Сергеева Д.К. РК6-56Б

Задача 6.9

Требуется найти все значения α и β, для которых матрица:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

является

1. вырожденной;

2. матрицей со строгим диагональным преобладанием;

3. положительно определенной.

Данная матрица является трехдиагональной.

1. Матрица является вырожденной, если ее определитель равен 0.

Определитель вычисляется следующим образом:

$$|A| = f_3 = a_3 f_2 - c_2 b_2 f_1 = a_3(a_2 f_1 - c_1 b_1 f_0) - c_2 b_2 f_1 = 2(2 * \alpha - \beta * 1 * 1) - 1 * 1 * \alpha = 3\alpha - 2\beta.$$

$$3\alpha - 2\beta = 0$$
$$\beta = 1.5\alpha$$

То есть при $\beta = 1.5\alpha$ матрица вырожденная.

2. У матрицы строгое диагональное преобладание, если $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.

То есть каждый элемент больше, чем сумма остальных в строке:

$$\begin{cases} \alpha > 1 \\ 2 > 1 + \beta \\ 2 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha > 1 \\ \beta < 1 \end{cases} (1)$$

То есть при выполнении (1) матрица со строгим диагональным преобладанием.

3. Матрица является положительно определенной, тогда и только тогда, когда существует разложение $A = LL^T$.

Запишем это разложение:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{21} l_{11} & l_{31} l_{11} \\ l_{11} l_{21} & l_{22}^2 + l_{21}^2 & l_{32} l_{22} + l_{21} l_{31} \\ l_{11} l_{31} & l_{22} l_{32} + l_{21} l_{31} & l_{33}^2 + l_{32}^2 + l_{31}^2 \end{bmatrix}$$

Где

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$
$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}, j \in [2,3]$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}^2}, i \in [2,3]$$

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ji} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} l_{jp}\right), i \in [2,2]$$

Вычислим значения

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{\alpha}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}}} = 0$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{a_{22} - \frac{a_{21}^2}{a_{11}}} = \sqrt{2 - \frac{\beta^2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\alpha - \beta^2}{\alpha}}$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{21} l_{31}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\alpha - \beta^2}{\alpha}}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\alpha - \beta^2}}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{2\alpha - \beta^2}} = \sqrt{\frac{\alpha - \beta^2}{2\alpha - \beta^2}}$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\alpha}^2 \\ \beta = \sqrt{\alpha} * \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \\ 1 = \sqrt{\alpha} * \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \\ 2 = \frac{2\alpha - \beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha} \qquad \to 1 = \beta \\ 2 = \frac{\alpha - \beta^2}{2\alpha - \beta^2} + \frac{\alpha}{2\alpha - \beta^2} \\ 1 = \sqrt{\frac{2\alpha - \beta^2}{\alpha} * \frac{\alpha}{2\alpha - \beta^2}} \end{cases}$$

Применим критерий Сильвестра. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы были положительны:

$$\delta_1 = \alpha$$

$$\delta_2 = 2\alpha - \beta$$

$$\delta_3 = \alpha \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3\alpha - 2\beta$$

Тогда:

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ 2\alpha - \beta > 0 \\ 3\alpha - 2\beta > 0 \end{cases}$$

Отсюда при $\beta = 1$ получаем, что: $\alpha > \frac{2}{3}$.

При $\alpha > \frac{2}{3}$ и $\beta = 1$ матрица является положительно определенной.