

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский государственный университет имени Н.Э.  
Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им Н.Э.  
Баумана)

Факультет «Робототехника и комплексная автоматизация»

Кафедра «Системы автоматизированного проектирования»

**Домашнее задание №1 по дисциплине**  
**«Прикладная механика»**

**Вариант 1**

Выполнил: студент группы РК6-36Б, Сергеева Д.К.

Проверил: декан факультета РК, Шашурин Г.В.

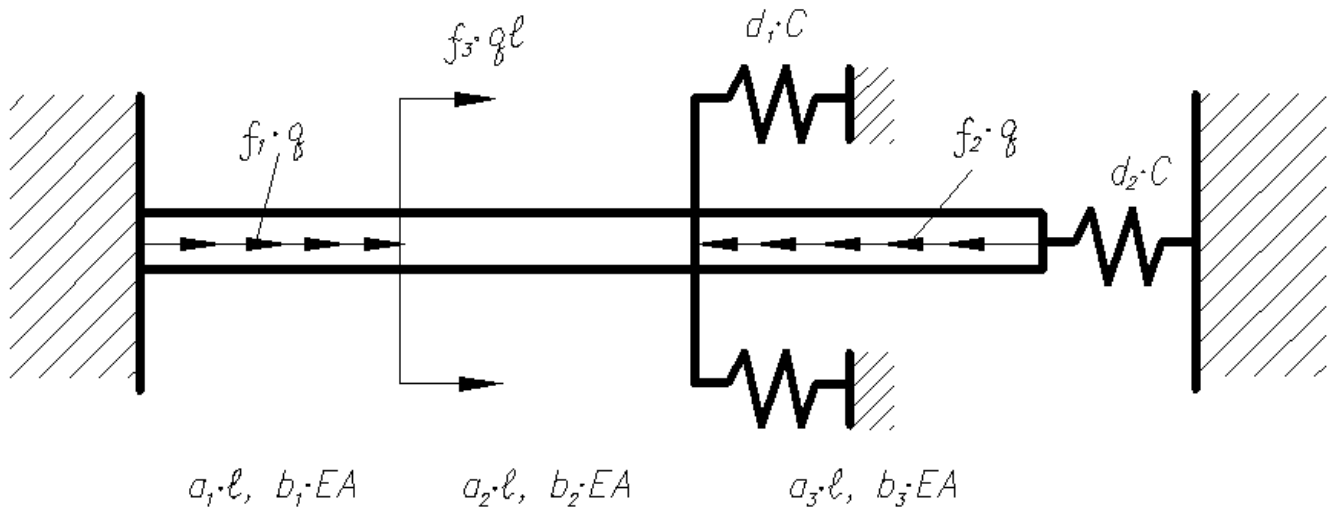
Москва

2020

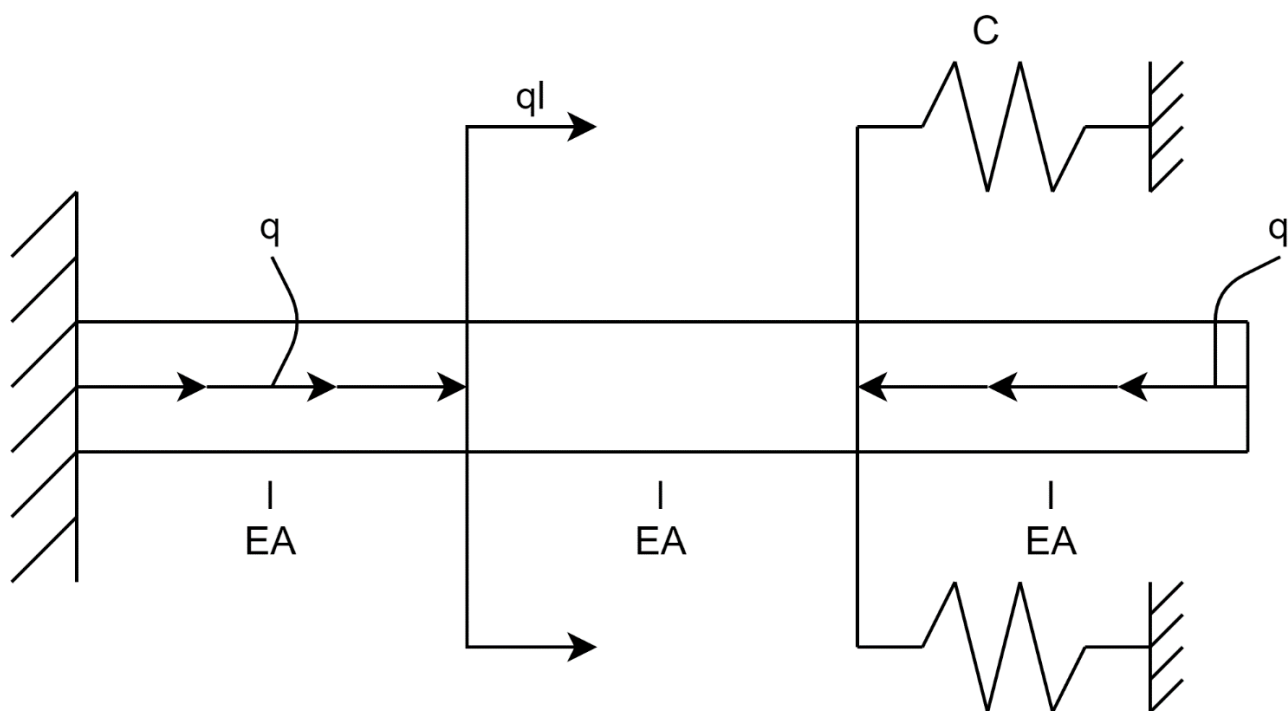
## Статически неопределимая система растяжения-сжатия.

