Уравнение изменения импульса механической системы.

В классической механике полным импульсом системы материальных точек называется векторная величина, равная сумме произведений масс материальных точек на их скорости:

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i,$$

Закон сохранения импульса механической системы.

В замкнутой системе импульс сохраняется.

Другая формулировка: Суммарный импульс замкнутой системы остается постоянным по модулю и направлению, хотя импульс каждого из тел системы может изменяться.

Доказательство:

Рассмотрим механическую систему из N тел, массы и скорости которых соответственно равны m1, m2, ..., mN; V1, V2, ..., VN.

Запишем второй закон Ньютона для каждого из N тел механической системы:

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{V}_1) = \vec{F}_1' + \vec{F}_1$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\vec{V}_2) = \vec{F}_2' + \vec{F}_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}(m_N\vec{V}_N) = \vec{F}_N' + \vec{F}_N$$

где Fi - равнодействующая внутренних сил i-того тела системы, F - равнодействующая внешних сил i-того тела системы.

Проведем почленное сложение уравнений:

$$\sum^N \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \sum^N \vec{F}_i' + \sum^N \vec{F}_i$$

Проведем почленное сложение уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_i \vec{V_i}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i'} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i} \quad (1)$$

Рассмотрим левую часть полученного выражения.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_i \vec{V_i}) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(m_i \vec{V_i}) = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

где $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N}(m_i \vec{V_i})$ представляет собой суммарный импульс всех тел системы, т.е. импульс системы.

Первый член в правой части выражения (1) представляет собой векторную сумму внутренних сил всех тел системы. По третьему закону Ньютона каждой внутренней силе F'mn соответствует равная ей по модулю и противоположная по направлению сила F'nm, поэтому:

$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i'}$ =0.

Выражение $\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_i \vec{V_i}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i'} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}$ преобразуется к виду:

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}$$

Производная от импульса системы по времени равна сумме внешних сил, действующих на систему.

Если сумма (векторная) внешних сил равна нулю, или внешние силы отсутствуют, то:

$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \sum_i m_i \vec{V_i} = const$, т.е. импульс сохраняется.

3.5. Теоремы Карно

Приведенные выше рассуждения позволяют перейти к формулировке *первой* и *второй теорем Карно* в виде двух утверждений.

1. КПД любой тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, не зависит от природы рабочего тела и устройства машины, а является функцией только температур нагревателя T_1 и холодильника T_2:

$$\eta_{обр} = 1 - \Phi(T_1, T_2). \tag{3.24}$$

2. КПД любой тепловой машины, работающей по необратимому циклу, меньше КПД тепловой машины с обратимым циклом Карно при условии равенства температур их нагревателей и холодильников:

$$\eta_{необр} < \eta_{обр}.$$

Проведем доказательство первой теоремы Карно. Пусть две работающие по циклу Карно тепловые машины с общим нагревателем и холодильником имеют различные КПД вследствие, например, неодинакового устройства или различной физической природы рабочего тела. Предположим, что КПД первой тепловой машины больше, чем второй: $\eta_1 > \eta_2$. Тогда, запустив первую машину по прямому циклу Карно, а вторую по обратному (это всегда можно сделать вследствие обратимости цикла Карно) и соединив их вместе так, чтобы одна машина могла совершать работу над другой, можно либо получить механическую работу за счет отбора теплоты от холодильника, либо передать часть теплоты от холодильника к нагревателю. Реализация той или иной возможности зависит от конкретной технической схемы рассматриваемой системы из двух тепловых машин. Как первый, так и второй результаты работы такой системы противоречат второму началу термодинамики. Аналогичные рассуждения можно выполнить и в случае, когда $\eta_1 < \eta_2$. Таким образом, у всех тепловых машин, работающих по обратимому циклу Карно, КПД должны быть одинаковыми при одинаковых температурах нагревателей и холодильников этих машин.

3.6. Термодинамическая шкала температур

Первая теорема Карно позволяет построить рациональную температурную шкалу, преимуществом которой является ее независимость от термодинамических свойств используемого термометрического тела. В связи с этим термодинамический термометр имеет более фундаментальное значение, чем термометры, описанные в гл. 1 при введении понятия температуры.

