Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им Н.Э. Баумана)

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

Домашнее задание №2 по дисциплине

«Прикладная механика»

Вариант 1

Выполнил: студент группы РК6-36Б, Сергеева Д.К.

Проверил: декан факультета РК, Шашурин Г.В.

Москва

2020

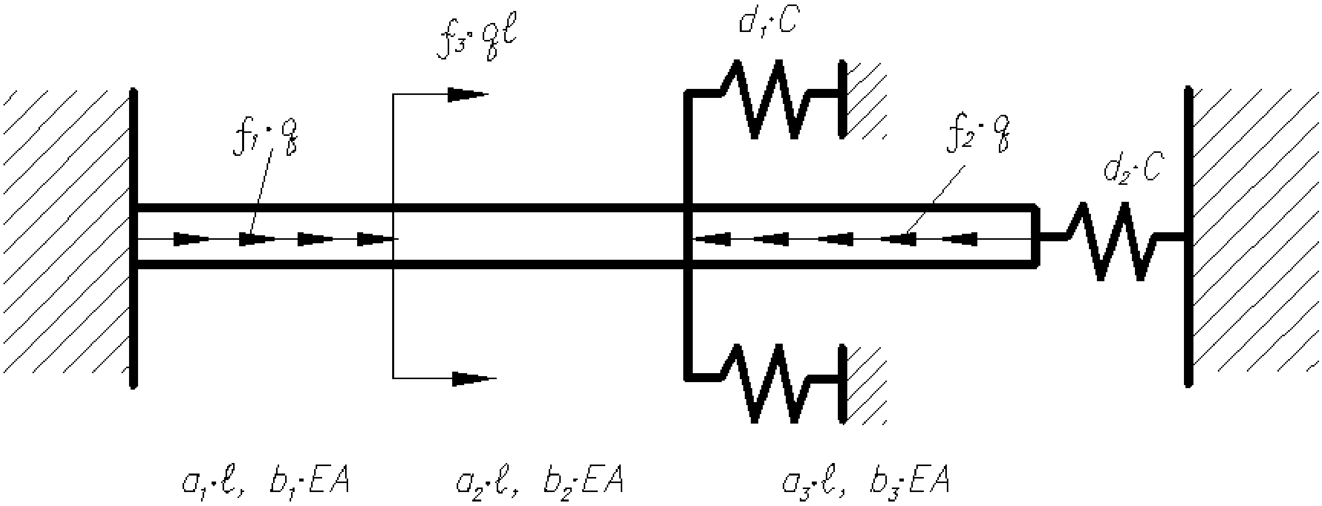
Метод начальных параметров в задаче растяжения-сжатия.

Для заданной системы требуется:

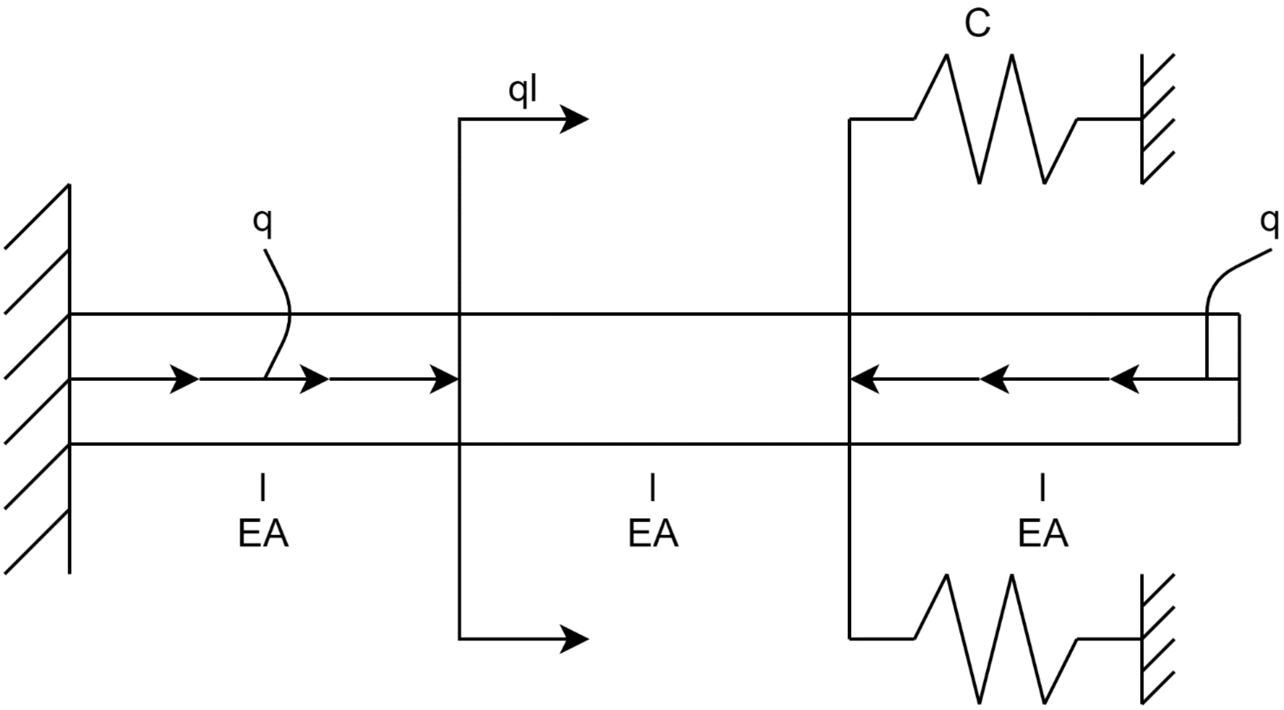
1. Записать в матричном виде уравнения состояния стержня при растяжении сжатии.

