	Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Петраков Станислав Альбертович
Группа	РК6-56Б
Тип задания	лабораторная работа
Тема лабораторной работы	Использование аппроксимаций для численной оптимизации (вариант 5)

Студент ________________ **_Петраков С.А.__**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Преподаватель ________________ **_Соколов А.П. __**
подпись, дата *фамилия, и.о.*

Москва, 2021 г.

Оглавление

Задание на лабораторную работу

Методы аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе мы рассмотрим одну из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки $(x, y) = (0,0)$ достигнет точки $(x, y) = (a, y_a)$ под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось y направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая $y(x)$, которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

$$\mathrm{F}[y] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{2gy(x)}}dx, \tag{1}$$

где g обозначает ускорение свободного падение, и $y'(x) = dy/dx$. Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2}\sin(2t) \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где $t \in [0; \mathrm{T}]$ и C, T являются константами, значения которых находятся из граничного условия. В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается $a = 2$ и $y_a = 1$. Константы циклоиды для этого граничного условия равны $C = 1.03439984$, $T = 1.75418438$.

Требуется (базовая часть):

1. Написать функцию composite_simpson(a, b, n, f), численного интегрирования функции f на интервале $[a, b]$ по n узлам с помощью составной формулы Симпсона.
2. Написать функцию composite_trapezoid (a, b, n, f), численного интегрирования функции f на интервале $[a, b]$ по n узлам с помощью составной формулы трапеций.

3. Рассчитать интеграл (1) для функции $y(x)$, соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и составной формулы трапеций для множества значений $n \in [3; 9999]$. Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.
4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.
5. Для обоих формул сравните порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ.

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы – написать алгоритмы для составных формул Симпсона и трапеций, попытаться определить порядок точности формулы, оценить порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.

Выполненные задачи

1. Разработать алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона
2. Разработать алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы трапеции
3. Вычислить интеграл для функции с помощью составных формул Симпсона и трапеций
4. Построить log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул
5. Определить порядок точности формулы. Анализ порядка точности, полученного с помощью графика и аналитически

1. Разработать алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона

Из курса лекций мы знаем, что составная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\right) - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi). \qquad (3)$$

Где $x_i = a + (i-1)h,\ h = \frac{(b-a)}{n}$ и $i = 1, \dots, n+1$, где n – четное число. При этом существует такое ξ∈ (a; b), что для $f(x) \in C^4[a;b]$.

Для вычислений интеграла (3) опустим остаточный член, так как он является малым, он используется в основном для выбора численного метода и его предварительного анализа.

Реализуем вычисление интеграла на интервале [0.001; 2]. Для нашей задачи в (3) $f(x)$ является по условию функционалом (1). Вычисление (1) рассмотрено ниже.

2. Разработать алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы трапеции

Из курса лекций мы знаем, что составная формула трапеций имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{n} f(x_i) + f(x_{n+1})\right) - \frac{(b-a)h^2}{180} f''(\xi). \qquad (4)$$

Где $x_i = a + (i-1)h,\ h = \frac{(b-a)}{n}$ и $i = 1, \dots, n+1$, где $n \in \mathrm{N}$. При этом существует такое ξ∈ (a; b), что для $f(x) \in C^2[a;b]$.

Для вычислений интеграла (4) опустим остаточный член, так как он является малым, он используется в основном для выбора численного метода и его предварительного анализа.

Реализуем вычисление интеграла на интервале [0.001; 2]. Для нашей задачи в (4) $f(x)$ является по условию функционалом (1). Вычисление (1) рассмотрено ниже.

3. Вычислить интеграл для функции с помощью составных формул Симпсона и трапеций

Для вычисления интеграла с помощью составных формул Симпсона и трапеций для начала нужно понять, как вычислять функционал.

Для вычисления производной $y(x)$ я воспользовался двумя методами, чтобы понимать в дальнейшем, как лучше и точнее вычислять интеграл.

Для первого метода импортируем функцию derivative из библиотеки scipy.misc. Функция scipy.misc.derivative(func, x0, dx, n) принимает аргументы: func – функция, производная которой мы ищем; x0 – точка, в которой мы ищем производную; dx – шаг дифференцирования; n – порядок производной, по умолчанию равна 1. Для того, чтобы с помощью этой библиотеки, взять производную от $y(x)$, нужно для начала найти саму функцию $y(x)$. Для этого импортируем функцию fsolve из библиотеки scipy.optimize. Функция fsolve(func, x0, args) принимает аргументы: func – функция, где мы ищем корень $func(x) = 0$; args – дополнительный аргумент. Будем находить конкретное значение t при заданном x и подставлять его в $y(t)$ в (2).

Таким образом находя для каждого значения x соответствующее значение t, найдём $y(t)$. Далее с помощью функции derivative найдём её производную. Тем самым вычислим функционал (1), подставляя соответствующие точки в (3) и (4).

