Сергеева Д.К. РК6-56Б

Задача 5.1

Требуется найти численное решение одной из представленных задач Коши с помощью

метода Эйлера, используя шаг h = 0.5:

2) $\frac{dy}{dt} = \alpha y\left(1 - \frac{y}{\beta}\right), y(0) = 0, t \in [0; 1]$

Дополнительно требуется найти точное решение соответствующей задачи Коши, продемонстрировать графики численного и точного решений на одной координатной плоскости, а также представить абсолютные погрешности вычислений на каждом рассматриваемом шаге.

Найдём численное решение задачи Коши с помощью метода Эйлера.

Для моей задачи: $\alpha = 0.5$, $\beta = \frac{1}{3}$. Тогда:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y\left(1 - \frac{y}{\beta}\right) = \frac{1}{2}y(1 - 3y), \text{ где } y(0) = 0,\ t \in [0; 1].$$

Обобщенная формулировка метода Эйлера для систем ОДУ 1 порядка:

$$w_0 = y(t_0),$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i; w_i),$$

где $t_i = a + ih$, $i = 1, \dots, m$; $h = \frac{b-a}{m} = t_{i+1} - t_i$.

Распишем для нашего условия с учетом, что $h = \frac{1}{2}$:

$$w_0 = y(t_0) = y(0) = 0,$$

$$w_1 = w_0 + hf(t_0; w_0) = 0 + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 0 * (1 - 3 * 0) = 0,$$

$$w_2 = w_1 + hf(t_1; w_1) = 0 + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * 0 * (1 - 3 * 0) = 0.$$

Найдём точное решение задачи Коши.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}y(1 - 3y)$$

$$\frac{dy}{y(1 - 3y)} = \frac{dt}{2}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \int \frac{dt}{2}$$

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \frac{1}{2}\int dt$$

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \frac{t}{2}$$

Вычислим левую часть. Разложим интеграл:

$$\int \frac{dy}{y(1-3y)} = \int -\frac{dy}{y(3y-1)} = -\int \left(\frac{3}{3y-1} - \frac{1}{y}\right) dy$$
$$= -(\int \frac{3}{3y-1} dy - \int \frac{dy}{y})$$

Заменим $u = 3y - 1$, $\frac{du}{dy} = 3$, $dy = \frac{du}{3}$. Тогда:

$$-\left(\int \frac{3}{u}\frac{du}{3} - \int \frac{dy}{y}\right) = -\left(\int \frac{du}{u} - \ln(|y|)\right) = -(\ln(|u|) - \ln(|y|))$$
$$= -\ln(|u|) + \ln(|y|) = \ln(|y|) - \ln(|3y-1|) = \ln\,(\left|\frac{y}{3y-1}\right|)$$

Получаем:

$$\ln\left(\left|\frac{y}{3y-1}\right|\right) = \frac{t}{2} + \mathrm{C}$$

Возведём уравнение в степень: $e^{f_1} = e^{f_2}$, при этом применим свойство: $e^{\ln(a)} = a$. Тогда:

$$e^{\ln\left(\left|\frac{y}{3y-1}\right|\right)} = e^{\frac{t}{2}+C}$$

$$\left|\frac{y}{3y-1}\right| = e^{\frac{t}{2}+C}$$

Т.к. правая часть всегда положительна, раскрываем модуль:

$$\frac{y}{3y-1} = e^{\frac{t}{2}+C}$$

$$1 = C * e^{\frac{t}{2}} * \left(3 - \frac{1}{y}\right)$$

$$1 = 3 * C * e^{\frac{t}{2}} - \frac{C * e^{\frac{t}{2}}}{y}$$

$$y = \frac{C * e^{\frac{t}{2}}}{3 * C * e^{\frac{t}{2}} - 1}$$

$$y = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{3e^{\frac{t}{2}} - C}$$

