Математическим маятником называют тело небольших размеров, подвешенное на тонкой нерастяжимой нити, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела. В положении равновесия, когда маятник висит по отвесу, сила тяжести $m\vec{g}$ уравновешивается силой натяжения нити $\vec{F}_{упр}$. При отклонении маятника из положения равновесия на некоторый угол φ появляется касательная составляющая силы тяжести $F_\tau = -mg \sin \varphi$ (рис. 2.3.1). Знак «минус» в этой формуле означает, что касательная составляющая направлена в сторону, противоположную отклонению маятника.

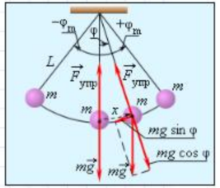


Рисунок 2.3.1.
Математический маятник. φ – угловое отклонение маятника от положения равновесия, $x = l\varphi$ – смещение маятника по дуге

Если обозначить через x линейное смещение маятника от положения равновесия по дуге окружности радиуса l, то его угловое смещение будет равно $\varphi = x / l$. Второй закон Ньютона, записанный для проекций векторов ускорения и силы на направление касательной, дает:

$$ma_\tau = F_\tau = -mg \sin \frac{x}{l}.$$

Это соотношение показывает, что математический маятник представляет собой сложную **нелинейную** систему, так как сила, стремящаяся вернуть маятник в положение равновесия, пропорциональна не смещению x, а $\sin \frac{x}{l}$.

Только в случае *малых колебаний*, когда приближенно $\sin \frac{x}{l}$ можно заменить на $\frac{x}{l}$, математический маятник является гармоническим осциллятором, т. е. системой, способной совершать гармонические колебания. Практически такое приближение справедливо для углов порядка 15–20°; при этом величина $\sin \frac{x}{l}$ отличается от $\frac{x}{l}$ не более чем на 2 %. **Колебания маятника при больших амплитудах не являются гармоническими.**

Для малых колебаний математического маятника второй закон Ньютона записывается в виде

$$\boxed{ma_\tau = -m\frac{g}{l}x.}$$

Таким образом, тангенциальное ускорение a_τ маятника пропорционально его смещению x, взятому с обратным знаком. Это как раз то условие, при котором система является гармоническим осциллятором. По общему правилу для всех систем, способных совершать свободные гармонические колебания, модуль коэффициента пропорциональности между ускорением и смещением из положения равновесия равен квадрату круговой частоты:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.}$$

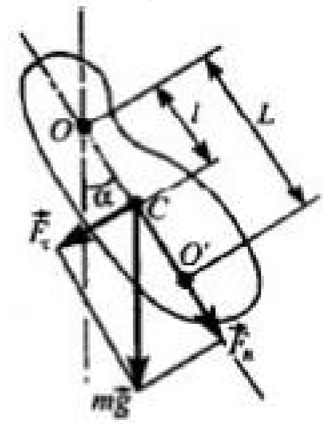
Эта формула выражает *собственную частоту малых колебаний математического маятника*.

Следовательно,

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.}$$

11. Физический маятник.

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс тела.



Если физический маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол α, то момент возвращающей силы

$$M = J\beta = J\ddot{\alpha}$$

С другой стороны, при малых углах

$$M = F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha$$

где J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O,

l – расстояние между точкой подвеса и центром масс C маятника,

$F_\tau = -mg\sin\alpha$ — возвращающая сила (со знаком минус, поскольку она всегда направленная противоположно направлению увеличения α).

Следовательно: $J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$, или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0$$

Таким образом, при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания $\alpha = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ с циклической частотой и периодом:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

где длина $L = \dfrac{J}{ml}$ — называется приведенной длиной физического маятника.

Приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, который имеет такой же период колебаний, что и данный физический маятник.

Точка O' на продолжении прямой OC, отстоящая от оси подвеса на расстоянии приведенной длины L, называется ***центром качаний*** физического маятника.

Математический маятник можно представить как *частный (предельный) случай физического маятника*, вся масса которого сосредоточена в его центре масс. При этом $J = ml^2$, следовательно $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.