Дома: ОЛ-8: 3.12, 3.180 или ОЛ-9: 4.12, 4.176; + ОЛ-10: 6.45, 7.4

Колебания и волны.

Запишем второй закон Ньютона для тела, движущегося под действием квазиупругой силы вблизи точки устойчивого положения равновесия

$$ma_x = F_x, \text{где } F_x = -k_0(x - x_0)$$

Введем ось X так, чтобы $x_0 = 0$, тогда уравнение движения примет вид $ma_x = -k_0 x$. С учетом зависимости $a_x = \ddot{x}$ это уравнение примет вид $m\ddot{x} = -k_0 x$ или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\omega_0^2 = \frac{k_0}{m} > 0$. Это *линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.* Данное уравнение описывает *колебательный процесс*, параметры которого изменяются периодически с течением времени.

Решением этого уравнения являются гармонические функции от времени t

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \text{ или } x = A\sin(\omega_0 t + \beta),$$

описывающие смещение от равновесного значения $x_0 = 0$.

По сути, обе формы записи равноправны и одна переходит в другую, например, при $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

Величина, равная $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, называется *периодом колебаний,* величина, равная $\nu = \frac{1}{T}$, называется *частотой колебаний,* а величину, равную $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ называют *круговой* или *циклической частотой* колебаний. Величина

$A > 0$ называется амплитудой колебаний, $(\omega_0 t + \alpha) -$ *фаза колебаний*, $\alpha -$ *начальная фаза колебаний*.

В этом колебательном процессе с течением времени сохраняется величина механической энергии $W_{\text{мех}} = \frac{m\dot{x}}{2} + \frac{k_0 x^2}{2} = const$. Действительно:

$$\frac{dW_{\text{мех}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{2} + \frac{k_0 x^2}{2}\right) = 2m\frac{\dot{x}}{2}\ddot{x} + 2k_0\frac{x}{2}\dot{x} = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) = 0.$$

Описанный выше колебательный процесс принято называть *свободными незатухающими колебаниями.*

4.25(ОЛ-9). Однородный стержень положили на два быстро вращающихся блока, как показано на рис. 3.7. Расстояние между осями блоков $l = 20$см, коэффициент трения между стрежнем и блоками $k = 0{,}18$. Показать, что стержень будет совершать гармонические колебания. Найти их период.

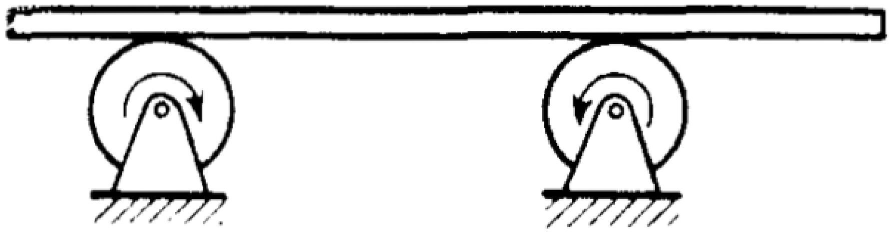
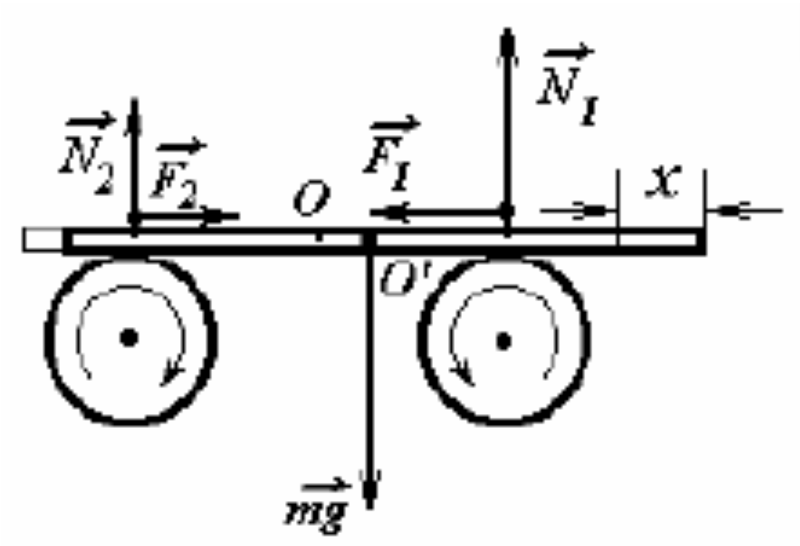


