальных и граничных), а β и ω – из самого уравнения.

Найдем круговую частоту ω. Здесь она уже не равна ω_0 $(\omega \ne \omega_0)$.

Для этого найдем первую и вторую производные от *x*:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0) - \omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \phi_0) ,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \beta^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \phi_0) +$$
$$+ \beta\omega A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \phi_0) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0).$$

Подставим эти значения в (3.1.1) и сократим на $A_0 e^{-\beta t}$:

$$\beta^2\cos(\omega t+\phi_0)+2\beta\omega\sin(\omega t+\phi_0)-\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)-$$
$$-2\beta^2\cos(\omega t+\phi_0)-2\omega\beta\sin(\omega t+\phi_0)+\omega_0^2\cos(\omega t+\phi_0)=0;$$

$$-\beta^2\cos(\omega t+\phi_0)-\omega^2\cos(\omega t+\phi_0)+\omega_0^2\cos(\omega t+\phi_0)=0\ .$$

Сократим на $\cos(\omega t+\phi_0)$ и выразим ω: $-\beta^2-\omega^2-\omega_0^2=0;\ \omega^2=\omega_0^2-\beta^2\ ,\quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\ ,$

где ω_0 – *круговая частота собственных колебаний* (без затухания); ***ω – круговая частота свободных затухающих колебаний.*** Из этого выражения ясно, почему решение (3.1.1) будет только при $\beta\le\omega_0$. Для колебаний под действием различных сил (квазиупругих) значения ω, β, ω_0 будут различными. Например, для колебаний под действием упругой силы $\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\ ;\quad \beta=\dfrac{r}{2m}\ ;\quad \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}-\left(\dfrac{r}{2m}\right)^2}.$

Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, так как в них не повторяется, например, максимальное значение амплитуды. Поэтому называть ω – *циклической* (повторяющейся, круговой) частотой можно лишь *условно*. По этой же причине и $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$ называется *условным периодом* затухающих колебаний.

2._______Теплопроводность идеальных газов. Вывод уравнения теплопроводности (з-на Фурье) и формулы для коэффициента теплопроводности.

Выведенная из состояния равновесия, любая макросистема стремиться вернуться в равновесное состояние. При этом растет энтропия, значит этот процесс не обратим. Нарушение равновесия сопровождается возникновением потоков или частиц, или тепла, или электрического заряда и др. Соответствующие процессы называют явлениями переноса. Все они являются необратимыми. Три явления переноса: диффузия, внутреннее трение и теплопроводность

Для анализа теплопроводности газа на основе общего уравнения переноса

$$G=-2\lambda\frac{dg}{dx}\qquad(48.1)$$

необходимо конкретизировать выражение для плотности микропотока $g=Za$.

Учитывая, что вязкость в известном смысле является аналогом теплопроводности (§ 41), определим величину Z (число молекул, проходящих через единицу площади за единицу времени) так же, как и при нахождении коэффициента вязкости, т. е. соотношением $Z=\frac{1}{6}nc$. Соответственно

$$g=\frac{1}{6}nca,\qquad(48.2)$$

где $c=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$ — средняя квадратичная скорость, a — переносимая величина, приходящаяся на одну частицу.

Для описания теплопроводности в газах следует ввести микропотоки энтальпии. Запишем выражение для мольной энтальпии идеального газа (25.5):

$$H=C_pT.\qquad(48.3)$$

Разделив последнее на число Авогадро, найдем энтальпию, рассчитанную на одну молекулу:

$$a=C'_pT,\qquad(48.4)$$

где C'_p — теплоемкость при постоянном давлении, приходящаяся на одну частицу. Соответственно выражение для искомой плотности микропотока (48.2) принимает вид

$$g=\frac{1}{6}ncC'_pT.\qquad(48.5)$$

Для теплопроводности $G=\frac{\Delta Q}{F\cdot\Delta t}$ (ΔQ — количество теплоты, переносимой за время Δt через площадку F). Учитывая (48.5), перепишем (48.1):

$$\frac{\Delta Q}{F\cdot\Delta t}=-\frac{1}{3}\lambda C'_p\frac{d}{dx}(ncT)\qquad(48.6)$$

(величина C'_p как постоянная вынесена за знак производной).

