

**Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана**

А.С. Гусев

ДЕСЯТЬ ЛЕКЦИЙ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

**Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н.Э. Баумана**

2019

Оглавление

Лекция 1. Основные понятия и задачи сопротивления материалов	3
Лекция 2. Растяжение и сжатие стержней.....	7
Лекция 3. Механические характеристики материалов	12
Лекция 4. Расчеты на прочность и жесткость стержня на растяжение и сжатие	16
Лекция 5. Расчеты на устойчивость при сдвиге.....	19
Лекция 6. Кручение круглых стержней	25
Лекция 7. Прямой чистый изгиб балок.....	29
Лекция 8. Геометрические характеристики плоских сечений	33
Лекция 9. Кручение некруглых стержней.....	37
Лекция 10. Расчеты на устойчивость	40

Лекция 1. Основные понятия и задачи сопротивления материалов

Сопротивление материалов – это учебная дисциплина втузов, в которой изучаются основы инженерных методов расчета прочности, жесткости и устойчивости элементов конструкций. Под элементом конструкции понимается любая деталь машины, устройства или сооружения, которая рассматривается без учета особенностей изготовления, условий работы, качества поверхности и других подобных факторов, и в которой на первый план ставится ее геометрическая форма и вид нагружения. Влияние других факторов на прочность реальных деталей может оказаться решающим, однако учет этих факторов при проектировании и расчете рассматриваются в специальных курсах по конструированию и технологии изготовления конструкций.

Под прочностью понимается способность элементов конструкции не разрушаться под воздействием приложенных нагрузок. Под жесткостью – способность сохранять при этом свои размеры и форму. Под устойчивостью – способность сохранять первоначальную форму равновесия.

Сопротивление материалов строится на ряде допущений (гипотез) о свойствах материалов и на ряде упрощающих принципов, положенных в основу расчетов. Так, принимается гипотеза о сплошности материала, по которой считается, что материал не имеет пустот и других внутренних дефектов. По другой гипотезе (гипотезе изотропности) считается, что свойства материала во всех направлениях одинаковы. В расчетах применяются три основных принципа: принцип независимости действия сил, принцип Сен-Венана и принцип первоначальных размеров. По первому из этих принципов считается, что результат суммарного действия нескольких нагрузок равен сумме результатов действия каждой нагрузки в отдельности. Согласно второму принципу локальные особенности деформирования материала в местах приложения нагрузок быстро затухают по мере удаления от этих мест. Согласно третьему принципу считается, что реакция связей и внутренние усилия в элементах конструкций могут быть достаточно точно определены без учета изменения размеров и форм конструкции при нагружении.

Объектами изучения в сопротивлении материалов являются стержни (балки), оболочки и пластины. Стержень (балка) – элемент инженерной конструкции, у которого один размер (длина) значительно превышает два других. Форма сечений стержней может быть различной. На рис. 1.1а показаны сечения в виде квадрата, круга, двутавра, швеллера и тавра. Возможны различные комбинации этих элементарных сечений. Оболочка – элемент инженерной конструкции, у которого один размер (толщина) значительно меньше двух других (рис. 1.1, б). Пластина – оболочка, у которой кривизна равна нулю (рис. 1.1, в).

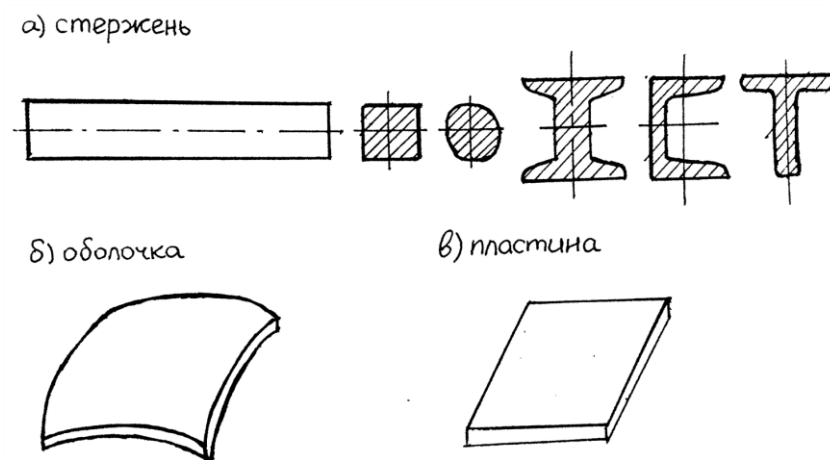


Рис. 1.1

Основным понятием в сопротивлении материалов является понятие о напряжениях. Оно вводится следующим образом. Рассмотрим некоторый элемент конструкции, находящийся под воздействием внешних нагрузок (рис. 1.2, а). Мысленно отделим сечением I-I одну его часть от другой (рис. 1.2, б). Для равновесия каждой из этих частей необходимо, чтобы в сечении возникли такие силы, которые были бы эквивалентны приложенным к ним внешним нагрузкам. При этом в каждой элементарной площадке ΔA сечения возникает элементарная сила ΔF .

Величина

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

называется полным напряжением в точке. Это напряжение измеряется в паскалях – Па или мегапаскалях – МПа:

$$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}, \quad \text{МПа} = 10^6 \text{ Па}$$

Полное напряжение в точке (см. точку А на рис. 1.2в) можно разложить на две составляющие: нормальное напряжение σ и касательное τ .

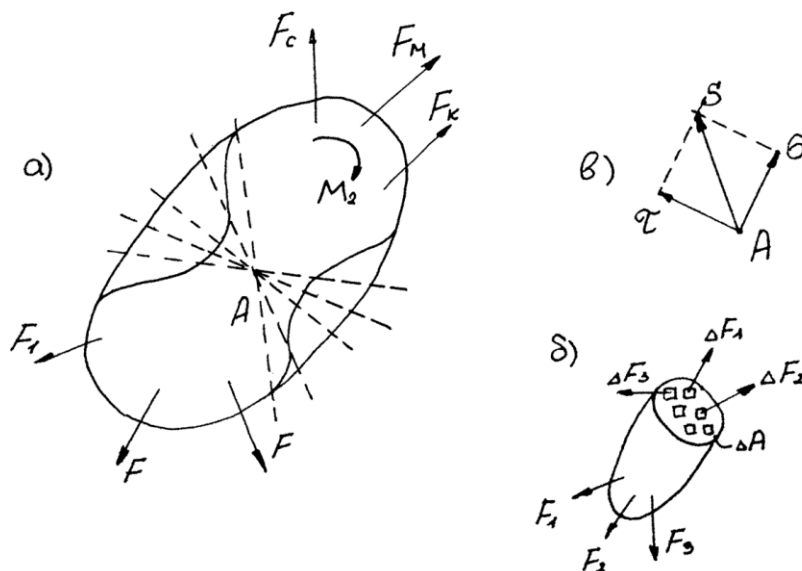


Рис. 1.2

Важнейшим понятием в сопротивлении материалов является понятие о внутренних силовых факторах. Оно вводится с помощью метода сечений, при котором элемент конструкции мысленно рассекается на две части. В каждой из частей все внутренние силы приводятся к одной вектор-силе \vec{F} , приложенной в центре тяжести сечения, и вектор-моменту \vec{M} (рис. 1.3, а). Поместим в центр тяжести сечения систему координат $\{x, y, z\}$ и разложим \vec{F} и \vec{M} на составляющие: $F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z$ (рис. 1.3, б). Эти составляющие называются внутренними силовыми факторами.

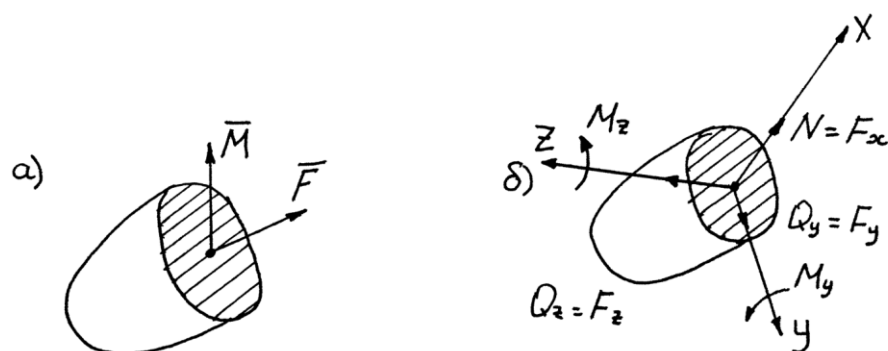


Рис. 1.3

Сила $F_x = N$ называется нормальной силой (силой растяжения или сжатия). Силы $F_y = Q_y$ и $F_z = Q_z$ – силами сдвига. Момент $M_x = M_{кр}$ – крутящим моментом. Моменты M_y и M_z – изгибающими моментами.

Для определения внутренних силовых факторов достаточно составить и решить шесть уравнений равновесия для любой из отсеченных частей элемента конструкции.

Нагружение стержня называется простым, если в его сечениях возникает только один силовой фактор. В противном случае нагружение называется сложным.

Простыми видами нагружения являются: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение и изгиб. К сложным нагружениям относятся: изгиб с растяжением, изгиб с кручением и т.п.

Для примера рассмотрим определение силовых факторов в сечениях витков пружины растяжения с углом подъема винтовой линии α , показанной на рис. 1.4.

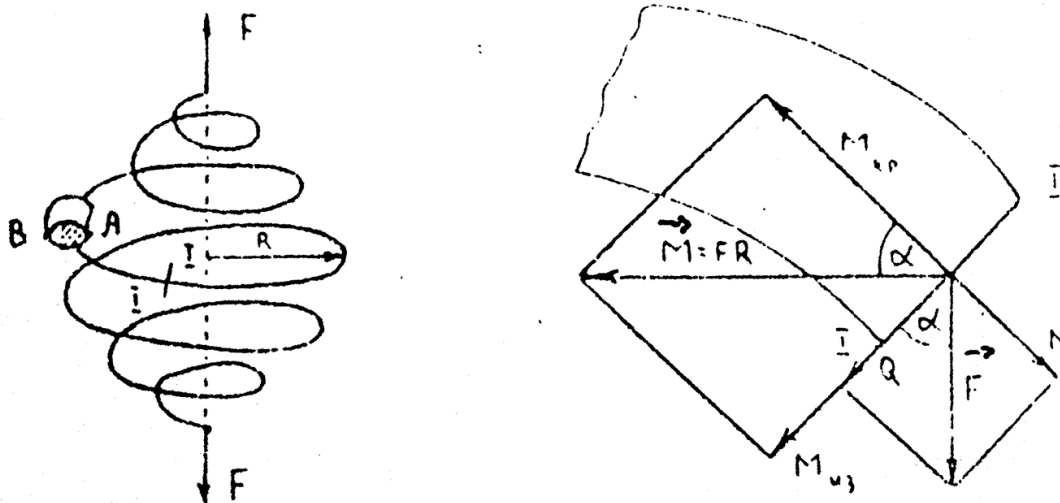


Рис. 1.4

Разложив вектор-силу \vec{F} и вектор-момент \vec{M} в сечении пружины на составляющие, получим:

$$\begin{aligned} Q &= F \cos \alpha \\ N &= F \sin \alpha \\ M_{кр} &= M \cos \alpha = FR \cos \alpha \\ M_{из} &= FR \sin \alpha \end{aligned}$$

где R – радиус пружины, соответствующий рассматриваемому сечению.

Контрольные задачи

Задача 1. По концам разреза кольца в его плоскости приложены две силы F (рис. 1.5). Определить внутренние силовые факторы в сечениях кольца.

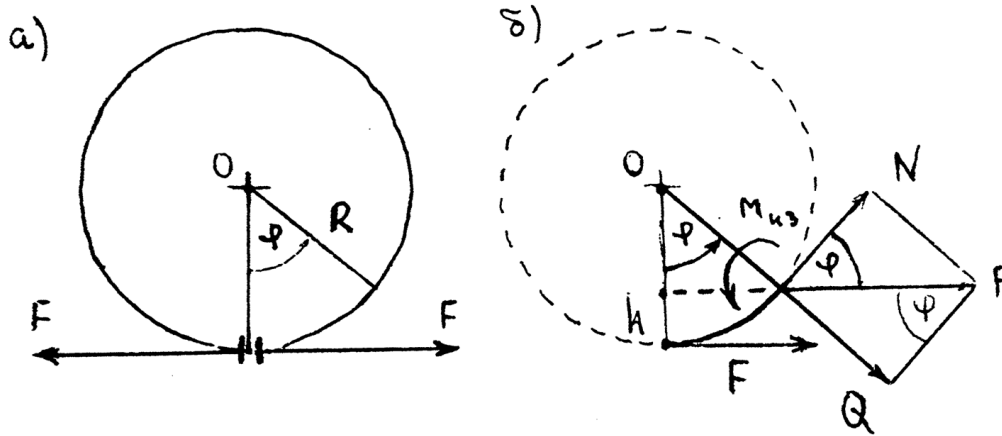


Рис. 1.5

Решение. Из условий равновесия части кольца, показанного на рис. 1.5, б, следует:

$$Q = F \sin \varphi$$

$$N = -F \cos \varphi \quad \min N = -F, \text{ при } \varphi = 0$$

$$M_{из} = Fh = FR(1 - \cos \varphi)$$

$$\max Q = F, \text{ при } \varphi = \pi/2$$

$$\max N = F, \text{ при } \varphi = \pi$$

$$\max M_{из} = 2FR, \text{ при } \varphi = \pi$$

Задача 2. По концам разреза кольца перпендикулярно его плоскости приложены две силы F (рис. 1.6, а). Определить внутренние силовые факторы в сечениях кольца.

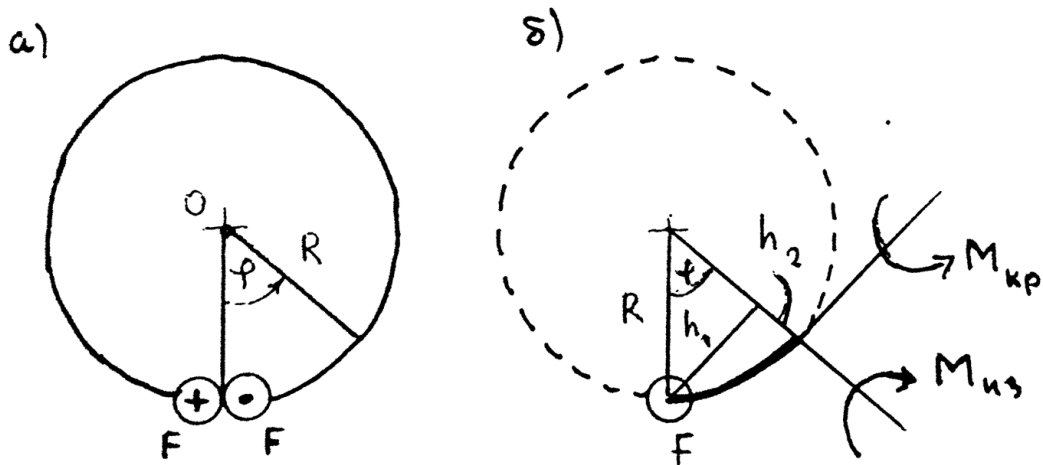


Рис. 1.6.

