第一章 矢量分析

本章内容

1.1 矢量代数

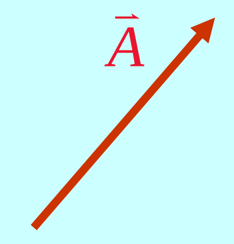
1. 标量和矢量

标量：一个只用大小描述的物理量。

矢量：一个既有大小又有方向特性的物理量，常用黑体字母或带箭头的字母表示。

矢量的几何表示：一个矢量可用一条有方向的线段来表示

矢量的代数表示：$\vec{A}=\vec{e}_A A=\vec{e}_A\left|\vec{A}\right|$



矢量的几何表示

矢量的大小或模：$A=\left|\vec{A}\right|$

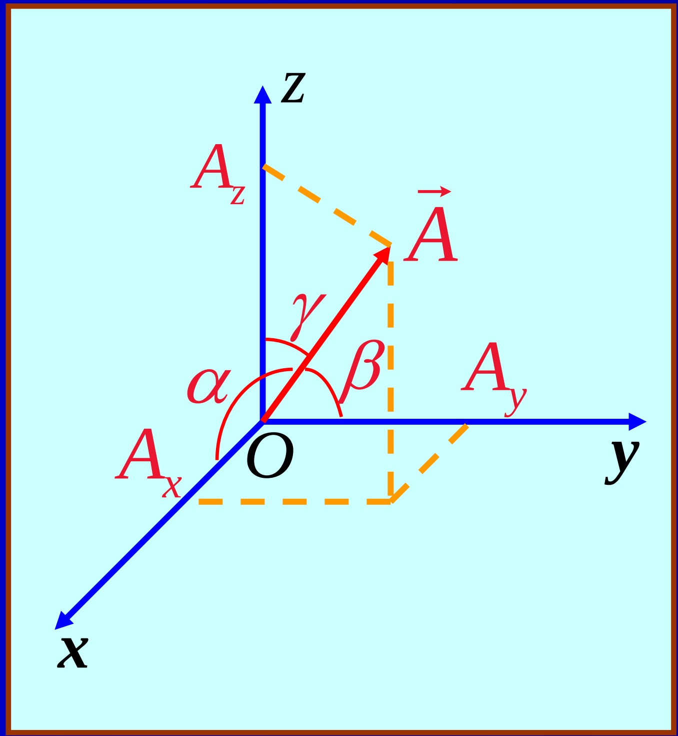
矢量的单位矢量：$\vec{e}_A=\dfrac{\vec{A}}{A}$

常矢量：大小和方向均不变的矢量。

注意：单位矢量不一定是常矢量。

矢量用坐标分量表示

$$\vec{A}=\vec{e}_x A_x+\vec{e}_y A_y+\vec{e}_z A_z$$



$$A_x = A\cos\alpha$$
$$A_y = A\cos\beta$$
$$A_z = A\cos\gamma$$

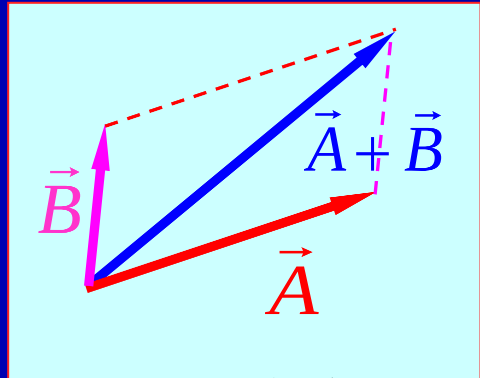
$$\vec{A}=A(\vec{e}_x\cos\alpha+\vec{e}_y\cos\beta+\vec{e}_z\cos\gamma)$$

$$\vec{e}_A=\vec{e}_x\cos\alpha+\vec{e}_y\cos\beta+\vec{e}_z\cos\gamma$$

2. 矢量的代数运算

（1）矢量的加减法

两矢量的加减在几何上是以这两矢量为邻边的平行四边形的对角线，如图所示。



矢量的加法

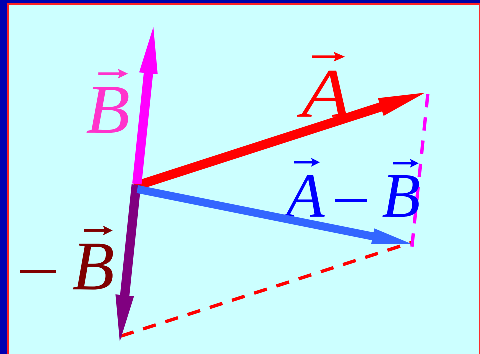
在直角坐标系中两矢量的加法和减法：

$$\vec{A}\pm\vec{B}=\vec{e}_x(A_x\pm B_x)+\vec{e}_y(A_y\pm B_y)+\vec{e}_z(A_z\pm B_z)$$

矢量的加减符合交换律和结合律

交换律　$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

结合律　$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$



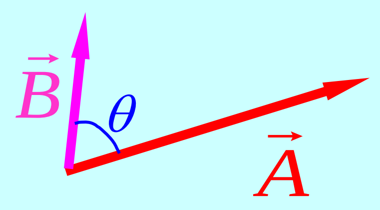
矢量的减法

（2）标量乘矢量

$$k\vec{A}=\vec{e}_x kA_x+\vec{e}_y kA_y+\vec{e}_z kA_z$$

（3）矢量的标积（点积）

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$



矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角

例1.1.1 $\vec{A}=\vec{e}_x+\vec{e}_y 2+\vec{e}_z 3, \vec{B}=\vec{e}_x 4-\vec{e}_y 5+\vec{e}_z 6$，求向量间夹角。

解 $$\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\frac{4-10+18}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{4^2+(-5)^2+6^2}}\Rightarrow\theta=68.56^\circ$$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ ——矢量的标积符合交换律

$\vec{A}\perp\vec{B} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=0$　　$\vec{A}//\vec{B} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=AB$

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_z=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_x=0$$

$$\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x=\vec{e}_y\cdot\vec{e}_y=\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z=1$$

（4）矢量的矢积（叉积）

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_n AB\sin\theta$$

用坐标分量表示为

$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{e}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{e}_z(A_xB_y-A_yB_x)$$

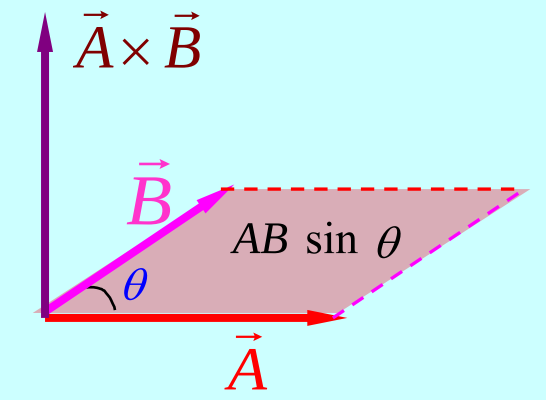
写成行列式形式为

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

若 $\vec{A}\perp\vec{B}$，则 $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=AB$

若 $\vec{A}/\!/\vec{B}$，则 $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=0$



