## Распределение Максвелла

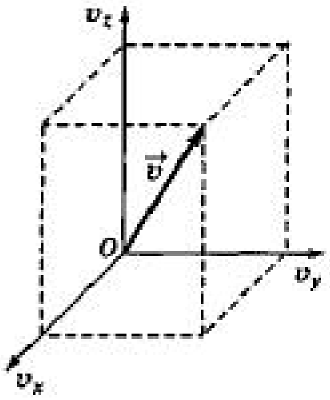


**Рис. 5.3. Пространство скоростей**

Найдём функцию распределения молекул по скоростям в случае равновесного состояния идеального газа в отсутствие внешнего поля (Дж. Максвелл 1866 г.). Скорость $v$ любой молекулы газа определяется её проекциями $v_x$ $v_y$ и $v_z$ на оси прямоугольной системы координат. Если $v_x$ $v_y$ и $v_z$ статистически независимы, то

$$f(v)=\psi(v_x)\psi(v_y)\psi(v_z).$$

откуда

$$\ln f(v) = \ln\psi(v_x) + \ln\psi(v_y) + \ln\psi(v_z).$$

Сравнивая с равенством

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2,$$

получим

$$f(v) = \exp(\alpha + \beta v^2).$$

Функция распределения проекции скорости $v_x$ имеет вид

$$\psi(v_x) = \exp(\alpha/3 + \beta v_x^2).$$

Обозначим: $a = \exp(\alpha/3)$, $b = -\beta$. Тогда:

$$\psi(v_x) = a\exp(-bv_x^2).$$

Согласно условию нормировки,

$$\int_{-\infty}^{\infty} a\psi(-bv_x^2)\,dv_x = 1.$$

Вычисление этого интеграла с учётом интегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-bx^2)\,dx = \sqrt{\pi/b},$$

даёт

$$a = \sqrt{b/\pi}.$$

Среднюю кинетическую энергию одномерного движения молекул газа получим интегрируя по частям формулу для среднего значения с использованием интеграла Пуассона ( $\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp(-bv_x^2)\,dv_x = -\frac{1}{2b} v_x \exp(-bv_x^2)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-bv_x^2)\,dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{4b^3}}$ ),

$$\langle E_{kx}\rangle = \left\langle \frac{mv_x^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2} = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv_x^2}{2} \exp(-bv_x^2)\,dv_x = \frac{m}{4b},$$

откуда

$$b = \frac{m}{2kT}, \quad a = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}.$$

Таким образом,

$$\psi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right),$$

а функция распределения молекул газа по скоростям

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Функции $\psi(v_x)$ и $f(v)$ представляют собой ***распределения Максвелла***. График функции $\psi(v_x)$ аналогичен графику распределения Гаусса, описывающему распределение ошибок измерений.

Для расчетов часто используют распределение молекул газа по абсолютным значениям скоростей. Вероятность того, что значения проекций скорости лежат внутри элементарного объема пространства скоростей $dV_v = dv_x dv_y dv_z$:

$$dP(v) = f(v) dV_v.$$

Эта вероятность зависит только от абсолютного значения скорости, поэтому $dV_v = 4\pi v^2 dv$. Тогда предыдущее равенство примет вид:

$$dP(v) = f(v) 4\pi v^2 dv.$$

Функция

$$F(v) = 4\pi v^2 f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

называется ***распределением Максвелла по абсолютным значениям скоростей*** и характеризует вероятность того, что скорость молекул имеет значение от $v$ до $v + dv$. Максимум функции $F(v)$ соответствует одному из решений уравнения