Решение. Из условий равновесия части кольца, показанного на рис. 1.6, б, следует:

$$M_{из} = Fh_1 = FR \sin \varphi$$

$$M_{кр} = Fh_2 = FR(1 - \cos \varphi)$$

$$\max M_{из} = FR, \text{ при } \varphi = \pi/2$$

$$\max M_{кр} = 2FR, \text{ при } \varphi = \pi$$

Лекция 2. Растяжение и сжатие стержней

1. Анализ напряженного состояния

Рассмотрим растянутый силами F стержень с переменной площадью сечений A , показанный на рис.2.1, а. Сечениями (1-1) и (2-2) разделим его на три части, каждая из которых находится в равновесии под действием внешних сил F и внутренних усилий с интенсивностями (напряжениями)

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} > \sigma_2 = \frac{F}{A_2} \text{ при } A_2 > A_1$$

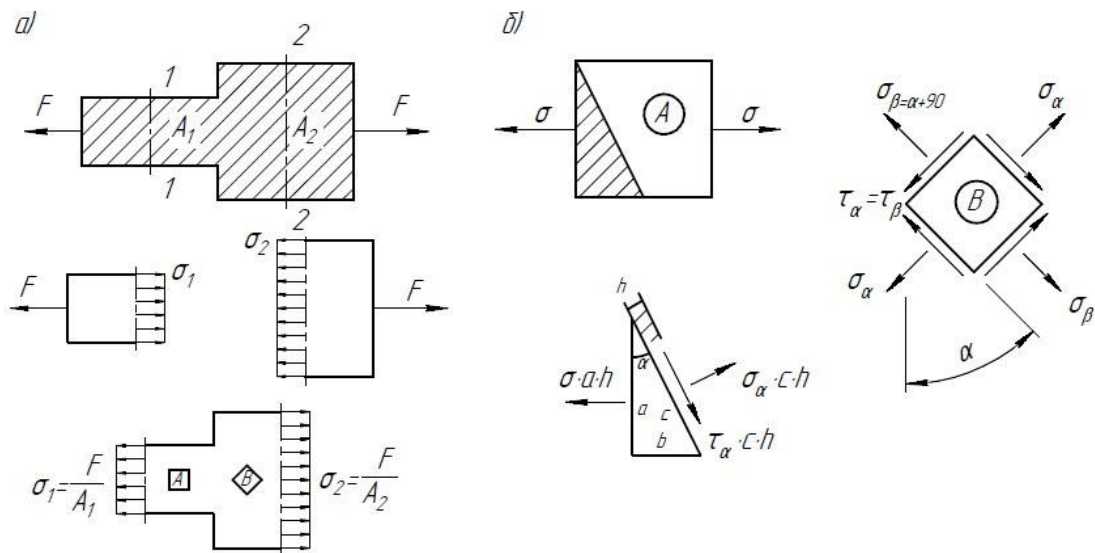


Рис.2.1 Анализ напряженного состояния

Напряженное состояние элементарных разно расположенных квадратов А и В показаны на рис.2.1, б. Определим напряжения σ_α , $\sigma_\beta = \alpha + 90^\circ$, τ_α и $\tau_\beta = \alpha + 90^\circ$ по заданному напряжению σ и углу α .

Элементарная треугольная призма со сторонами a , b , c и толщиной h находится в равновесии под действием сил $\sigma a h$, $\sigma_\alpha c h$, $\tau_\alpha c h$. Из условий ее равновесия получаем формулы для определения напряжений σ_α , σ_β , τ_α , τ_β :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cdot \cos^2 \alpha ; \sigma_\beta = \sigma \cdot \sin^2 \alpha \\ \tau_\alpha &= \tau_\beta = \frac{1}{2} \sigma \cdot \sin 2\alpha, \tau_{\max} = \tau_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma \end{aligned}$$

2. Законы Гука и Пуассона

Экспериментально установлено, что при растяжении стержня происходит изменение его линейных l , h , b размеров и объема V , т.е. стержень деформируется, схематично так, как это показано на рис.2.2.

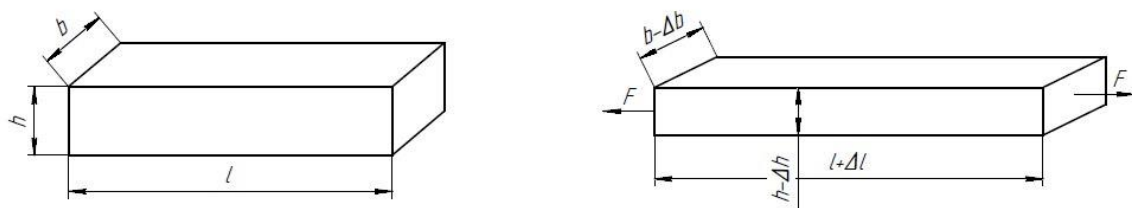


Рис.2.2. Деформации стержня при растяжении

Величины Δl , Δh , Δb называются абсолютными линейными деформациями, ΔV - абсолютной объемной деформацией.

Величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \varepsilon_{\pi} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b}; \varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V}$$

называются относительной продольной деформацией, относительной поперечной деформацией и относительной объемной деформацией, соответственно.

Экспериментально установлено, что при малых деформациях имеют место следующие зависимости.

Закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Закон Пуассона:

$$\varepsilon_{\pi} = -\mu \varepsilon = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}$$

Величина E называется модулем упругости, величина μ - коэффициентом Пуассона. Легко вычислить, что $\varepsilon_v \approx \varepsilon(1 - 2\mu)$.

Для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,28$.

Для меди $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,33$.

Для алюминия $E = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,35$.

При нагревании стержня длиной l на t градусов происходит его удлинение на величину

$$\Delta l_t = \alpha l t,$$

где α - коэффициент линейного расширения.

Соответственно изменяются размеры стержня h , b и его объем V .

Для стали $\alpha_{ст} = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Для меди $\alpha_{м} = 1,67 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Для алюминия $\alpha_{а} = 2,3 \cdot 10^{-5}$ 1/град.

Коэффициент объемного расширения $\beta = 3 \cdot \alpha$.

3. Определение перемещений и потенциальной энергии деформации в растянутом стержне

Рассмотрим зажатый слева стержень с переменной площадью сечения A и переменным модулем упругости E , показанный на рис.2.3.

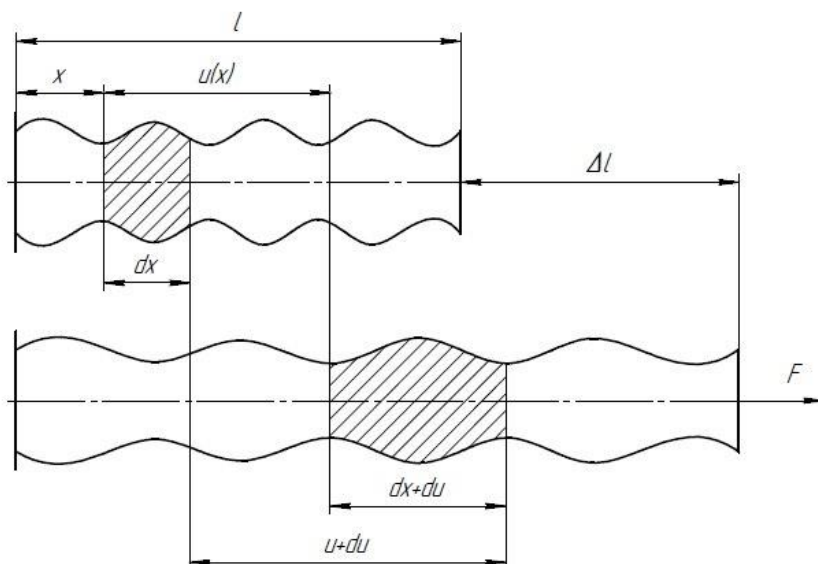


Рис. 2.3 К определению перемещений

Искомое перемещение сечения с координатой x обозначим $u(x)$. Перемещение сечения с координатой $x + dx$ будет $u + du$. Из рисунка и закона Гука видно, что деформацию элемента dx можно определить как

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{EA}$$

Отсюда находим:

$$u(x) = \int_0^x \frac{F}{EA} dx; u(0) = 0; u(l) = \Delta l = \int_0^l \frac{F}{EA} dx$$

Потенциальная энергия деформации $d\Pi$ в элементе длиной dx будет определяться по формуле

$$d\Pi = \frac{1}{2} F du = \frac{F^2 dx}{2EA}$$

а энергии на длинах x и l будут

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{F^2 dx}{2EA} \quad \Pi(l) = \int_0^l \frac{F^2 dx}{2EA}$$

Если подынтегральные функции в приведенных формулах есть константы, то имеем:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}; \quad \Pi = \frac{F^2 l}{2EA}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \Pi(x)}{\partial F} = u(x); \quad \frac{\partial \Pi(x)}{\partial u} = F(x)$$

Первая формула выражает теорему Кастилиано о перемещениях, а вторая - теорему Лагранжа о силах.

В заключение отметим, что приведенные выше формулы относятся к идеальным бездефектным стержням, не имеющим концентраторов напряжений, таких как отверстия и резкие изменения формы, показанные на рис. 2.4.

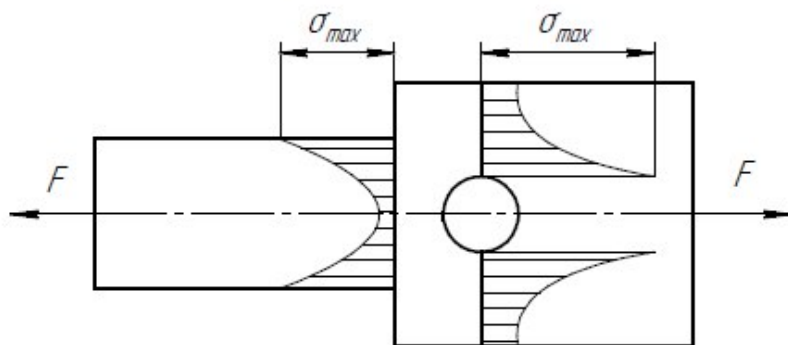


Рис. 2.4. К понятию о концентрации напряжений

Экспериментально установлено, что в этих местах происходит местное увеличение (концентрация) напряжений, которые могут превышать расчетные значения в несколько раз.

Контрольные задачи

Задача 1. В растянутом стержне найти расположение линии (угол α), вдоль которой деформация $\varepsilon_\alpha = 0$, а напряжение $\sigma_\alpha \neq 0$ и найти расположение линии (угол β), вдоль которой напряжение $\sigma_\beta = 0$, а деформация $\varepsilon_\beta \neq 0$ (рис. 2.5).

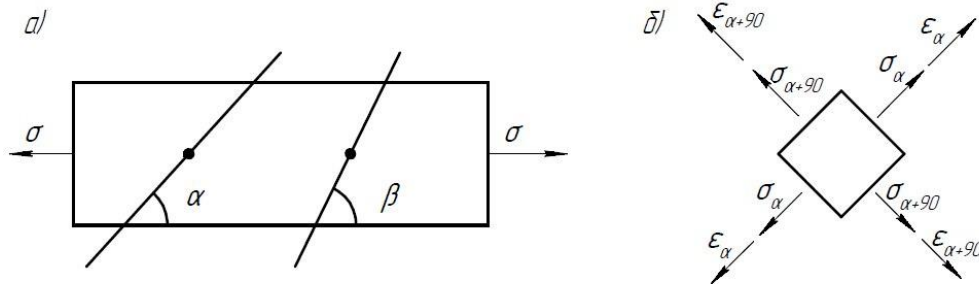


Рис. 2.5 К решению задачи 1

В соответствии с изображенным на рис. 2.5, б напряженно-деформированным состоянием точек стержня и законами Гука и Пуассона имеем равенства:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E} \sigma_\alpha - \mu \frac{\sigma_{\alpha+90}}{E} = \frac{\sigma}{E} \cos^2 \alpha - \mu \frac{\sigma}{E} \sin^2 \alpha = 0.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \mu \text{ и при } \mu = 0,3 \text{ имеем } \alpha = 61^\circ.$$

При этом $\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha \approx 0,23\sigma \neq 0$.

На линии, определяемой углом β , имеем

$$\sigma_\beta = \sigma \cos^2 \beta \text{ и при } \beta = 90^\circ \text{ имеем } \sigma_\beta = 0.$$

Деформация

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{E} \sigma_\beta - \mu \frac{\sigma_{\beta+90}}{E} = \frac{\sigma}{E} \cos^2 \beta - \mu \frac{\sigma}{E} \sin^2 \beta = -\mu \frac{\sigma}{E} \neq 0.$$

Таким образом, в вертикальном направлении $\sigma = 0$, а $\varepsilon \neq 0$. Вдоль линии с углом наклона $\alpha = 61^\circ$ имеем $\varepsilon = 0$, а $\sigma \neq 0$.

Задача 2. При растяжении стержня энергия деформации в единице объема определяется

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$

При этом происходит изменение объема стержня и изменение его формы, так что

$$\Pi = \Pi_V + \Pi_\Phi,$$

Где Π_V - потенциальная энергия изменения объема, Π_Φ - потенциальная энергия изменения формы.

Требуется составить формулы для определения Π_V и Π_Φ .

Решение.

Напряженное состояние элементарного объема стержня состоит из напряженного состояния, приводящего к изменению объема V и к изменению формы Φ (Рис.2.6).

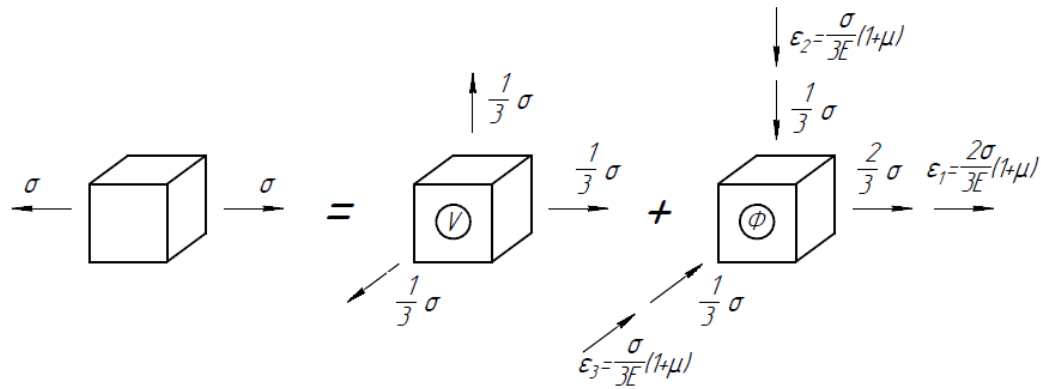


Рис.2.6 К решению задачи 2

В объёме Φ объёмная деформация $\epsilon_V = (1 - 2\mu) \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0$, так что здесь происходит только изменение формы с относительными деформациями

$$\epsilon_1 = \frac{2\sigma}{3E} \cdot (1 + \mu), \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = \frac{\sigma}{3E} \cdot (1 + \mu).$$

Тогда потенциальная энергия формы будет:

$$\Pi_\Phi = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 \sigma_i \epsilon_i = \frac{\sigma^2}{3E} \cdot (1 + \mu)$$

Потенциальная энергия изменения объема:

$$\Pi_V = \Pi - \Pi_\Phi = \frac{\sigma^2}{6E} \cdot (1 - 2\mu)$$

Лекция 3. Механические характеристики материалов

Механические характеристики материалов определяются при испытании образцов на растяжение и сжатие. При этом используются специальные испытательные машины, позволяющие одновременно фиксировать циклические нагрузки и соответствующие им деформации образца. После пересчета опытных данных получают зависимость $\sigma=f(\sigma)$ все из которых показаны на рис.3.1. Диаграмма I относится к малопрочному пластичному материалу, а диаграмма II – к высокопрочному материалу.

Отметим характерные зоны на диаграмме растяжения пластического материала. Зона ОА – зона упругости. Здесь выполняется закон Гука: напряжения пропорциональны деформациям. Если в некоторой точке этой зоны прекратить нагружения, а затем уменьшить нагрузку, то разгружение образца будет происходить по той же линии ОА. При нулевой нагрузке все размеры образца возвратятся к первоначальным. Зона АВ – зона общей текучести. Эта зона характеризуется тем, что увеличение деформации происходит почти без увеличения нагрузки. Если остановить нагружение в некоторой точке этой зоны, а затем уменьшить нагрузку, то разгружение будет происходить по линии, параллельной линии упругости ОА. После полного снятия нагрузки образец останется удлиненным на величину остаточной пластической деформации.

Зона ВС – зона упрочнения. Она характеризуется тем, что увеличение деформации сопровождается возрастанием напряжений. Если прекратить нагружение в некоторой точке этой зоны и затем уменьшить нагрузку, то разгружение будет так же происходить по линии, параллельной линии упругости ОА. Остаточная пластическая деформация обозначена ϵ . При повторном погружении образца возрастание нагрузки и образца будет происходить по линии разгружения. В конце стадии упрочнения (в точке С) на образце появляется местное сужение («шейка») – место будущего разрушения. Зона СД – зона местной текучести и разрушения. Удлинение образца в этой зоне носит локальный характер. Оно происходит в основной области «шейки». Точка Д соответствует моменту полного разрушения образца.

В зоне упругости выполняется закон Гука. Модуль упругости первого рода E определяется как тангенс угла наклона линии упругости к оси ϵ :

$$E = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (3.1)$$

Отметим основные механические характеристики материалов, определяемые по диаграмме растяжения.