矢量$\vec{A}$ 与$\vec{B}$的叉积

（5）矢量的混合运算

$$(\vec{A}+\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$$ —— 分配律

$$(\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{C}+\vec{B}\times\vec{C}$$ —— 分配律

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$ —— 标量三重积

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$ —— 矢量三重积

1.2 三种常用的正交曲线坐标系

正交曲线坐标系：三条正交曲线组成的确定三维空间任意点位置的体系

坐标轴：三条正交曲线

坐标变量：描述坐标轴的量

三种常用的正交曲线坐标系：

直角坐标系

圆柱坐标系

球坐标系

1. 直角坐标系

坐标变量 x, y, z

坐标单位矢量 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

位置矢量 $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$

线元矢量 $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_x \mathrm{d}x + \vec{e}_y \mathrm{d}y + \vec{e}_z \mathrm{d}z$

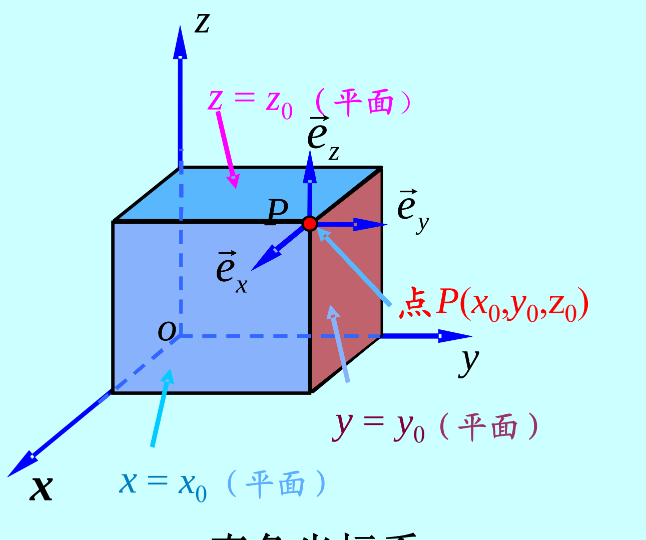
面元矢量

$$\mathrm{d}\vec{S}_x = \vec{e}_x \mathrm{d}l_y \mathrm{d}l_z = \vec{e}_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

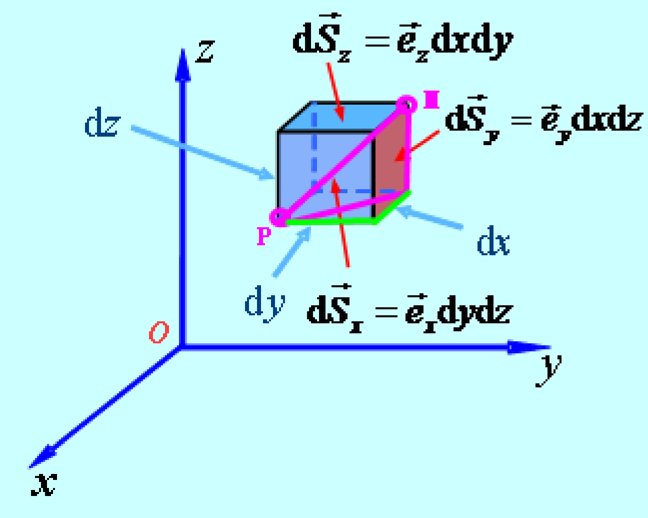
$$\mathrm{d}\vec{S}_y = \vec{e}_y \mathrm{d}l_x \mathrm{d}l_z = \vec{e}_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_z = \vec{e}_z \mathrm{d}l_x \mathrm{d}l_y = \vec{e}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

体积元 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$



直角坐标系



直角坐标系的长度元、面积元、体积元

2. 圆柱坐标系

坐标变量　ρ, ϕ, z

坐标单位矢量　$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$

位置矢量　$\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$

线元矢量　$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_\rho \mathrm{d}\rho + \vec{e}_\phi \rho \mathrm{d}\phi + \vec{e}_z \mathrm{d}z$

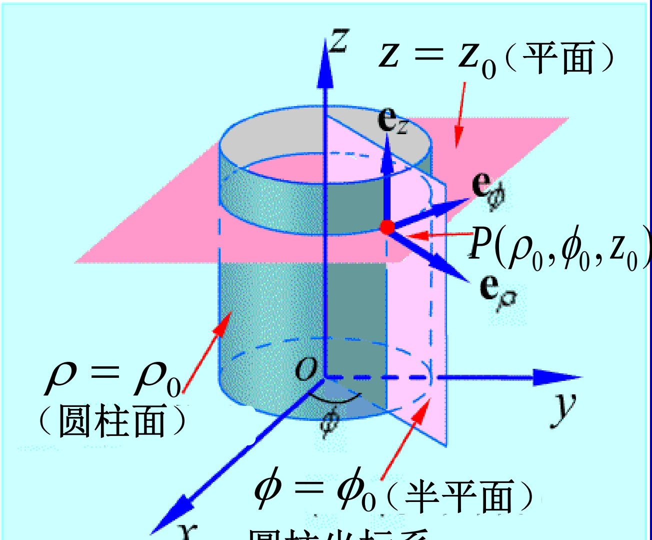
面元矢量

$$\mathrm{d}\vec{S}_\rho = \vec{e}_\rho \mathrm{d}l_\phi \mathrm{d}l_z = \vec{e}_\rho \rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

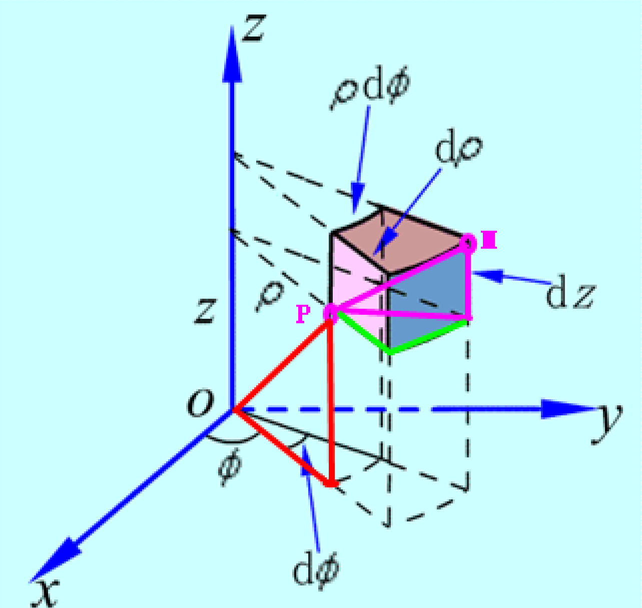
$$\mathrm{d}\vec{S}_\phi = \vec{e}_\phi \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_z = \vec{e}_\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_z = \vec{e}_z \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_\phi = \vec{e}_z \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi$$

体积元　$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$



圆柱坐标系



圆柱坐标系中的线元、面元和体积元

3. 球坐标系

坐标变量 r,θ,ϕ

坐标单位矢量 $\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi$

位置矢量 $\vec{r}=\vec{e}_r r$

线元矢量 $\mathrm{d}\vec{l}=\vec{e}_r\mathrm{d}r+\vec{e}_\theta r\mathrm{d}\theta+\vec{e}_\phi r\sin\theta\mathrm{d}\phi$

