Сергеева Диана РК6-46Б

Задача 2.2. Требуется построить кубический сплайн, который проходит через следующие узлы $(x_i; f(x_i))$, i = 1,2,3, где:

$$x_1 \in (-5; 0); f(x_1) \in [-4; -2]$$

$$x_2 \in [0; 5); f(x_2) \in [3; 6]$$

$$x_3 \in [5; 10]; f(x_3) \in [-4; 7]$$

и имеет известные граничные условия $f'(x_1) \in [-4;4]$ и $f'(x_3) \in [-1;1]$.
Конкретные значение x_i, $f(x_i)$, $f'(x_1)$, $f'(x_3)$ следует задать произвольно. Дополнительно требуется построить эскиз графика кубического сплайна.

Решение:

Запишем уравнения для сплайна, т.к. сплайн кусочно-заданный то:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \\ S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 \end{cases}$$

Для того, чтобы построить кубический сплайн, нужно найти 8 констант: a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2. Для этого составляем 8 уравнений.

Первые 2 уравнения достаём из условия, что значения в узлах равно значению функции:

$$S_1(x_1) = a_1 = f(x_1) \qquad (1)$$

$$S_2(x_2) = a_2 = f(x_2) \qquad (2)$$

Т.к. значения $S_1(x)$, $S_2(x)$ должны быть согласованы в правых интерполяционных узлах, то следующие 2 уравнения имеют вид:

$$S_1(x_2) = a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 = f(x_2) \qquad (3)$$

$$S_2(x_3) = a_2 + b_2(x_3 - x_2) + c_2(x_3 - x_2)^2 + d_2(x_3 - x_2)^3 = f(x_3) \qquad (4)$$

Т.к. сплайн должен быть гладкий, непрерывный, то должны быть согласованы значения первой и второй производных:

$$S_1'(x_2) = S_2'(x_2) \Rightarrow\ b_1 + 2c_1(x_2 - x_1) + 3d_1(x_2 - x_1)^2 = b_2 \qquad (5)$$

$$S_1''(x_2) = S_2''(x_2) \Rightarrow\ 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) = 2c_2 \qquad (6)$$

Естественные граничные условия для сплайна:

$$S_1''(x_1) = 0 \Rightarrow 2c_1 = 0 \qquad (7)$$

$$S_2''(x_3) = 0 \Rightarrow 2c_2 + 6d_2(x_2 - x_1) = 0 \qquad (8)$$

Таким образом, мы получаем наши 8 уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = f(x_1) \\ a_2 = f(x_2) \\ a_1 + b_1(x_2 - x_1) + c_1(x_2 - x_1)^2 + d_1(x_2 - x_1)^3 = f(x_2) \\ a_2 + b_2(x_3 - x_2) + c_2(x_3 - x_2)^2 + d_2(x_3 - x_2)^3 = f(x_3) \\ b_1 + 2c_1(x_2 - x_1) + 3d_1(x_2 - x_1)^2 = b_2 \\ 2c_1 + 6d_1(x_2 - x_1) = 2c_2 \\ 2c_1 = 0 \\ 2c_2 + 6d_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Теперь зададим произвольно значения:

т.к. $f(x_1) \in [-4; -2]$: $(x_1) = -2$

т.к. $f(x_2) \in [3; 6]$: $f(x_2) = 4$

т.к. $f(x_3) \in [-4; 7]$: $f(x_3) = 0$

т.к. $x_1 \in (-5; 0)$: $x_1 = -1$

т.к. $x_2 \in [0; 5)$: $x_2 = 4$

т.к. $x_3 \in [5; 10]$: $x_3 = 5$

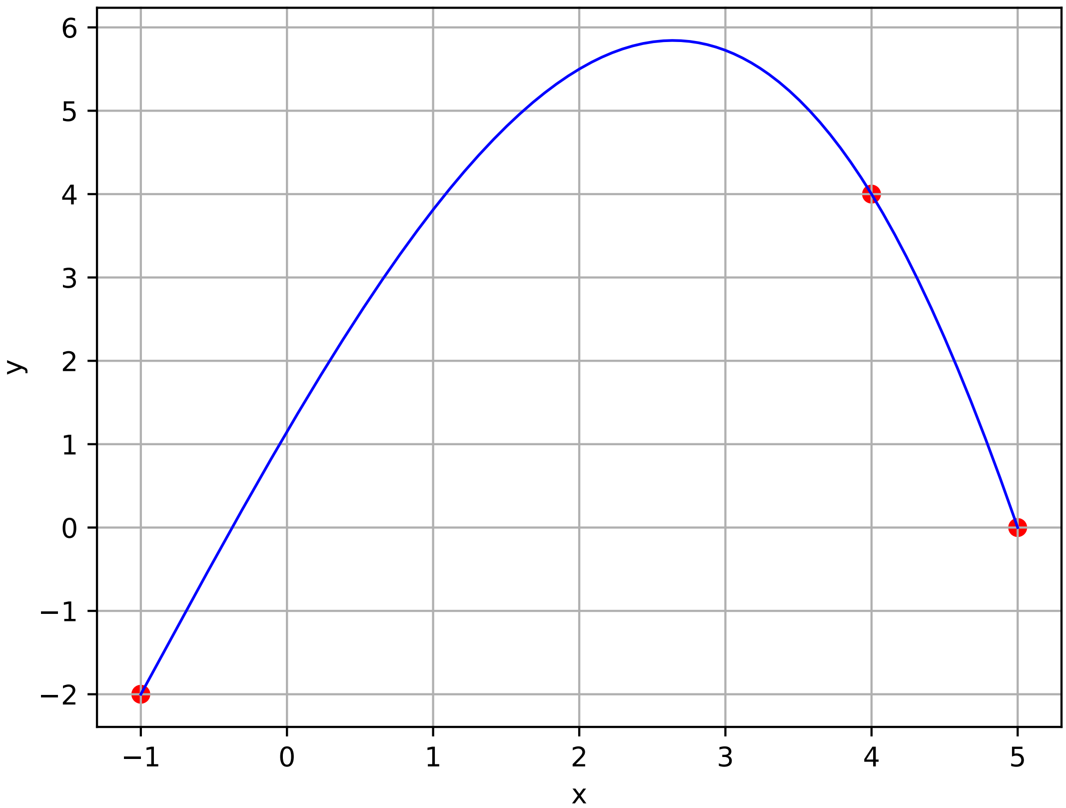
Тогда система пример вид:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 4 \\ a_1 + 5b_1 + 25c_1 + 125d_1 = 4 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0 \\ b_1 + 10c_1 + 75d_1 = b_2 \\ 2c_1 + 30d_1 = 2c_2 \\ c_1 = 0 \\ 2c_2 + 30d_2 = 0 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_2 = 4 \\ b_1 = \dfrac{517}{160} \\ b_2 = \dfrac{-229}{80} \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \dfrac{-39}{32} \\ d_1 = \dfrac{-13}{160} \\ d_2 = \dfrac{13}{160} \end{cases}$$

Построим кубический сплайн:



6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
y
−1
0
1
2
3
4
5
x