σ_n – предел пропорциональности – наибольшее напряжение, при котором еще сохраняется линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

σ_t – предел текучести – напряжение, при котором рост деформации происходит без заметного увеличения нагрузки.

(если материалы не обладают ярко выраженной зоной текучести (диаграмма II), то за условный предел текучести $\sigma_{0.2}$ (или $\sigma_{0.5}$) принимают напряжение, при котором остаточная пластическая деформация $\epsilon_a=0,2\%$ (или, соответственно, $0,5\%$);

ϵ_B – предел прочности – напряжение, соответствующее максимальной нагрузке.

Описанные выше характеристики прочности относятся к материалам, не имеющим дефектов. В реальных материалах можно обнаружить трещины, пустоты, раковины, волосовины и другие дефекты. Наибольшую опасность представляют дефекты типа трещин, рост которых при циклическом нагружении приводит к полному разрушению.

Характеристики трещиностойкости материала можно определить на образцах с трещинами. При этом к испытаниям подготавливают образцы с различными длинами трещин. При растяжении таких образцов в момент разрушения фиксируются предельные напряжения (рис.4.2). Различным длинам трещин соответствуют различные предельные напряжения.

По опытным данным строится зависимость предельного напряжения от длины трещин (рис.4.3). Опытные данные могут быть предоставлены в виде зависимости:

$$\sigma\sqrt{l} = const$$

(3.2)

Отсюда следует, что для детали с трещинами сами по себе уровень напряжений и длина трещины не определяют ее прочность. При уменьшении уровня напряжений можно допустить удлинение трещины и при уменьшении длины трещины – повышение уровня напряжений.

Для теоретического обоснования зависимости (3.2) заметим, что появление трещины приводит к образованию свободных от напряжений поверхностей и к соответствующей разгруженной зоне вокруг трещины. На появление новых поверхностей необходима затрата энергии, которая равна высвобождающейся энергии деформации из разгруженной зоны. Полагая, что (рис.3.4) зона разгрузки вокруг трещины имеет эллиптическую форму с площадью πl^2 , получаем следующее уравнение, выражающее баланс энергии:

$$\frac{\pi l^2 \sigma^3}{2E} = 2l\gamma, \quad (3.3)$$

Где γ – удельная поверхностная энергия.

Из соотношения (4.3) получаем равенство:

$$\sigma\sqrt{l} = \frac{2\sqrt{E\gamma}}{\sqrt{\pi}} = K_{IC}, \quad (3.4)$$

Из которого следует соотношение (4.2). Константа в уравнениях (3.2) и (3.4) называется вязкостью разрушения и обозначается через K_{IC} .

Условие трещиностойкости выражается неравенством

$$\sigma\sqrt{l} \leq K_{IC}$$

Для стали Ст.3 имеем $K_{IC} = 30 \text{ МПа}/\sqrt{\text{м}}$, т.е., например, для трещины длиной 0,01м допустимый уровень напряжений составляет 300МПа.

Исходя из формулы (3.4) можно оценить прочность идеального бездефектного металла, если за длину трещины принять расстояние между атомами $l = 1 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 1 \text{ ангстрем}$.

Для стали примем $\gamma = 0,01 \text{ Н/см}$, $E = 2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2$. В этом случае получаем $\sigma_B = 2\sqrt{\frac{E\gamma}{\pi l}} \approx 50 \cdot 10^3 \text{ МПа}$, что намного больше реального предела прочности.

Экспериментально установлено, что начальная деформация ε_0 нагруженного стержня изменяется со временем ориентировочно так, как это показано на рис.3.5. Это явление в технике называется ползучестью (от англ. creep), интенсивность которой с повышением температуры возрастает.

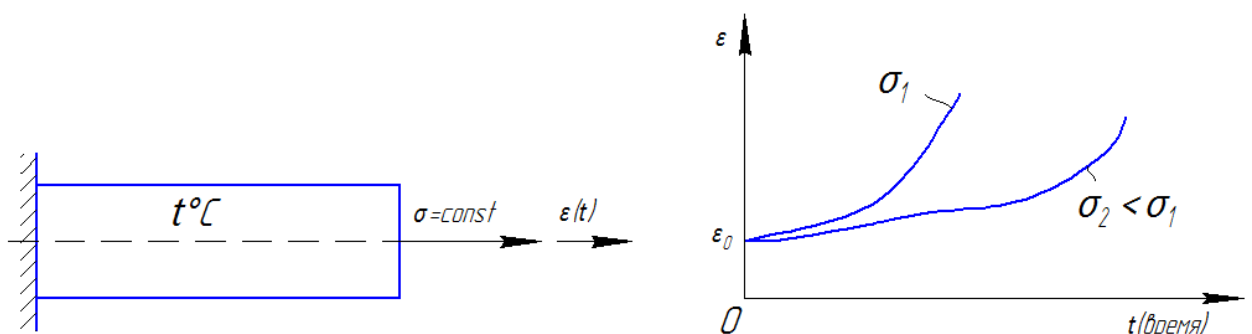


Рис 3.5 К понятию ползучести металлов

Экспериментально так же установлено, что начальное напряжение σ_0 в нагруженном стержне со временем изменяется ориентировочно так, как это показано на рис.3.6. Это явление в технике называется релаксацией напряжений (от англ. Relax), интенсивность которого зависит от температуры.

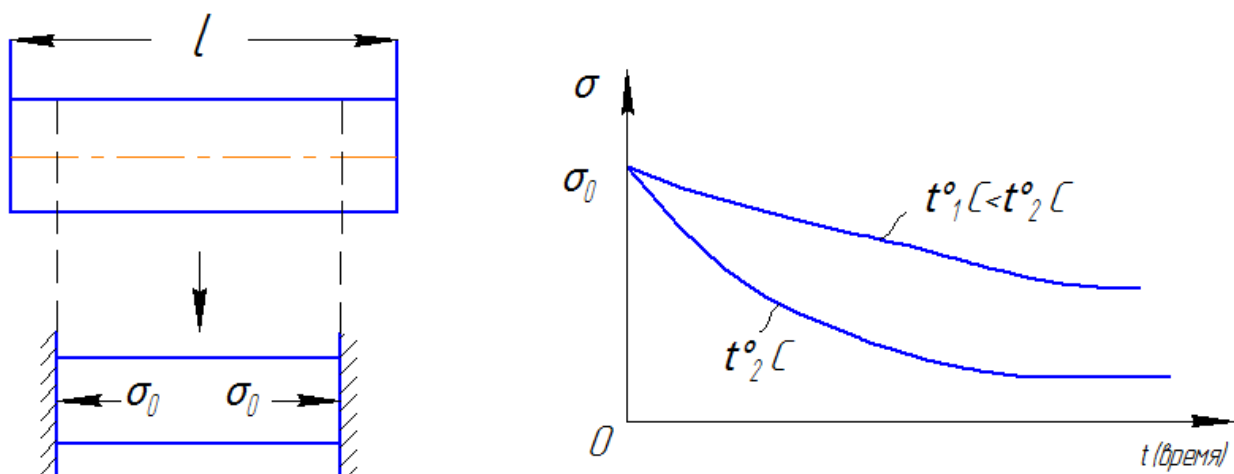


Рис.3.6 К понятию о реакции напряжений

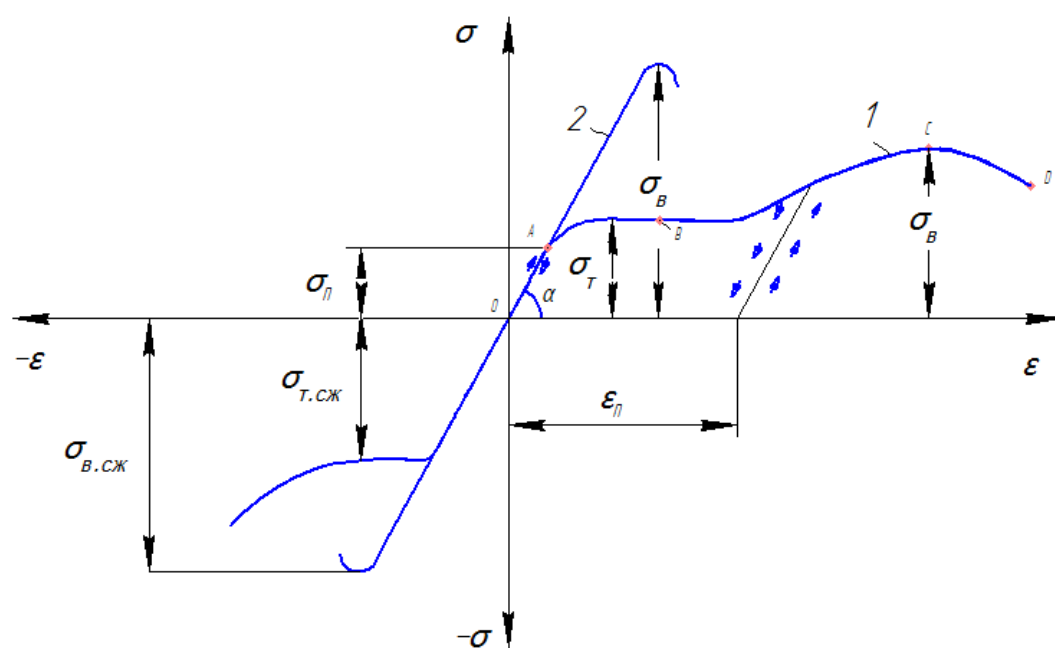


Рис.3.1

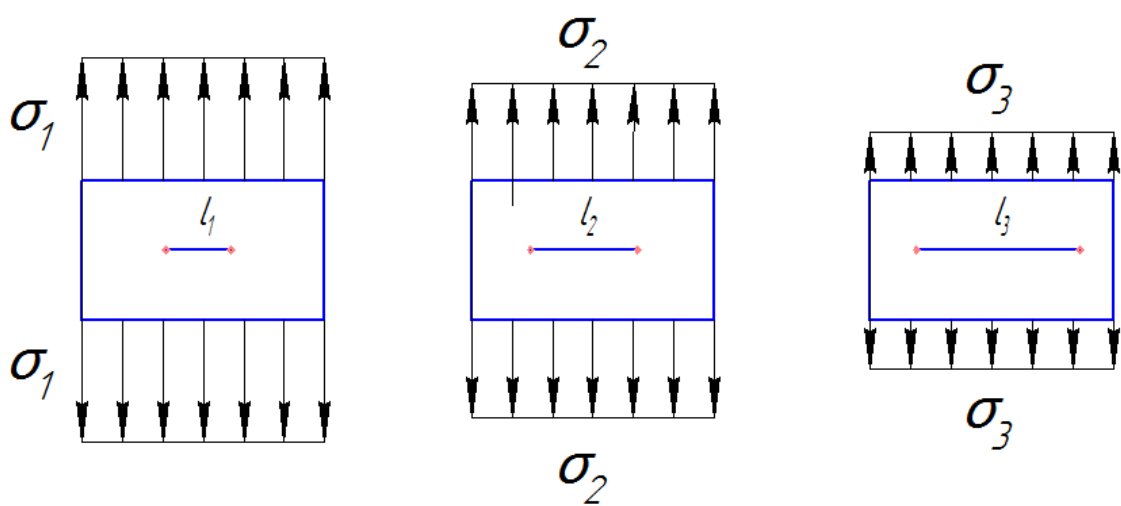


Рис.3.2

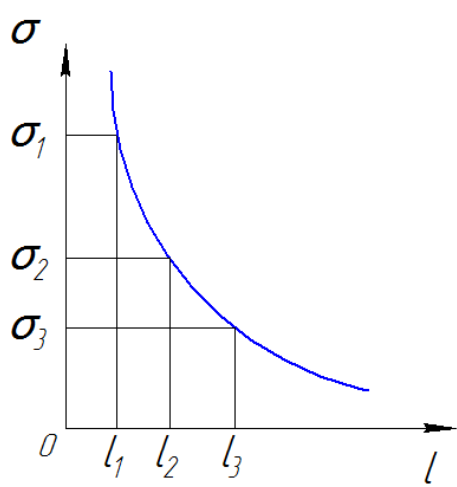


Рис.3.3

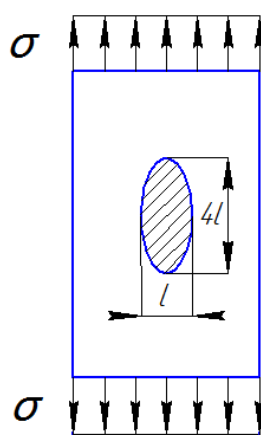


Рис3.4

Лекция 4. Расчеты на прочность и жесткость стержня на растяжение и сжатие

В расчетах на прочность и жесткость стержней используется схематизированная диаграмма растяжения-сжатия, показанная на рис 4.1

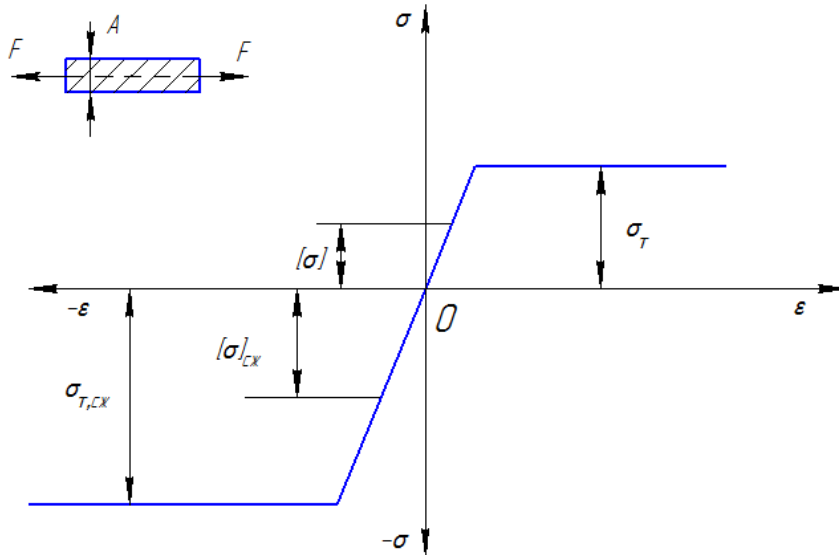


Рис.4.1. Схематизированная диаграмма растяжения сжатия

Здесь $\sigma_T = \sigma_{T,СК}$ - пределы текучести при растяжении и сжатии.

Условие ненаступления в растянутом стержне пластических деформаций имеет вид:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_T$$

Определяемая из этого условия предельная для стержня сила

$$F_{пр} = \sigma_T A$$

Допускаемое для растянутого стержня напряжение определяется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$$

, где $n_T = 1,5 - 3,0$ – коэффициент запаса прочности.

Из условия прочности

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$$

При заданных F и $[\sigma]$ определяется необходимая площадь поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{F}{[\sigma]}$$

При заданных $[\sigma]$ и A определяется допускаемая для стержня нагрузка

$$[F] \geq A[\sigma]$$

Для расчетов жесткости используется условие жесткости

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \leq [\Delta l] = \frac{\Delta l_{пр}}{n_{ж}},$$

Где $\Delta l_{пр}$ - предельное удлинение стержня, $n_{ж}$ – коэффициент запаса жесткости, Δl - допускаемое удлинение стержня.