Для заданной системы требуется:

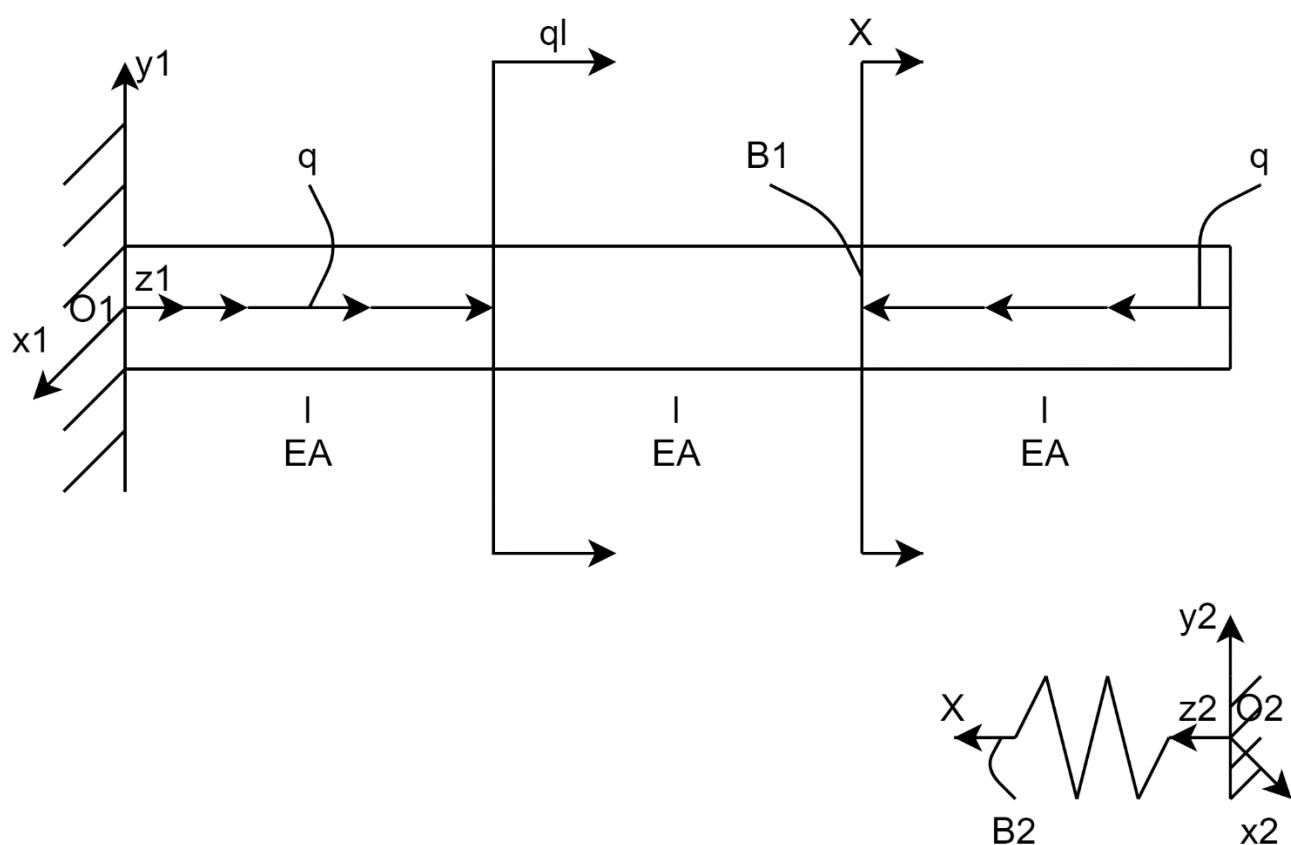
1. Используя метод сил, раскрыть статическую неопределимость. Найти силу в пружине в зависимости от жесткости  $C$ . Вычислить значения силы в пружине при  $C \rightarrow 0$  и при  $C \rightarrow \infty$ .
2. Изобразить систему при  $C \rightarrow 0$  и при  $C \rightarrow \infty$ . Для каждой системы построить эпюры осевой силы  $N$  и осевого преремещения поперечного сечения  $W$ . Проверить равенство вычисленной в п.1 силы в пружине и значения реакций соответствующих связей. Вычислить работу внешних сил и потенциальную энергию деформации системы при  $C \rightarrow 0$  и при  $C \rightarrow \infty$ .



№	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$d_1$	$d_2$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1



Эквивалентная система:

