Преобразование Лоренца

Найдём формулы преобразования от одной инерциальной системы отсчета к другой. Пусть координатами некоторого события в системе K являются x, y, z, t, а в системе K' — x', y', z', t'. Пусть при $t = t' = 0$ начала координат систем K и K' совпадают. Так как закон инерции справедлив при всех скоростях, вплоть до максимальной скорости c, то связь координатами события в системах K и K' должна быть линейной. Поэтому должны выполняться равенства:

$$x' = \alpha\left(x - Vt\right), \quad x = \alpha\left(x' + Vt'\right), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Множитель α в обеих формулах один и тот же, так как системы K и K' равноправны. Координаты y и z не меняются, поскольку движение систем K и K' в направлении осей Oy и Oz не предполагается.

Множитель α можно определить, рассматривая, например, приход света, испущенного в момент $t = t' = 0$, в системе K в точку x в момент времени t, а в системе K' в точку x' в момент времени t'. В соответствии со вторым постулатом Эйнштейна путь света в системах K и K' равен

$$x = ct, \quad x' = ct',$$

причём значения координат x и x' связаны выписанными выше равенствами

$$x' = \alpha\left(x - Vt\right), \quad x = \alpha\left(x' + Vt'\right).$$

Перемножая последние два равенства, получим

$$xx' = \alpha^2(xx' + xVt' - x'Vt - V^2tt').$$

Поскольку $x = ct, \quad x' = ct'$, последнее равенство примет вид

$$xx' = c^2tt' = \alpha^2(c^2tt' + cVtt' - cVtt' - V^2tt').$$

После сокращения на tt' получим $c^2 = \alpha^2\left(c^2 - V^2\right)$, откуда

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\left(V/c\right)^2}}.$$

Для координат в направлении движения систем отсчета находим:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\left(V/c\right)^2}}, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\left(V/c\right)^2}}.$$

Заменяя в последней формуле x' соответствующим выражением из первой формулы, находим t'. В результате получим равенства, связывающие координаты и время одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета K и K', движущейся относительно системы K со скоростью V в направлении оси Ox

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Обратные формулы, выражающие x', y', z', t' через x, y, z, t проще всего получаются заменой V на $-V$.

Полученные формулы известны как ***преобразования Лоренца***. Они были получены в 1904 г. Лоренцем как преобразования, оставляющие неизменными уравнения Максвелла для электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. После их вывода вся физическая теория (механика, электродинамика, термодинамика и другие разделы физики) подлежала перестройке, что было осуществлено Эйнштейном в специальной теории относительности.

При $c^2 \to \infty$ преобразования Лоренца переходят в преобразование Галилея.

Классические преобразования Галилея несовместимы с постулатами СТО и, следовательно, должны быть заменены. Эти новые преобразования должны установить связь между координатами (x, y, z) и моментом времени t события, наблюдаемого в системе отсчета K, и координатами (x', y', z') и моментом времени t' этого же события, наблюдаемого в системе отсчета K'.

Кинематические формулы преобразования координат и времени в СТО называются преобразованиями Лоренца. Для случая, когда система K' движется относительно K со скоростью υ вдоль оси x, преобразования Лоренца имеют вид:

$$
\begin{array}{cc}
K' \to K & K \to K' \\
\begin{cases}
x = \dfrac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\
y = y', \\
z = z', \\
t = \dfrac{t' + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},
\end{cases}
&
\begin{cases}
x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\
y' = y, \\
z' = z, \\
t' = \dfrac{t - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},
\end{cases}
\end{array}
$$
$$\beta = \upsilon / c.$$

Одним из важнейших следствий из преобразований Лоренца является вывод об относительности одновременности. Пусть, например, в двух разных точках системы отсчета K' ($x'_1 \neq x'_2$) одновременно с точки зрения наблюдателя в K' ($t'_1 = t'_2 = t'$) происходят два события. Согласно преобразованиям Лоренца, наблюдатель в системе K будет иметь

$$x_1 = \frac{x'_1 + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2 = \frac{x'_2 + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow x_1 \neq x_2.$$

$$t_1 = \frac{t' + \upsilon x'_1/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x_2 = \frac{t' + \upsilon x'_2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow t_1 \neq t_2.$$

Следовательно, в системе K эти события, оставаясь пространственно разобщенными, оказываются неодновременными. Более того, знак разности $t_2 - t_1$ определяется знаком выражения $\upsilon(x'_2 - x'_1)$, поэтому в одних системах отсчета первое событие может предшествовать второму, в то время как в других системах отсчета, наоборот, второе событие предшествует первому. Этот вывод СТО не относится к событиям, связанным причинно-следственными связями, когда одно из событий является физическим следствием другого. Можно показать, что в СТО не нарушается принцип причинности, и порядок следования причинно-следственных событий одинаков во всех инерциальных системах отсчета.

Из преобразований Лоренца следует релятивистский эффект замедления времени и лоренцево сокращение длины. Пусть, например, в некоторой точке x' системы K' происходит процесс длительностью $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ (собственное время), где t'_1 и t'_2 – показания часов в системе K' в начале и конце процесса. Длительность τ этого процесса в системе K будет равна

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t'_1 + \upsilon x'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$