6.3 习题解答

6.1 有一频率为 100 MHz、沿 y 方向极化的均匀平面波从空气（$x<0$ 区域）中垂直入射到位于 $x=0$ 的理想导体板上。设入射波电场 $\boldsymbol{E}_i$ 的振幅为 10 V/m，试求：

(1) 入射波电场 $\boldsymbol{E}_i$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_i$ 的复矢量；

(2) 反射波电场 $\boldsymbol{E}_r$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_r$ 的复矢量；

(3) 合成波电场 $\boldsymbol{E}_1$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_1$ 的复矢量；

(4) 距离导体平面最近的合成波电场 $\boldsymbol{E}_1$ 为零的位置；

(5) 距离导体平面最近的合成波磁场 $\boldsymbol{H}_1$ 为零的位置。

解 (1) $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 \quad \text{rad/s}$

$$\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8}\ \text{rad/m} = \frac{2}{3}\pi \ \text{rad/m}$$

$$\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \ \Omega$$

则入射波电场 $\boldsymbol{E}_i$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_i$ 的复矢量分别为

$$\boldsymbol{E}_i(x) = \boldsymbol{e}_y 10 e^{-j\frac{2}{3}\pi x} \quad \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_i(x) = \frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{E}_i(x) = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{12\pi} e^{-j\frac{2}{3}\pi x} \quad \text{A/m}$$

(2) 反射波电场 $\boldsymbol{E}_r$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_r$ 的复矢量分别为

$$\boldsymbol{E}_r(x) = -\boldsymbol{e}_y 10 e^{j\frac{2}{3}\pi x} \quad \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_r(x) = \frac{1}{\eta}(-\boldsymbol{e}_x) \times \boldsymbol{E}_r(x) = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{12\pi} e^{j\frac{2}{3}\pi x} \quad \text{A/m}$$

(3) 合成波电场 $\boldsymbol{E}_1$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_1$ 的复矢量分别为

$$\boldsymbol{E}_1(x) = \boldsymbol{E}_i(x) + \boldsymbol{E}_r(x) = -\boldsymbol{e}_y j20\sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right) \quad \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_1(x) = \boldsymbol{H}_i(x) + \boldsymbol{H}_r(x) = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{6\pi}\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) \quad \text{A/m}$$

(4) 对于 $\boldsymbol{E}_1(x)$，当 $x=0$ 时，$\boldsymbol{E}_1(0)=0$。而在空气中，第一个零点发生在 $\frac{2}{3}\pi x = -\pi$ 处，即

$$x = -\frac{3}{2}\ \text{m}$$

(5) 对于 $\boldsymbol{H}_1(x)$，当 $\frac{2}{3}\pi x = -\frac{\pi}{2}$，即 $x = -\frac{3}{4}$ m 时为磁场在空气中的第一个零点。

6.2 一均匀平面波沿 $+z$ 方向传播，其电场强度矢量为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x 100\sin(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{e}_y 200\cos(\omega t - \beta z) \quad \text{V/m}$$

(1) 应用麦克斯韦方程求相伴的磁场 $\boldsymbol{H}$；

(2) 若在波传播方向上 $z=0$ 处放置一无限大的理想导体板，求 $z<0$ 区域中的合成波电场 $\boldsymbol{E}_1$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_1$；

(3) 求理想导体板表面的电流密度。

解　(1) 将已知的电场写成复数形式

$$E(z) = e_x 100 e^{-j(\beta z + 90°)} + e_y 200 e^{-j\beta z}$$

由 $\nabla \times E = -j\omega\mu_0 H$ ，得

$$H(z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla \times E(z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0}\left(-e_x\frac{\partial E_y}{\partial z} + e_y\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{1}{j\omega\mu_0}[-e_x 200(-j\beta)e^{-j\beta z} + e_y 100(-j\beta)e^{-j(\beta z + 90°)}]$$

$$= \frac{\beta}{\omega\mu_0}[-e_x 200 e^{-j\beta z} + e_y 100 e^{-j(\beta z + 90°)}]$$

$$= \frac{1}{\eta_0}[-e_x 200 e^{-j\beta z} + e_y 100 e^{-j(\beta z + 90°)}] \quad \text{A/m}$$