Для примера рассмотрим стержневую систему, показанную на рис.4.2

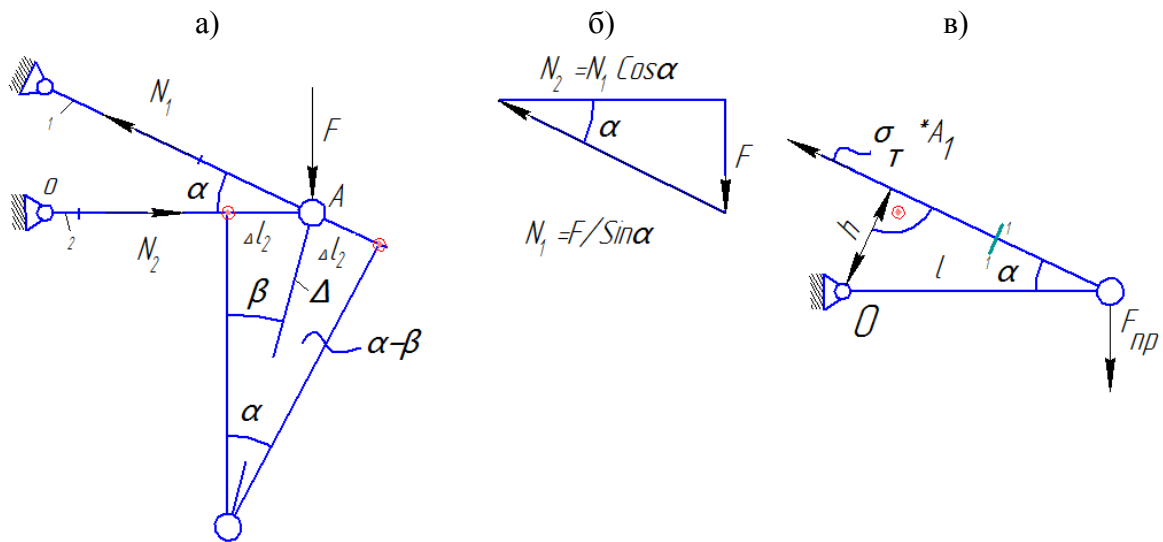


Рис.4.2. К расчету стержневой системы

При заданной силе F , допускаемом напряжении $[\sigma]$ и пределе текучести σ_T , требуется определить площадь поперечных сечений стержней A_1 и A_2 и предельное(разрушающее) для системы $F_{пр}$.

Необходимое для выполнения условной прочности площади сечений стержней будет определяться по формулам:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]},$$

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]}$$

Где $N_1 = F / \sin \alpha$, $N_2 = F \cot \beta$

Определены из условия равновесия узла A .

Удлинение стержней будет:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

A полное перемещение Δ узла A и его направление, определяемое углом β , будут определяться из решения следующей системы уравнений

$$\sin \beta = \frac{\Delta l_2}{\Delta}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\Delta l_1}{\Delta}$$

На рис.4.2б показано предельное состояние системы при разрушении первого стержня, в котором предельное усилие равно $\sigma_T A_1$

Из условия равновесия системы

$$\sum M_0 = \sigma_T A h - F_{пр} l = 0$$

Находим предельную для нее нагрузку

$$F_{пр} = \sigma_T A \sin \alpha$$

Контрольная задача

Для статически неопределимой стержневой системы, показанной на рис.4.3, требуется составить систему уравнений для решения задачи о ее прочности и определить предельную нагрузку $F_{\text{пр}}$, при которой эта система будет разгружена.

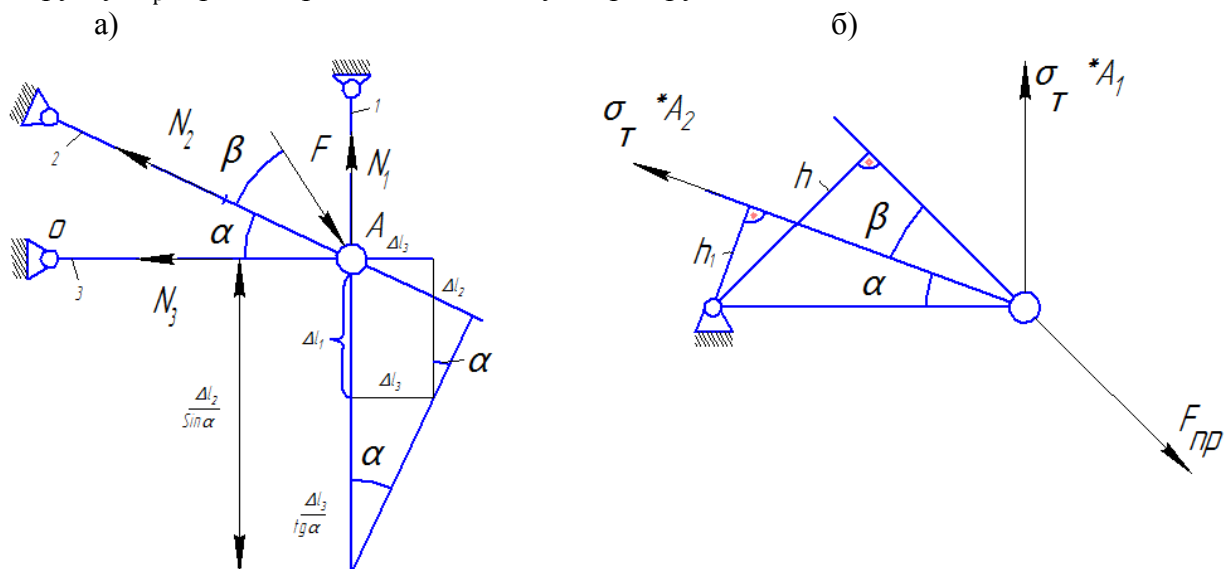


Рис.4.3 К расчету статически неопределимой системы

В узле А имеем три неизвестные силы N_1, N_2, N_3 для определения которых необходимо составить три уравнения. Два из них – это равенства нулю сумм проекций всех сил в любых двух направлениях.

Третье уравнение составляется из условия совместной деформации трех стержней, состоящее в том, что деформации этих стержней $\Delta l_1, \Delta l_2$ и Δl_3 связаны между собой так, как это показано на рис.4.3, а описывается соотношением

$$\Delta l_1 = \frac{\Delta l_3}{t g \alpha} = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha}$$

, где $\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3}$$

После определения усилий N_1, N_2, N_3 определяется напряжения в стержнях $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}, \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}, \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3}$ и составляются соответствующие условия прочности.

При определении силы $F_{\text{пр}}$ рассмотрим один из вариантов возможного разрушения системы когда разрушились стержни 1 и 2 и в их сечениях возникли предельные для них $\sigma_T A_1$ и $\sigma_T A_2$ (рис.4.3б)

Из условия равновесия системы

$$\sum M_0 = \sigma_T A_1 l + \sigma_T A_2 h_1 - F_{np} h = 0$$

Определяется сила $F_{\text{пр}}$.

Лекция 5. Расчеты на устойчивость при сдвиге

Устойчивость - способность конструкций сохранять при нагружении первоначальную форму равновесия. Нагрузки, при которых появляются новые формы равновесия, называются критическими и обозначаются как $F_{кр}$. Определение этих нагрузок является основной задачей расчета конструкций на устойчивость.

Для примера рассмотрим жесткий стержень, упруго закрепленный в заделке и нагруженный силой F (рис.5.1,а).

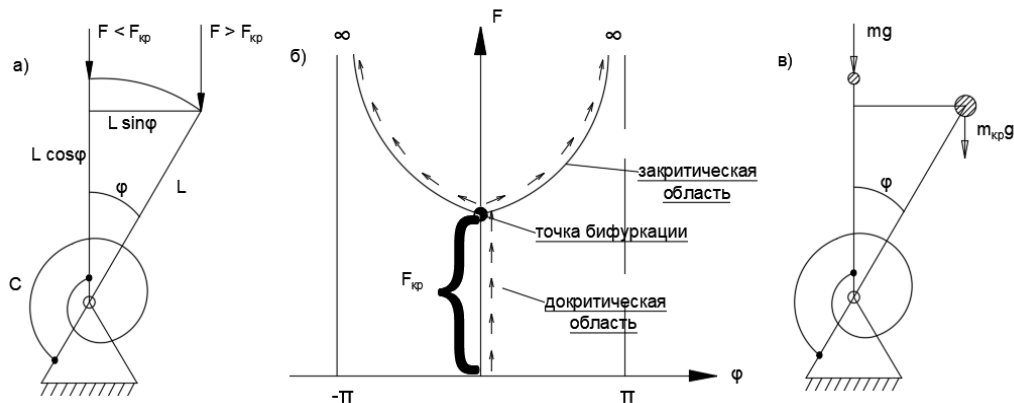


Рис.5.1 К понятию об устойчивости конструкций

При малых нагрузках стержень сохраняет первоначальную вертикальную форму равновесия, а при критической нагрузке $F_{кр}$ он поворачивается и появляется новая наклонная форма равновесия. Для определения этой нагрузки можно использовать различные методы.

1. Метод уравнений равновесия.

Условие равновесия стержня в момент потери устойчивости можно записать как

$$F_{кр1} \sin F_{кр1} = c,$$

где c - жёсткость пружины.

При малом $\varphi \neq 0$ (т.е. при потере устойчивости) получаем

$$F_{кр} = c\varphi$$

При $F > F_{кр}$ имеем

$$F = F_{кр} \sin \varphi$$

График этой функции представлен на рис. 5.1, б. При $F < F_{кр}$ имеем докритическое нагружение стержня, при $F > F_{кр}$ - закритическое его нагружение, при котором угол наклона стержня возрастает. Точка перехода в новое положение равновесия называется точкой бифуркации.

2. Энергетический метод

При повороте стержня сила $F_{кр}$ совершает работу, равную энергии деформации пружины. Отсюда получаем равенства:

$$F_{кр}l(1-\cos\theta) = \frac{c}{2}\theta^2$$

Отсюда следует, что $F_{кр} = cl$.

3. Динамический метод

Свободные колебания расположенной сверху массы m описывается уравнением (рис. 5.1, в)

$$J\ddot{\theta} + mgl - c\theta = 0$$

$$\text{или } \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

где квадрат частоты свободных колебаний $\omega^2 = 1/J(mgl - c)$,
 J - момент инерции массы M относительно т. О.

Из условия $\theta = 0$, т.е. из условия потери устойчивости, находим критическую массу $M_{кр}$ и соответствующую ей силу $F_{кр} = M_{кр}g = cl$

Все три метода расчета привели к одинаковым результатам по определению критических сил.

4. Устойчивость гибких стержней

Рассмотрим теперь гибкий упругий стержень длиной l и жёсткостью EJ , нагруженный силой F и показанный на рис. 5.2, а.

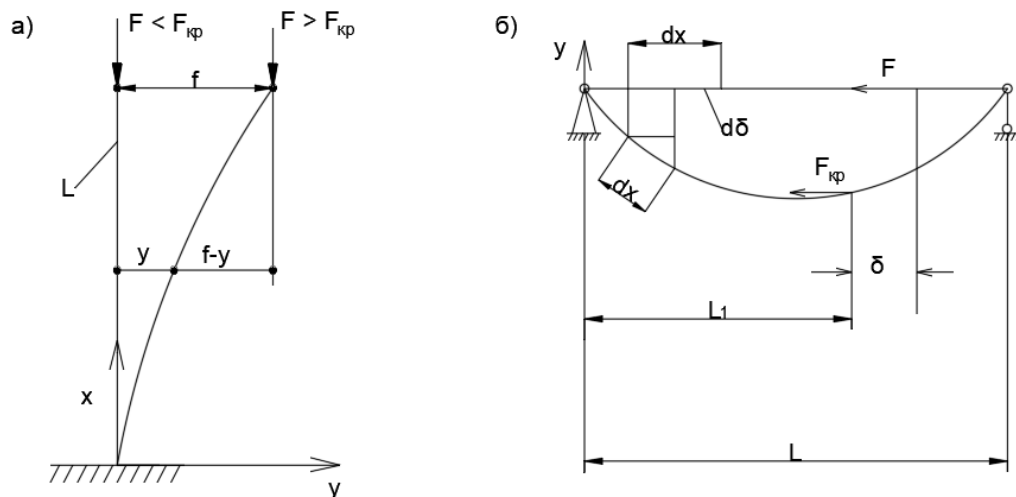


Рис.5.2. К расчету упругих стержней на устойчивость

При $F > F_{кр}$ стержень перейдет к новой форме равновесия - изгибу.
 Для момента потери устойчивости дифференциальное уравнение изгиба имеет вид
 $EJy'' = M = F_{кр} EJ$

или $y'' + K^2 y = K^2 f$, (5.1),
 где $K^2 = F_{кр} EJ$

Решение уравнения (5.1) имеет вид

$$y(x) = f(1 - \cos kx)$$

Из граничных условий: $y(0) = 0$, $y''(0) = 0$, находим: $A = 0$, $B = -f$

$$y(x) = f(1 - \cos kx)$$

Из граничного условия $y(l) = f$ находим:

$$\cos kl = 0, kl = 2(2n-1), \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$F_{кр} = 2EJ l^2 \text{ при } n=1$$

Для определения критических сил в сложных случаях нагружения стержня используется энергетический метод расчета.

Решим этим методом задачу, представленную на рис. 5.2, б. Смещение силы $F_{кр}$ при потере устойчивости обозначим как Δ . Работа этой силы будет равна потенциальной энергии изгиба стержня. Отсюда имеем равенства:

$$F_{кр} \Delta = \int_0^l M^2 dx / 2EJ \quad (5.2),$$

$$\text{где } M = EJy''; \Delta = \int_0^l (1 - \cos y'') dx = \int_0^l (1 - (1 - y'^2/2)) dx = \int_0^l y'^2 dx / 2$$

Подставив выражения для M и Δ в формулу (5.2), найдем

$$F_{кр} = \int_0^l EJ(y'')^2 dx / \int_0^l y'^2 dx \quad (5.3)$$

Если ориентировочно принять $y = \sin \pi x / l$, то при $l_1 = l_2$ получим

$$F_{кр} = 22EJ / l^2$$

Основная трудность в практическом использовании формулы (5.3) состоит в определении функции $y=f(x)$, которая в расчетах ориентировочно принимается в виде полинома

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

в котором $a_n=1$, а остальные n констант определяются из n граничных условий.

Применительно к конструкции, показанной на рисунке 5.3, граничные условия указаны над ее опорами.

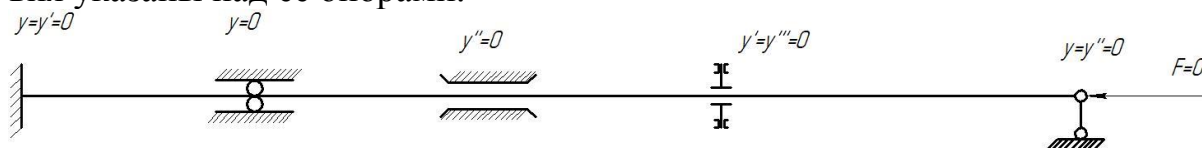
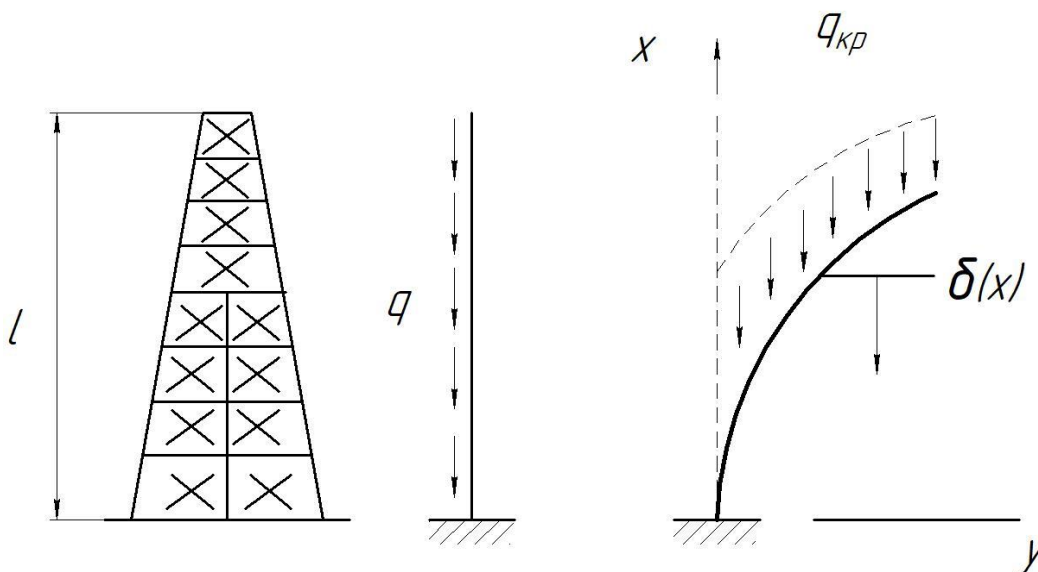


Рис. 5.3 К определению граничных условий

Контрольные задачи

Задача 1. Для высотного сооружения требуется найти критическую распределенную нагрузку $q_{кр}$, обусловленного её собственным весом.



