Сергеевой Дианы РК6-26Б
20-вариант КР по ФНП

① Найти производную ф-ии $u = xy + yz - xz$ в т. $M(1;1;1)$ в $\overline{MN}$; $N(3;2;1)$

$\overline{MN}(2;1;0)$

1) $\overline{MN_0} = \dfrac{\overline{MN}}{|\overline{MN}|} = \dfrac{2i+j}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}i + \dfrac{1}{\sqrt{5}}j$

Направляющие cos:

$\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$ $\quad\cos\beta = 1/\sqrt{5}$

$$\frac{\partial u}{\partial l_{MN}} = u'_x(M)\cdot\cos\alpha + u'_y(M)\cdot\cos\beta + u'_z(M)\cos\gamma$$

$u'_x = y - z$ $\quad u'_x(M) = 0$

$u'_y = x + z$ $\quad u'_y(M) = 2$

$u'_z = y - x$ $\quad u'_z(M) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial l_{MN}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

2) $\operatorname{grad} u = u'_x(M)\cdot\bar{i} + u'_y(M)\cdot\bar{j} + u'_z(M)\bar{k} =$

$= 2j$

$$\frac{\partial u}{\partial l_{grad}} = |\operatorname{grad} u(M)| = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: $2/\sqrt{5}$; 2

⑤ Для ф-ции $(xy)^z - \arcsin\frac{\sqrt{z}}{x^2+y} - y/\sqrt{x} - \frac{\pi}{3}$

Найти $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$ в т. $M(1;1;3)$

$$f(x;y;z) = (xy)^z - \arcsin\frac{\sqrt{z}}{x^2+y} - \frac{y}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{3}$$

$$f'_x = y^z \cdot z \cdot x^{z-1} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z}{(x^2+y)^2}}} \cdot \sqrt{z} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x^2+y)^2} \cdot 2x - y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} =$$

$$= y^z \cdot z \cdot x^{z-1} + \frac{\sqrt{z} \cdot 2x}{(x^2+y)^2} \cdot \sqrt{\frac{(x^2+y)^2}{(x^2+y)^2 - z}} + \frac{y}{2\sqrt{x^3}}$$

$$f'_y = x^z \cdot z \cdot y^{z-1} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z}{(x^2+y)^2}}} \cdot \sqrt{z} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(x^2+y)^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'_z = (xy)^z \cdot \ln xy - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{z}{(x^2+y)^2}}} \cdot \frac{1}{x^2+y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = -\frac{(7+2\sqrt{3})6}{2\sqrt{3}} = -7\sqrt{3} - 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(M) = -\frac{(4+\sqrt{3})}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = -4\sqrt{3} + 3$$

Ответ: $-7\sqrt{3}-6$; $-4\sqrt{3}+3$

④ На поверхности $x^4+y^4-z^4-1=0$ найти точки, в котор. касат. плоскость параллельна $x+8y-z+2=0$.
Составить ур-е нормалей к поверхности в этих точках
ур-е касат. в точке $(x_0; y_0; z_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3 \quad \frac{\partial f}{\partial z}=(-4)\cdot z^3$$

Чтобы 2 плоскости были параллельны, нужно чтобы выполнялось условие: $\overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

$$\frac{4x^3}{1}=\frac{4y^3}{8}=\frac{(-4)\cdot z^3}{-1}$$

$$\begin{cases} 32x^3=4y^3 \\ -4y^3=(-4)\cdot 8\cdot z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3=y^3 \\ y^3=8\cdot z^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=y^3/8 \\ z^3=y^3/8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y/2 \\ z=y/2 \end{cases}$$

$$\frac{y^4}{16}+y^4-\frac{y^4}{16}-1=0$$

$$y^4=1$$

$$y=\pm 1$$

Ответ:
1) Точки $(1/2; 1; 1/2)$ и $(-1/2; -1; -1/2)$

2) Ур-я нормалей в этих точках:

$$\frac{x-1/2}{1/2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1/2}{-1/2} \quad \text{для т. } \left(\tfrac{1}{2};1;\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\frac{x+1/2}{-1/2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1/2}{1/2} \quad \text{для т. } \left(-\tfrac{1}{2};-1;-\tfrac{1}{2}\right)$$

⑥ Найти $\frac{\partial u}{\partial t}$, если $u = z\,\mathrm{arctg}(xy)$, $x = 7^{\cos t}$, $y = t\sqrt{t}$, $z = \mathrm{ctg}\,t$

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{ctg}(t)\left(\mathrm{arctg}(7^{\cos t}\cdot t\sqrt{t})\right)' + \mathrm{arctg}(7^{\cos t}\cdot t\sqrt{t})\cdot(\mathrm{ctg}\,t)'$$

$$(\mathrm{ctg}\,t)' = -\frac{1}{\sin^2 t}$$

$$\left(\mathrm{arctg}(7^{\cos t}\cdot t\sqrt{t})\right)' = \frac{(7^{\cos t}\,t\sqrt{t})'}{1+7^{2\cos t}\,t^3}$$

$$(7^{\cos t}\cdot t^{3/2})' = t^{2/3}\,(7^{\cos t})' + 7^{\cos t}\cdot \tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{t}$$

$$(7^{\cos t})' = 7^{\cos t}\cdot\log(7)\cdot(\cos t)' = -7^{\cos t}\log(7)\sin t$$

Ответ: $$\frac{du}{dt} = -\mathrm{arctg}(7^{\cos t}\cdot t\sqrt{t})\cdot\frac{1}{\sin^2 t} + \mathrm{ctg}\,t\,\frac{7^{\cos t}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{t} - t^{3/2}\,7^{\cos t}\cdot\log(7)\sin t}{1+7^{2\cos t}\,t^3}$$

③ Исследовать ф-ю на экстремум:

$$f(x;y) = -\frac{1}{3}x^3 + 2xy - y^2 + 8y + 1$$

$$f'_x = -x^2 + 2y$$

$$f'_y = 2x - 2y + 8$$

$$\begin{cases} -x^2 + 2y = 0 \\ 2x - 2y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y = x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = 4$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y = 2 \qquad y = 8$$

Точки $(-2;2)$ и $(4;8)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

Для точки $(-2;2)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -12 < 0 \Rightarrow \text{точка максимума}$$

Для т. $(4;8)$:

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 12 > 0 \Rightarrow \text{точка минимума}$$

og(7)sint

Ответ: точка максимума: $(-2;2)$

точка минимума: $(4;8)$