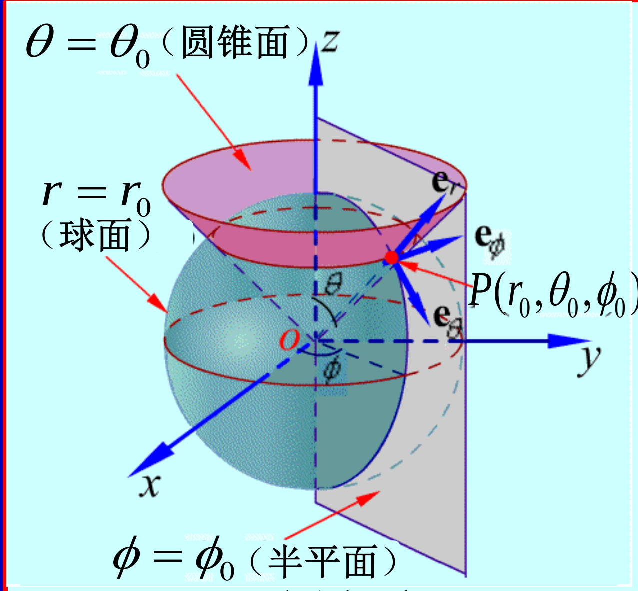
面元矢量

$$\mathrm{d}\vec{S}_r=\vec{e}_r\mathrm{d}l_\theta\mathrm{d}l_\phi=\vec{e}_r r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

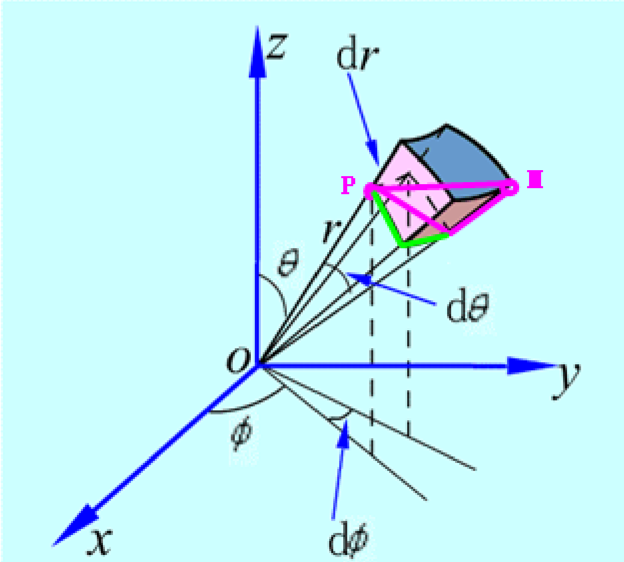
$$\mathrm{d}\vec{S}_\theta=\vec{e}_\theta\mathrm{d}l_r\mathrm{d}l_\phi=\vec{e}_z r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_\phi=\vec{e}_\phi\mathrm{d}l_r\mathrm{d}l_\theta=\vec{e}_\phi r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

体积元 $\mathrm{d}V=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$



球坐标系



球坐标系中的线元、面元和体积元

4. 坐标单位矢量之间的关系

直角坐标与圆柱坐标系

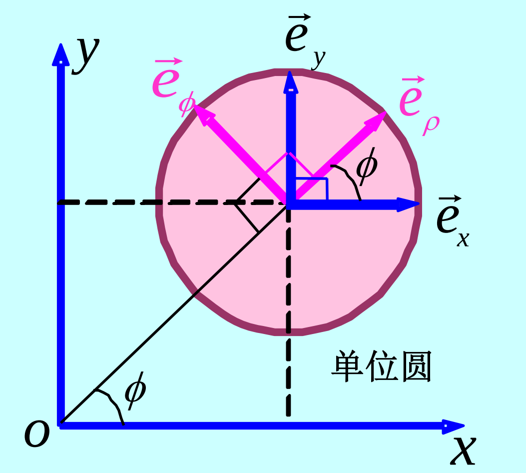
	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\rho$	$\cos\phi$	$\sin\phi$	0
$\vec{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0
$\vec{e}_z$	0	0	1

圆柱坐标与球坐标系

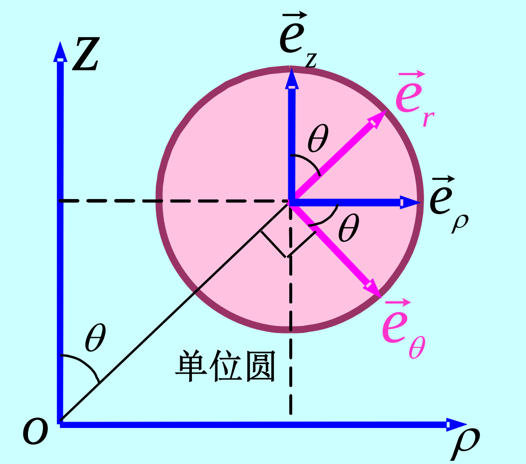
	$\vec{e}_\rho$	$\vec{e}_\phi$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_r$	$\sin\theta$	0	$\cos\theta$
$\vec{e}_\theta$	$\cos\theta$	0	$-\sin\theta$
$\vec{e}_\phi$	0	1	0

直角坐标与球坐标系

	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_r$	$\sin\theta\cos\phi$	$\sin\theta\sin\phi$	$\cos\theta$
$\vec{e}_\theta$	$-\cos\theta\sin\phi$	$\cos\theta\sin\phi$	$-\sin\theta$
$\vec{e}_\phi$	$-\sin\phi$	$\cos\phi$	0



直角坐标系与柱坐标系之间坐标单位矢量的关系



柱坐标系与求坐标系之间坐标单位矢量的关系

1.3 标量场的梯度

标量场和矢量场

确定空间区域上的每一点都有确定物理量与之对应，称在该区域上定义了一个场。

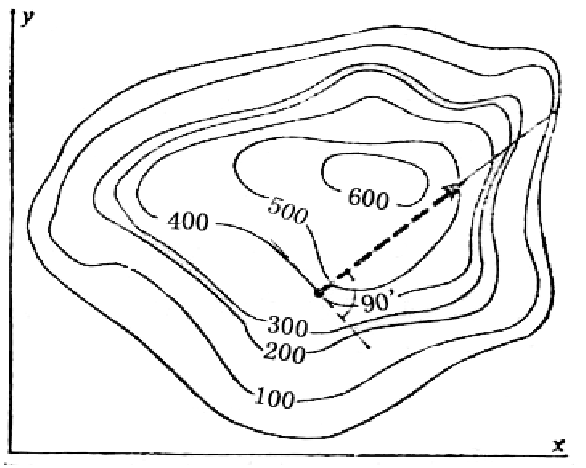
- 物理量——标量，称该场为标量场。
- 物理量——矢量，称该场为矢量场。
- 如果场与时间无关，称为静态场，反之为时变场。

从数学上看，场是定义在空间区域上的函数:

静态标量场和矢量场可分别表示为: $u(x,y,z)$、$\vec{F}(x,y,z)$

时变标量场和矢量场可分别表示为: $u(x,y,z,t)$、$\vec{F}(x,y,z,t)$

1. 标量场的等值面



标量场的等值线(面)