Решение. Форму изгиба при потере устойчивости примем в виде

$$y(x)=1-\cos x/2l$$

Потенциальная энергия будет

$$\Pi=120lEJ(y'')^2dx=14EJl(2l)^4$$

проверить

Перемещение в т. с координатой x будет

$$(x)=120x(y')^2dz=14(2l(x-1\sin x/l))$$

а работа сил $q_{кр}$ будет

$$A = 0 \int q_{кр}(x) dx = 14 q_{кр} (2l)^2 (122 - 2122)$$

Из условия $A = \Pi$ находим

$$q_{кр} = EJ 21342 - 4$$

Задача 2. Упругий стержень находится между полюсами магнита. Распределенная сила притяжения к ним $q = ky$, где коэффициент, зависящий от напряженности магнитного поля. При каком k стержень изогнется, потеряет устойчивость?

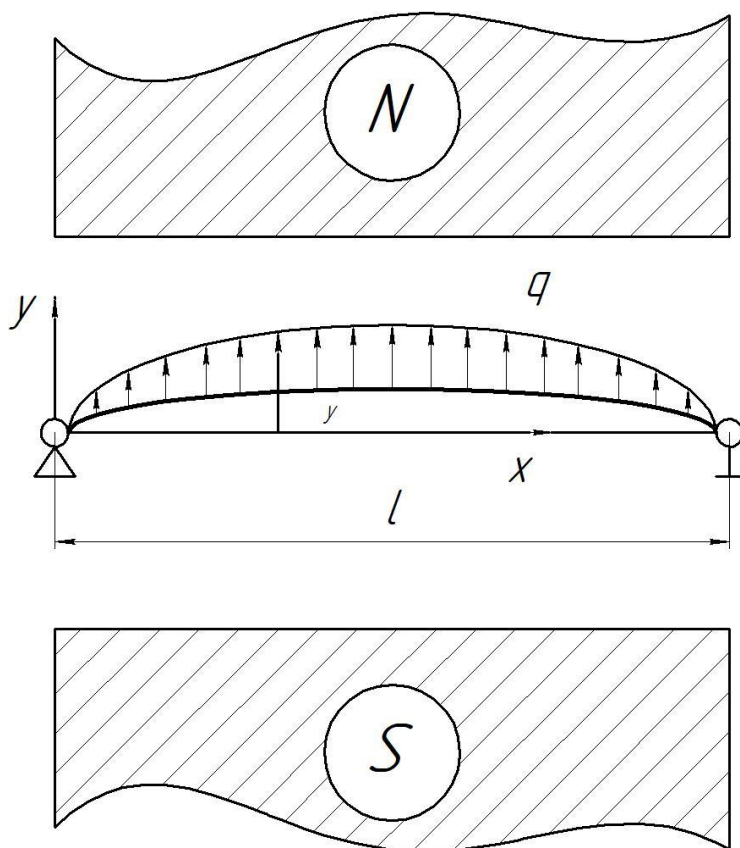


Рис. 5.5

Решение:

Дифференциальное уравнение изгиба стержня имеет вид

$$EJ y^{IV} = ky$$

$$\text{или } y^{IV} - 4y = 0, \text{ где } 4 = k/EJ$$

Можно принять

$$y = \sin x$$

При $x=0$ и $x=l$ имеем $y=0$. Отсюда следует, что $l = \pi$ и $k_{кр} = EJ 4/l^4$

Задача 3. Определить критическую скорость протекания жидкости по трубопроводу, показанном на рис. 5.6.

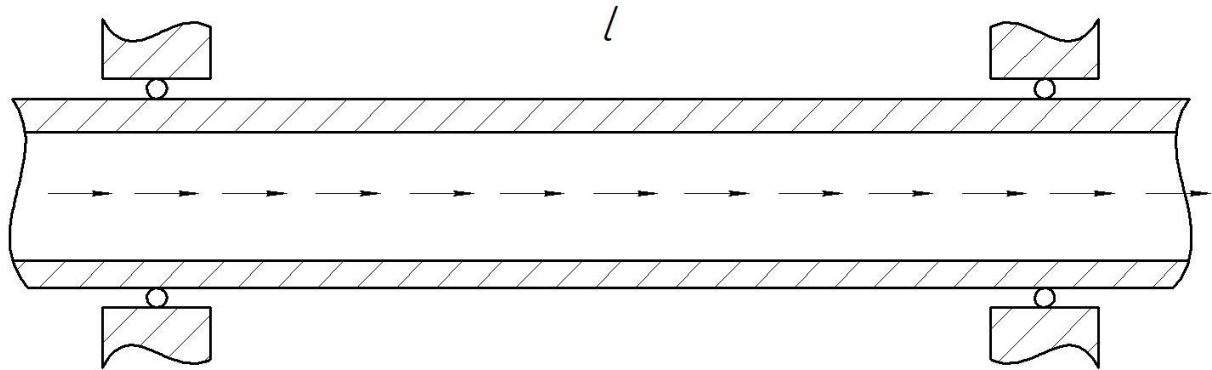


Рис. 5.6

Решение: При изгибе трубки в момент потери устойчивости возникает центробежная распределенная сила инерции

$$q = \rho v^2 y''$$

где ρ - распределенная масса трубы, v - скорость движения жидкости, R - радиус кривизны трубки в момент потери устойчивости, $y(x)$ - прогиб трубы. Дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$EI y^{IV} + \rho v^2 y'' = 0$$

или

$$z'' + 2z = 0, \text{ где } z = y'', \text{ где } 2 = \rho v^2 / EI$$

Из граничных условий: при $x=0$ $y=0$, при $x=l$ $y=0$ получаем

$$l =$$

$$v_{кр} = \sqrt{EI/\rho}$$

Лекция 6. Кручение круглых стержней

Рассмотрим круглый стержень в состоянии кручения, показанный на рис. 6.1.

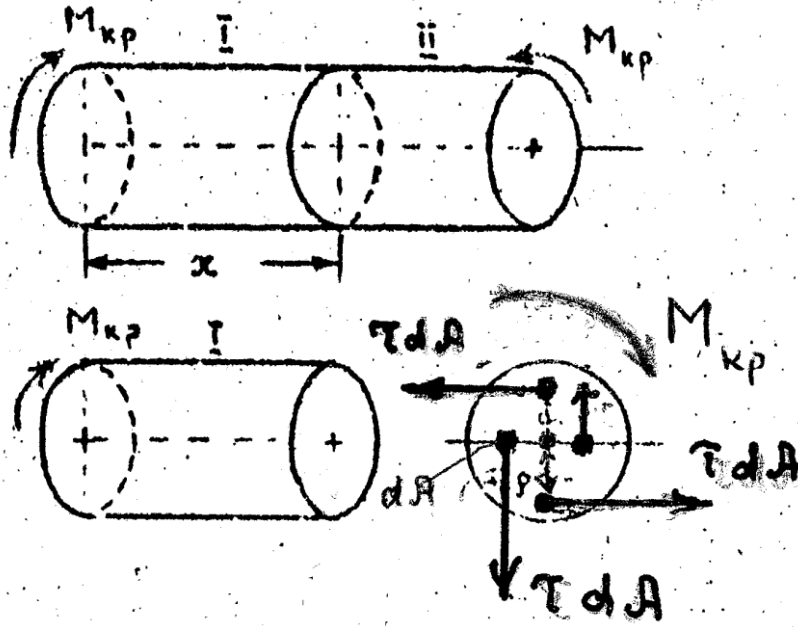


Рис 6.1

Мысленно отделим одну часть стержня от другой. Любая из этих частей находится в равновесии под воздействием момента внешних сил $M_{кр}$ и моментов внутренних сил в сечении, обусловленных касательными напряжениями τ . Из условия равновесия следует равенство:

$$M_{кр} = \int_{(A)} \tau \rho dA, \quad (6.1)$$

Рассмотрим деформацию треугольной призмы, вырезанной из стержня и показанную на рис.6.2.

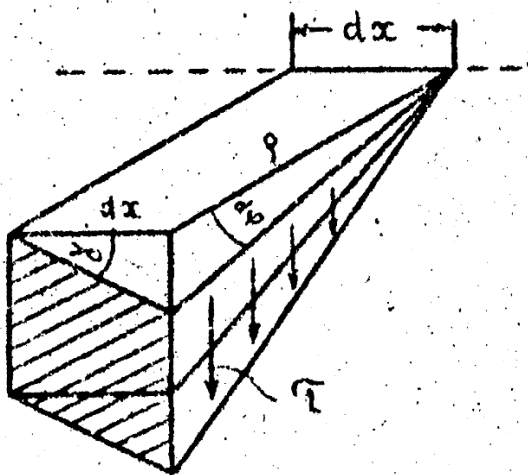


Рис 6.2.

Отметим через $d\varphi$ взаимный угол допорота двух сечений стержня, расположенных на расстоянии dx , а через γ - угол сдвига. Из рисунка видно, что выполняется следующее соотношение:

$$\gamma dx = \rho d\varphi, \quad (6.2)$$

Касательные напряжения определены по закону Гука при сдвиге:

$$\tau = \sigma \gamma = \sigma \rho \frac{d\varphi}{dx}, \quad (6.3)$$

Из уравнений (6.1) и (6.3) получаем равенства:

$$M_{кр} = \int_{(A)} \sigma \gamma \rho \, dA = GJ_{\rho} \frac{d\varphi}{dx}, \quad (6.4)$$

где величина

$$J_{\rho} = \int_{(A)} \rho^2 \, dA, \quad (6.5)$$

называется полярным моментом инерции сечения.

Для круга с радиусом r и диаметром d имеем:

$$J_{\rho} = \frac{\pi}{2} r^4 \simeq 0,1 d^4$$

Равенство (6.4) представляет собой дифференциальное уравнение кручения. Интегрируя уравнение, получаем формулу для определения угла закручивания:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} dx, \quad (6.6)$$

где l – длина стержня.

При $GJ_{\rho} = \text{const}$ получаем

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}}, \quad (6.7)$$

Подставив в формулу (6.3) соотношение (6.4), получим уравнение для расчета касательных напряжений при кручении:

$$\tau = \frac{M_{кр} \rho}{J_{\rho}}, \quad (6.8)$$

Формула (6.8) показывает, что касательные напряжения в поперечных сечениях стержня распределены по линейному закону, в центре сечения напряжения равны нулю. Максимальное напряжение получаем на поверхности стержня при $\rho = r$ (рис. 6.3а):

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}, \quad (6.9)$$

где величина

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{r} \simeq 0,2 d^3$$

называется полярным моментом сопротивления сечения.

Условия прочности и жесткости стержней при кручении имеют вид:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad \varphi = \frac{M_{кр} l}{GJ_{\rho}} \leq [\varphi],$$

где $[\tau]$ – допускаемое напряжение при кручении,

$[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания.

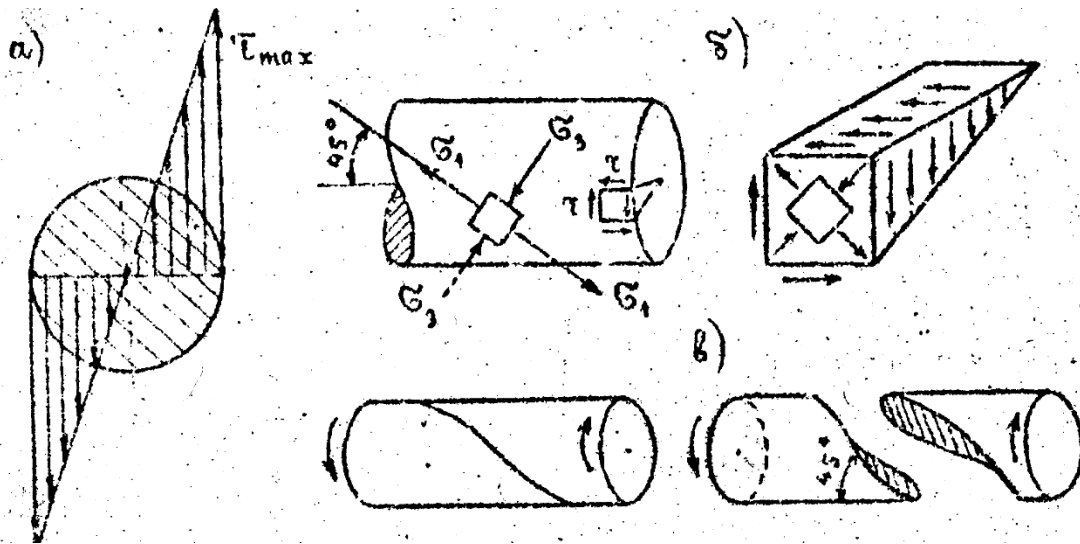


Рис 6.3

Рассмотрим элемент поверхности стержня, показанный на рис 6.3б. На его гранях действуют касательные напряжения τ . В повернутой на угол 45° площадке, как и при сдвиге, возникают только нормальные напряжения $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$. Наличие растягивающих напряжений σ_1 предопределяют характер разрушения стержней при кручении. Картина такого разрушения показала на рис. 6.3а.

Вычислим теперь потенциальную энергию закрученного стержня. Работа, совершаемая моментом $M_{кр}$ на угле поворота $d\varphi$ равна потенциальной энергии в бесконечно малом объеме стержня

$$d\Pi = \frac{1}{2} M_{кр} d\varphi = \frac{M_{кр}^2 dx}{2GJ_\rho}$$

Полная энергия в стержне длиной l

$$\Pi = \int_0^l \frac{M_{кр}^2 dx}{2GJ_\rho}$$

Контрольные задачи

Задача 1. Сравнить прочность и жесткость тонкостенных труб открытого и закрытого профиля, показанных на рис. 6.4.

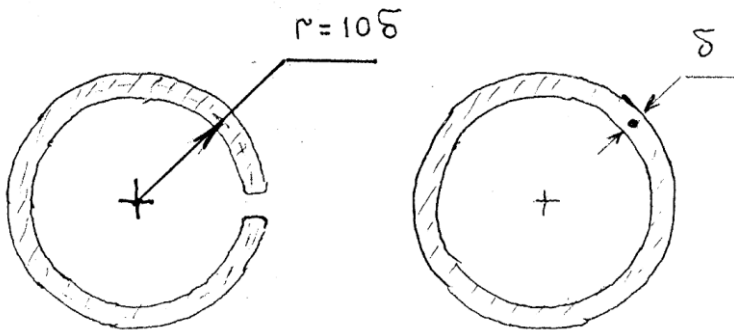


Рис 6.4.

Решение. Моменты инерции и моменты сопротивления показанных сечений определяются по формулам:

$$J_k = \frac{1}{3} 2\pi r \delta^3; \quad J_p = r^2 2\pi r \delta ;$$

$$W_k = \frac{2\pi}{3} r \delta^2; \quad W_p = 2\pi r^2 \delta ;$$

Отсюда имеем:

$$\frac{J_p}{J_k} = 3 \frac{r^2}{\delta^2} = 300; \quad \frac{W_p}{W_k} = 3 \frac{r}{\delta} = 30;$$

т.е. жесткость закрытого профиля в 300 раз, а прочность в 30 раз выше чем открытого профиля.

Задача 2. В составном стержне с жесткостями частей C_1 и C_2 , показанном на рис. 6.5, сечение 1 повернуто на угол φ , а сечение 2 затем закреплено. Внешний момент снят. Найти угол раскручивания x и возникающий момент M .

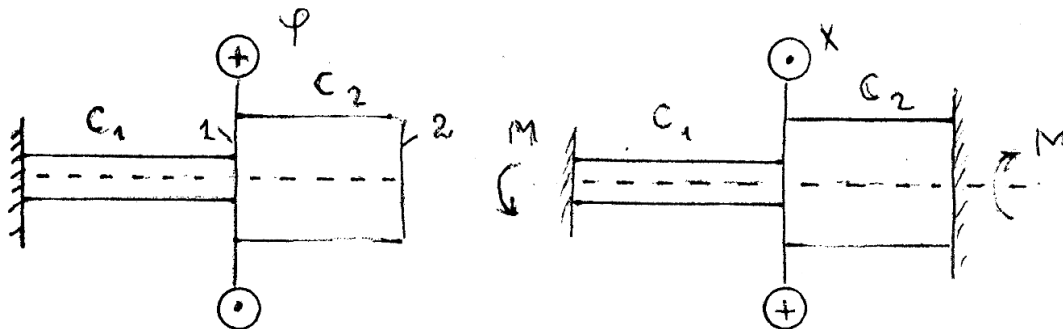


Рис 6.5.