2. Разбить систему на отдельные стержни, ввести глобальную и локальные системы координат. Записать в матричном виде уравнения изменения вектора состояния при переходе от левого края системы к ее правому краю. Записать в матричном виде граничные условия. Сформировать СЛАУ для поиска вектора начальных параметров. Найти вектор начальных параметров.

3. Используя метод начальных параметров, вычислить перемещения сечений стержня при $C \to 0$ и при $C \to \infty$.



№	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	d_1	d_2	f_1	f_2	f_3
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1



1. Запишем в матричном виде уравнения состояния стержня при растяжении сжатии

   С помощью системы ДУ определим нагрузки и перемещения на участке стержня с распределенной нагрузкой q:

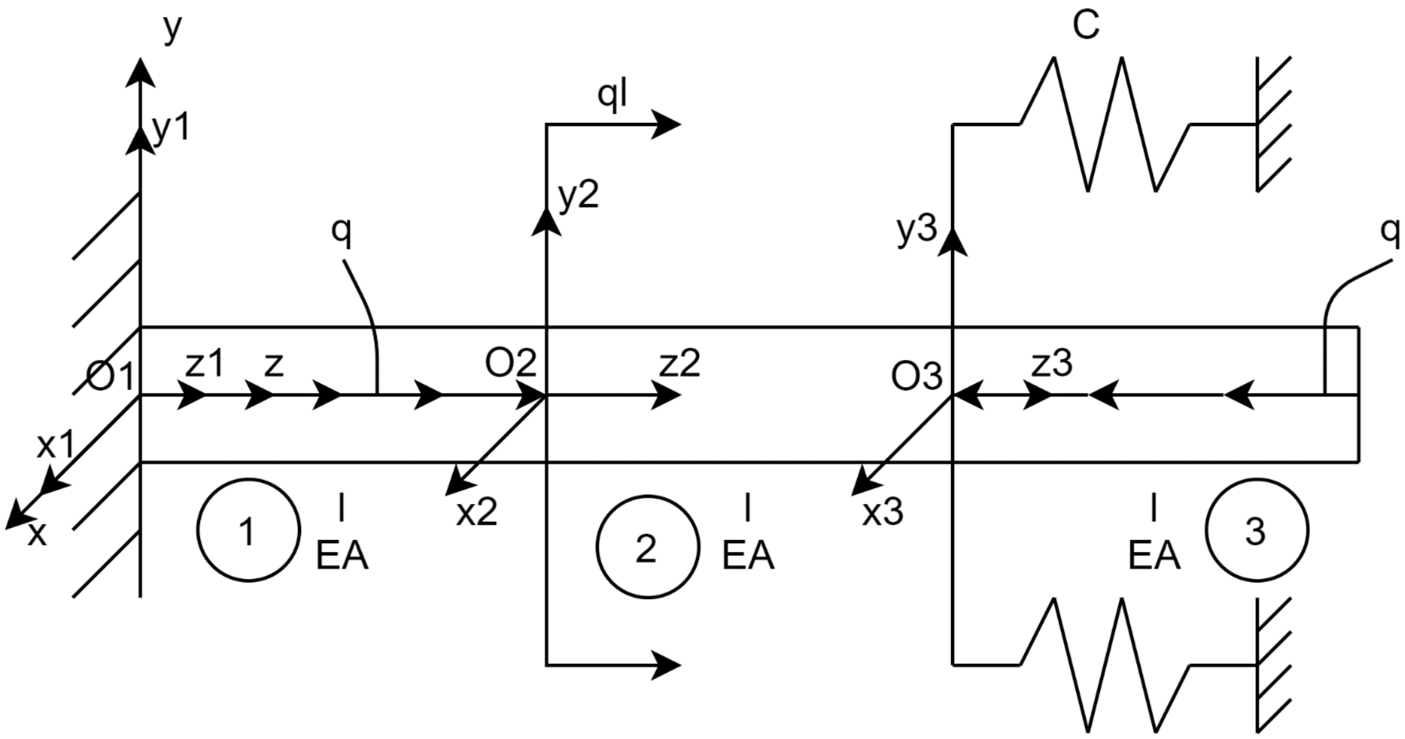
   $$\begin{cases} \frac{dN}{dz} = -q \\ \frac{dW}{dz} = \frac{N}{EA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(z) = N_0 - \int_0^z q dz = N_0 - qz + 0 * W_0 \\ W(z) = \int_0^z \frac{N_0 - qz}{EA} dz = \frac{N_0 z}{EA} - \frac{qz^2}{2EA} + 1 * W_0 \end{cases}$$