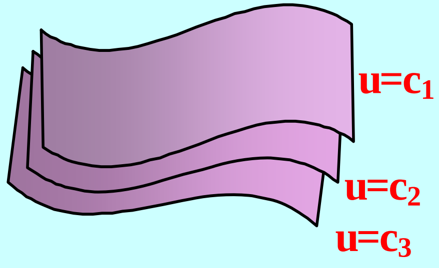
等值面：标量场取得同一数值的点在空间形成的曲面。

意义：形象直观地描述了物理量在空间的分布状态。

等值面方程：$u(x,y,z)=C$

等值面的特点：

- 常数C取一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，形成等值面族；
- 标量场的等值面充满场所在的整个空间；
- 标量场的等值面互不相交。



等值面族

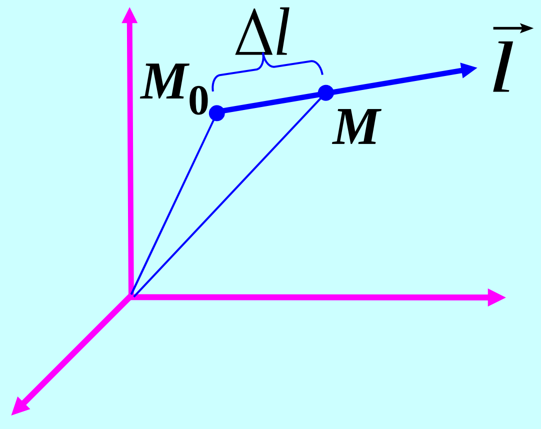
2. 方向导数

概念：
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

式中：$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ —— $\Delta\vec{l}$的方向余弦。

意义：方向导数表示标量场沿某方向的空间变化率。

- $\dfrac{\partial u}{\partial l}>0$ —— $u(M)$沿$\vec{l}$方向增加；
- $\dfrac{\partial u}{\partial l}<0$ —— $u(M)$沿$\vec{l}$方向减小；
- $\dfrac{\partial u}{\partial l}=0$ —— $u(M)$沿$\vec{l}$方向无变化。



方向导数的概念

特点：方向导数既与点M_0有关，也与$\vec{l}$方向有关。

问题：在什么方向上变化率最大、其最大的变化率为多少？

3. 标量场的梯度（ grad$u$ 或 ∇u）

哈密顿算符 $\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

概念： $\nabla u = \vec{e}_l \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{\max}$，其中 $\vec{e}_l$ —— $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取得最大值的方向

意义：描述标量场在某点的最大变化率及其变化最大的方向

梯度的表达式：

直角坐标系 $$\nabla u = \vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

圆柱坐标系 $$\nabla u = \vec{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

球坐标系 $$\nabla u = \vec{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}$$

梯度的性质：

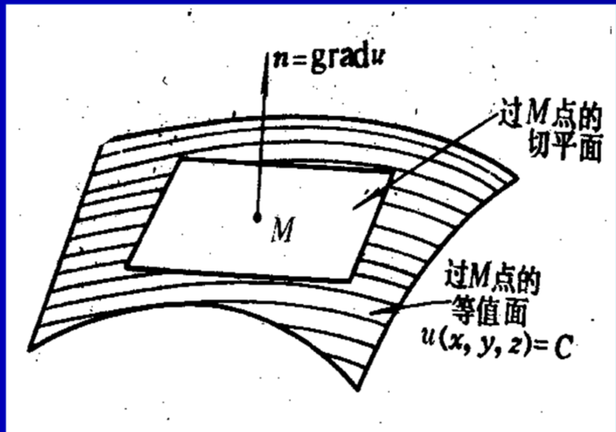
- 标量场的梯度是矢量场，它在空间某点的方向表示该点场变化最大（增大）的方向，其数值表示变化最大方向上场的空间变化率。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} \leq \left|\nabla u\right|_{M_0}$$

- 标量场在某个方向上的方向导数，是梯度在该方向上的投影。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \nabla u \cdot \vec{e}_l$$

- 标量场的梯度垂直于通过该点的等值面（或切平面）



梯度运算的基本公式：

$$
\begin{cases}
\nabla C = 0 \\
\nabla(Cu) = C\nabla u \\
\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \\
\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \\
\nabla f(u) = f'(u)\nabla u
\end{cases}
$$

例1.3.1 设一标量函数$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$描述了空间标量场。试求：

(1) 该函数φ在点$P(1,1,1)$处的梯度，以及表示该梯度方向的单位矢量。

(2) 求该函数φ沿单位矢量$\vec{e}_l = \vec{e}_x \cos 60^\circ + \vec{e}_y \cos 45^\circ + \vec{e}_z \cos 60^\circ$方向的方向导数，并以点$P(1,1,1)$处的方向导数值与该点的梯度值作一比较，得出相应结论。

解 (1)由梯度计算公式，可求得P点的梯度为

$$\nabla\varphi\big|_P = [(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z})(x^2 + y^2 - z)]_P$$

$$= (\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z)\big|_{(1,1,1)} = \vec{e}_x 2 + \vec{e}_y 2 - \vec{e}_z$$

表征其方向的单位矢量

$$\vec{e}_l\Big|_P=\frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\Bigg|_P=\frac{\vec{e}_x 2x+\vec{e}_y 2y-\vec{e}_z}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2}}\Bigg|_{(1,1,1)}=\vec{e}_x\frac{2}{3}+\vec{e}_y\frac{2}{3}-\vec{e}_z\frac{1}{3}$$

(2) 由方向导数与梯度之间的关系式可知，沿$\boldsymbol{e}_l$ 方向的方向导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\nabla\varphi\cdot\vec{e}_l=(\vec{e}_x 2x+\vec{e}_y 2y-\vec{e}_z)\cdot(\vec{e}_x\frac{1}{2}+\vec{e}_y\frac{\sqrt{2}}{2}+\vec{e}_z\frac{1}{2})$$

$$=x+\sqrt{2}y-\frac{1}{2}$$

对于给定的P 点，上述方向导数在该点取值为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}\Bigg|_P=x+\sqrt{2}y-\frac{1}{2}\Bigg|_{(1,1,1)}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$$

而该点的梯度值为

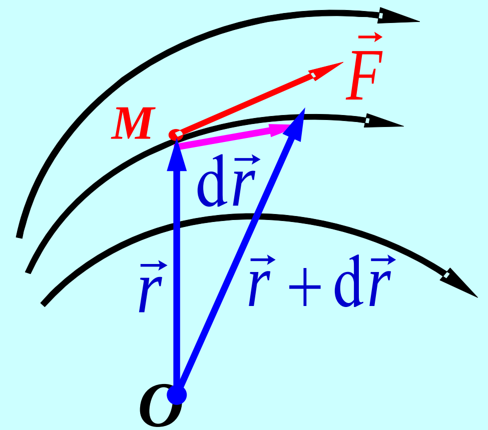
$$\left|\nabla\varphi\right|_P=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2}\Big|_{(1,1,1)}=3$$

显然，梯度 $\left|\nabla\varphi\right|_P$ 描述了P点处标量函数$\boldsymbol{\varphi}$ 的最大变化率，即最大的方向导数，故 $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_P<\left|\nabla\varphi\right|_P$ 恒成立。