Таким образом, можно утверждать, что для цикла Карно выполняется следующее условие:

$$\frac{Q_2'}{Q_1} = \Phi(T_1, T_2) = \frac{\Theta(T_2)}{\Theta(T_1)}.$$

Величина $\Theta(T)$ здесь представляет собой термодинамическую температуру и при сопоставлении ее с идеально-газовой шкалой может быть записана в виде $\Theta(T) = T$, где T — температура, заданная шкалой Кельвина. Следовательно, шкала температур, построенная с использованием идеально-газового термометра, и термодинамическая шкала температур совпадают.

Таким образом, цикл Карно позволяет построить термодинамическую шкалу температур и предложить *термодинамический термометр*. Принцип действия такого термометра заключается в организации цикла Карно между телом с неизвестной температурой T_x и телом с известной температурой T (например, с тающим льдом или кипящей водой) и измерении соответствующего количества теплоты Q_x и Q. Применение формулы

$$T_x = \frac{Q_x}{Q} T$$

позволяет вычислить температуру тела T_x.

Очевидно, что практическая реализация такого термометра до

3.7. Неравенство Клаузиуса

Совместное применение первой и второй теорем Карно позволяет получить следующее неравенство:

$$\frac{Q_1-Q_2'}{Q_1}\le\frac{T_1-T_2}{T_1}. \tag{3.29}$$

Знак «=» здесь соответствует случаю описания обратимой тепловой машины, а знак «<» — необратимой тепловой машины.

Формулу (3.29) можно преобразовать к виду

$$\frac{T_2}{T_1}\le\frac{Q_2'}{Q_1}, \tag{3.30}$$

откуда следует

$$\frac{Q_1}{T_1}\le\frac{Q_2'}{T_2}.$$

или

$$\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2'}{T_2}\le 0.$$

Если полученное выражение записать через количество теплоты, подводимое к рабочему телу от нагревателя Q_1 и от холодильника $Q_2=-Q_2'$, то оно примет окончательную форму:

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\le 0. \tag{3.31}$$

Выражение (3.31) представляет собой частный случай *неравенства Клаузиуса*.

Для получения неравенства Клаузиуса в общем случае рассмотрим тепловую машину, рабочее тело которой при совершении кругового термодинамического процесса обменивается теплотой с достаточно большим числом тепловых резервуаров (нагревателей и холодильников), имеющих температуры T_1, T_2, ..., T_N (рис. 3.9). При этом рабочему телу от тепловых резервуаров передается количество теплоты Q_1, Q_2, ..., Q_N. Работа такой тепловой машины

Неравенство Клаузиуса (3.33) позволяет отличать обратимые круговые термодинамические процессы от необратимых. Если термодинамический цикл состоит только из обратимых процессов, неравенство (3.33) переходит в *равенство Клаузиуса*:

(3.33) $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0, \tag{3.34}$$

имеющее принципиальное значение в равновесной термодинамике. Случай строгого неравенства (3.33) соответствует описанию необратимых круговых термодинамических процессов, поэтому его применяют в неравновесной термодинамике.

③

Дано:
$T = 325\,K$
газ: азот (N_2)
$M_{N_2} = 28 \cdot 10^{-3}\ \frac{кг}{моль}$

$\langle E_к \rangle$, $\langle E_{к.пост} \rangle$, $\bar{v}_{вер}$ — ?

$R = 8{,}31\ \frac{Дж}{моль \cdot К}$
$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К}$

Решение:

$$\bar{v}_{вер} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$\bar{v}_{вер} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31\ \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 325\,К}{28 \cdot 10^{-3}\ кг/моль}} = 439\ \frac{м}{с}.$$

$$\langle E_{к\,поступ} \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$\langle E_{к.поступ} \rangle = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К} \cdot 325\,К = 6{,}73 \cdot 10^{-21}\ Дж.$$

$$\langle E_к \rangle = \frac{i}{2} kT$$, где $i = 5$, т.к. N_2
(3 поступ, 3 вращ.)

$$\langle E_к \rangle = \frac{5}{2} kT$$

$$\langle E_к \rangle = \frac{5}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К} \cdot 325\,К = 11{,}2 \cdot 10^{-21}\ Дж$$

Ответ: $\bar{v}_{вер} = 439\ \frac{м}{с}$, $\langle E_{к пост} \rangle = 6{,}73 \cdot 10^{-21}\ Дж$,
$\langle E_к \rangle = 11{,}2 \cdot 10^{-21}\ Дж$.