   Система в матричном виде:

   $$\begin{pmatrix} N(z) \\ W(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{EA} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ W_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -qz \\ \frac{-qz^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

   Или: $\mathrm{Y(z) = A(z) * Y_0 + Q(z)}$, где $\mathrm{Y(z)} = \begin{pmatrix} \mathrm{N(z)} \\ \mathrm{W(z)} \end{pmatrix}$, $\mathrm{A(z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{EA}} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Y_0} = \begin{pmatrix} \mathrm{N_0} \\ \mathrm{W_0} \end{pmatrix}$, $\mathrm{Q(z)} = \begin{pmatrix} -\mathrm{qz} \\ \frac{-\mathrm{qz}^2}{2\mathrm{EA}} \end{pmatrix}$

2. Введем глобальную и локальные системы координат, обозначим участки:



Найдем$A(z)$и $Q(z)$для каждого из участков:

$$A_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{EA} & 1 \end{pmatrix}, Q_1(z) = \begin{pmatrix} -qz \\ \frac{-qz^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

$$A_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{EA} & 1 \end{pmatrix}, Q_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{EA} & 1 \end{pmatrix}, Q_3(z) = \begin{pmatrix} qz \\ \frac{qz^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

Уравнение состояния 1-го участка:

$$Y_1(l) = A_1(l) * Y_1(0) + Q_1(l)$$

Начальные условия 2-го участка:

$$Y_2(0) = Y_1(l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

Уравнение состояния 2-го участка:

$$Y_2(l) = A_2(l) * Y_2(0)$$

Переход через пружину:

$$N_2(l) + W_2(l) * C = N_3(0)$$
$$W_2(l) = W_3(0)$$
$$Y_3(0) = L_1 * Y_2(l), \text{где } L_1 = \begin{pmatrix} 1 & \text{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_3(0) = L_1 * Y_2(l) = L_1 * A_2(l) * Y_2(0) = L_1 * A_2(l) * (Y_1(l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}) =$$
$$= L_1 * A_2(l) * (A_1(l) * Y_1(0) + Q_1(l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix})$$

Уравнение состояния 3-го участка:

$$Y_3(l) = A_3(l) * Y_3(0) + Q_3(l)$$

Граничные условия:

$$0 * N_1(0) + 1 * W_1(0) = 0$$
$$(0\ 1) * Y_1(0) = 0$$
$$1 * N_3(l) + 0 * W_3(l) = 0$$
$$(1\ 0) * Y_3(l) = 0$$
$$(1\ 0) * Y_3(l) = 0$$

$$(1\ 0) * Y_3(l) = (1\ 0)\left(A_3(l) * L_1 * A_2(l) * \left(A_1(l) * Y_1(0) + Q_1(l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}\right) + Q_3(l)\right) = 0$$