1.4 矢量场的通量与散度

1. 矢量线

概念：矢量线是这样的曲线，其上每一点的切线方向代表了该点矢量场的方向。



矢量线

意义：形象直观地描述了矢量场的空间分布状态。

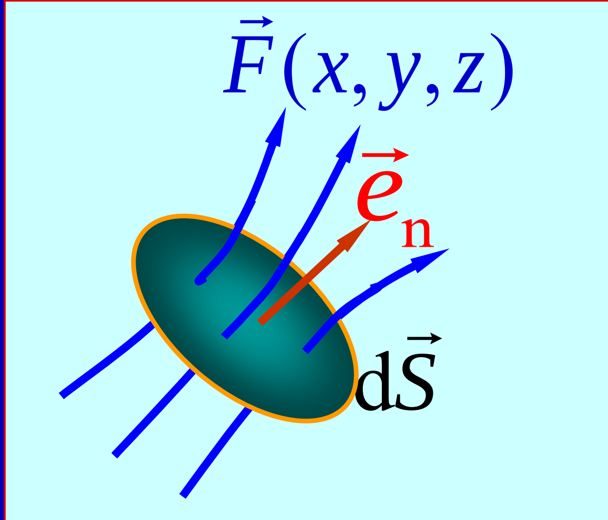
矢量线方程：

$$\frac{\mathrm{d}x}{F_x(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{F_y(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{F_z(x,y,z)}$$

2. 矢量场的通量

问题：如何定量描述矢量场的大小？

引入通量的概念。



面积元矢量

通量的概念

$$\psi=\int \mathrm{d}\psi=\int_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_S \vec{F}\cdot \vec{e}_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S$$

其中：$\mathrm{d}\vec{S}=\vec{e}_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S$ ——面积元矢量；

$\vec{e}_{\mathrm{n}}$ ——面积元的法向单位矢量；

$\mathrm{d}\psi=\vec{F}\cdot\vec{e}_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S$ ——穿过面积元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的通量。

如果 S 是闭合曲面，则

$$\psi=\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oint_S \vec{F}\cdot \vec{e}_{\mathrm{n}}\mathrm{d}S$$

$\vec{e}_{\mathrm{n}}$ ——外法向单位矢量

例1.4.1　$\vec{A}=\vec{e}_\rho\dfrac{k_1}{\rho}+\vec{e}_z k_2 z$，积分面为半径=2、长度限制在z=±3之间轴线为z的圆柱表面。求通量。

解　$$\oint_s \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint_{顶}\vec{A}\cdot\vec{n}dS+\iint_{底}\vec{A}\cdot\vec{n}dS+\iint_{侧}\vec{A}\cdot\vec{n}dS$$

(1)顶面：$z=3,\vec{n}=\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{n}=(\vec{e}_\rho\frac{k_1}{\rho}+\vec{e}_z k_2 z)\cdot\vec{e}_z=k_2 z=3k_2, dS=dS_z=\rho d\rho d\phi$$

$$\Rightarrow \iint_{顶}\vec{A}\cdot\vec{n}dS=\iint_{顶}3k_2\cdot\rho d\rho d\phi=\int_0^2\int_0^{2\pi}3k_2\cdot\rho d\rho d=12\pi k_2$$

(2)底面： $z=-3, \vec{n}=-\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{n}=(\vec{e}_\rho\frac{k_1}{\rho}+\vec{e}_z k_2 z)\cdot\vec{e}_z=-k_2 z=3k_2, dS=dS_z=\rho d\rho d\phi$$

$$\Rightarrow \iint_{底}\vec{A}\cdot\vec{n}dS=12\pi k_2$$

(3)侧面： $\rho=2, \vec{n}=\vec{e}_\rho$

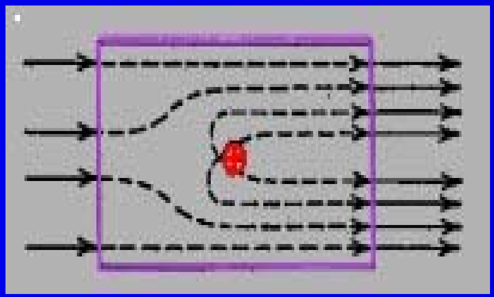
$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{n}=(\vec{e}_\rho\frac{k_1}{\rho}+\vec{e}_z k_2 z)\cdot\vec{e}_\rho=\frac{k_1}{\rho}=\frac{k_1}{2}, dS=dS_\rho=\rho d\phi dz$$

$$\Rightarrow \iint_{侧}\vec{A}\cdot\vec{n}dS=\iint_{侧}\frac{k_1}{2}\cdot\rho d\phi dz\int_{-3}^{3}\int_{0}^{2\pi}\frac{k_1}{2}\cdot\rho d\phi dz=12\pi k_1$$

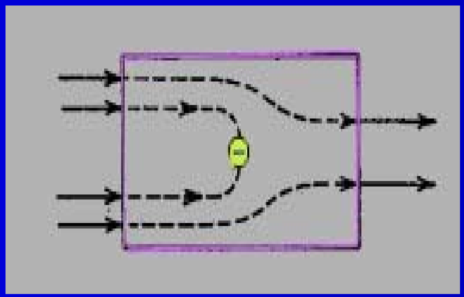
$$\Rightarrow \oint_s\vec{A}\cdot d\vec{S}=12\pi(k_1+2k_2)$$

通量的物理意义

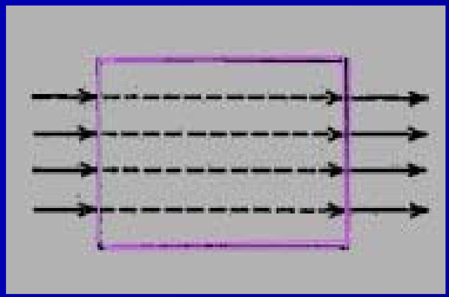
矢量场通过闭合曲面通量的三种可能结果



$\psi > 0$



$\psi < 0$



$\psi = 0$

通过闭合曲面有净的矢量线穿出
区域内存在“源”

有净的矢量线进入
区域内存在“汇（负源）”

进入与穿出闭合曲面的矢量线相等
区域内“源=汇”

闭合曲面的通量从宏观上建立了矢量场通过闭合曲面的通量与曲面内产生矢量场的源的关系。

3. 矢量场的散度 $\nabla\cdot\vec{F}=div\vec{F}$

为了定量研究场与源之间的关系，需建立场空间任意点（小体积元）的通量源与矢量场（小体积元曲面的通量）的关系。利用极限方法得到这一关系：

$$\nabla\cdot\vec{F}(x,y,z)=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\vec{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V}$$

称为矢量场的散度。

散度是矢量通过包含该点的任意闭合小曲面的通量与曲面元体积之比的极限。

散度的表达式：

直角坐标系 $$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

圆柱坐标系 $$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial F_\phi}{\rho\partial\phi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

