Билет 25

№1

Постулаты СТО

1. <u>Принцип постоянства скорости света</u>: скорость света не зависит от движения источника и одинакова во всех инерциальных системах отсчета в вакууме и является предельной скоростью передачи сигнала. Величина скорости света в вакууме равна $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

2. <u>Принцип относительности</u>. Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета – уравнения выражающие законы природы инвариантны при переходе от одной системы отсчета к другой.

Скорости точек, величина которых сравнима со скоростью света (и, конечно, обязательно меньше!) называются *релятивистскими*.

Выражение для *релятивистского импульса* $\vec{p} = \dfrac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = m\vec{v}$.

Основное уравнение релятивистской динамики.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Это выражение можно записать в виде $\dfrac{d}{dt}\vec{p} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v}\dfrac{dm}{dt} + m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}}\right) = m_0\left(-\frac{1}{2}\,\frac{-2\dfrac{(\vec{v},\vec{a})}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right) = \frac{m_0(\vec{v},\vec{a})}{c^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$\frac{m_0(\vec{v},\vec{a})\vec{v}}{c^2\left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} + m\vec{a} = \vec{F}$$

№2

Вынужденные колебания.

Рассмотрим движение тела в вязкой среде вблизи положения равновесия под действием квазиупругой силы и некоторой периодической силы $F(t)=F_0\,cos(\Omega t+\alpha)$.

Второй закон Ньютона $ma=-kx-rv+F(t)$ перепишем в виде

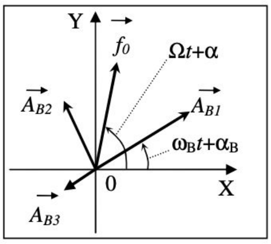
$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\,cos(\Omega t+\alpha)$$

где введены обозначения $2\beta=\dfrac{r}{m}$, $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$, $f_0=\dfrac{F_0}{m}$. Это уравнение называется *уравнением вынужденных колебаний*.

Решением этого обыкновенного дифференциального уравнения является *сумма* решений *однородного* и частного решения *неоднородного* уравнений.

Однородное уравнение

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$$



является уравнением свободных затухающих колебаний.

Частное решение неоднородного уравнения

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\,cos(\Omega t+\alpha)$$

будем искать в виде $x_B=A_B\,cos(\omega_B t+\alpha_B)$. Изобразим уравнение на амплитудно-векторной диаграмме, на которой величине $\omega_0^2x_B=\omega_0^2A_B\,cos(\omega_B t+\alpha_B)$ соответствует вектор $\vec{A}_{B1}$, такой что $|\vec{A}_{B1}|=\omega_0^2A_B$. Так как

$\dot{x}_B=-\omega_B A_B\,sin(\omega_B t+\alpha_B)=\omega_B A_B\,cos\left(\omega_B t+\alpha_B+\dfrac{\pi}{2}\right)$, то величине

$2\beta\dot{x}_B=2\beta\omega_B A_B\,cos\left(\omega_B t+\alpha_B+\dfrac{\pi}{2}\right)$ соответствует вектор $\vec{A}_{B2}$, повернутый относительно вектора

$\vec{A}_{B1}$ на угол $\dfrac{\pi}{2}$, длина которого $|\vec{A}_{B2}|=2\beta\omega_B A_B$.

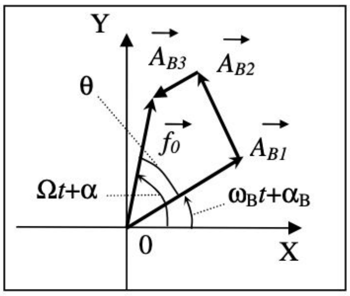
Величине $\ddot{x}_B=-\omega_B{}^2A_B\,cos(\omega_B t+\alpha_B)=\omega_B{}^2A_B\,cos(\omega_B t+\alpha_B+\pi)$ соответствует вектор $\vec{A}_{B3}$, повернутый на угол π относительно вектора $\vec{A}_{B1}$ и $|\vec{A}_{B3}|=\omega_B{}^2A_B$.

В правой части уравнения величине $f_0\,cos(\Omega t+\alpha)$ соответствует вектор $\vec{f}_0$.

Уравнению $\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\,cos(\Omega t+\alpha)$

будет соответствовать векторная сумма

$$\vec{A}_{B1}+\vec{A}_{B2}+\vec{A}_{B3}=\vec{f}_0.$$



Так как длины векторов не меняются, то это равенство возможно только для случая $\omega_B=\Omega$. Таким образом, *вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы.*

Из диаграммы следует, что при этом должно выполняться равенство $f_0^2=(A_{B1}-A_{B3})^2+A_{B2}^2$, поэтому получаем

$$f_0^2=\left(\omega_0^2A_B-\Omega^2A_B\right)^2+\left(2\beta\Omega A_B\right)^2.$$

Откуда находим амплитуду вынужденных колебаний:

$$A_B=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}}.$$

Обозначим через $\theta=\alpha-\alpha_B$ - разность фаз вынуждающей силы и вынужденных колебаний.

Из диаграммы следует, что $tg\theta=\dfrac{A_{B2}}{A_{B1}-A_{B3}}$: $tg\theta=\dfrac{2\beta\omega_B A_B}{\omega_0^2A_B-\omega_B{}^2A_B}=\dfrac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$.

Таким образом, при $\omega_0>\Omega$ получаем, что $\theta>0$ – вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, а при $\omega_0<\Omega$ - вынужденные колебания опережают по фазе вынуждающую силу.