写成瞬时值表示式

$$H(z,t) = \mathrm{Re}[H(z)e^{j\omega t}]$$

$$= \frac{1}{\eta_0}[-e_x 200\cos(\omega t - \beta z) + e_y 100\cos(\omega t - \beta z - 90°)]$$

$$= \frac{1}{\eta_0}[-e_x 200\cos(\omega t - \beta z) + e_y 100\sin(\omega t - \beta z)] \quad \text{A/m}$$

(2) 均匀平面波垂直入射到理想导体平面上会产生全反射，反射波的电场为

$$E_{rx} = -100e^{j(\beta z - 90°)}$$

$$E_{ry} = -200e^{j\beta z}$$

即 $z<0$ 区域内的反射波电场为

$$E_r = e_x E_{rx} + e_y E_{ry} = -e_x 100 e^{j(\beta z - 90°)} - e_y 200 e^{j\beta z}$$

与之相伴的反射波磁场为

$$H_r = \frac{1}{\eta_0}(-e_z \times E_r) = \frac{1}{\eta_0}(-e_x 200 e^{j\beta z} + e_y 100 e^{j(\beta z - 90°)})$$

至此,即可求出 $z<0$ 区域内的总电场 $\boldsymbol{E}_1$ 和总磁场 $\boldsymbol{H}_1$。

$$E_{1x}=E_x+E_{rx}=100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta z+90^\circ)}-100\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta z-90^\circ)}$$

$$=100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z})=-\mathrm{j}200\sin\beta z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}$$

$$E_{1y}=E_y+E_{ry}=200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-200\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}=-\mathrm{j}400\sin\beta z$$

故

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_xE_{1x}+\boldsymbol{e}_yE_{1y}=-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}200\sin\beta z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}-\boldsymbol{e}_y\mathrm{j}400\sin\beta z$$

同样

$$H_{1x}=H_x+H_{rx}=-\frac{1}{\eta_0}200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\frac{1}{\eta_0}200\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}=-\frac{1}{\eta_0}400\cos\beta z$$

$$H_{1y}=H_y+H_{ry}=\frac{1}{\eta_0}[100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta z+90^\circ)}+100\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta z-90^\circ)}]=\frac{1}{\eta_0}200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}\cos\beta z$$

故

$$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{e}_xH_{1x}+\boldsymbol{e}_yH_{1y}=\frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_x400\cos\beta z+\boldsymbol{e}_y200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}\cos\beta z)$$

(3) 理想导体平面上的电流密度为

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{H}_1\Big|_{z=0}=-\boldsymbol{e}_z\times(-\boldsymbol{e}_x400\cos\beta z+\boldsymbol{e}_y200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}\cos\beta z)\frac{1}{\eta_0}\Big|_{z=0}$$

$$=\boldsymbol{e}_x0.53\mathrm{e}^{-\mathrm{j}90^\circ}+\boldsymbol{e}_y1.06\quad\mathrm{A/m}$$

6.3 均匀平面波的频率为 16 GHz,在聚苯乙烯($\sigma_1=0$、$\varepsilon_{r1}=2.55$、$\mu_{r1}=1$)中沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向传播,在 $z=0.82$ cm 处遇到理想导体，试求:

(1) 电场 $\boldsymbol{E}=0$ 的位置;

(2) 聚苯乙烯中 E_{max} 和 H_{max} 的比值。

解 (1) 令 $z'=z-0.82$, 设电场振动方向为 $\boldsymbol{e}_x$，则在聚苯乙烯中的电场为

$$\boldsymbol{E}_1(z')=\boldsymbol{E}_i(z')+\boldsymbol{E}_r(z')=-\boldsymbol{e}_x\mathrm{j}2E_{im}\sin\beta z'$$

故 $\boldsymbol{E}_1(z')=0$ 的位置为

$$\beta z'=-n\pi\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

即

$$z'=-\frac{n\pi}{\beta}=-\frac{n\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

将 $\omega=2\pi f$、$\mu=\mu_0$、$\varepsilon_r=2.55$ 代入,则有

$$z'=-\frac{n\pi}{2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r}}=-\frac{3\times10^8\times n\pi}{2\pi\times16\times10^9\times1.6}$$

$$= -5.86n \times 10^{-3}\ \text{m} = -0.586n\ \text{cm}$$

故

$$z = z' + 0.82 = -0.586n + 0.82\ \text{cm} \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