Имеем равенства:

$$M = C_1(\varphi - x) = C_2 * x$$

Отсюда получаем:

$$x = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \varphi$$

$$M = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varphi$$

При $C_1 = C_2$ имеем $x = \frac{1}{2} \varphi$.

Лекция 7. Прямой чистый изгиб балок

Прямым чистым изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки возникает только изгибающий момент, действующий в одной из главных плоскостей инерции.

Рассмотрим балку, нагруженную так, как это показано на рис.9.1. Построим для нее эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M . Из этих эпюр видно, что на участке ВС возникают только изгибающие моменты M , а на участках АВ и CD, кроме изгибающих моментов в сечениях балки, возникают еще и поперечные силы Q . Изгиб на участке ВС называется чистым изгибом, а на участках АВ и CD рис.9.1 – поперечным изгибом.

Рассмотрим участок балки, находящийся в состоянии чистого изгиба (рис.9.2). Пусть изгибающие моменты M лежат в плоскости XOY , где оси OY и OZ – главные оси инерции сечения балки. Эти оси должны быть еще и центральными.

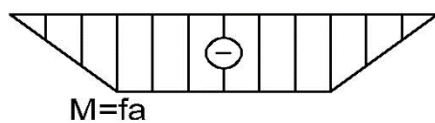
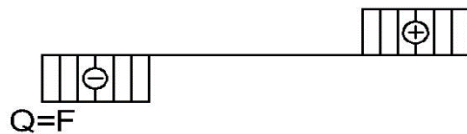


Рис.9.1

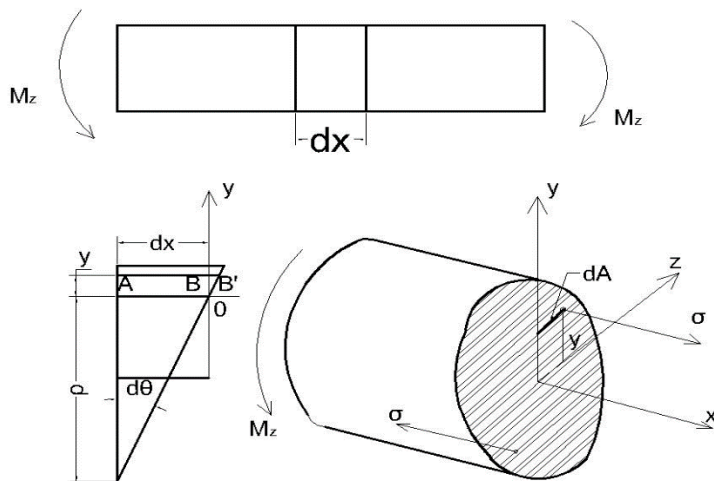


Рис.9.2

Отметим двумя бесконечно близкими сечениями 1 и 2 участок балки длиной dx . До деформации этот участок представлял собой прямоугольник. Пусть после деформации одно сечение (оставаясь плоским) поворачивается относительно другого вокруг точки O на угол $d\theta$. Тогда верхняя часть балки будет растянутой, в нижняя часть сжатой. Деформация элемента AB , находящегося от точки O на расстоянии y , будет

$$\varepsilon = \frac{BB'}{AB} = \frac{yd\theta}{dx} = \frac{y}{\rho} \quad (9.1)$$

где $\rho = \frac{dx}{d\theta}$ – радиус кривизны волокна балки, проходящего через точку O .

Деформациям ϵ соответствует напряжение

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (9.2)$$

Полученные соотношения показывают, что при изгибе напряжения и деформации в сечениях балок распределяются по линейному закону. В каждой элементарной площадке dA сечения балки возникает напряжение σ . Рассмотрим левую часть балки. Эта часть находится в равновесии под действием внешнего момента Mz и внутренних сил в сечении, обусловленных напряжениями σ . Составим уравнения равновесия и проанализируем их. Имеем:

$$\sum X = \int \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int y dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0;$$

$$\sum y = \sum Z = \sum Mx = 0;$$

$$\sum My = \int z \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int zy dA = \frac{E}{\rho} J_{zy} = 0;$$

$$\sum Mz = Mz - \int y \sigma dA = Mz - \frac{E}{\rho} \int y^2 dA = Mz - \frac{E}{\rho} J_z = 0;$$

Из первого уравнения следует, что статический момент площади сечения $S_z = 0$, т.е. система координат YOZ должна быть центральной. Из третьего уравнения следует, что центробежный момент инерции $J_{zy} = 0$, т.е. система координат YOZ является главной. Из последнего уравнения получаем формулу для определения кривизны балки при изгибе:

$$\theta \approx y \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \frac{d\theta}{dx} = y'' \quad (9.3)$$

где $y = y(x)$, $\theta = \theta(x)$ – прогиб и угол поворота сечения балки с координатой x (рис.9.3).

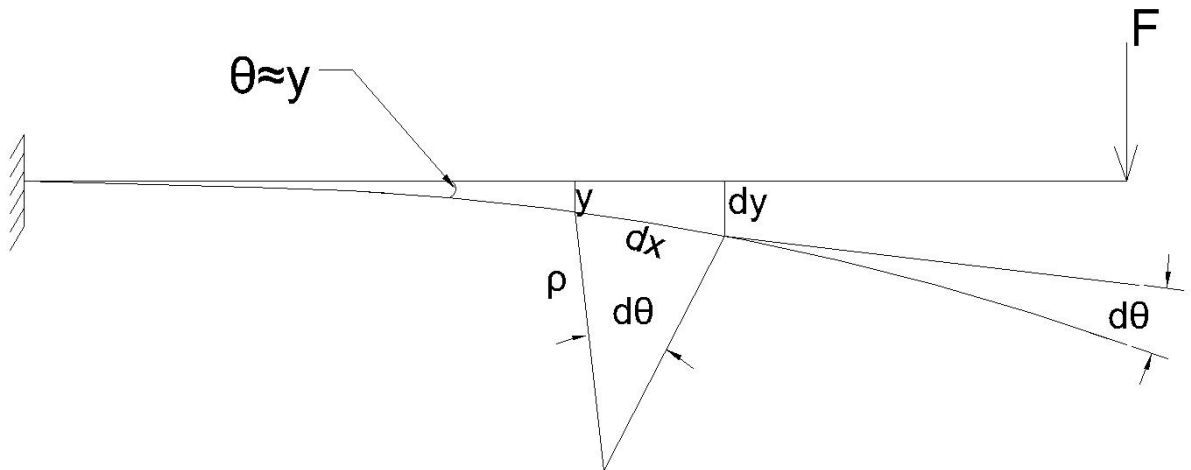


Рис.9.3

Из (9.3) следует дифференциальное уравнение упругой линии балки

$$EJy'' = M \quad (9.4)$$

Подставляя соотношение (9.3) в уравнение (9.2), получаем формулу для определения напряжений при изгибе:

$$\sigma = \frac{Mz \cdot Y}{J_z} \quad (9.5)$$

Максимальное напряжение получаем при $y = y_{\max}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{Mz}{W_z} \quad (9.6)$$

Где $W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}$ – осевой момент сопротивления сечения балки относительно оси z .

$$W_y = \frac{bh^2}{6} \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$$

Для круглого сечения

$$W = \frac{\pi r^3}{4} \approx 0,1d^3$$

Где r и d – радиус и диаметр сечения.

Условия прочности при изгибе имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \leq [\sigma] \quad (9.7)$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение при изгибе.

при относительном повороте сечений балки 1 и 2 под действием момента Mz на угол $d\theta$ (рис.9.2) совершается работа, определявшая потенциальную энергию в бесконечно малом объеме балки, равную

$$dA = d\pi = \frac{1}{2} Mz d\theta \quad (9.8)$$

Используя формулу (9.3) получаем:

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{Mz dx}{EJz} \quad (9.9)$$

Подставляя соотношение (9.9) в формулу (9.8) и суммируя энергию по всей длине балки, имеем:

$$\pi = \int_0^l \frac{Mz^2 dx}{2EJz} \quad (9.10)$$

Исчерпание возможности балки сопротивляться изгибу при увеличении изгибающего момента (см. Рис.9.4) приводит к появлению “пластического шарнира”

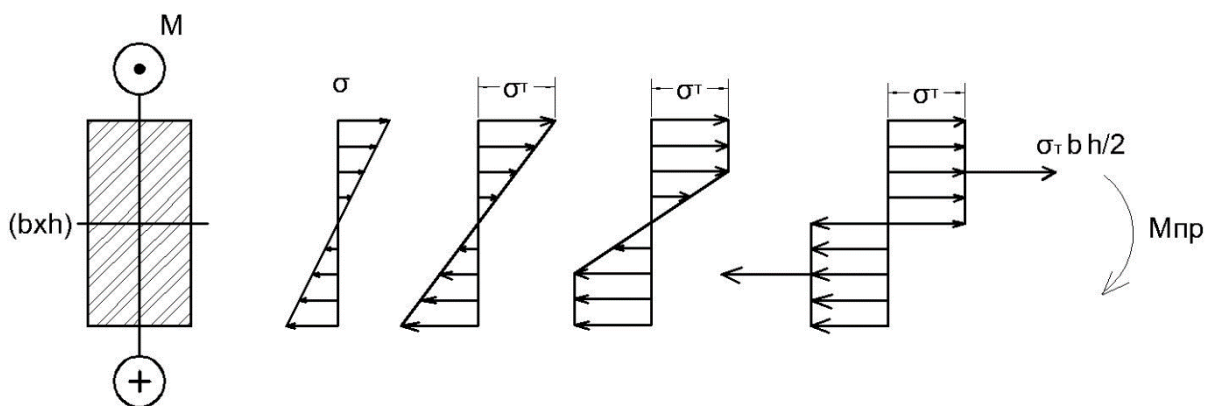


Рис.9.4

Соответствующий момент изгиба называется предельным моментом и обозначается как $M_{пр}$. Для прямоугольного сечения (bxh) имеем

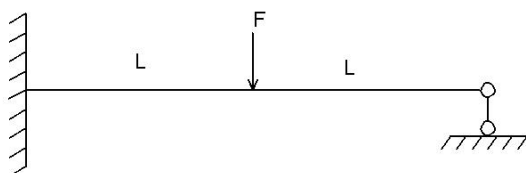
$$M_{пр} = \sigma_T \frac{bh^2}{4}$$

Где σ_T – предел текучести

Нагрузки, при которых исчерпаны возможности балок сопротивляться изгибу называются предельными нагрузками и обозначаются как $F_{пр}$.

Для примера определим предельную нагрузку для балки, показанной на рис 9.5, а.

а)



б)

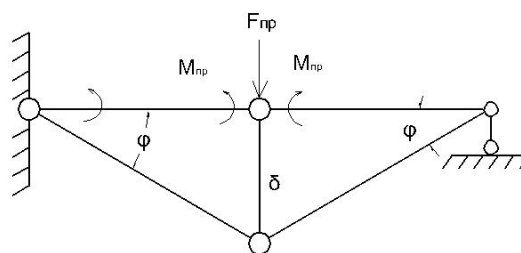


Рис.9.5

Полное разрушение балки произойдет при появлении двух пластических шарниров с тремя предельными изгибающим моментами $M_{пр}$, показанных на рис.9.5, б.

В соответствии с принципом возможных перемещений Лагранжа в состоянии предельного равновесия будем иметь равенства:

$$F_{\text{пр}}\delta = F_{\text{пр}} \cdot l \cdot \phi = 3M_{\text{пр}}\phi$$

Отсюда получаем:

$$F_{\text{пр}} = \frac{3M_{\text{пр}}}{l}$$

Лекция 8. Геометрические характеристики плоских сечений

Рассмотрим произвольной формы сечение в системе координат XOY и вычислим его интегральные характеристики (рис. 8.1):

$$S_x = \int_{(A)} y dA$$

$$J_x = \int_{(A)} y^2 dA$$

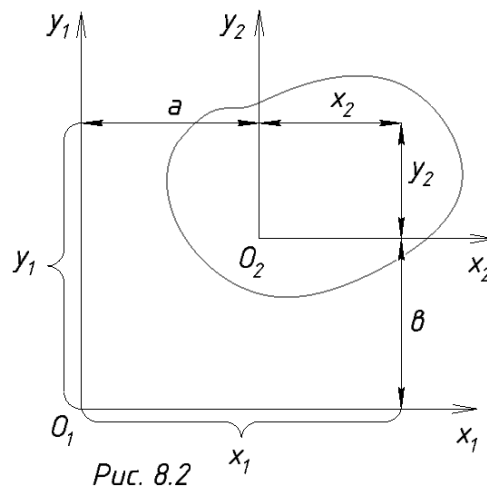
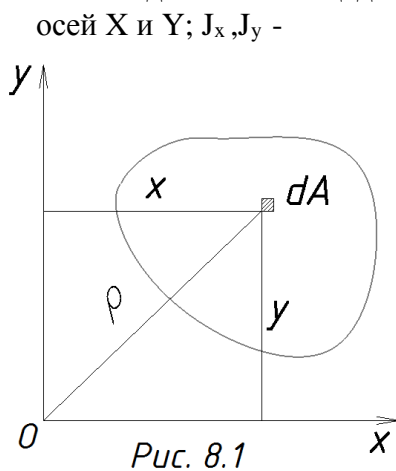
$$J_{xy} = \int_{(A)} xy dA$$

$$S_y = \int_{(A)} x dA$$

$$J_y = \int_{(A)} x^2 dA$$

$$J_p = \int_{(A)} \rho^2 dA$$

Здесь A – площадь сечения. S_x, S_y – статические моменты площади относительно осей X и Y; J_x, J_y –



осевые моменты инерции относительно осей X и Y; J_{xy} – центробежный момент инерции; J_p – полярный момент инерции.

Пусть заданы геометрические характеристики сечения относительно системы координат $X_1 O_1 Y_1$ (рис. 8.2) и требуется определить геометрические характеристики этого сечения относительно новой системы координат $X_2 O_2 Y_2$, сдвинутой относительно системы $X_1 O_1 Y_1$ на расстояние a вдоль оси X_1 и на расстояние b вдоль оси Y_1 .

Между координатами x_1, x_2, y_1, y_2 можно записать следующее соответствие:

$$x_2 = x_1 - a; \quad y_2 = y_1 - b.$$

Используя эти соотношения вычислим геометрические характеристики сечения в новой системе отсчёта:

$$S_{x_2} = \int_{(A)} y_2 dA = S_{x_1} - b * A;$$

$$S_{y_2} = S_{y_1} - a * A;$$

$$J_{x_2} = \int_{(A)} y_2^2 dA = \int_{(A)} (y_1 - b)^2 dA = J_{x_1} - 2 * b * S_{x_1} + b^2 * A;$$

$$J_{x_2 y_2} = \int_{(A)} (x_1 - a) * (y_1 - b) dA = J_{x_1 y_1} - a * S_{x_1} - b * S_{y_1} + a * b * A;$$

$$J_{y_2} = J_{y_1} - 2 * a * S_{y_1} + a^2 * A;$$

Система координат, относительно которой статические моменты площади равны 0, называется центральной. Её оси называются центральными осями инерции, а её начало –

центром (тяжести) сечения. Из полученных соотношений следует, что координаты центра сечения в системе координат $X_1 Y_1$ можно вычислить по формулам:

$$a = S_{y_1} / A; \quad b = S_{x_1} / A;$$

Если первоначальная система координат является центральной, то $S_{x1} = S_{y1} = 0$ и тогда формулы для определения моментов инерции примут вид:

$$J_{x_2} = J_{x_1} + b^2 * A; \quad J_{y_2} = J_{y_1} + a^2 * A; \quad J_{x_2 y_2} = J_{x_1 y_1} + a * b * A;$$

Моменты инерции, вычисленные в центральной системе координат, называются центральными моментами инерции сечения.

Рассмотрим теперь как изменяются моменты инерции при повороте системы координат. Пусть моменты инерции некоторого сечения заданы в системе координат XOY (рис. 6.3). Требуется определить моменты инерции этого сечения в системе координат UOV , повернутой относительно системы координат XOY на угол α против часовой стрелки.