Пусть:

$$A = (1\ 0) * A_3(l) * L_1 * A_2(l) * A_1(l)$$
$$B = -(1\ 0) * A_3(l) * L_1 * A_2(l)\left(Q_1(l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}\right) - (1\ 0)Q_3(l)$$

Решим СЛАУ: $A * Y_1(0) = B$

Найдём матрицу А:

$$A = (1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ C)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Cl}{EA} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2Cl}{EA} & C \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2Cl}{EA} & C \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу В:

$$(1\ 0) * A_3(l) * L_1 * A_2(l) = (1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix} = (1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{C} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ C)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{Cl + EA}{EA} & C \end{pmatrix}$$

$$Q_1(l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ql \\ \frac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ql \\ \frac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

$$(1\ 0)Q_3(l) = (1\ 0)\begin{pmatrix} ql \\ \frac{qzl^2}{2EA} \end{pmatrix} = ql$$

$$B = -\begin{pmatrix} \frac{Cl + EA}{EA} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2ql \\ \frac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix} - ql = \begin{pmatrix} \frac{Cl + EA}{EA} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2ql \\ \frac{ql^2}{2EA} \end{pmatrix} - ql = \frac{(Cl + EA) * 2ql}{EA} + \frac{Cql^2}{2EA} - ql$$
$$= \frac{Cql^2 + 4ql(Cl + EA)}{2EA} - ql = \frac{Cql^2 + 4Cql^2 + 4qlEA - 2qlEA}{2EA} = \frac{5Cql^2 + 2qlEA}{2EA}$$

Тогда:

$$A * Y_1(0) = B$$

$$\begin{pmatrix}1 + \frac{2Cl}{EA} & C\end{pmatrix} Y_1(0) = \frac{5Cql^2 + 2qlEA}{2EA}$$

$$\begin{pmatrix}1 + \frac{2Cl}{EA} & C\end{pmatrix} Y_1(0) = \frac{5Cql^2 + 2qlEA}{2EA}$$

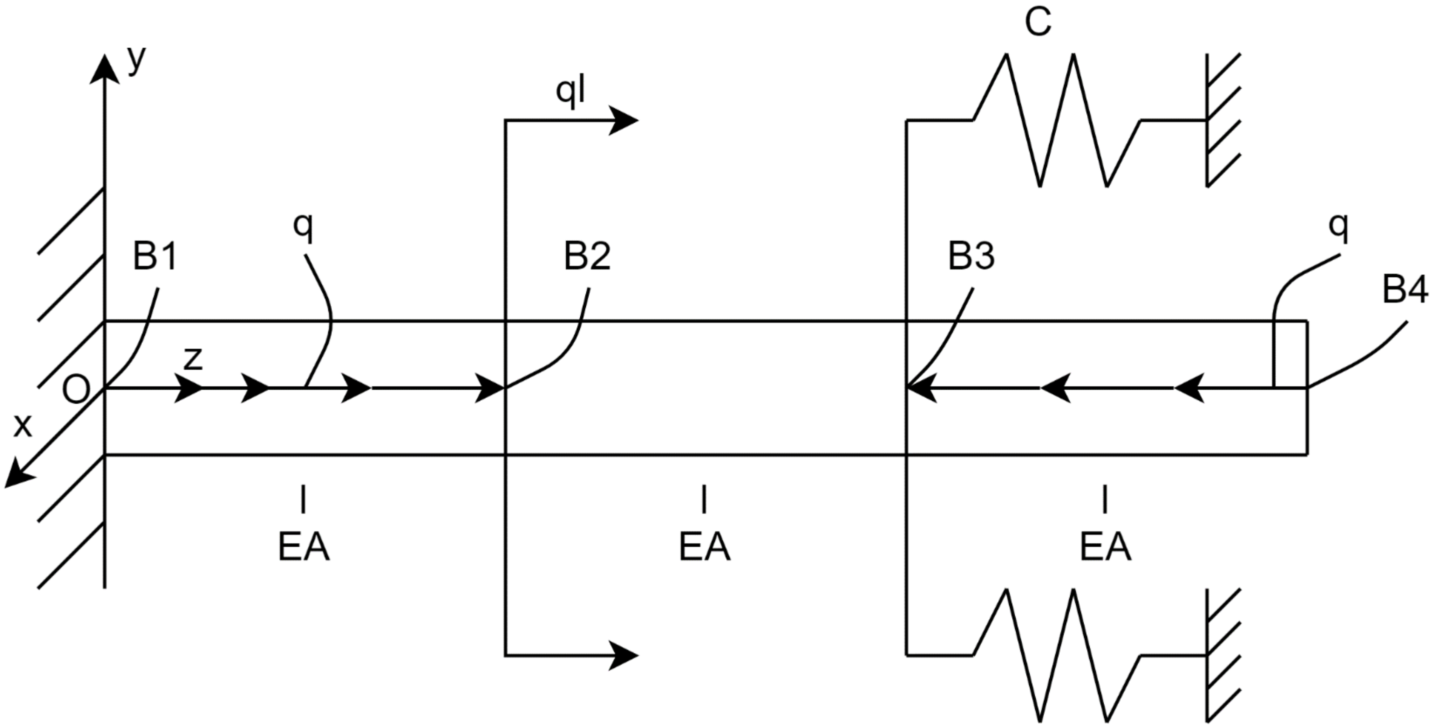
$$\frac{2Cl + EA}{EA} N_1(0) = \frac{5Cql^2 + 2qlEA}{2EA}$$