（2）聚苯乙烯中的磁场

$$\boldsymbol{H}_1(z') = \boldsymbol{H}_i(z') + \boldsymbol{H}_r(z') = \boldsymbol{e}_y 2\frac{E_{im}}{\eta_1}\cos\beta z'$$

所以

$$\frac{E_{max}}{H_{max}} = \frac{2E_{im}}{2E_{im}/\eta_1} = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 235.6\quad \Omega$$

6.4 均匀平面波的电场振幅为 $E_{im} = 100\ \text{V/m}$ ，从空气中垂直入射到无损耗介质平面上（介质的 $\sigma_2 = 0$、$\varepsilon_{r2} = 4$、$\mu_{r2} = 1$），求反射波与透射波的电场振幅。

解 $\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \ \Omega$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi\ \ \Omega$$

反射系数为

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{60\pi - 120\pi}{60\pi + 120\pi} = -\frac{1}{3}$$

透射系数为

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2\times 60\pi}{60\pi + 120\pi} = \frac{2}{3}$$

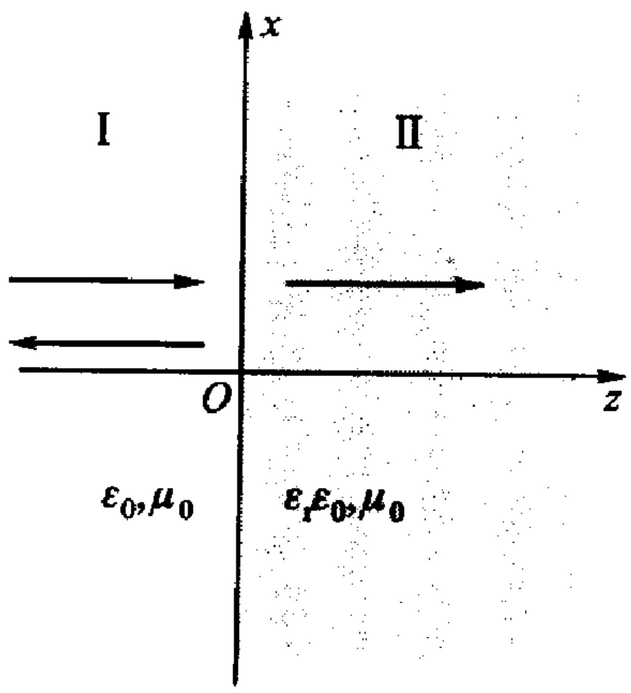
故反射波的电场振幅为

$$E_{rm} = |\Gamma| E_{im} = \frac{100}{3}\ \text{V/m} = 33.3\ \text{V/m}$$

透射波的电场振幅为

$$E_{tm} = \tau E_{im} = \frac{2\times 100}{3}\ \text{V/m} = 66.6\ \text{V/m}$$

6.5 设一电磁波，其电场沿 x 方向、频率为 1 GHz、振幅为 100 V/m 、初相位为零，垂直入射到一无损耗介质表面（$\varepsilon_r = 2.1$），如图题 6.5 所示。



图题 6.5

（1）求每一区域中的波阻抗和传播常数：

（2）分别求两区域中的电场、磁场的瞬时表达式。

解　(1) 波阻抗

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

得

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \Omega = 377\ \Omega$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 120\pi\sqrt{\frac{1}{2.1}}\ \Omega = 260\ \Omega$$

对于无损耗介质

$$\gamma = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \mathrm{j}2\pi\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$$

得

$$\gamma_1 = \mathrm{j}2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \approx \mathrm{j}20.93\ 1/\mathrm{m}$$

$$\gamma_2 = \mathrm{j}2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \approx \mathrm{j}30.33\ 1/\mathrm{m}$$

(2) Ⅰ 区的入射波为

$$\boldsymbol{E}_{1i}(z,t) = \boldsymbol{e}_x 100\cos(2\pi ft - \beta_1 z) = \boldsymbol{e}_x 100\cos(2\pi\times 10^9 t - 20.93z)\quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_{1i}(z,t) = \frac{1}{\eta_1}\boldsymbol{e}_z \times E_{1i}(z,t) = \boldsymbol{e}_y 0.27\cos(2\pi\times 10^9 t - 20.93z)\quad \mathrm{A/m}$$