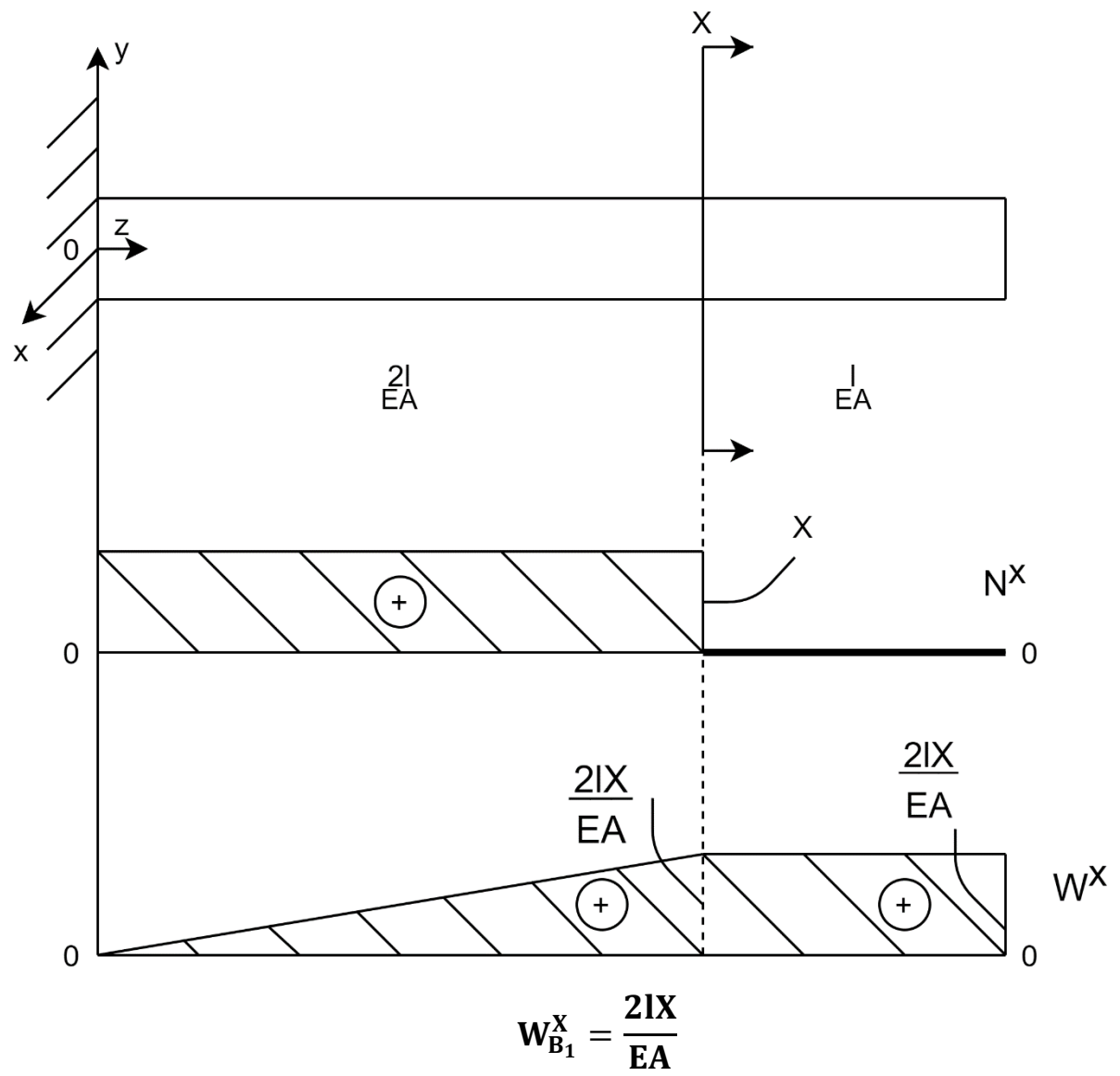


$$W_{B_1} = W_{B_1}^X + W_{B_1}^q$$

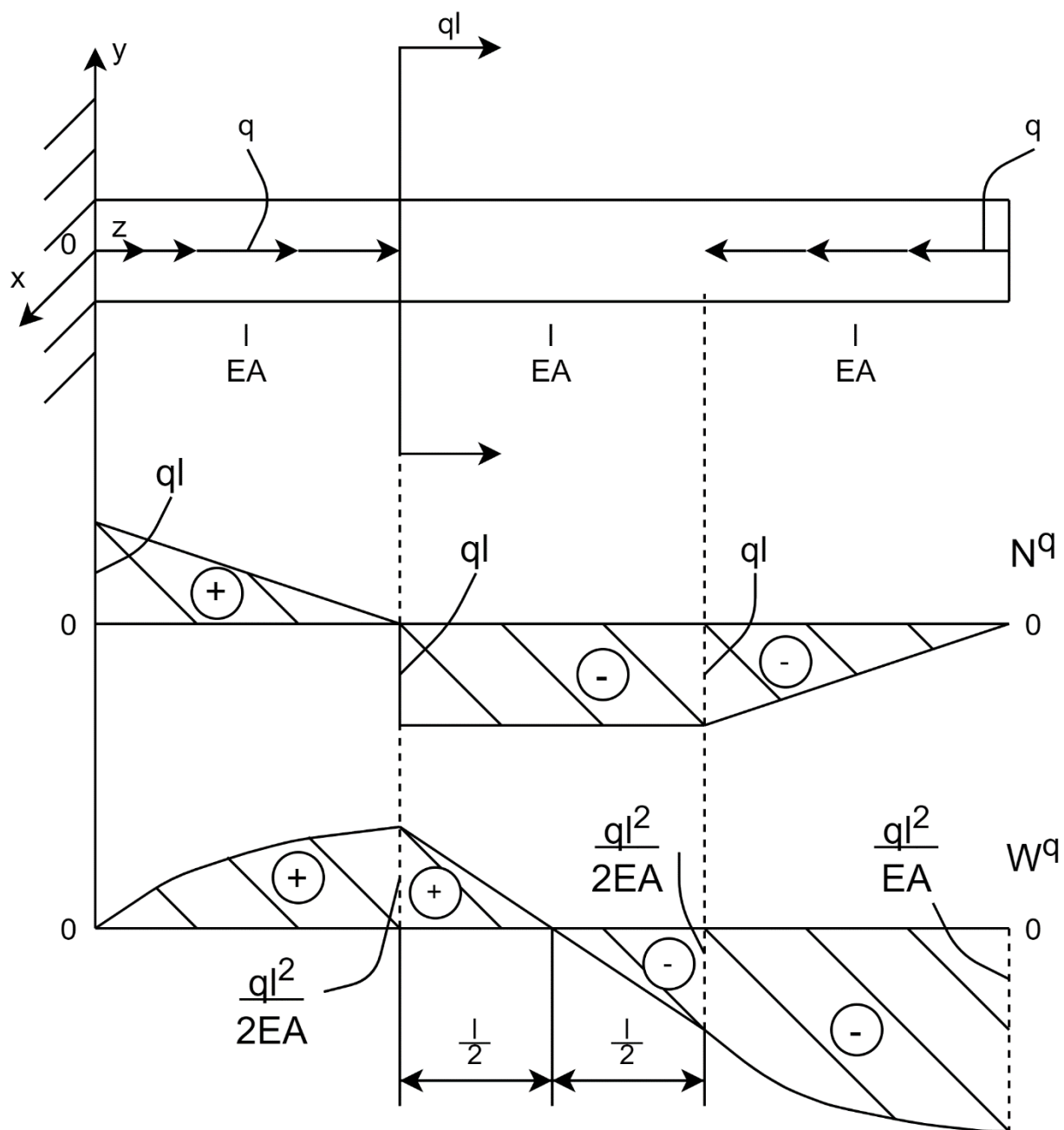
$$W_{B_2} = W_{B_2}^X$$

$$W_{B_1} = -W_{B_2}$$

1.  $X \neq 0, q = 0$



2.  $X = 0, q \neq 0$



$$W_{B_1}^q = \frac{-ql^2}{2EA}$$

$$W_{B_1} = \frac{2lX}{EA} + \left(\frac{-ql^2}{2EA}\right)$$

$$W_{B_2} = \frac{X}{C}$$

Т.к.  $W_{B_1} = -W_{B_2}$ :

$$\frac{2lX}{EA} - \frac{ql^2}{2EA} = \frac{-X}{C}$$

$$\frac{2lX}{EA} + \frac{X}{C} = \frac{ql^2}{2EA}$$

$$X\left(\frac{2l}{EA} + \frac{1}{C}\right) = \frac{ql^2}{2EA}$$

$$X = \frac{ql^2}{2EA} \frac{1}{\frac{2lC + EA}{EAC}}$$

$$X = \frac{ql^2}{2EA} \frac{EAC}{(2lC + EA)}$$

$$X = \frac{ql^2 C}{2(2lC + EA)}$$

Силы в пружине:

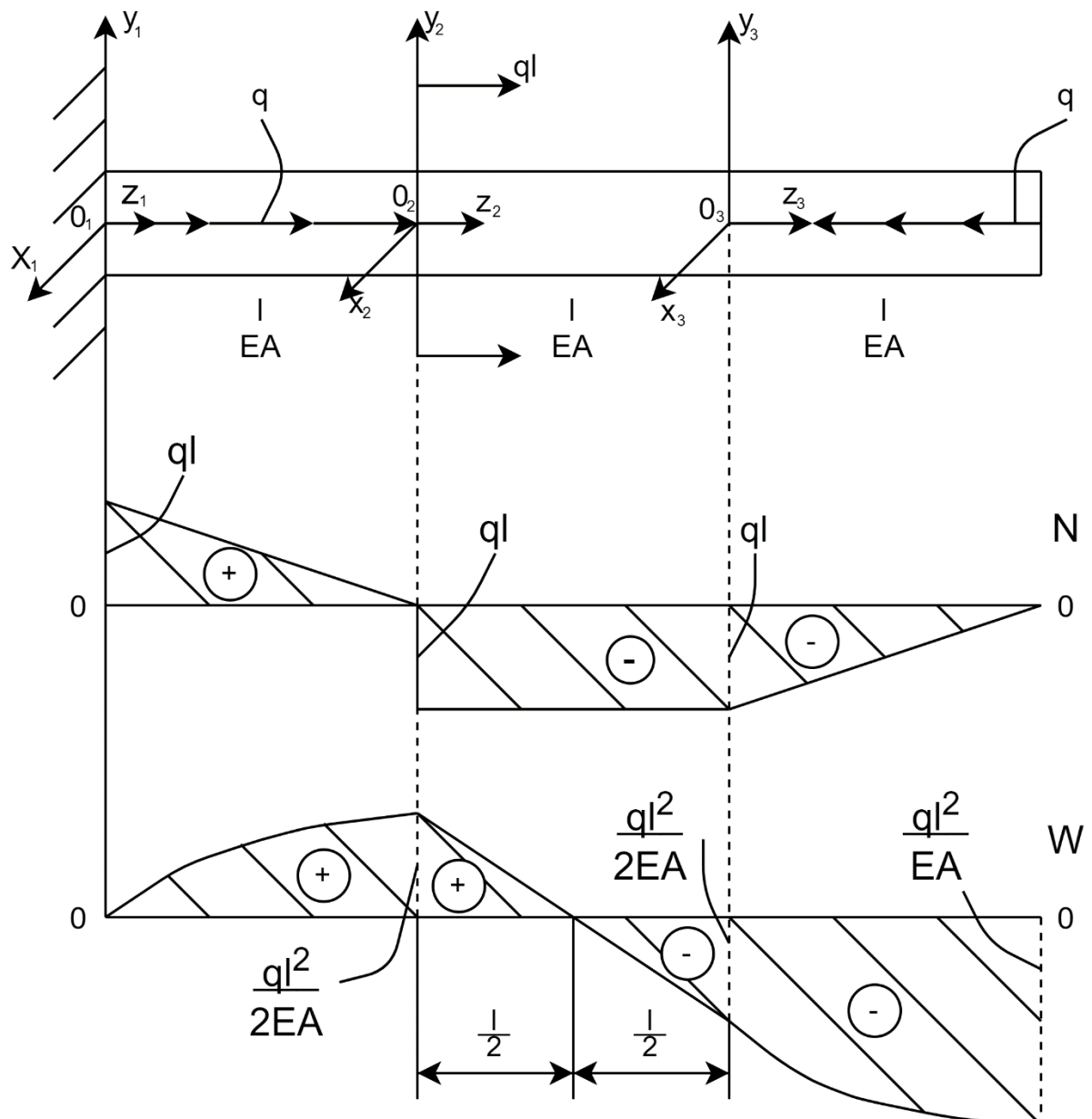
1. При  $C \rightarrow 0$ :

$$\lim_{C \rightarrow 0} \frac{qCl^2}{2(2lC + EA)} = 0 \Rightarrow X \rightarrow 0$$