$$N_1(0) = \frac{5Cql^2 + 2qlEA}{2EA} * \frac{EA}{E2Cl + EAA}$$

$$N_1(0) = \frac{5Cql^2 + 2qlEA}{4Cl + 2EA}$$

Тогда: $Y_1(0) = \begin{pmatrix}\frac{5Cql^2+2qlEA}{4Cl+2EA} \\ 0\end{pmatrix}$

3. Обозначим узлы:



При C→0:

$$\lim_{C\to 0} Y_1(0) = \lim_{C\to 0}\begin{pmatrix}\frac{5Cql^2 + 2qlEA}{4Cl + 2EA} \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ql \\ 0\end{pmatrix}$$

$$Y_1(l) = A_1(l) * Y_1(0) + Q_1(l) = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ql \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-ql \\ \frac{-ql^2}{2EA}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \frac{ql^2}{2EA}\end{pmatrix}$$

$$Y_2(0) = Y_1(l) + \begin{pmatrix}-ql \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ \frac{ql^2}{2EA}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-ql \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-ql \\ \frac{ql^2}{2EA}\end{pmatrix}$$

$$Y_2(l) = A_2(l) * Y_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -ql \\ \frac{ql^2}{2EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ql \\ \frac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

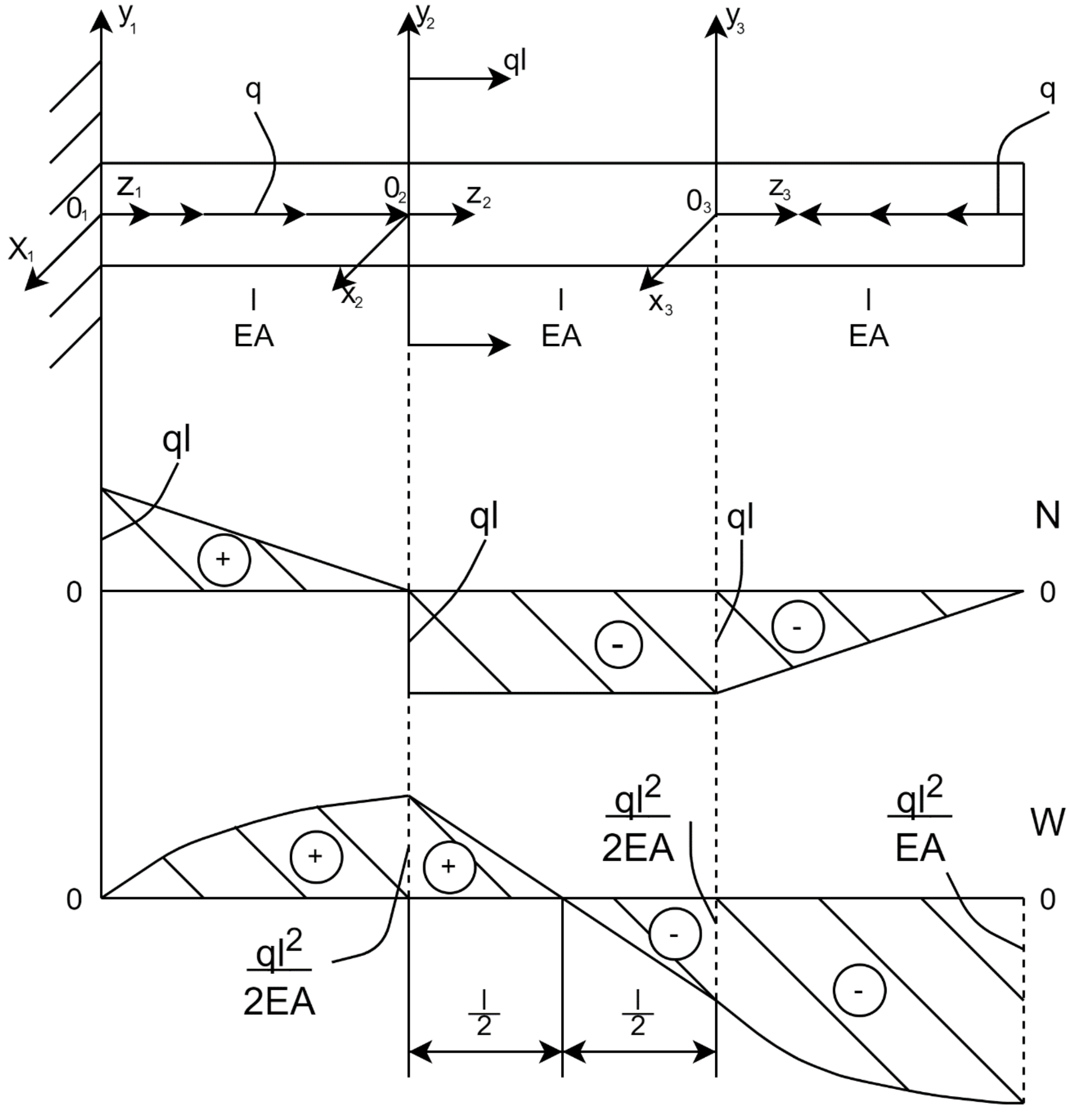
$$Y_3(0) = Y_2(l) = \begin{pmatrix} -ql \\ \frac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_3(l) = A_3(l) * Y_3(0) + Q_3(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ql \\ \frac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ql \\ \frac{ql^2}{2EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ql \\ \frac{-3ql^2}{2EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ql \\ \frac{ql^2}{2EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-ql^2}{EA} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$W_{B1} = 0, W_{B2} = \frac{ql^2}{2EA}, W_{B3} = \frac{-ql^2}{2EA}, W_{B4} = \frac{-ql^2}{EA}$$

Сравним значения перемещений со значениями, полученными в ДЗ №1:



Как видно из рисунка, полученные методом начальных параметров значения перемещений совпадают со значениями, полученными с помощью построения эпюр.

При С→∞:

$$\lim_{C\to\infty} Y_1(0) = \lim_{C\to 0}\begin{pmatrix} \dfrac{5Cql^2 + 2qlEA}{4Cl + 2EA} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5ql}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_1(l) = A_1(l) * Y_1(0) + Q_1(l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{5ql}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ \dfrac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5ql}{4} \\ \dfrac{5ql^2}{4EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ \dfrac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ql}{4} \\ \dfrac{3ql^2}{4EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_2(0) = Y_1(l) + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ql}{4} \\ \dfrac{3ql^2}{4EA} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3ql}{4} \\ \dfrac{3ql^2}{4EA} \end{pmatrix}$$

$$Y_2(l) = A_2(l) * Y_2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{l}{EA} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \dfrac{-3ql}{4} \\ \dfrac{3ql^2}{4EA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-3ql}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим 3-ий участок как отдельную систему:

$$(1\ 0)Y_3(l) = (1\ 0)\big(A_3(l)Y_3(0) + Q_3(l)\big) = 0$$

$$N_3(0) = -ql$$

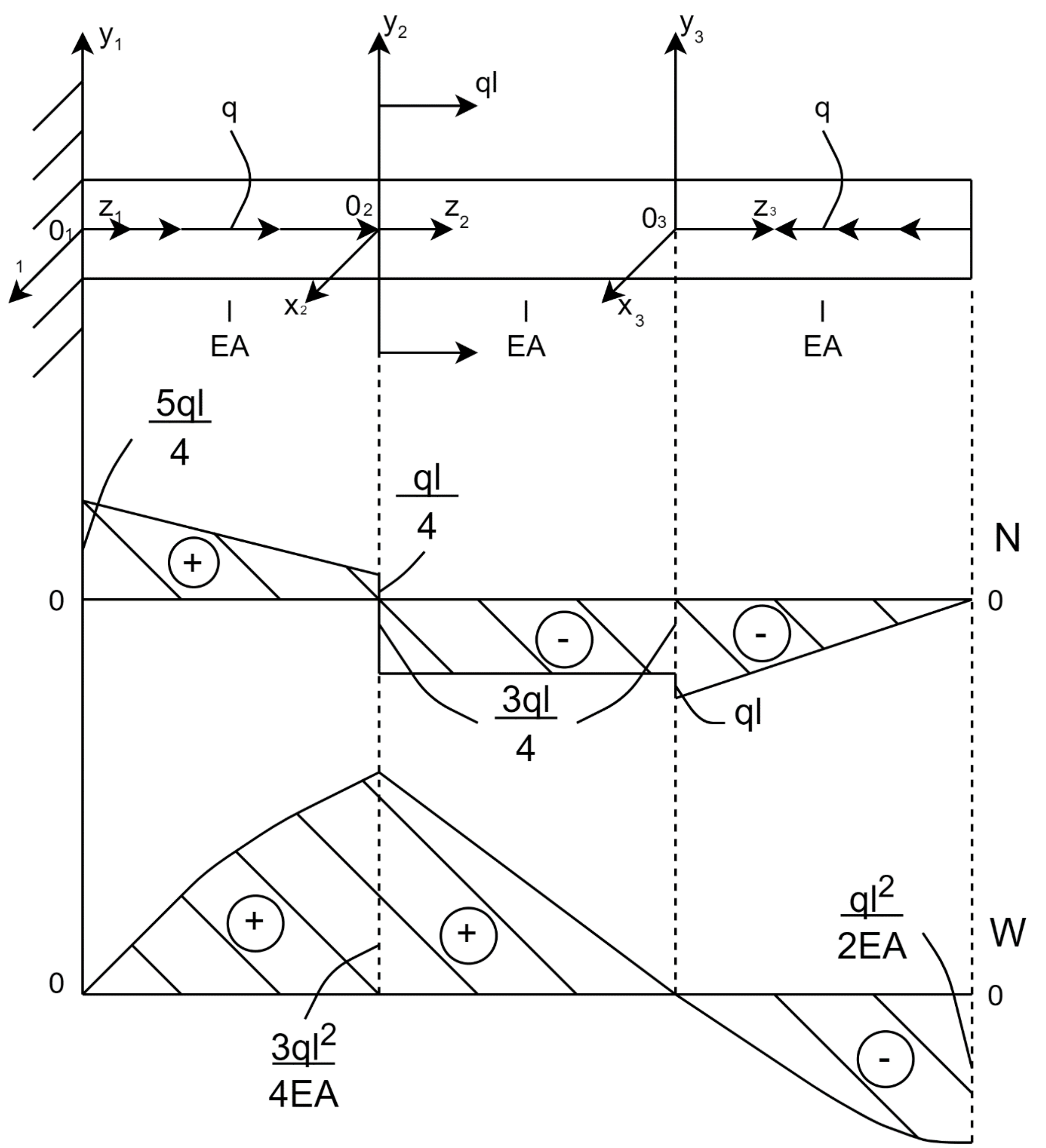
$$Y_3(0) = \begin{pmatrix} -ql \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_3(l) = A_3(l)Y_3(0) + Q_3(l) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-ql^2}{2EA} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$W_{B1} = 0, W_{B2} = \frac{3ql^2}{4EA}, W_{B3} = 0, W_{B4} = \frac{-ql^2}{2EA}$$

Сравним значения перемещений со значениями, полученными в ДЗ №1:



Как видно из рисунка, полученные методом начальных параметров значения перемещений совпадают со значениями, полученными с помощью построения эпюр.