球坐标系 $$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(F_\phi)$$

散度的有关公式：

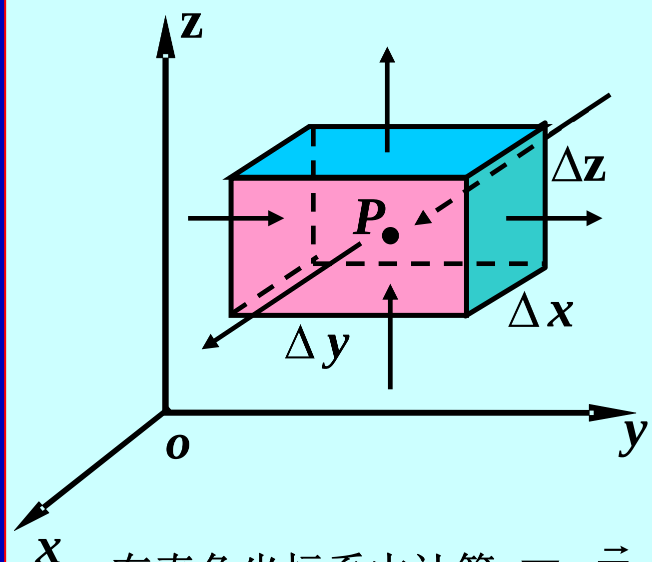
$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{C}=\nabla\cdot\vec{C}=0\ (\vec{C}\text{为常矢量})\\ \nabla\cdot(\vec{C}f)=\vec{C}\cdot\nabla f\\ \nabla\cdot(k\vec{F})=k\nabla\cdot\vec{F}\ (k\text{为常量})\\ \nabla\cdot(f\vec{F})=f\nabla\cdot\vec{F}+\vec{F}\cdot\nabla f\\ \nabla\cdot(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\cdot\vec{F}\pm\nabla\cdot\vec{G}\end{cases}$$

直角坐标系下散度表达式的推导

不失一般性，令包围P点的微体积ΔV 为一直平行六面体，如图所示。则

$$F_x(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)\approx F_x\left(x_0,y_0,z_0\right)+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0,z_0}$$

$$F_x(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)\approx F_x\left(x_0,y_0,z_0\right)-\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}\bigg|_{x_0,y_0,z_0}$$



在直角坐标系中计算 $\nabla\cdot\vec{F}$

由此可知，穿出前、后两侧面的净通量值为

$$[F_x(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)-F_x(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0,z_0)]\Delta y\Delta z=\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同理，分析穿出另两组侧面的净通量，并合成之，即得由点 P 穿出该六面体的净通量为

$$\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$$

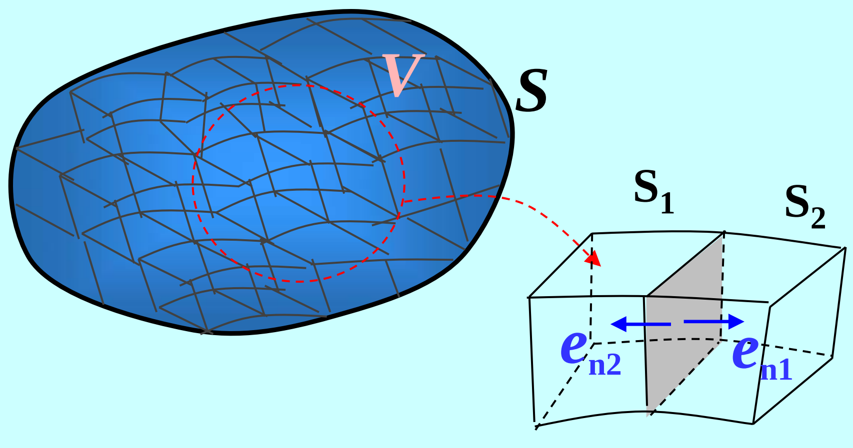
根据定义，则得到直角坐标系中的散度表达式为

$$\nabla\cdot\vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

通量仅能表示闭合面中源的总量，它不能显示显示通量源在区域内每一点的分布特性。为此需要研究矢量场的散度。

4. 散度定理

从散度的定义出发，可以得到矢量场在空间任意闭合曲面的通量等于该闭合曲面所包含体积中矢量场的散度的体积分，即



体积的剖分

$$\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{F}\mathrm{d}V$$

（可以对要解决的问题进行降维处理）

散度定理是闭合曲面积分与体积分之间的一个变换关系，在电磁理论中有着广泛的应用。

从数学角度可以认为散度定理建立了面积分和体积分的关系。从物理角度可以理解为散度定理建立了区域 V 中的场和包围区域 V 的边界 S 上的场之间的关系。因此，如果已知区域 V 中的场，根据散度定理即可求出边界 S 上的场，反之亦然。

例1.4.2 求 $\vec{V}(r)=\vec{e}_r r=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$ 穿过一边长为1的立方体的通量。

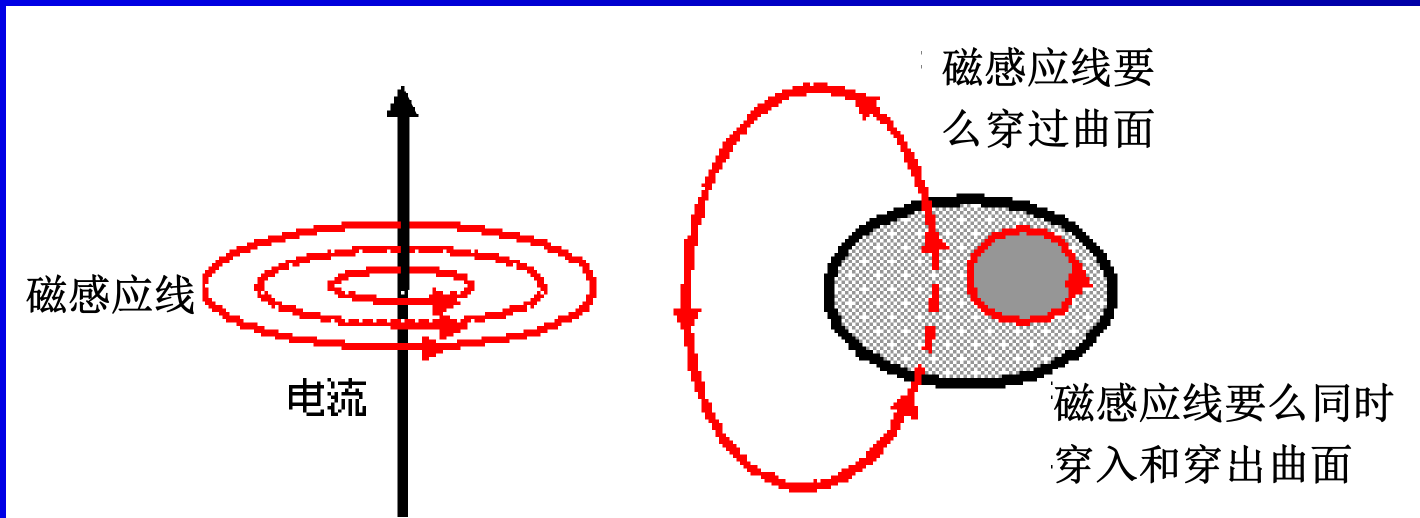
解一
$$\oint_S \vec{V}\cdot d\vec{S}=\int_S(\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z)\cdot(\vec{e}_x dydz+\vec{e}_y dxdz+\vec{e}_z dxdy)$$
$$=\int_S(xdydz+ydxdz+zdxdy)=3l^3$$