Рис. 3.7

Решение:



Причина возникновения колебаний становится ясной из рисунка. Сдвинем однородный стержень на расстояние x, например, вправо. Поскольку центр тяжести (точка O' на рисунке) стрежня при этом приблизится к правому цилиндру, то сила реакции опоры $\vec{N_1}$ станет по величине больше $\vec{N_2}$.

$$\begin{cases} N_1 = mg\dfrac{l+2x}{2l} \\ N_2 = mg\dfrac{l-2x}{2l} \end{cases}, N_1 > N_2 (0 \le x \le \frac{l}{2})$$

Данные уравнения достаточно легко можно получить из условия равновесия стержня по вертикали (движение отсутствует) и отсутствия его вращения относительно центра масс. Так как цилиндры вращаются навстречу друг другу, то силы трения скольжения $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ также направлены навстречу друг другу. Их геометрическая сумма направлена к точке начального равновесия O и равна:

$$\Delta F = F_1 - F_2 = kN_1 - kN_2 = k(N_1 - N_2) = kmg\frac{2x}{l}$$

Таким образом, уравнение движения стрежня принимает хорошо известный вид:

$$ma = -kmg\frac{2x}{l},$$

Данное уравнение описывает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2kg}} = \pi\sqrt{\frac{2l}{kg}} = 1{,}5c.$$

4.57(ОЛ-9). Легкий тонкостенный сферический сосуд радиуса R целиком заполнен водой. Сосуд укреплен на легком жестком стержне (рис.3.16). Расстояние между точкой подвеса O и центром сосуда равно l . Во сколько раз изменится период малых колебаний такого маятника после того, как вода замерзнет? Вязкостью воды пренебречь.

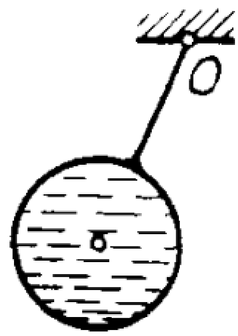


Рис.3.16

Решение:

Если вода замерзла, система, состоящая из легкого стержня и замороженной воды в полом шаре, представляет собой физический маятник в очень хорошем приближении, потому что мы можем считать всю систему жесткой. Для таких систем период колебаний определяется выражением

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{1 + \frac{k^2}{l^2}}\text{, где } k^2 = \frac{2}{5}R^2 - \text{ радиус круговых движений сферы}$$

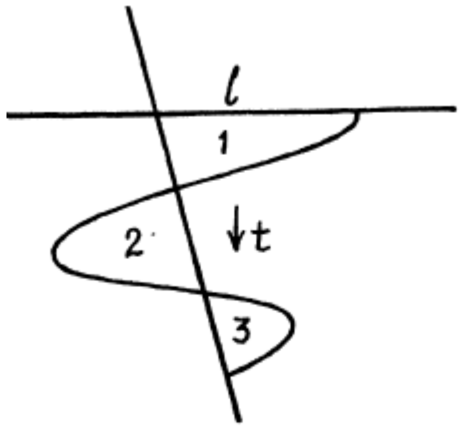
Ситуация другая, когда вода разморожена. Когда пренебрегают диссипативными силами (вязкостью), мы имеем дело с идеальными жидкостями. Такие жидкости мгновенно реагируют на (неуравновешенные) внутренние напряжения. Предположим, что сфера с жидкой водой выполняет небольшие колебания. Тогда часть жидкости над центром сферы будет иметь большее ускорение, чем участок ниже центра, потому что линейное ускорение любого элемента в этом случае равно угловому ускорению элемента, умноженного на расстояние элемента от центра подвески. Тогда, как очевидно в системе отсчета, движущейся с центром масс, появится неуравновешенная пара сил, которая заставит жидкость двигаться (вращаться), чтобы уравновесить различия в ускорении. Таким образом, для случая идеальных жидкостей маятник должен двигаться таким образом, чтобы элементы жидкости имели те же ускорения. Это означает, что мы имеем простой (математический) маятник с периодом колебаний:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Таким образом, $T_1 = T_0\sqrt{1+\frac{2}{5}(\frac{R}{l})^2}$