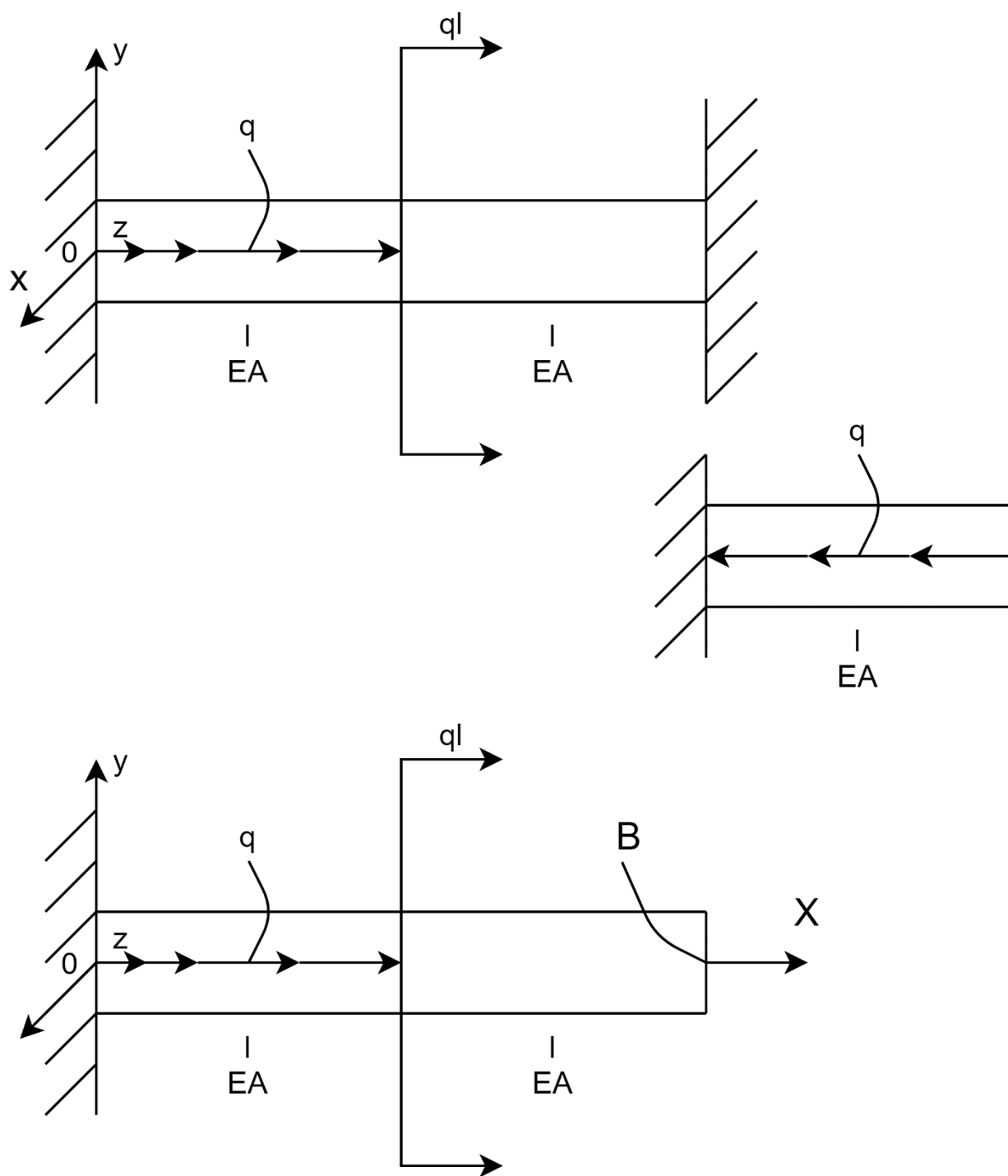
2. При  $C \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \frac{qCl^2}{2(2lC + EA)} = \frac{ql^2}{2} \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{C}{2lC + EA} = \frac{ql^2}{2} \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{2l + \frac{EA}{C}} = \frac{ql}{4} \Rightarrow X \rightarrow \frac{ql}{4}$$

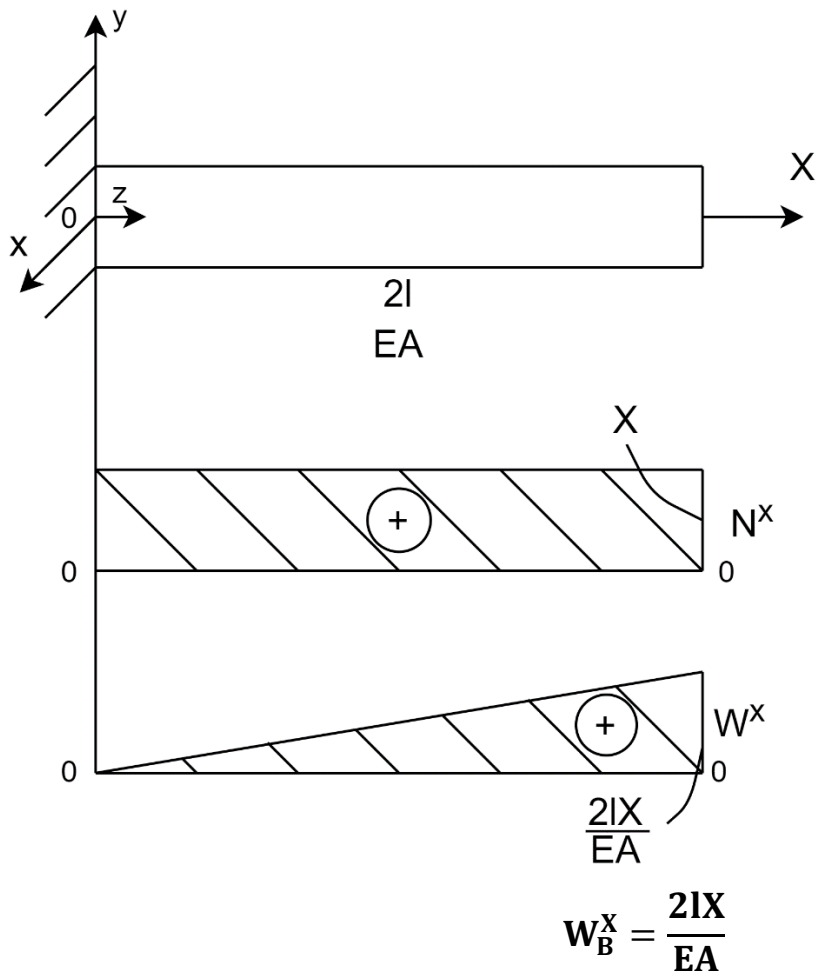
Система при  $C \rightarrow 0$ :



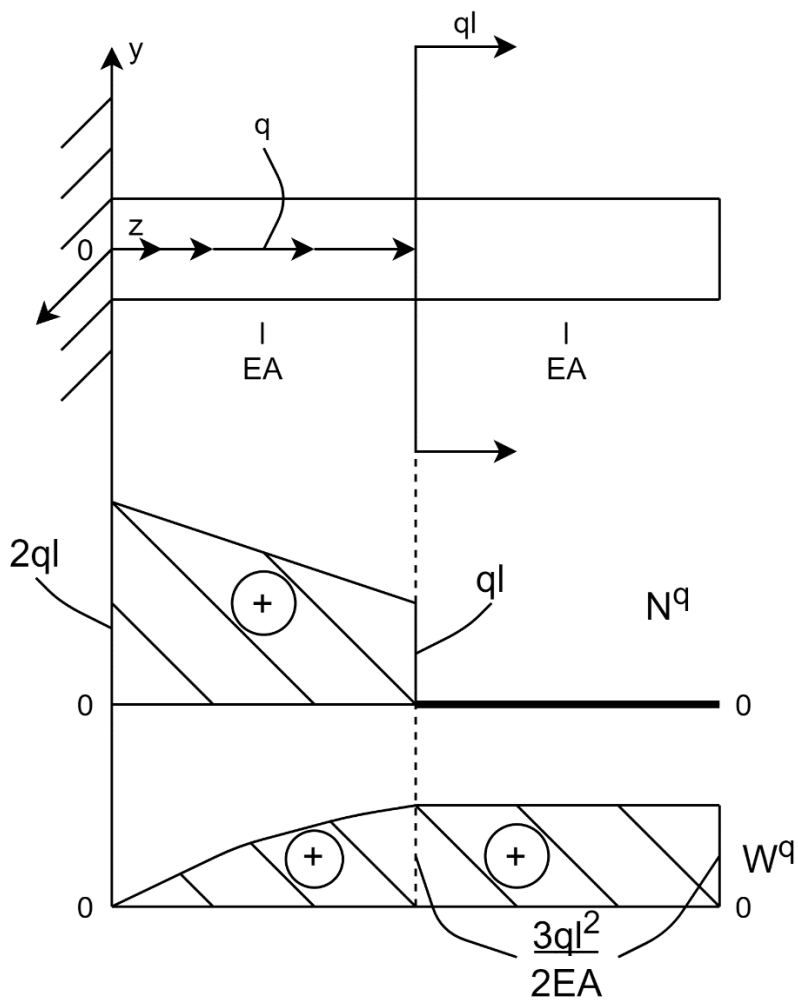
Система при  $C \rightarrow \infty$ :