解二
$$\nabla\cdot\vec{V}=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}=3\Rightarrow\oint_S\vec{V}\cdot d\vec{S}=\int_\tau\nabla\cdot\vec{V}d\tau=3l^3$$

1.5 矢量场的环流与旋度

1. 矢量场的环流

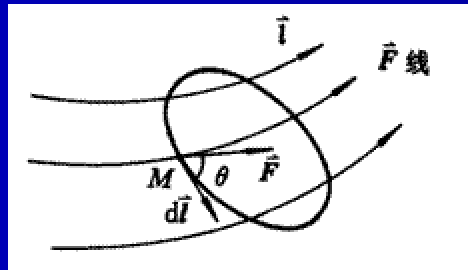
不是所有的矢量场都由通量源激发。存在另一类不同于通量源的矢量源，它所激发的矢量场的力线是闭合的，它对于任何闭合曲面的通量为零。但在场所定义的空间中闭合路径的积分不为零。



环流的概念

矢量场对于闭合曲线C 的环流定义为该矢量对闭合曲线C的线积分，即

$$\Gamma = \oint_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



- 如果矢量场的任意闭合回路的环流恒为零，称该矢量场为无旋场，又称为保守场。

- 如果矢量场对于任何闭合曲线的环流不为零，称该矢量场为有旋矢量场，能够激发有旋矢量场的源称为旋涡源。电流是磁场的旋涡源。

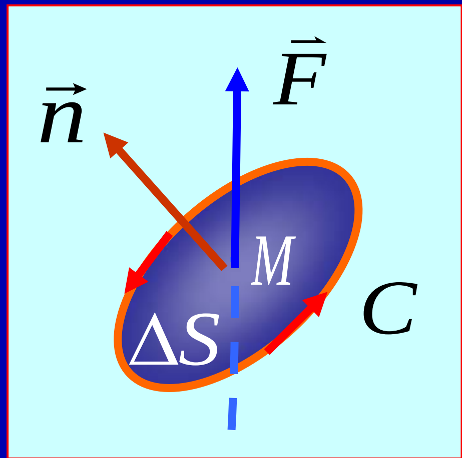
2. 矢量场的旋度（$\nabla \times \vec{F}$）

矢量场的环流给出了矢量场与积分回路所围曲面内旋涡源宏观联系。为了给出空间任意点矢量场与旋涡源的关系，引入矢量场的旋度。

（1）环流面密度

过点M作一微小曲面ΔS，它的边界曲线记为C，曲面的法线方向$\vec{n}$与曲线的绕向成右手螺旋法则。当$\Delta S \to 0$时，极限

$$\mathrm{rot}_{\mathrm{n}} \vec{F} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



称为矢量场在点M处沿方向$\vec{n}$的环流面密度。

特点：其值与点M处的方向$\vec{n}$有关。

（2）矢量场的旋度

概念：矢量场在 M 点处的旋度为一矢量，其数值为M 点的环流面密度最大值，其方向为取得环流面密度最大值时面积元的法线方向，即 $\nabla\times\vec{F}=\vec{e}_{\mathrm{n}}[\mathrm{rot}_{\mathrm{n}}\vec{F}]_{\max}$

物理意义：旋涡源密度矢量。

性质： $\mathrm{rot}_{\mathrm{n}}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}$

旋度的计算公式：

- 直角坐标系 $\nabla\times\vec{F}=\vec{e}_x\left(\dfrac{\partial F_z}{\partial y}-\dfrac{\partial F_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\dfrac{\partial F_x}{\partial z}-\dfrac{\partial F_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\dfrac{\partial F_y}{\partial x}-\dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right)$

$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

- 圆柱坐标系

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\phi & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z\end{vmatrix}$$

- 球坐标系

$$\nabla\times\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\phi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi\end{vmatrix}$$

旋度的有关公式：

$$\left\{\begin{array}{l}
\nabla\times\vec{C}=0 \\
\nabla\times(f\vec{C})=\nabla f\times\vec{C} \\
\nabla\times(f\vec{F})=f\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F} \\
\nabla\times(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\times\vec{F}\pm\nabla\times\vec{G} \\
\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{G}\cdot\nabla\times\vec{F}-\vec{F}\cdot\nabla\times\vec{G} \\
\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\equiv 0} \\
\boxed{\nabla\times(\nabla u)\equiv 0}
\end{array}\right.$$

矢量场的旋度的散度恒为零

标量场的梯度的旋度恒为零

无论梯度、散度或旋度都是微分运算，它们表示场在某点附近的变化特性。因此，梯度、散度及旋度描述的是场的点特性或称为微分特性。

函数的连续性是可微的必要条件。因此在场量发生不连续处，也就不存在前述的梯度、散度或旋度。

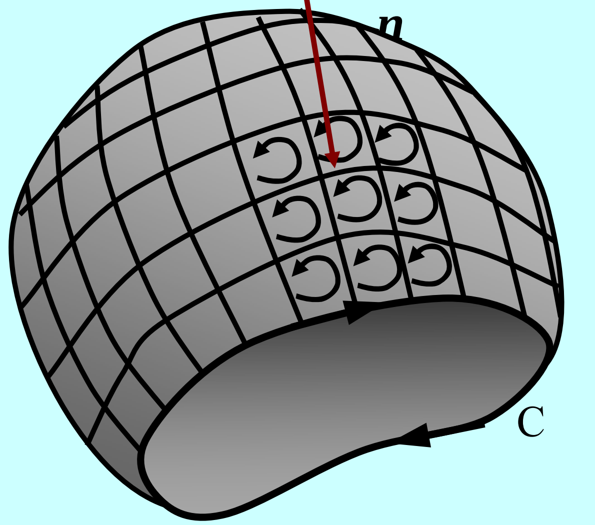
3. 斯托克斯定理

从旋度的定义出发，可以得到矢量场沿任意闭合曲线的环流等于矢量场的旋度在该闭合曲线所围的曲面的通量，即

$$\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

方向相反大小相等结果抵消

斯托克斯定理是闭合曲线积分与曲面积分之间的一个变换关系式，也在电磁理论中有广泛的应用。



曲面的剖分

从数学角度可以认为旋度定理建立了面积分和线积分的关系。从物理角度可以理解为旋度定理建立了区域S中的场和包围区域S的边界l上的场之间的关系。因此，如果已知区域S中的场，根据旋度定理即可求出边界l上的场，反之亦然。

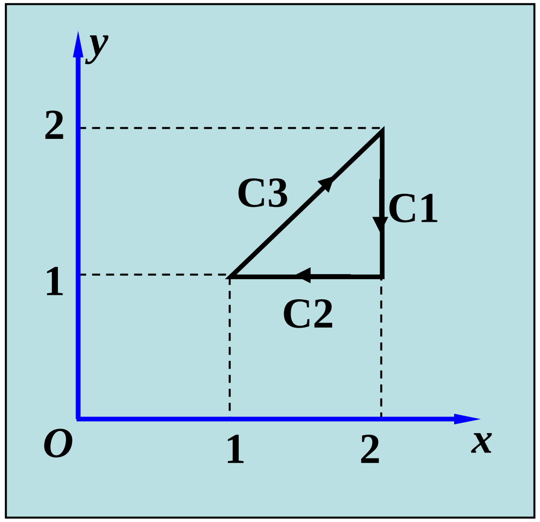
例1.5.1 如图所示，在矢量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x 3x^2y^2-\boldsymbol{e}_y x^3y^2+\boldsymbol{e}_z z^3$ 中，有一个三角形回路 C 位于 xoy 平面内。（1）试计算环流 $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$；（2）验证斯托克斯定理。