4.79(ОЛ-9). Частицу сместили из положения равновесия на расстояние $l = 1{,}0$см и предоставили самой себе. Какой путь пройдет, колеблясь, эта частица до полной остановки, если логарифмический декремент затухания $\lambda = 0{,}020$?

Решение:



Из $x = a_0^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$, получаем

$(x)_{t=0} = l = a_0\cos\alpha$

$0 = (\dot{x})_{t=0} = -\beta a_0\cos\alpha - \omega a_0\sin\alpha$

Тогда $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\beta}{\omega}$ или $cos\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\beta^2}}$

и $x = \frac{l\sqrt{w^2+\beta^2}}{\omega} e^{-\beta t} \cos\left(\omega t - tg^{-1}\frac{\beta}{w}\right)$

$x = 0; t = \frac{1}{\omega}(n\pi + \frac{\pi}{2} + tg^{-1}\frac{\beta}{w})$

Общее расстояние, пройденное на первом круге – l.

Чтобы получить максимальное смещение на втором круге, отметим, что

$\dot{x} = [-\beta \cos\left(\omega t - tg^{-1}\frac{\beta}{w}\right) - \omega \sin\left(\omega t - tg^{-1}\frac{\beta}{w}\right)]$

$x\frac{l\sqrt{w^2+\beta^2}}{\omega} e^{-\beta t} = 0$

когда $\omega t = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

Таким образом, $\ddot{x}_{max} = -a_0 e^{-\frac{\pi\beta}{\omega}} cos\alpha = -le^{-\frac{\pi\beta}{\omega}}$ при $t = \frac{\pi}{\omega}$, так что расстояние, пройденное во втором круге $= 2le^{-\frac{\pi\beta}{\omega}}$.

Общее пройденное расстояние

$$= l + 2le^{-\frac{\pi\beta}{\omega}} + 2le^{-\frac{2\pi\beta}{\omega}} + \cdots = l + \frac{2le^{-\frac{\pi\beta}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi\beta}{\omega}}} = l + \frac{2l}{e^{\frac{\pi\beta}{\omega}} - 1} = l\frac{e^{\frac{\pi\beta}{\omega}} + 1}{e^{\frac{\pi\beta}{\omega}} - 1}$$

$$= l\frac{1 + e^{\frac{\lambda}{2}}}{e^{\frac{\lambda}{2}} - 1}$$

где $\lambda = \frac{2\pi\beta}{\omega}$ –логарифмический декремент. Подстановка дает 2м.

4.177(ОЛ-9). В однородной упругой среде распространяется плоская волна $\xi = \mathrm{a}\cos(\omega t - kx)$. Изобразить для t=0:

1) графики зависимостей от x величин $\xi, \frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial t}$;
2) направление скорости частиц среды в точках, где $\xi = 0$, если волна продольная, поперечная;
3) примерный график распределения плотности среды $\rho(x)$ для продольной волны.

Решение:

По условию:

$\xi = \mathrm{a}\cos(\omega t - kx)$

При $t = 0$,

$\xi = a\cos kx$

$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -a\omega \sin(\omega t - kx)$

$\frac{\partial \xi}{\partial t} = a\omega sinkx, t = 0.$

Тогда $\frac{\partial \xi}{\partial x} = +a\omega \sin(\omega t - kx)$ и $t = 0$

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -aksinkx$