Для второго метода воспользуемся формулой:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{5}$$

Так как мы знаем зависимости $y(t)$ и $x(t)$, просто найдём их производные и вычислим $y'(x)$ по формуле (5). Найдя $y(x)$ способом, указанном выше, мы вычислим интеграл для функционала (1), подставляя соответствующие точки в (3) и (4).

4. Построить log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул

Шаг интегрирования одинаковый для обеих составных формул Симпсона и трапеций и имеет вид:

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Где n – количество точек на этом интервале, а a и b – границы интервала интегрирования.

Абсолютная погрешность интегрирования для составной формулы Симпсона считается как:

$$E = \frac{(b-a)h^4}{180}.$$

Абсолютная погрешность интегрирования для составной формулы Симпсона считается как:

$$E = \frac{(b-a)h^2}{12}.$$

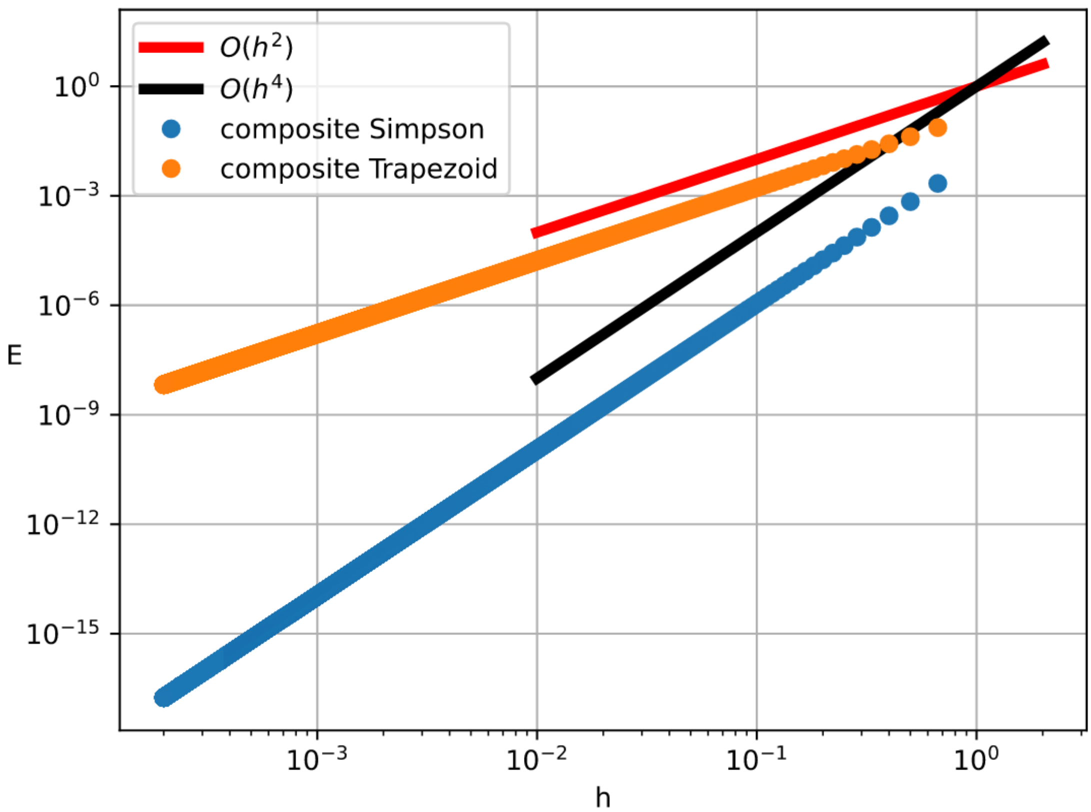

Рис. 1 – Абсолютная погрешность численного интегрирования от шага интегрирования

5. Определить порядок точности формулы. Анализ порядка точности, полученного с помощью графика и аналитически

По графику, изображенному на рис. 1, видно, что абсолютная погрешность, вычисленная с помощью составной формулы Симпсона, пропорциональная $O(h^4)$. Это означает, что порядок точности составной формулы Симпсона, равняется h^4, что совпадает с аналитическим порядком точности.

Также по графику, изображенному на рис. 1, видно, что абсолютная погрешность, вычисленная с помощью составной формулы трапеций, пропорциональная $O(h^2)$. То есть порядок точности составной формулы трапеций равняется h^2, что также совпадает с аналитическим порядком точности.

Для оптимального шага интегрирования нужно взять маленький шаг интегрирования h.

Заключение

На лабораторной работе мы реализовали составные формулы Симпсона и трапеции. Вычислили интеграл для функционала с помощью этих составных формул. Оказалось, что чем больше шаг интегрирования, тем выше погрешность вычислений приближенного значения интеграла.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика. Москва, 2018-2021, С. 140.