Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)
Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»
Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №2 Часть 2 по дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Вариант 18

Выполнил:
студент группы РК6-36Б
Сергеева Д.К.

Москва

2020

Задача 1. Известно, что плотность распределения f(x) одномерной случайной величины X представляет собой трапецию, для которой (здесь и далее значения всех параметров берутся из таблиц исходных данных к ДЗ №1):

f(R1) = 0, f(R1+G1) = h, f(R1+G1+B1) = h, f(R1+G1+B1+R2) = 0, где R1=8, G1=7, B1=5, R2=11.

Необходимо:

1. рассчитать величину h;
2. записать аналитическое выражение для функции плотности распределения f(x);
3. записать аналитическое выражение для функции распределения F(x);
4. рассчитать математическое ожидание случайной величины M(X);
5. рассчитать дисперсию случайной величины D(X).

Задача 2. Имеется функция φ(x) = (x-(R2+G2))*(x-(R2+G2+B2)), где R2 = 11, G2 = 10, B2 = 11. Будем рассматривать случайную величину Y как результат вычисления функции φ для случайного аргумента X (рассмотренного в задаче 1).

Необходимо:

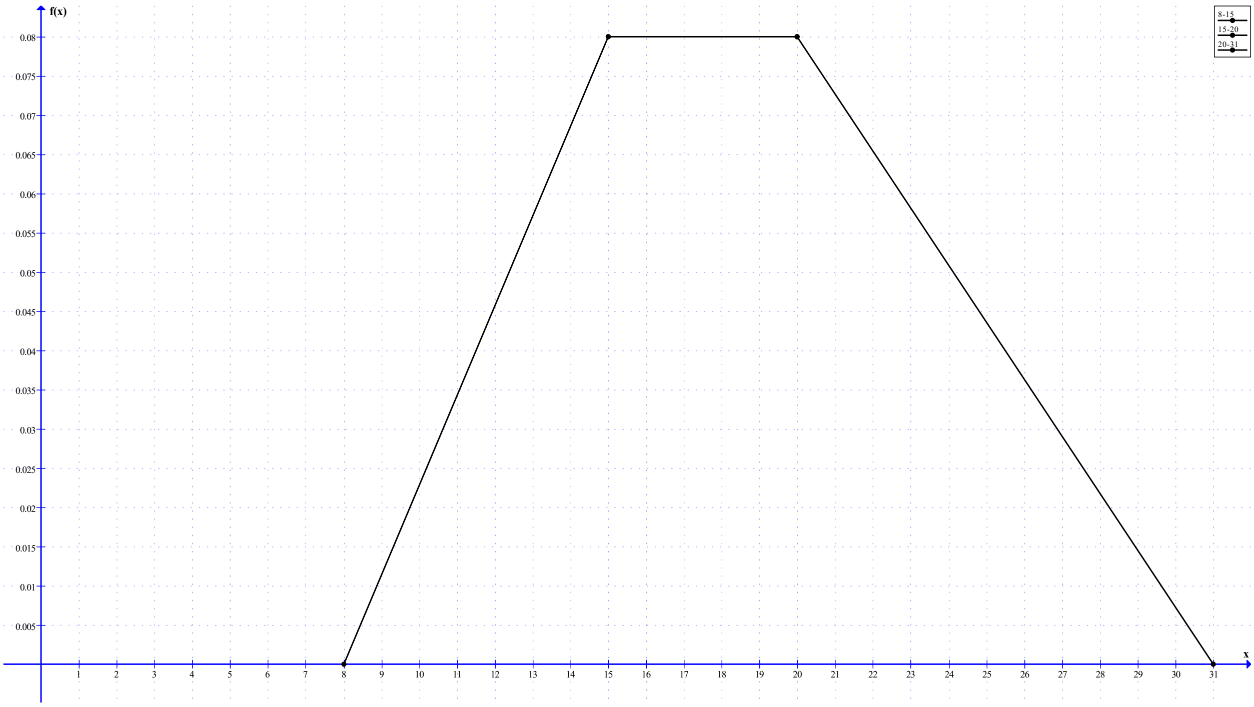
1. записать аналитическое выражение для функции плотности распределения f(y);
2. записать аналитическое выражение для функции распределения F(y);
3. рассчитать математическое ожидание случайной величины M(Y);
4. рассчитать дисперсию случайной величины D(Y).

Задача 1.

1.1.

График функция – трапеция, $S = \frac{a+b}{2} * h = 1$, где $a = 20$ и $b = 5$. Тогда h = $\frac{2}{25}$ = 0.08.

f(8) = 0, f(15) = 0.08, f(20) = 0.08, f(31) = 0



1.2.