反射波为

$$\boldsymbol{E}_{1r}(z,t) = \boldsymbol{e}_x E_{rm}\cos(\omega t + \beta_1 z) = \boldsymbol{e}_x E_{im}\cos(2\pi ft + \beta_1 z)$$

$$= \boldsymbol{e}_x \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}100\cos(2\pi\times 10^9 t + 20.93z)$$

$$= -\boldsymbol{e}_x 18.37\cos(2\pi\times 10^9 t + 20.93z)\quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_{1r}(z,t) = \frac{1}{\eta_1}(-\boldsymbol{e}_z \times E_{1r}) = \boldsymbol{e}_y\frac{1}{377}\times 18.37\cos(2\pi\times 10^9 t + 20.93z)$$

$$= \boldsymbol{e}_y 0.049\cos(2\pi\times 10^9 t + 20.93z)\quad \mathrm{A/m}$$

故合成波为

$$\boldsymbol{E}_1(z,t) = \boldsymbol{E}_{1i}(z,t) + \boldsymbol{E}_{1r}(z,t)$$

$$= \boldsymbol{e}_x[100\cos(2\pi\times 10^9 t - 20.93z) -$$

$$18.37\cos(2\pi\times 10^9 t + 20.93z)\quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_1(z,t)=\boldsymbol{H}_{1i}(z,t)+\boldsymbol{H}_{1r}(z,t)$$

$$=\boldsymbol{e}_y[0.27\cos(2\pi\times10^9t-20.93z)+$$

$$0.049\cos(2\pi\times10^9t+20.93z)\quad \mathrm{A/m}$$

Ⅱ区只有透射波

$$\boldsymbol{E}_{2t}(z,t)=\boldsymbol{e}_xE_{tm}\cos(\omega t-\beta_2z)=\boldsymbol{e}_x\tau E_{im}\cos(2\pi ft-\beta_2z)$$

$$=\boldsymbol{e}_x\frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2}100\cos(2\pi\times10^9t-30.33z)$$

$$=\boldsymbol{e}_x81.6\cos(2\pi\times10^9t-30.33z)\quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_{2t}(z,t)=\frac{1}{\eta_2}\boldsymbol{e}_z\times E_{2t}$$

$$=\boldsymbol{e}_y\frac{81.6}{260}\cos(2\pi ft-\beta_2z)$$

$$=\boldsymbol{e}_y0.31\cos(2\pi\times10^9t-30.33z)\quad \mathrm{A/m}$$

6.6 均匀平面波从媒质 1 入射到与媒质 2 的平面分界面上，已知 $\sigma_1=\sigma_2=0$、$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。求使入射波的平均功率的 10% 被反射时的$\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$的值。

解　由题意得下列关系

$$|\Gamma|^2=0.1$$

而

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}-\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}+\sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}}$$

$$=\frac{\eta_0\sqrt{1/\varepsilon_{r2}}-\eta_0\sqrt{1/\varepsilon_{r1}}}{\eta_0\sqrt{1/\varepsilon_{r2}}+\eta_0\sqrt{1/\varepsilon_{r1}}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}}-1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}}+1}$$

代入 $|\Gamma|^2=0.1$ 中，得

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}=1.92\quad 或\quad \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}}=0.52$$

故

$$\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}=3.68\quad 或\quad \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}=0.269$$

6.7 入射波电场 $\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{e}_x10\cos(3\pi\times10^9t-10\pi z)$ V/m，从空气（$z<0$ 区域）

中垂直入射到 $z=0$ 的分界面上，在 $z>0$ 区域中 $\mu_r=1$、$\varepsilon_r=4$、$\sigma=0$。求 $z>0$ 区域的电场 $\boldsymbol{E}_2$ 和磁场 $\boldsymbol{H}_2$。

解　$z>0$ 区域,本征阻抗

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}}=\frac{120\pi}{2}\ \Omega=60\pi\ \Omega$$

透射系数

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2}=\frac{2\times60\pi}{120\pi+60\pi}=6.67\times10^{-1}$$