解 $\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{C_3}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

$$=\int_1^2 \boldsymbol{A}\big|_{x=2}\cdot(-\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y)+\int_1^2 \boldsymbol{A}\big|_{y=1}\cdot(-\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x)+\int_1^2 \boldsymbol{A}\big|_{y=x}\cdot(\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y)$$

$$=\int_1^2 8y^2\mathrm{d}y-\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x+\int_1^2(3x^4-x^5)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{56}{3}-7+\frac{3}{5}\times 31-\frac{1}{6}\times 63=\frac{593}{30}$$



（2）
$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x^2y^2 & -x^3y^2 & z^3\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_z(3x^2y^2+6x^2y)$$

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_S \boldsymbol{e}_z(3x^2y^2+6x^2y)\cdot(-\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}S$$

$$=\int_1^2[\int_1^x(3x^2y^2+6x^2y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\frac{593}{30}=\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

1.6 无旋场与无散场

1. 矢量场的源

散度源：是标量，产生的矢量场在包围源的封闭面上的通量等于（或正比于）该封闭面内所包围的源的总和，源在一给定点的（体）密度等于（或正比于）矢量场在该点的散度；

旋度源：是矢量，产生的矢量场具有涡旋性质，穿过一曲面的旋度源等于（或正比于）沿此曲面边界的闭合回路的环量，在给定点上，这种源的（面）密度等于（或正比于）矢量场在该点的旋度。

2. 矢量场按源的分类

（1）无旋场

仅有散度源而无旋度源的矢量场，$\nabla\times\vec{F}\equiv 0$

性质: $\oint_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$，线积分与路径无关，是保守场。

无旋场可以用标量场的梯度表示为

$$\vec{F}=-\nabla u$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{F}=-\nabla\times(\nabla u)\equiv 0}$$

例如：静电场

$$\nabla\times\vec{E}\equiv 0 \Rightarrow \quad \vec{E}=-\nabla\varphi$$

（2）无散场

仅有旋度源而无散度源的矢量场，即 $\nabla\cdot\vec{F}\equiv 0$

性质：$\oint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0$

无散场可以表示为另一个矢量场的旋度

$$\vec{F}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\equiv 0}$$

例如，恒定磁场

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

（3）无旋、无散场（源在所讨论的区域之外）

$$\nabla\times\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{F}=-\nabla u$$

$$\nabla\cdot\vec{F}=0 \Rightarrow \nabla\cdot(-\nabla u)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 u=0$$

（4）有散、有旋场

这样的场可分解为两部分：无旋场部分和无散场部分

$$\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}_l(\vec{r})+\vec{F}_C(\vec{r})=-\nabla u(\vec{r})+\nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

无旋场部分

无散场部分

1.7 拉普拉斯运算与格林定理

1. 拉普拉斯运算

- 标量拉普拉斯运算$\nabla^2 u$

概念：$\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2 u$　　∇^2 —— 拉普拉斯算符

计算公式：

直角坐标系 $$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

圆柱坐标系 $$\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

球坐标系 $$\nabla^2 u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

- 矢量拉普拉斯运算 $\nabla^2\vec{F}$

概念：$\nabla^2\vec{F}=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla\times(\nabla\times\vec{F})$

直角坐标系中：$\nabla^2\vec{F}=\vec{e}_x\nabla^2F_x+\vec{e}_y\nabla^2F_y+\vec{e}_z\nabla^2F_z$

即 $(\nabla^2\vec{F})_i=\nabla^2F_i \qquad (i=x,y,z)$

注意：对于非直角分量，$(\nabla^2\vec{F})_i\neq\nabla^2F_i$

如：$(\nabla^2\vec{F})_\phi\neq\nabla^2F_\phi$

1.8 亥姆霍兹定理

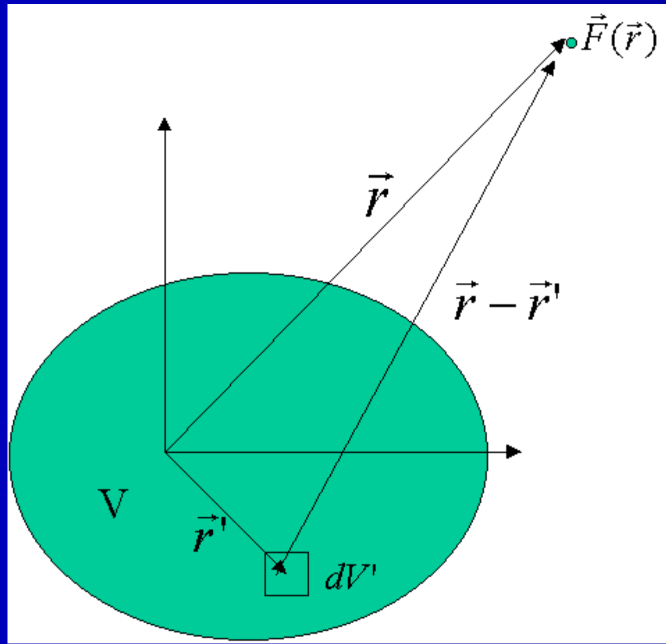
亥姆霍兹定理：

若矢量场在无限空间中处处单值，且其导数连续有界，源分布在有限区域中，则当矢量场的散度及旋度给定后，该矢量场可表示为

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla u(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

式中：
$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

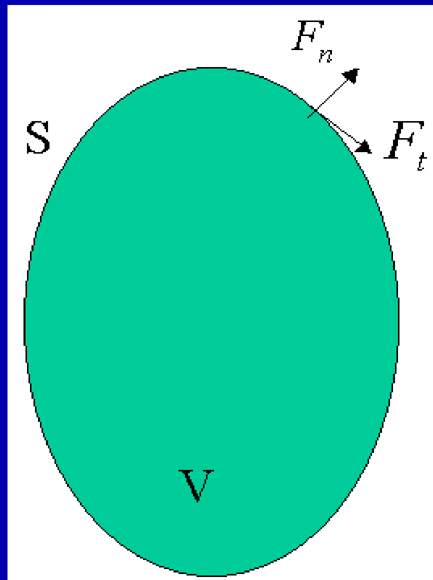


亥姆霍兹定理表明：在无界空间区域，矢量场可由其散度及旋度确定。

在有界区域，矢量场不但与该区域中的散度和旋度有关，还与区域边界上矢量场的切向分量和法向分量有关。

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}')\cdot\mathrm{d}\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}')\times\mathrm{d}\vec{S}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$



有界区域

该定理表明任一矢量场均可表示为一个无旋场与一个无散场之和。矢量场的散度及旋度特性是研究矢量场的首要问题。

练　习　题

1.1, 1.11, 1.12, 1.16,

1.18 ,1.21, 1.23