При раскрытии последнего выражения появится слагаемое, содержащее производную $\frac{d}{dx}$ от n, связанное с переносом энтальпии диффузией. Согласно изложенному в § 46 перенос диффузией можно считать скомпенсированным противотоком энтальпии, порождаемым механическим перемещением среды. Тогда (48.6) можно записать в форме

$$\frac{\Delta Q}{F\cdot\Delta t}=-\frac{1}{3}\lambda C'_pn\frac{d}{dx}(cT).$$

Так как $c=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$, то

$$\frac{\Delta Q}{F\cdot\Delta t}=-\frac{1}{2}\lambda cnC'_p\frac{dT}{dx}.$$

Величина nC'_p есть теплоемкость при постоянном давлении вещества, заключенного в единице объема. Введя подстановку $nC'_p=\rho C_p$, перепишем предыдущее выражение в виде

$$\frac{\Delta Q}{F\cdot\Delta t}=-\frac{1}{2}\lambda c\rho C_p\frac{dT}{dx}.\qquad(48.7)$$

Аналогичный вид имеет уравнение теплопроводности Фурье (41.2):

$$\frac{\Delta Q}{F\cdot\Delta t}=-\varkappa\frac{dT}{dx}.\qquad(48.8)$$

135

Вывод закона Фурье

Чтобы получить выражение для вектора плотности потока тепла, рассмотрим сначала частный случай, когда температура зависит только от одной пространственной координаты, например, от *x*:

$$T = T(t, x)\,. \qquad (5.50)$$

Очевидно, что в этом случае вектор *q* плотности потока тепла будет направлен вдоль оси x, т.е. будет иметь только одну отличную от нуля проекцию q_x.

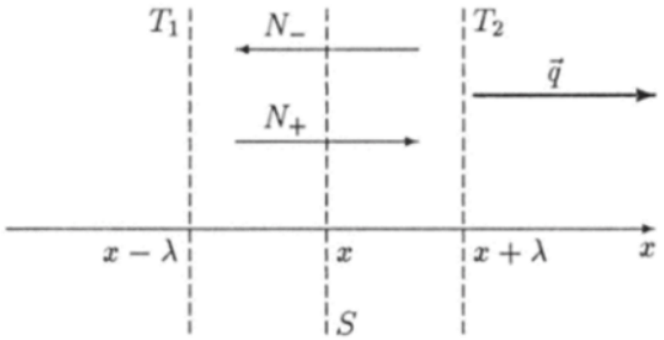

Рис. 5.12.

К выводу закона Фурье

Построим воображаемую плоскость площадью 5, которая перпендикулярна к оси *x* и пересекает ее в точке *x* (рис. 5.12). С двух сторон на эту плоскость падают молекулы. За время *dt* на каждую сторону упадут молекулы, число которых

$$N_+ = N_- = \frac{1}{6}\, n\,\langle v\rangle\, S\, dt\,.$$

Так как по разные стороны от плоскости *S* газ имеет различные значения температуры *T* и То, средние значения энергии одной молекулы в потоках, движущихся навстречу друг другу, будут различны:

$$\varepsilon_1 = \frac{i}{2}\, k\, T_1 \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \frac{i}{2}\, k\, T_2\,.$$

Молекулы, движущиеся слева направо, за время *dt* переносят через плоскость *S* энергию

$$\varepsilon_1 \cdot \frac{1}{6}\, n\,\langle v\rangle\, S\, dt\,,$$

а молекулы, движущиеся в обратном направлении, - энергию

$$\varepsilon_2 \cdot \frac{1}{6}\, n\,\langle v\rangle\, S\, dt\,.$$

Поэтому, используя определение плотности потока тепла, можно записать равенство

$$q_x\, S\, dt = \frac{1}{6}\, n\, \langle v \rangle\, S\, dt\, (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,,$$

$$q_x = \frac{1}{6}\, n\, \langle v \rangle \cdot \frac{i}{2}\, k\, (T_1 - T_2)\,.$$

или

Средняя энергия молекулы *m, к T* определяется температурой той точки пространства, где она испытала последнее соударение. Для однонаправленного потока молекул эти точки находятся от плоскости *S* в среднем на расстоянии, равном длине свободного пробега молекулы Л. По этой причине следует положить