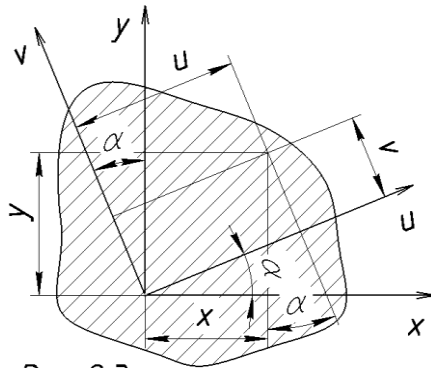


Рис. 6.3

Из геометрических соотношений получаем следующие зависимости между координатами:

$$u = x * \cos \alpha + y * \sin \alpha; \quad v = y * \cos \alpha - x * \sin \alpha;$$

Используя эти соотношения, получаем:

$$J_u = \int_{(A)} v^2 dA = \int_{(A)} (y * \cos \alpha - x * \sin \alpha)^2 dA = J_x * \cos^2 \alpha + J_y * \sin^2 \alpha - J_{xy} * \sin 2\alpha;$$

$$J_u = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} * \cos 2\alpha - J_{xy} * \sin 2\alpha;$$

$$J_v = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} * \cos 2\alpha + J_{xy} * \sin 2\alpha;$$

$$J_{uv} = \int_{(A)} uv dA = J_{xy} * \cos 2\alpha + \frac{J_x - J_y}{2} * \sin 2\alpha;$$

Проведём исследования выражений (8.3) и (8.4) на экстремум. Для этого приравняем производные от этих выражений по углу α нулю.

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = -\frac{dJ_v}{d\alpha} = (J_y - J_x) * \sin 2\alpha - 2 * J_{xy} * \cos 2\alpha = 0$$

Из соотношений (8.5) и (8.6) следует, что осевые моменты инерции принимают экстремальные значения в тех осях, относительно которых центробежный момент равен нулю. Такие оси называются главными осями инерции. Если их начало находится в центре тяжести сечения, то эти оси называются главными центральными осями инерции. Осевые моменты инерции сечения относительно этих осей называются соответственно главными и главными центральными моментами инерции.

Расположение главных осей инерции определяется углом α , определяемым из уравнения (8.6). Из этого уравнения следует, что:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 * \frac{J_{xy}}{(J_y - J_x)};$$

Подставляя значение угла α из выражения (8.7) в соотношения (8.3) и (8.4), получаем следующие формулы для определения главных моментов инерции:

$$J_{max} = J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 * J_{xy}^2};$$

Знак плюс относится к определению J_1 , а знак минус – к определению J_2 .

Отметим, что для сечения в виде прямоугольника со сторонами b , h главные центральные моменты инерции равны:

$$J_{max} = \frac{b * h^3}{12}; \quad J_{min} = \frac{h * b^3}{12};$$

Для круглого сечения с радиусом r и диаметром d :

$$J = \pi * r^4 / 4 \approx 0.05 * d^4; \quad J_p = 2 * J \approx 0.1 * d^4.$$

Контрольные задачи

Задача. Вычислить геометрические характеристики сечений, показанных на рис.

8.4:

Решение:

Для сечения 1:

$$J_{x_1} = J_{y_1} = 2 * \int_0^{\frac{a}{2}} y^2 dA = \frac{a^4}{12}; \quad W_x = W_y = \frac{a^3}{6};$$

Для сечения 2:

$$J_{x_2} = J_{y_2} = J_{x_1} * \cos^2 45^\circ + J_{y_1} * \sin^2 45^\circ = J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{a^4}{12}; \quad W_x = W_y = \frac{a^4}{12} : \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{a^3}{6 * \sqrt{2}};$$

Для сечения 3:

$$J_{x_3} = \frac{J_{y_1}}{2} = \frac{a^4}{24}; \quad W_{x_3} = \frac{a^3}{24} * \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$J_{y_3} = \frac{a^4}{24} - \frac{a^2}{2} * \left(\frac{a}{3 * \sqrt{2}} \right)^2 = \frac{a^4}{72};$$

$$W_{y_3} = \frac{a^4}{72} : \frac{\sqrt{2}}{2} a = \frac{a^3}{36 * \sqrt{2}};$$

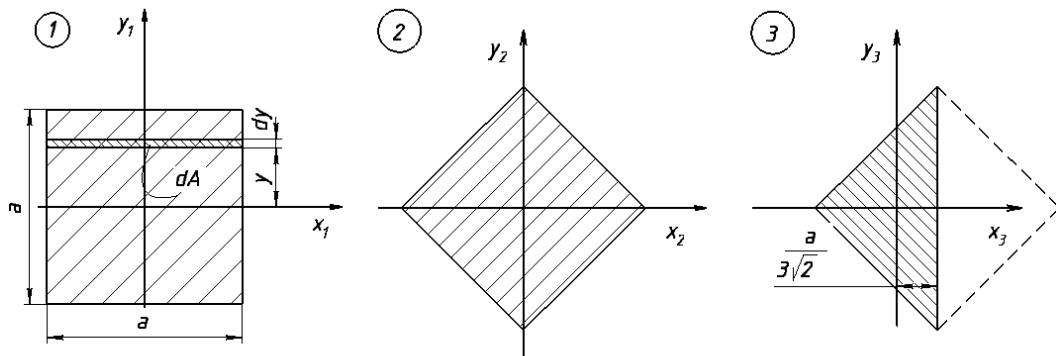


Рис. 8.4

Лекция 9. Кручение некруглых стержней

Касательные напряжения на контуре стержней с некруглым поперечным сечением при кручении всегда направлены по касательной к контуру, а в угловых точках эти напряжения равны нулю. Данный вывод следует из закона парности касательных напряжений и условия равенства нулю касательных напряжений вдоль боковых поверхностей стержня (рис 7.1 а, б)

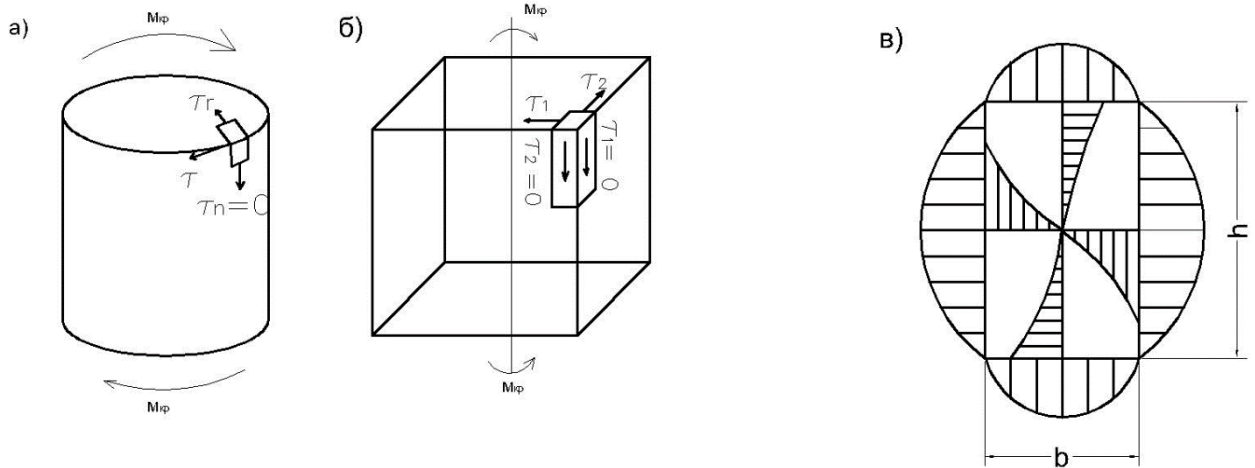


Рис. 7.1

При этом напряжения по сечению стержня распределены по нелинейному закону. Для прямоугольного стержня эти напряжения показаны на рис 7.1 в. В характерных точках А и В напряжения можно вычислить по формулам:

$$\tau_A = M_{кр} / W_k ; \quad \tau_B = \eta \cdot \tau_A \quad (7.1)$$

где $W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2$ – момент сопротивления при кручении α, η – коэффициенты, зависящие от ширины b и высоты h сечения, примем $\eta \leq 1$.

Угол закручивания стержня определяется по формуле

$$\phi = M_{кр} \cdot l / G \cdot J_k \quad (7.2)$$

где $J_k = \beta \cdot h \cdot b^3$ – момент инерции сечения при кручении, β – коэффициент, зависящий от b и h .

Коэффициенты α и β можно вычислить по следующим приближенным формулам:

$$\alpha = \frac{1 + K^2}{0,35 + K^2} \beta ; \quad \beta = \frac{1}{3} - \frac{0,21}{K} ; \quad K = \frac{h}{b}$$

Для узкого прямоугольного сечения или тонкостенного стержня, сечение которого можно условно представить в виде прямоугольника (рис 7.2а), имеем: $h \gg b$, $K \rightarrow \infty$, $\alpha = \beta = 1/3$.

В этом случае формулы (7.1) и (7.2) принимают вид:

$$\tau_{max} = 3 \cdot M_{кр} / S \cdot \delta^2 ; \quad \phi = 3 \cdot M_{кр} \cdot l / G \cdot S \cdot \delta^3$$

где S – полупериметр сечения, δ – толщина стенки.

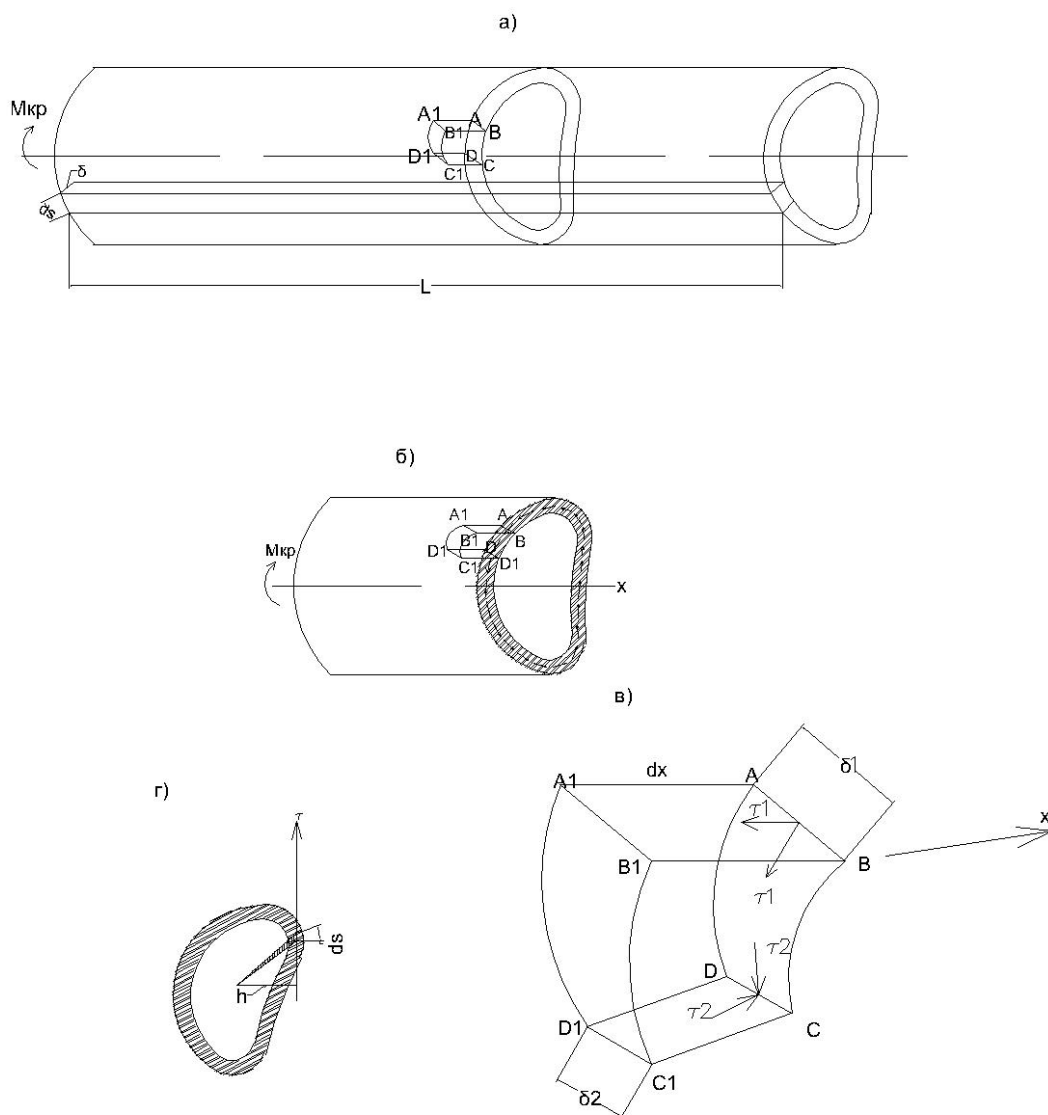


Рис.7.3

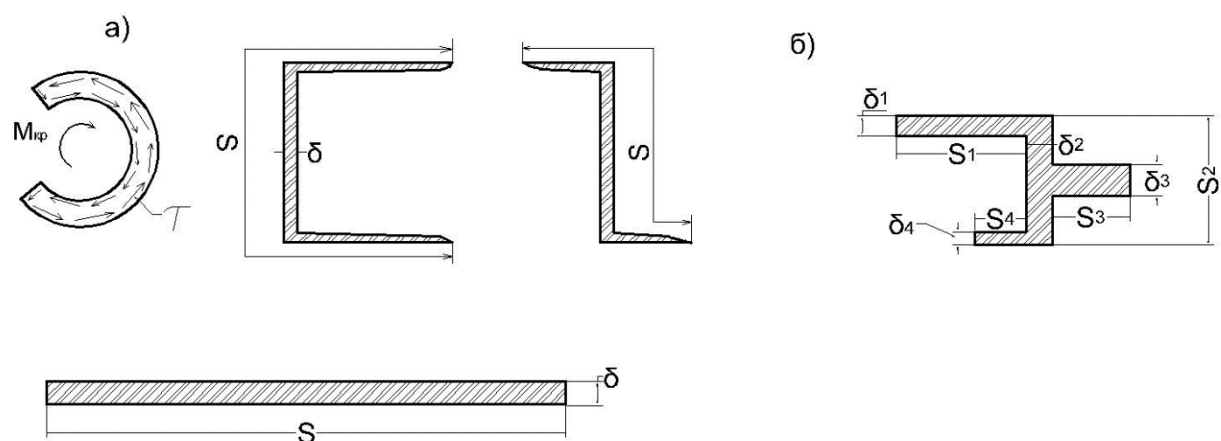


Рис.7.2

Для сечений, не приводимых к одному прямоугольнику (рис. 7.2б), общий момент кручения складывается из моментов кручения, приходящихся на каждый из составляющих общее сечение прямоугольников:

$$M_{кр} = \sum_{i=1}^{i=n} M_i, \quad M_i = \phi G S_i \delta_i^3 / 3.1$$

Где η – число прямоугольников, на которое подразделяется заданное сечение, M_i – момент кручения, приходящийся на i -й прямоугольник. Для сечения, показанного на рис.16.2б, $I = 4$.

Пологая, что сечение стержня поворачивается при кручении как единое целое и используя соотношение (7.4), получаем:

$$M_{кр} = \frac{\varphi \cdot G}{3 \cdot l} \sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot \delta^3 i$$

Отсюда следует формула для определения угла закручивания стержня:

$$\varphi = \frac{3 \cdot M_{кр} \cdot l}{G \cdot \sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot \delta^3 i} ; \quad \tau = \frac{3 \cdot M_i}{S_i \cdot \delta^2 i} = \frac{\varphi G S_i \delta^3 i}{l S_i \delta^2 i} = \frac{3 M \delta i}{\sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot \delta^3 i}$$

Из соотношения (7.4) и условия $\phi_i = \phi$ при любом i .

получаем равенство $\tau_i l = \phi \cdot G \cdot \delta_i$

Отсюда определяем максимальные касательные напряжения:

$$\tau_{max} = \frac{G \delta_{max}}{l} = \frac{3 M_{кр} \delta_{max}}{\sum_{i=1}^{i=n} S_i \cdot \delta^3 i}$$

Рассмотрим теперь кручение тонкостенного стержня закрытого профиля (рис.7.3 а, б). Выделим бесконечно малый элемент ABCD $A_1 B_1 C_1 D_1$ и рассмотрим его равновесие под воздействием приложенных к нему внутренних сил. Будем считать, что напряжения по толщине стенки стержня распределены равномерно. Пусть при δ_1 имеем τ_1 , а при δ_2 имеем τ_2 (рис.7.3в). По закону парности касательных напряжения τ_1 и τ_2 . Запишем уравнение равновесия в виде равенства нулю суммы проекций всех сил, действующих в направлении оси стержня:

$$\tau_2 \delta_2 dx - \tau_1 \delta_1 dx = 0.$$

Отсюда следует, что произведение $\tau \delta$ остается постоянным и в местах с минимальной толщиной стенки возникают максимальные напряжения, а в местах с максимальной толщиной стенки – минимальные напряжения.