1.  $X \neq 0, q = 0$



2.  $X = 0, q \neq 0$





$$W_B^q = \frac{3ql^2}{2EA}$$

$$W_B = 0$$

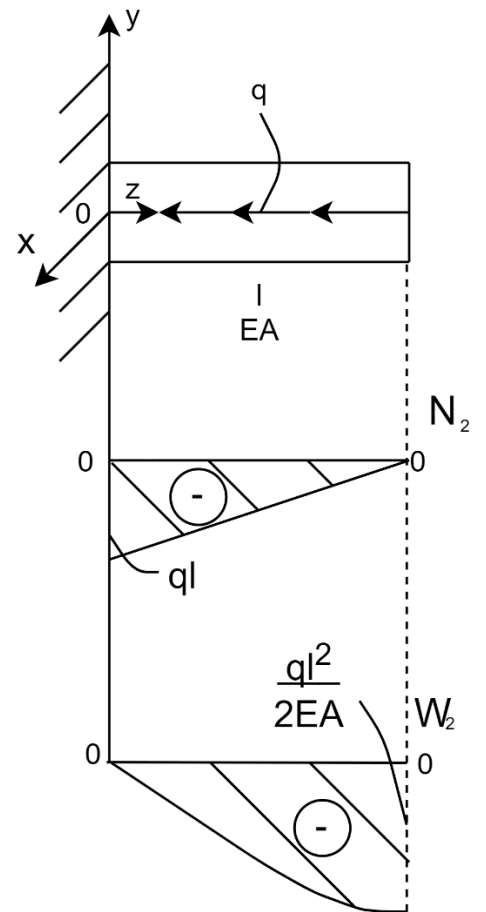
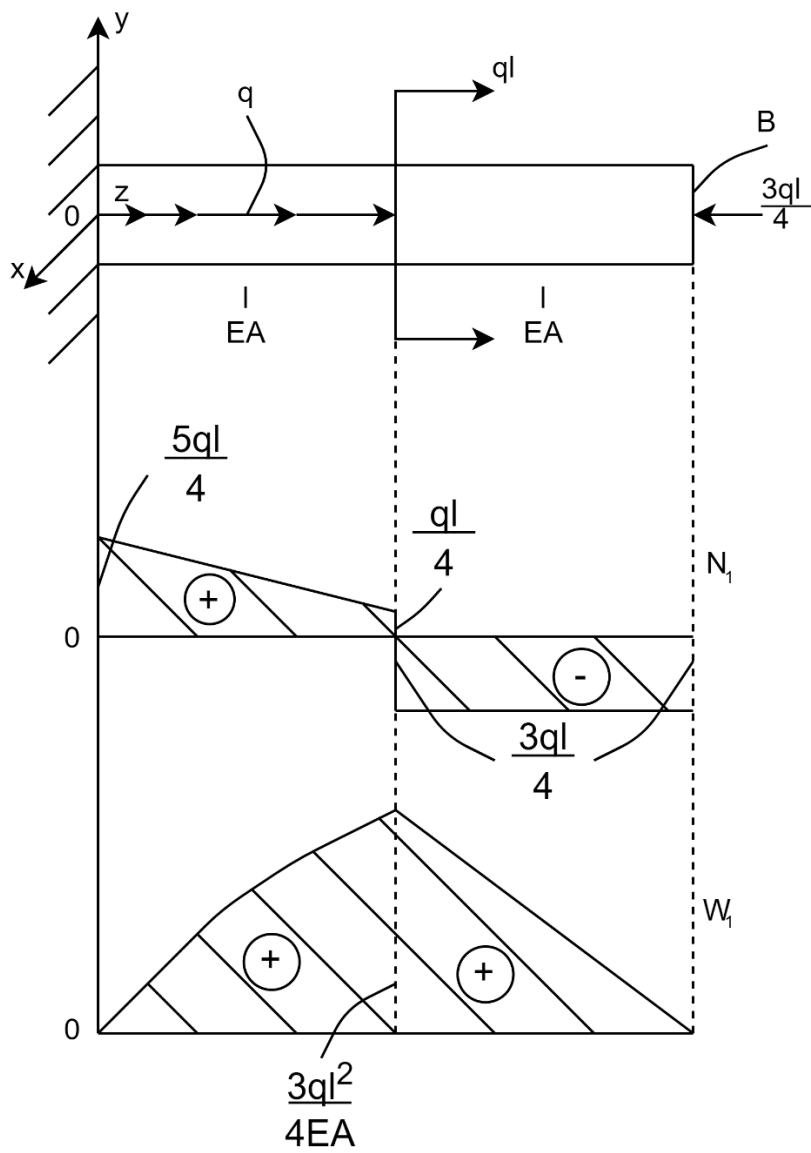
Т.к.  $W_B = W_B^q + W_B^X$  :