相位常数

$$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{r2}}=\frac{3\pi\times10^9}{3\times10^8}\times2\ \text{rad/m}=20\pi\ \text{rad/m}$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2&=\boldsymbol{e}_x E_{2m}\cos(\omega t-\beta_2 z)=\boldsymbol{e}_x\tau E_{1m}\cos(\omega t-\beta_2 z)\\&=\boldsymbol{e}_x 6.67\times10^{-1}\times10\cos(3\pi\times10^9 t-20\pi z)\\&=\boldsymbol{e}_x 6.67\cos(3\pi\times10^9 t-20\pi z)\quad \text{V/m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_2&=\frac{1}{\eta_2}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_y\frac{6.67}{60\pi}\cos(3\pi\times10^9 t-20\pi z)\\&=\boldsymbol{e}_y 0.036\cos(3\pi\times10^9 t-20\pi z)\quad \text{A/m}\end{aligned}$$

6.8　已知 $z<0$ 区域中媒质 1 的 $\sigma_1=0$、$\varepsilon_{r1}=4$、$\mu_{r1}=1$，$z>0$　区域中媒质 2 的 $\sigma_2=0$、$\varepsilon_{r2}=10$、$\mu_{r2}=4$，角频率 $\omega=5\times10^8$ rad/s　的均匀平面波从媒质 1 垂直入射到分界面上。设入射波是沿 x 轴方向的线极化波，在 $t=0$、$z=0$ 时，入射波电场振幅为 2.4 V/m。试求：

(1) β_1 和 β_2；

(2) 反射系数 Γ；

(3) 媒质 1 的电场 $\boldsymbol{E}_1(z,t)$；

(4) 媒质 2 的电场 $\boldsymbol{E}_2(z,t)$；

(5) $t=5$ ns时，媒质 1 中的磁场 $\boldsymbol{H}_1(-1,t)$ 的值。

解　(1) $\beta_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}=\dfrac{5\times10^8}{3\times10^8}\times2\ \text{rad/m}=3.33\ \text{rad/m}$

$$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}=\frac{5\times10^8}{3\times10^8}\times\sqrt{10\times4}\ \text{rad/m}=10.54\ \text{rad/m}$$

(2) $\eta_1=\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\eta_0\sqrt{\dfrac{\mu_{r1}}{\varepsilon_{r1}}}=\dfrac{1}{2}\eta_0=60\pi\ \Omega$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}} = \eta_0 \sqrt{\frac{4}{10}} \approx 75.9\pi\ \Omega$$

故
$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{75.9 - 60}{60 + 75.9} = 0.117$$

（3）电场方向为 e_x，则

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_i(z) + E_r(z) = e_x E_{im}(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}) \\ &= e_x E_{im}[(1 + \Gamma)e^{-j\beta_1 z} + \Gamma(e^{j\beta_1 z} - e^{-j\beta_1 z})] \\ &= e_x E_{im}[(1 + \Gamma)e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma \sin\beta_1 z] \\ &= e_x 2.4(1.117e^{-j3.33z} + j0.234\sin 3.33z) \\ &= e_x(2.681e^{-j3.33z} + j0.562\sin 3.33z) \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} E_1(z,t) &= \mathrm{Re}[e_x E_1(z)e^{j\omega t}] \\ &= e_x 2.681\cos(5\times10^8 t - 3.33z) - \\ &\quad e_x 0.562\sin(3.33z)\sin(5\times10^8 t) \end{aligned}$$

或

$$E_1(z) = E_i(z) + E_r(z) = e_x 2.4e^{-j3.33z} - e_x 0.281e^{j3.33z}$$

$$\begin{aligned} E_1(z,t) &= \mathrm{Re}[e_x E_1(z)e^{j\omega t}] \\ &= e_x 2.4\cos(5\times10^8 t - 3.33z) + e_x 0.281\cos(5\times10^8 t + 3.33z) \end{aligned}$$