Рассмотрим часть стержня, показанную на рис 7.3б, г. Эта часть находится в равновесии под воздействием внешнего момента $M_{кр}$ и моментов внутренних сил в сечении. Из этого условия получаем равенство

$$M_{кр} = \oint \tau \delta h ds = \tau \delta \int h ds$$

Где h – плечо силы $\tau \delta ds$.

Произведение $h \cdot ds$ представляет собой удвоенную площадь, заштрихованного на рис.16.3г треугольника. Отсюда следует, что

$$\oint h ds = 2A$$

Где A – площадь фигуры, очерченной средней линией контура сечения.

При этом из соотношения (7.7) следует, что

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2A\delta} \quad (7.9)$$

Определим теперь угол закручивания стержня ϕ и потенциальную энергию стержня при кручении Π .

Энергия и бесконечно малом объёме и во всем стержне будет соответственно равна:

$$d\Pi = \frac{\tau^2 l \delta}{2G} ds ; \quad \Pi = \frac{\tau^2 \delta^2 l}{2G} \oint \frac{ds}{\delta} \quad (7.10)$$

Полную энергию можно также вычислить по заданному моменту $M_{кр}$ и углу закручивания ϕ :

$$\Pi = \frac{1}{2} M_{кр} \cdot \phi \quad (7.11)$$

Из соотношений (7.9) ,(7.10) и (7.11) следует, что искомый угол закручиваний

$$\phi = \frac{M_{кр} l}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{\delta}$$

при $\delta = \text{const}$ имеем:

$$\Pi = \frac{M_{кр}^2 l S}{3A^2 G \delta} ; \quad \phi = \frac{M_{кр} \cdot l \cdot S}{4A^2 G \delta} \quad \text{Где } S - \text{длина контура сечения.}$$

Лекция 10. Расчеты на устойчивость

Поперечным изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента возникает еще и поперечная сила. Так балка, показанная на рис. 9.1, находится в состоянии поперечного изгиба на участках АВ и СД и чистого изгиба на участке ВС.

Наличие поперечных сил Q в сечениях балки обуславливает появление в них касательных напряжений τ и некоторое перераспределение нормальных напряжений σ по сравнению с чистым изгибом. Специальными исследованиями показано, что если длина балки намного превышает ее высоту, то нормальные напряжения при поперечном изгибе можно с большой точностью определять по формулам чистого изгиба. В этом случае остается определить только величину и характер распределения касательных напряжений по сечению балки. Эту задачу впервые решил русский инженер Д. И. Журавский в 1855 году.

Вначале рассмотрим балки с симметричным профилем сечения (рис 10.1а).

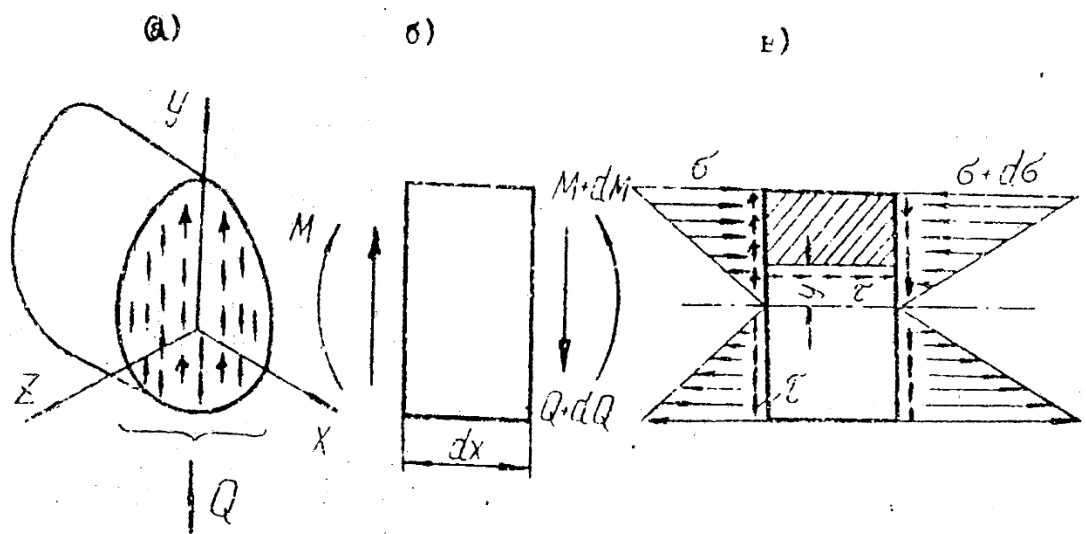


Рис. 10.1

Выделим часть балки длиной dx и заменим действие отброшенных частей внутренними силами и моментами так, как это показано на рис. 10.1б. Изгибающие моменты обуславливают наличие нормальных напряжений σ и $\sigma + d\sigma$, а поперечные силы - касательных напряжений τ (рис. 10.1в). По закону парности касательных напряжений в продольных сечениях балки также возникают касательные напряжения τ . На рис. 10.1в и на рис. 8.2а эти напряжения показаны для продольного сечения, находящегося от оси балки на расстоянии y

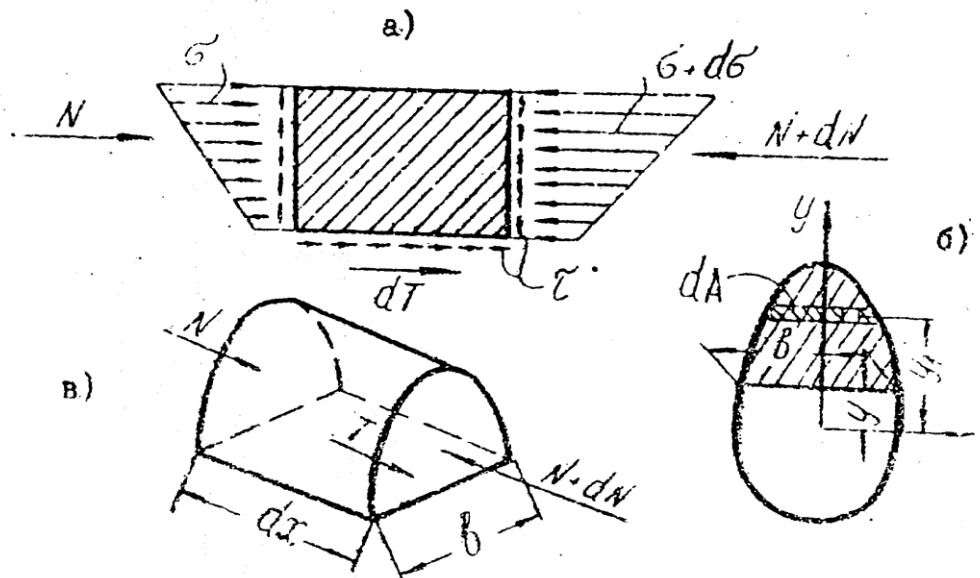


Рис. 10.2

Рассмотрим равновесие заштрихованного на рис. 10.1в и рис. 10.2а участка балки. Этот участок отдельно показан на рис. 10.2в. На рис. 10.2б показан общий вид сечения и его верхняя часть (заштрихованная), соответствующая рассматриваемому участку балки. Напряжениям σ , $\sigma + d\sigma$ и τ соответствуют следующие силы, направленные вдоль оси балки:

$$N = \int_{(A)} \sigma dA = \int_{(A)} \frac{My_1}{J_z} dA = \frac{M}{J_z} \int_{(A)} y_1 dA = \frac{M}{J_z} S_z^*,$$

$$dN = \frac{dM}{J_z} S_z^*; dT = \tau b dx$$

где A и S_z - площадь заштрихованной на рис. 10.2б части сечения и ее статический момент относительно оси Z , b - ширина балки, соответствующая рассматриваемой части сечения.

Из условия равновесия рассматриваемой части балки следует равенство:

$$\tau b dx = \frac{dM}{J_z} S_z^*$$

Так как $dM/dx = Q$, то отсюда получаем формулу Д. И. Журавского для определения касательных напряжений:

$$\tau = \frac{QS_z^*}{bJ_z} \quad (10.1)$$

Определение касательных напряжений для балок с несимметричным профилем сечения рассмотрим на примере консольной балки коробчатого сечения (рис. 10.3а).

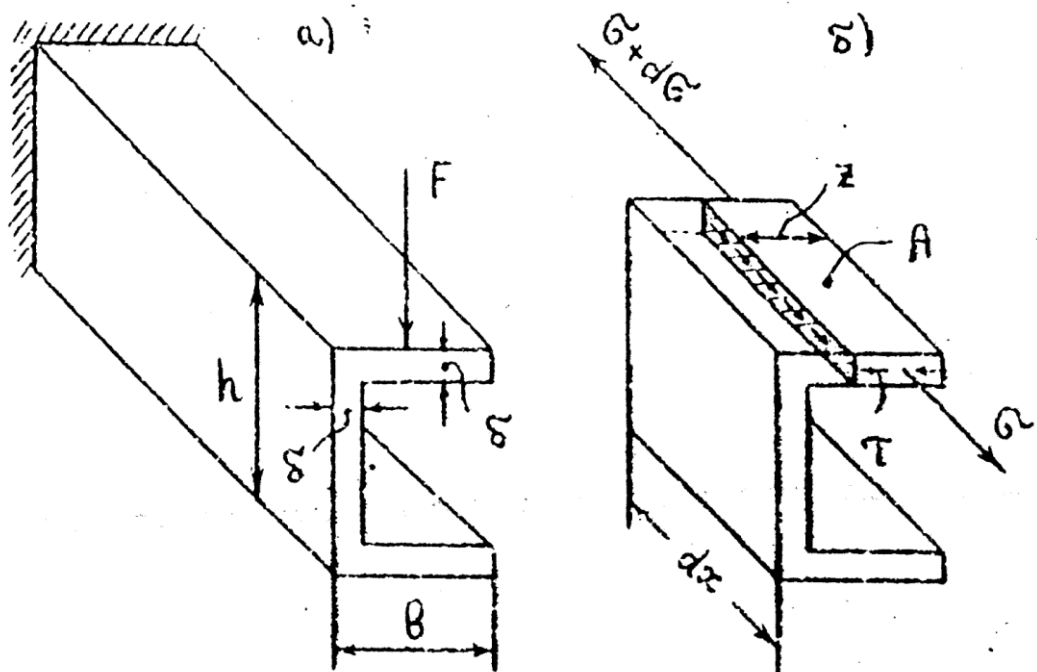


Рис. 10.3

Выделим на участке балки длиной dx продольный элемент A шириной z (рис. 10.3б). Аналогично предыдущему устанавливаем, что в продольных и поперечных сечениях балки возникают касательные напряжения τ , которые можно определить по формуле (10.1). Для этого в форму (10.1) нужно подставить значения поперечной силы $Q = F$, момента инерции J_z и соответствующее значение статического момента площади S_z^* .

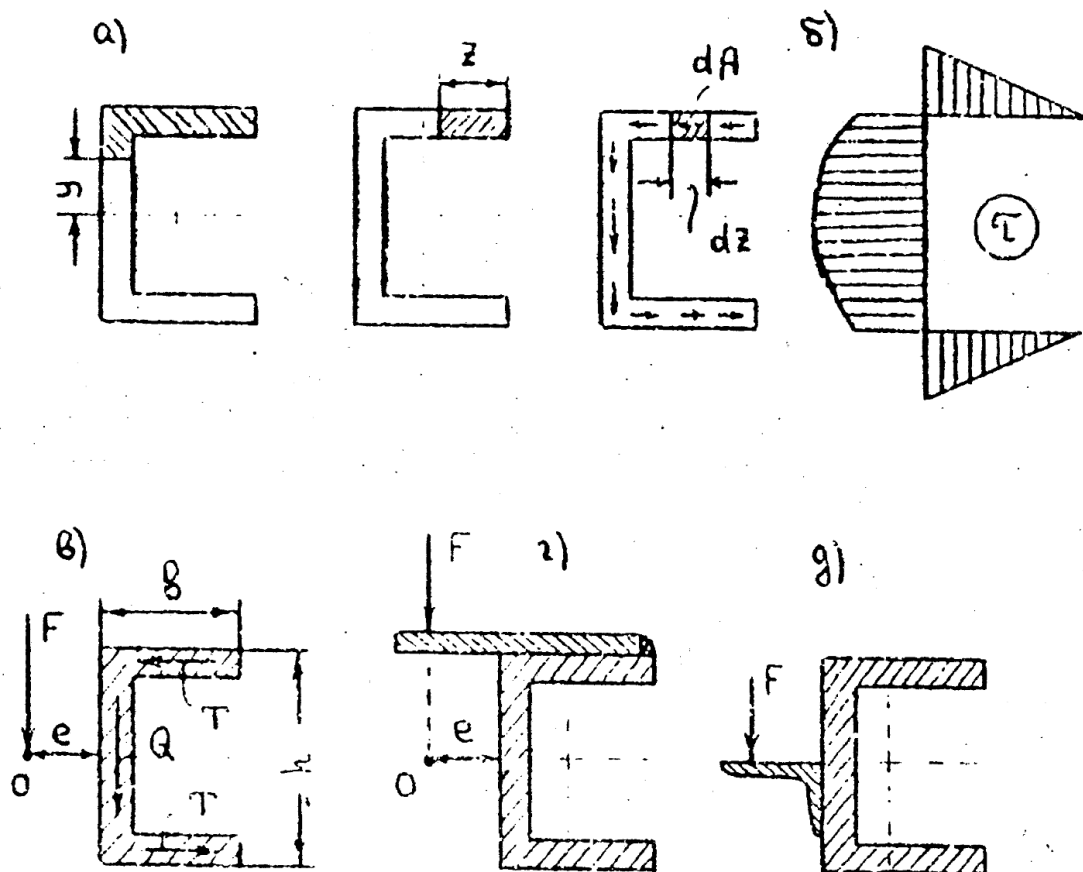


Рис. 10.4

Момент инерции:

$$J_z = \frac{\delta h^2}{12} (h + 6b)$$

Статический момент для части сечения, определяемого координатой Z (рис. 10.1а)

$$S_z^* = \frac{1}{2} \delta h z, (0 \leq z \leq b)$$

Соответствующее напряжение

$$\tau = \frac{6Fz}{\delta h(h + 6b)}$$

Статический момент для части сечения, определяемого координатой Y (рис. 10.1а)

$$S_z = \frac{1}{2} \delta \left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2 \right), (0 \leq y \leq \frac{h}{2})$$

Соответствующее напряжение

$$\tau = \frac{6F \left(bh + \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\delta h^2(h + 6b)}$$

Максимальное касательное напряжение получаем при Y = 0:

$$\tau_{max} = \frac{3F(h + 4b)}{2\delta h(h + 6b)}$$

Касательных напряжений представлена на рис. 8.4б.

Вычислим теперь равнодействующие внутренних усилий на полках (T) и на стенке (Q) (рис. 10.4в).

$$T = \int \tau dA = -\frac{6F}{h(h + 6b)} \int_0^b z dz = \frac{3Fb^2}{h(h + 6b)}; Q = \int_0^{h/2} \tau dA = F$$

Внутренние усилия T и Q дают момент, равный нулю относительно точки O, удаленной от полки на некоторое расстояние e. Это расстояние определяется из уравнения равновесия $Th = Fe$.

Отсюда получаем

$$e = \frac{Th}{F} = \frac{3b^2}{h + 6b}$$

Если линия действия внешней силы F не проходит через точку O, то сила F создает крутящий момент. Стержень закручивается, и в сечении возникают дополнительные касательные напряжения. Кручения не будет, если линия действия силы F проходит через точку O. Эта точка называется центром изгиба. Два варианта конструктивных решений, обеспечивающих изгиб без кручения показаны на рис. 10.4г, д.