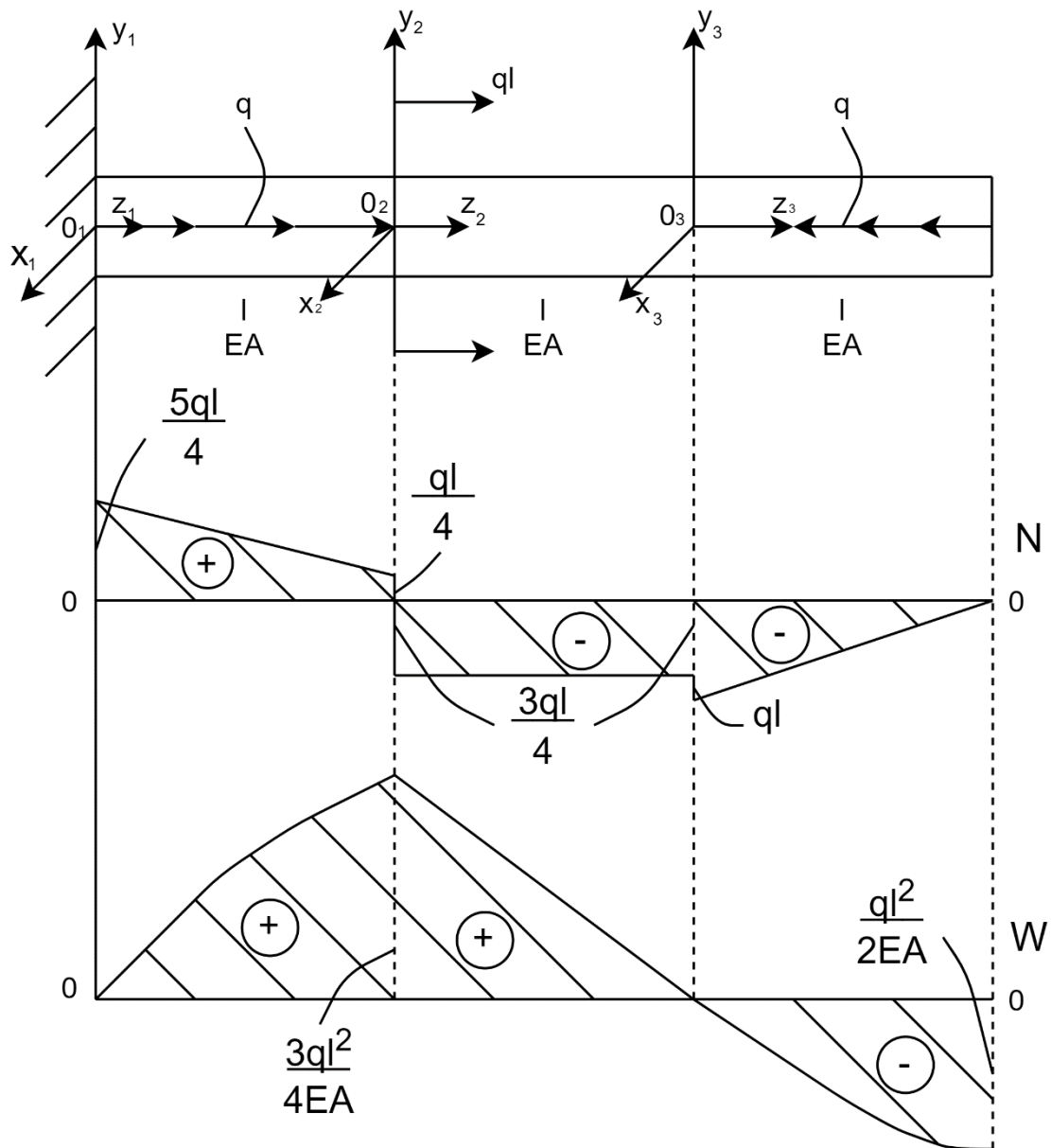
$$0 = \frac{2lX}{EA} + \frac{3ql^2}{2EA}$$

$$0 = 2X + \frac{3ql}{2}$$

$$2X = -\frac{3ql}{2}$$

$$X = -\frac{3ql}{4}$$





Найдём потенциальную энергию деформаций и работу внешних сил.

1. При  $C \rightarrow 0$ .

Разбиваем на 3 участка:

I.  $N_1 = -qz_1 + ql$

$$W = W_0 + \int_0^z \frac{N dz}{EA}$$

$$W_1 = \int_0^z \frac{q(1-z_1) dz_1}{EA} = \frac{q}{EA} \int_0^z (1 - z_1) dz_1 = \frac{q}{EA} \left( \int_0^z 1 dz_1 - \int_0^z z_1 dz_1 \right) = \frac{q}{EA} \left( lz_1 - \frac{z_1^2}{2} \right) = \frac{qz_1}{EA} \left( 1 - \frac{z_1}{2} \right)$$

II.  $N_2 = -ql$

$$W_2 = \frac{ql(1 - \frac{1}{2})}{EA} + \int_0^z \frac{-ql dz_2}{EA} = \frac{ql^2}{2EA} + \frac{-ql}{EA} \int_0^z dz_2 = \frac{ql^2}{2EA} + \frac{-qlz_2}{EA}$$

$$= \frac{ql^2 - 2qlz_2}{2EA} = \frac{ql(1 - 2z_2)}{2EA}$$

III.  $N_3 = -ql + qz_3$

$$\begin{aligned}
 W_3 &= \frac{ql(1-2l)}{2EA} + \int_0^z \frac{q(z_3-l)dz_3}{EA} = \frac{-ql^2}{2EA} + \frac{q}{EA} \left( \int_0^z z_3 dz_3 - l \int_0^z dz_3 \right) \\
 &= \frac{-ql^2}{2EA} + \frac{q}{EA} \left( \frac{z_3^2}{2} - lz_3 \right) = \frac{-ql^2}{2EA} + \frac{qz_3^2}{2EA} - \frac{qlz_3}{EA} \\
 &= \frac{-ql^2 + qz_3^2 - 2qlz_3}{2EA}
 \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформаций:  $U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2 dz}{EA}$

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \frac{(ql - qz_1)^2 dz_1}{EA} + \int_0^1 \frac{(-ql)^2 dz_2}{EA} + \int_0^1 \frac{(qz_3 - ql)^2 dz_3}{EA} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{q^2}{EA} \int_0^1 (1 - z_1)^2 dz_1 + \frac{q^2}{EA} \int_0^1 dz_2 + \frac{q^2}{EA} \int_0^1 (z_3 - l)^2 dz_3 \right) \\
 &= \frac{q^2}{2EA} \left( \int_0^1 (l^2 - 2lz_1 + z_1^2) dz_1 + l^3 + \int_0^1 (z_3^2 - 2z_3l + l^2) dz_3 \right) \\
 &= \frac{q^2}{2EA} \left( l^3 - 2l \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{3} + l^3 + \frac{l^3}{3} - 2l \frac{l^2}{2} + l^3 \right) = \frac{q^2}{2EA} \frac{l^3 + 3l^3 + l^3}{3} = \frac{5l^3 q^2}{6EA}
 \end{aligned}$$