（4）
$$E_2(z) = e_x E_{tm} e^{-j\beta_2 z} = e_x \tau E_{im} e^{-j\beta_2 z}$$

式中

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \approx 1.12$$

故

$$E_2(z) = e_x 1.12\times2.4e^{-j10.54z} = e_x 2.68e^{-j10.54z}$$

$$E_2(z,t) = e_x 2.68\cos(5\times10^8 t - 10.54z)$$

（5）
$$\begin{aligned} H_1(z) &= H_i(z) + H_r(z) = e_z \times \frac{1}{\eta_1}E_i(z) + (-e_z)\times\frac{1}{\eta_1}E_r(z) \\ &= e_y \frac{2.4}{\eta_1}e^{-j\beta_1 z} - e_y \frac{0.281}{\eta_1}e^{j\beta_1 z} \\ &= e_y 1.27\times10^{-2}e^{-j3.33z} - e_y 1.49\times10^{-3}e^{j3.33z} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{H}_1(z,t)=\boldsymbol{e}_y 1.27\times10^{-2}\cos(\omega t-3.33z)-\boldsymbol{e}_y 1.49\times10^{-3}\cos(\omega t+3.33z)$$

当 $t=5\times10^{-9}$ s、$z=-1$ m 时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_1 &= \boldsymbol{e}_y 1.27\times10^{-2}\cos(5\times10^{8}\times10^{-9}\times5+3.33)-\\ &\quad \boldsymbol{e}_y 1.49\times10^{-3}\cos(5\times10^{8}\times10^{-9}\times5-3.33)\\ &=\boldsymbol{e}_y 10.4\times10^{-3}\quad \text{A/m}\end{aligned}$$

6.9 一圆极化波自空气中垂直入射于一介质板上，介质板的本征阻抗为 η_2。入射波电场为 $\boldsymbol{E}=E_{\rm m}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{j})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$。求反射波与透射波的电场，它们的极化情况如何？

解　设媒质 1 为空气，其本征阻抗为 η_0，故分界面上的反射系数和透射系数分别为

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_0}{\eta_2+\eta_0}$$

$$\tau=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_0}$$

式中

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}},\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

都是实数，故 Γ、τ 也是实数。

反射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_{\rm r}=\Gamma E_{\rm m}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{j})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}$$

可见，反射波的电场的两个分量的振幅仍相等，相位关系与入射波相比没有变化，故反射波仍然是圆极化波。但波的传播方向变为 $-z$ 方向，故反射波变为右旋圆极化波，而入射波是沿 $+z$ 方向传播的左旋圆极化波。

透射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_{\rm t}=\tau E_{\rm m}(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{j})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}$$

式中，$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}$ 是媒质 2 中的相位常数。可见，透射波是沿 $+z$ 方向传播的左旋圆极化波。

6.10 证明：均匀平面波从本征阻抗为 η_1 的无耗媒质垂直入射至另一种本征阻抗为 η_2 的无耗媒质的平面上，两种媒质中功率密度的时间平均值相等。

证　设平面波的传播方向为 $\boldsymbol{e}_z$，则媒质 1 中的功率密度平均值为

$$\boldsymbol{S}_{1\rm av}=\boldsymbol{S}_{\rm iav}+\boldsymbol{S}_{\rm rav}$$

$$= \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2\eta_1} |\boldsymbol{E}_i|^2 - \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2\eta_1} |\boldsymbol{E}_r|^2 = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2\eta_1} |\boldsymbol{E}_i|^2 (1 - \Gamma^2)$$

媒质 2 中的功率密度平均值为

$$\boldsymbol{S}_{2av} = \boldsymbol{S}_{tav} = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2\eta_2} |\boldsymbol{E}_t|^2 = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2\eta_2} |\boldsymbol{E}_i|^2 \tau^2 = \boldsymbol{e}_z \frac{1}{2\eta_2} |\boldsymbol{E}_i|^2 (1 + \Gamma)^2$$

所以

$$\frac{|\boldsymbol{S}_{1av}|}{|\boldsymbol{S}_{2av}|} = \frac{\eta_2 (1 - \Gamma^2)}{\eta_1 (1 + \Gamma)^2} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{(1 - \Gamma)(1 + \Gamma)}{(1 + \Gamma)^2} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma}$$