Зададим кусочно-заданную функцию:

1 участок $x \in\ [8;15)$:

$$\begin{cases} 0 = 8k + b \\ \dfrac{2}{25} = 15k + b \end{cases} \begin{cases} k = \dfrac{2}{175} \\ b = \dfrac{-16}{175} \end{cases} \text{тогда } y = \frac{2}{175}x - \frac{16}{175}$$

2 участок $x \in [15;20)$:

$$y = \frac{2}{25}$$

3 участок $x \in [20;31]$:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{25} = 20k + b \\ 0 = 31k + b \end{cases} \begin{cases} k = \dfrac{-2}{275} \\ b = \dfrac{62}{275} \end{cases} \text{тогда } y = \frac{-2}{275}x + \frac{62}{275}$$

Тогда:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 8) \\ \dfrac{2}{175}x - \dfrac{16}{175}, x \in\ [8;15) \\ \dfrac{2}{25}, x \in [15;20) \\ -\dfrac{2}{275}x + \dfrac{62}{275}, x \in [20;31] \\ 0, x \in (31, +\infty) \end{cases}$$

1.3.

Т.к. $f(x) = (F(x))'$, то найдём функцию распределения как:

$F(x) = \int f(x)\,dx$

Интегрируем каждую часть кусочной функции:

$F(x) = \int \left(\frac{2*x}{175} - \frac{16}{175}\right) dx = \frac{x^2}{175} - \frac{16x}{175} + C;$

$\frac{8^2}{175} - \frac{16*8}{175} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{64}{175};$

$F(x) = \int \left(\frac{2}{25}\right) dx = \frac{2x}{25} + C;$

$\frac{2*15}{25} + C = \frac{15^2}{175} - \frac{16*15}{175} + \frac{64}{175} \Rightarrow C = -\frac{23}{25};$

$F(x) = \int \left(-\frac{2*x}{275} + \frac{62}{275}\right) dx = -\frac{x^2}{275} + \frac{62x}{275} + C;$

$-\frac{20^2}{275} + \frac{62*20}{275} + C = \frac{2*20}{25} - \frac{23}{25} \Rightarrow C = -\frac{653}{275};$

Тогда:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty; 8) \\ \frac{x^2}{175} - \frac{16x}{175} + \frac{64}{175}, x \in\ [8; 15) \\ \frac{2x}{25} - \frac{23}{25}, x \in [15; 20) \\ -\frac{x^2}{275} + \frac{62x}{275} - \frac{653}{275}, x \in [20; 31] \\ 1, x \in (31, +\infty) \end{cases}$$

1.4.

Математическое ожидание: $M(x) = \int_{R1}^{R2} (x * f(x))dx$

$$M(x) = \\ = \int_8^{15} x\left(\frac{2}{175}x - \frac{16}{175}\right)dx + \int_{15}^{20} x\left(\frac{2}{25}\right)dx + \int_{20}^{31} x\left(-\frac{2}{275}x + \frac{62}{275}\right)dx \\ = \frac{266}{75} + 7 + \frac{781}{75} = \frac{524}{25} = 20.96$$

1.5.