Работа внешних сил:  $A = \frac{1}{2} \int_0^l qW(z)dz$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \left( \int_0^1 q \frac{qz_1}{EA} \left( 1 - \frac{z_1}{2} \right) dz_1 + \int_0^1 q \frac{ql}{2EA} (1 - 2z_2) dz_2 \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^1 q \frac{q}{2EA} (-l^2 + z_3^2 - 2lz_3) dz_3 \right) \\
 &= \frac{q^2}{2EA} \left( \int_0^1 \left( z_1 l - \frac{z_1^2}{2} \right) dz_1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2z_2) dz_2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 (-l^2 + z_3^2 - 2lz_3) dz_3 \right) \\
 &= \frac{q^2}{2EA} \left( l \int_0^1 z_1 dz_1 - \frac{1}{2} \int_0^1 z_1^2 dz_1 + \frac{l^2}{2} \int_0^1 dz_2 - l \int_0^1 z_2 dz_2 + \frac{l^2}{2} \int_0^1 dz_3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^1 z_3^2 dz_3 + l \int_0^1 z_3 dz_3 \right) = \frac{q^2}{2EA} \left( l \frac{l^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{l^3}{3} + \frac{l^3}{2} + \frac{l^2}{2} l - \frac{1}{2} \frac{l^3}{3} + l \frac{l^2}{2} \right) \\
 &= \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{2} + \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{2} \right) = \frac{q^2}{2EA} \frac{10l^3}{6} = \frac{5l^3 q^2}{6EA}
 \end{aligned}$$

Т.к.  $U=A$ , то всё верно

2. При  $C \rightarrow \infty$ .

Разбиваем на 3 участка:

$$I. \quad N_1 = -qz_1 + ql + \frac{ql}{4}$$

$$W = W_0 + \int_0^z \frac{Ndz}{EA}$$

$$W_1 = \frac{ql}{EA} \int_0^z dz_1 - \frac{q}{EA} \int_0^z z_1 dz_1 + \frac{ql}{4EA} \int_0^z dz_1 = \frac{q}{EA} \left( z_1 l - \frac{z_1^2}{2} + \frac{l}{4} z_1 \right) = \frac{q}{EA} \left( \frac{4z_1 l - 2z_1^2 + lz_1}{4} \right) = \frac{qz_1(4l - 2z_1 + l)}{4EA} = \frac{qz_1(5l - 2z_1)}{4EA}$$

$$\text{II. } N_2 = -\frac{3ql}{4}$$

$$W_2 = \frac{ql(5l - 2l)}{4EA} + \int_0^z \frac{-3ql dz_2}{4EA} = \frac{3ql^2}{4EA} - \frac{3qlz_2}{4EA} = \frac{3ql(l - z_2)}{4EA}$$

$$\text{III. } N_3 = -ql + qz_3$$

$$W_3 = \frac{3ql(l - l)}{4EA} + \int_0^z \frac{q(z_3 - l) dz_3}{EA} = \frac{q}{EA} \left( \int_0^z z_3 dz_3 - l \int_0^z dz_3 \right) = \frac{q}{EA} \left( \frac{z_3^2}{2} - lz_3 \right) = \frac{qz_3 \left( \frac{z_3}{2} - l \right)}{EA}$$

Потенциальная энергия деформаций:  $U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2 dz}{EA}$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left( \int_0^l \frac{q^2 \left( l - z_1 + \frac{l}{4} \right)^2 dz_1}{EA} + \int_0^l \frac{9l^2 q^2 dz_2}{16EA} + \int_0^l \frac{q^2 (z_3 - l)^2 dz_3}{EA} \right) \\ &= \frac{q^2}{2EA} \left( \int_0^l \left( \frac{25l^2}{16} - \frac{5lz_1}{2} + z_1^2 \right) dz_1 + \frac{9l^2}{16} l + \int_0^l z_3^2 dz_3 - 2l \int_0^l z_3 dz_3 \right. \\ &\quad \left. + l^2 \int_0^l dz_3 \right) = \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{25l^2}{16} l - \frac{5l}{2} \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{3} + \frac{9l^3}{16} + \frac{l^3}{3} - 2l \frac{l^2}{2} + l^2 l \right) \\ &= \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{25l^3 - 20l^3 + 9l^3}{16} + \frac{2l^3}{3} \right) = \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{14 * 3l^3 + 2 * 16l^3}{16 * 3} \right) \\ &= \frac{q^2}{EA} \left( \frac{7 * 3l^3 + 16l^3}{16 * 3} \right) = \frac{37q^2 l^3}{48EA} \end{aligned}$$

Работа внешних сил:  $A = \frac{1}{2} \int_0^l qW(z) dz$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left( \int_0^l q \frac{qz_1}{4EA} (5l - 2z_1) dz_1 + \int_0^l q \frac{3ql}{4EA} (l - z_2) dz_2 - \int_0^l q \frac{qz_3}{EA} \left( \frac{z_3}{2} - l \right) dz_3 \right) \\ &= \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{1}{4} \int_0^l (5z_1 l - 2z_1^2) dz_1 + \frac{3l}{4} \int_0^l (l - z_2) dz_2 - \int_0^l \left( \frac{z_3^2}{2} - z_3 l \right) dz_3 \right) \\ &= \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{1}{4} 5l \frac{l^2}{2} - \frac{1}{4} 2 \frac{l^3}{3} + \frac{3l}{4} l^2 - \frac{3l}{4} \frac{l^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{l^3}{3} + l \frac{l^2}{2} \right) \\ &= \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{5l^3}{8} - \frac{l^3}{6} + \frac{3l^3}{4} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{2} \right) = \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{5l^3}{8} - \frac{l^3}{3} + \frac{3l^3 + 2l^3}{4} \right) \\ &= \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{15l^3}{8} - \frac{l^3}{3} \right) = \frac{q^2}{2EA} \left( \frac{45l^3 - 8l^3}{24} \right) = \frac{37q^2 l^3}{48EA} \end{aligned}$$

Т.к.  $U=A$ , то всё верно