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9C * e^{\frac{t}{2}} + 3}$$

$$C = 0$$

Итоговое выражение для $y(t)$:

$$y = 0$$

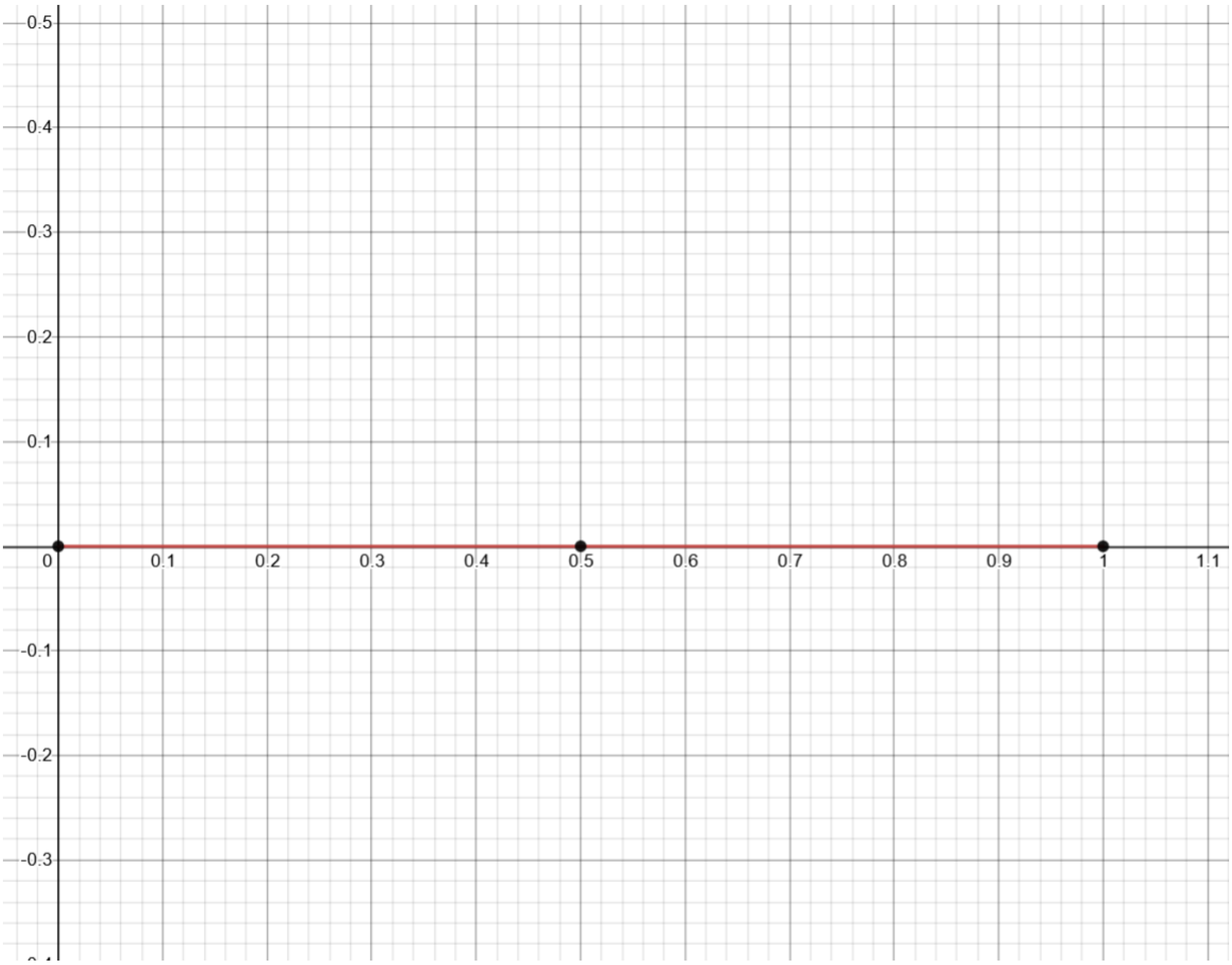
Тогда абсолютная погрешность для всех случаев равна 0.

График:

1 $y = 0 \{0 \le x \le 1\}$

2

x_1	y_1
0	0
0.5	0
1	0



0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
-0.1
-0.2
-0.3