Дисперсия: $D(x) = \int_{R1}^{R2} \left(x - M(x)\right)^2 * f(x) * dx$

$D(x) =$

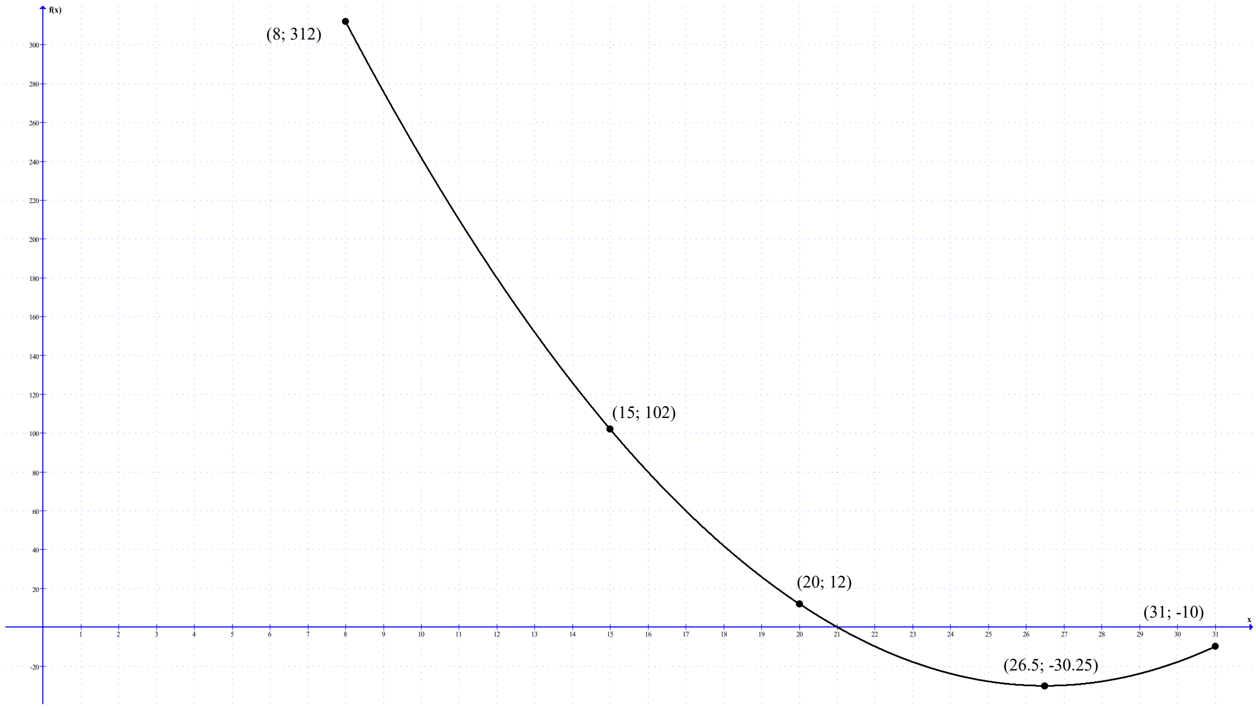
$$= \int_8^{15} \left(x - \frac{524}{25}\right)^2 * \left(\frac{2}{175}x - \frac{16}{175}\right) dx + \int_{15}^{20} \left(x - \frac{524}{25}\right)^2 * \left(\frac{2}{25}\right) dx$$

$$+ \int_{20}^{31} \left(x - \frac{524}{25}\right)^2 * \left(-\frac{2}{275}x + \frac{62}{275}\right) dx = \frac{625639}{31250} + \frac{52706}{9375} + \frac{579491}{93750}$$

$$= \frac{1491734}{46875} = 31.823658(6)$$

Задача 2.

$\varphi(x) \ = \ (x - 21) * (x - 32) = \left(x - \frac{53}{2}\right)^2 - \frac{121}{4}$, где $x \in [8; 31]$



2.1.

Функция возрастает на $x \in [11; 24]$ и убывает на $x \in [24; 42]$.

Найдем $g(y), g_2(y)$ таких, что $\varphi\big(g_1(y)\big) = \varphi\big(g_2(y)\big) = y$.

Тогда: $g_1(y) = \frac{53}{2} - \sqrt{y + \frac{121}{4}}$, $g_2(y) = \frac{53}{2} + \sqrt{y + \frac{121}{4}}$.

Тогда:

$$f(g_1)=\begin{cases} 0, x\in(-\infty;8) \\ \frac{2}{175}\left(\frac{53}{2}-\sqrt{y+\frac{121}{4}}\right)-\frac{16}{175}, x\in\ [8;15) \\ \frac{2}{25}, x\in[15;20) \\ -\frac{2}{275}\left(\frac{53}{2}-\sqrt{y+\frac{121}{4}}\right)+\frac{62}{275}, x\in[20;31] \\ 0, x\in(31,+\infty) \end{cases}$$

$$f(g_2)=\begin{cases} 0, x\in(-\infty;8) \\ \frac{2}{175}\left(\frac{53}{2}+\sqrt{y+\frac{121}{4}}\right)-\frac{16}{175}, x\in\ [8;15) \\ \frac{2}{25}, x\in[15;20) \\ -\frac{2}{275}\left(\frac{53}{2}+\sqrt{y+\frac{121}{4}}\right)+\frac{62}{275}, x\in[20;31] \\ 0, x\in(31,+\infty) \end{cases}$$

Воспользуемся формулой $\sum_{i=0}^{n} f(g_i)|g_i|$. Т.к. $f(x)$ – кусочная функция, а $\varphi(x)$ имеет два промежутка монотонности, то искомая функция $f(y)$ будет иметь промежутки: $\left[-\frac{121}{4};-10\right)$, $[-10;12)$, $[12;102)$, $[102;312]$. Найдём:

$$|g_1'|=|g_2'|=\frac{1}{\sqrt{4y+121}}$$

Тогда:

$f(\psi_1)*|\psi_1'|+f(\psi_2)*\ |\psi_2'|, \left\{x_1,x_2\in[20;31), y\in\left[-\frac{121}{4};-10\right)\right\}$

$f(\psi_1)*|\psi_1'|, \{x_1\in[20;31)\ , y\in[-10;12)\}$

$f(\psi_1)*|\psi_1'|, \{x_1\in[15;20)\ , y\in[12;102)\}$

$f(\psi_2)*|\psi_2'|\ \{\ x_1\in[8;15)\ , y\in[102;312]\}$

Тогда:

$$f = \begin{cases} \dfrac{18}{275\sqrt{4y+121}}, y \in \left[-\dfrac{121}{4};\ -10\right) \\ \dfrac{9+\sqrt{4y+121}}{275\sqrt{4y+121}}, y \in [-10;\ 12) \\ \dfrac{2}{25\sqrt{4y+121}}, y \in [12;\ 102) \\ \dfrac{37-\sqrt{4y+121}}{175\sqrt{4y+121}}, y \in [102;\ 312) \end{cases}$$

2.2.

Проинтегрируем все части f(y):

$$\int \frac{18}{275\sqrt{4y+121}} dy = \frac{9}{275\sqrt{4y+121}} + C$$

$$\frac{9}{275\sqrt{-\frac{121*4}{4}+121}} + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\int \frac{9+\sqrt{4y+121}}{275\sqrt{4y+121}} dy = \frac{9\sqrt{4y+121}+2y}{550} + C$$

$$\frac{9\sqrt{-10*4+121}-2*10}{550} + C = \frac{9}{275\sqrt{-4*10+121}} + 0 \Rightarrow C = -\frac{59}{550}$$

$$\int \frac{2}{25\sqrt{4y+121}} dy = \frac{\sqrt{4y+121}}{25} + C$$

$$\frac{\sqrt{4*12+121}}{25} + C = \frac{9\sqrt{4*12+121}+2*12}{550} - \frac{59}{550} \Rightarrow C = -\frac{102}{275}$$

$$\int \frac{37-\sqrt{4y+121}}{175\sqrt{4y+121}} dy = \frac{-2y+37\sqrt{4y+121}}{350} + C$$

$$\frac{-2*312+37\sqrt{4*312+121}}{350} + C = 1 \Rightarrow C = -\frac{79}{70}$$

$$F = \begin{cases} \dfrac{9}{275\sqrt{4y+121}}, y \in \left[-\dfrac{121}{4};\ -10\right) \\ \dfrac{9\sqrt{4y+121}+2y}{550} - \dfrac{59}{550}, y \in [-10;\ 12) \\ \dfrac{\sqrt{4y+121}}{25} - \dfrac{102}{275}, y \in [12;\ 102) \\ \dfrac{-2y+37\sqrt{4y+121}}{350} - \dfrac{79}{70}, y \in [102;\ 312) \end{cases}$$

2.3.

Рассчитаем математическое ожидание как:

$$M(Y) = M\big(\varphi(X)\big) = \int_{R1}^{R2} \varphi(x) * f(x)\, dx$$
$$= \int_{8}^{15} (x-21)*(x-32)*\left(\frac{2}{175}x - \frac{16}{175}\right) dx$$
$$+ \int_{15}^{20} (x-21)*(x-32)*\left(\frac{2}{25}\right) dx$$
$$+ \int_{20}^{31} (x-21)*(x-32)*\left(-\frac{2}{275}x + \frac{62}{275}\right) dx = \frac{6881}{150} + \frac{317}{15} - \frac{341}{50}$$
$$= \frac{4514}{75} = 60.18(6)$$

2.4.

Рассчитаем дисперсию как:

$$D(Y) = D\big(\varphi(X)\big) = \int_{R1}^{R2} \Big(\varphi(x) - M\big(\varphi(X)\big)\Big)^2 * f(x)\,dx$$

$$= \int_{8}^{15} \left((x-21)*(x-32) - \frac{4514}{75}\right)^2 * \left(\frac{2}{175}x - \frac{16}{175}\right) dx$$

$$+ \int_{15}^{20} \left((x-21)*(x-32) - \frac{4514}{75}\right)^2 * \left(\frac{2}{25}\right) dx$$

$$+ \int_{20}^{31} \left((x-21)*(x-32) - \frac{4514}{75}\right)^2 * \left(-\frac{2}{275}x + \frac{62}{275}\right) dx$$

$$= \frac{340654223}{93750} + \frac{2747039}{9375} + \frac{729612037}{281250} = \frac{916992938}{140625}$$

$$= 6520.838670(2)$$