Так как

$$T_1 = T(t,\, x - \lambda) \quad \text{и} \quad T_2 = T(t,\, x + \lambda)\,.$$

$$T_2 - T_1 = T(t,\, x + \lambda) - T(t,\, x - \lambda) = \frac{\partial T(t,\, x)}{\partial x}\, \Delta x\,,$$

$$\Delta x = 2\, \lambda\,,$$

где
для плотности потока тепла будем иметь следующее выражение:

$$\boxed{q_x = -\,\kappa\, \frac{\partial T}{\partial x}\,,} \qquad (5.51)$$

При помощи выражений (3.44) и (5.8) для (v) и Л последнюю формулу можно преобразовать к виду

$$\kappa = \frac{i}{6}\, n \langle v \rangle\, k\, \lambda\,. \qquad (5.52)$$

$$\kappa = \frac{i\, k}{6\, \sigma} \sqrt{\frac{3\, k\, T}{2\, m}}\,.$$

Формулы (5.51) и (5.52) выражают собой *закон Фурье*.

3_____Уравнение адиабаты идеального газа в переменных p, V имеет вид $pV^{\gamma} = const$, где γ - показатель адиабаты. Получите Уравнение адиабаты в переменных V, T и p, T.

Используя уравнение состояния идеального газа, преобразуем уравнение Пуассона к виду

$$pV = \nu RT \quad \rightarrow \quad \nu RTV^{(\gamma-1)} = const$$

Значит $\boxed{TV^{(\gamma-1)} = const}$

или $\boxed{p^{(1-\gamma)}T^{\gamma} = const}$

При адиабатическом расширении идеальный газ охлаждается, а при сжатии – нагревается.

Адиабатическим называется процесс, протекающий без теплообмена с внешней средой. Найдем уравнение, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе.
Подставим в уравнение (96.4) первого начала термодинамики выражение dU для идеального газа:

$$d'Q = \frac{m}{\mu} C_V dT + p dV.$$

Так как для адиабатического процесса $d'Q = 0$, должно выполняться условие

$$\frac{m}{\mu} C_V dT + p dV = 0. \tag{103.1}$$

Теперь выразим p через V и T в соответствии с уравнением состояния идеального газа:

$$p = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V},$$

и подставим это выражение в (103.1). В результате, сокращая на отличный от нуля множитель m/μ, получим:

$$C_V dT + RT \frac{dV}{V} = 0.$$

Преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0.$$

Последнее соотношение можно записать в виде

$$d\left(\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V\right) = 0,$$

откуда следует, что при адиабатическом процессе

$$\ln T + \frac{R}{C_V} \ln V \ln V = const. \tag{103.2}$$

Учтя, что для идеального газа $C_p - C_V = R$, отношение R / C_V можно заменить через $\gamma - 1$, где $\gamma = C_p / C_V$. Произведя в (103.2) такую замену и пропотенцировав полученное выражение, мы придем к уравнению

$$TV^{\gamma - 1} = const. \tag{103.3}$$

Полученное соотношение представляет собой уравнение адиабаты идеального газа в переменных T и V. От этого уравнения можно перейти к уравнению в пере

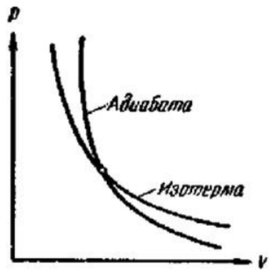

Рис. 235.

менных p и V, заменив в нем T через p и V в соответствии с уравнением состояния идеального газа:

$$T = \frac{\mu}{m} \frac{pV}{R}.$$

Подставив это выражение в (103.3) и учитывая, что m, μ, и R — постоянные, получаем:

$$pV^{\gamma} = const.$$

Соотношение (103.4) есть уравнение адиабаты идеального газа в переменных p и V. Его называют также уравнением Пуассона.

Из сопоставления уравнения адиабаты (103.4) с уравнением изотермы (98.3) следует, что адиабата идет круче, чем изотерма. Вычислим $\frac{dp}{dV}$ для изотермы и адиабаты в одной и той же точке (p, V)(рис. 235).

Дифференцирование уравнения (98.3) дает:

$$pdV + Vdp = 0,$$

откуда для изотермы получаем:

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V}.$$

Продифференцировав (103.4), получим:

$$p\lambda V^{\gamma - 1} dV + V^{\gamma} dp = 0,$$

откуда

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}.$$