将 $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$代入上式,可得到 $\frac{|\boldsymbol{S}_{1av}|}{|\boldsymbol{S}_{2av}|} = 1$, 故

$$\boldsymbol{S}_{1av} = \boldsymbol{S}_{2av}$$

6.11 均匀平面波垂直入射到两种无损耗电介质分界面上，当反射系数与透射系数的大小相等时，其驻波比等于多少？

解 由题意有下列关系

$$|\Gamma| = \tau = 1 + \Gamma$$

由此可得

$$|\Gamma|^2 = 1 + 2\Gamma + \Gamma^2$$

即

$$\Gamma = -\frac{1}{2}$$

故驻波系数

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} = 3$$

由 $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{1}{2}$,还可得到

$$\eta_1 = 3\eta_2$$

若媒质的磁导率 $\mu_1 = \mu_2$, 则可得到

$$\varepsilon_{r2} = 9\varepsilon_{r1}$$

6.12 均匀平面波从空气垂直入射到某电介质平面时，空气中的驻波比为 2.7，介质平面上为驻波电场最小点，求电介质的介电常数。

解 根据题意有

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 2.7$$

由此求得

$$|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{1.7}{3.7} = 0.459$$

因介质平面上是驻波最小点，故应取

$$\Gamma = -0.459$$

由反射系数

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0} = \frac{\eta_0/\sqrt{\varepsilon_{r2}} - \eta_0}{\eta_0/\sqrt{\varepsilon_{r2}} + \eta_0} = \frac{1-\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{1+\sqrt{\varepsilon_{r2}}} = -0.459$$

得

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{1+0.459}{1-0.459}\right)^2 = 7.27$$

故电介质的介电常数

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0 = 7.27\varepsilon_0$$

6.13 均匀平面波从空气中垂直入射到理想电介质（$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$、$\mu_r = 1$、$\sigma = 0$）表面上。测得空气中驻波比为 2，电场振幅最大值相距 1.0 m，且第一个最大值距离介质表面 0.5 m。试确定电介质的相对介电常数 ε_r。

由 $\frac{\lambda}{2} =\quad 0$，得 $\lambda = 2$ m，所以电场振幅第一个最大值距离介质表面 $\lambda/4$，故反射系数 $\Gamma < 0$。

由 $|\Gamma| = \frac{S-1}{S+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$，得到

$$\Gamma = -\frac{1}{3}$$

又

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 + \eta_0} = \frac{1-\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{1+\sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

故得到

$$\varepsilon_{r2} = \left(\frac{1+1/3}{1-1/3}\right)^2 = 4$$

6.14 $z<0$ 的区域 1 和 $z>0$ 的区域 2 都是理想电介质，频率 $f = 3\times10^9$ Hz 的均匀平面波沿 e_z 方向传播，在两种电介质中的波长分别为 $\lambda_1 = 5$ cm 和 $\lambda_2 = 3$ cm。(1) 计算入射波能量被反射的百分比；(2) 计算区域 1 中的驻波比。

解 (1) 在理想电介质中 $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_r}$

由

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8}{3\times10^9}\text{ m} = 0.1\text{ m}$$

得
$$\sqrt{\varepsilon_{r1}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{0.1}{0.05} = 2$$

$$\sqrt{\varepsilon_{r2}} = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} = \frac{0.1}{0.03} = \frac{10}{3}$$

反射系数

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - \sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r1}} + \sqrt{\varepsilon_{r2}}} = \frac{2 - 10/3}{2 + 10/3} = -\frac{1}{4}$$

故入射波能量被反射的百分比为

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}} = |\Gamma|^2 = \frac{1}{16} = 6.25\%$$

(2)区域 1 中的驻波比为

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 1/4}{1 - 1/4} = \frac{5}{3}$$

6.15 频率 $f = 20$ MHz 的均匀平面波由空气中垂直入射到海平面上，已知海水的 $\varepsilon_r = 81$、$\mu_r = 1$、$\sigma = 4$ S/m。试确定入射功率被海平面反射的百分比。

解 $\dfrac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_r} = \dfrac{4 \times 36\pi \times 10^9}{2\pi \times 20 \times 10^6 \times 81} = \dfrac{400}{9} \gg 1$，可视为良导体，则

$$\eta_{2c} \approx (1 + j)\sqrt{\frac{\pi f \mu_2}{\sigma_2}} = (1 + j)\sqrt{\frac{\pi \times 20 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} = \sqrt{2}\pi(1 + j)$$

反射系数

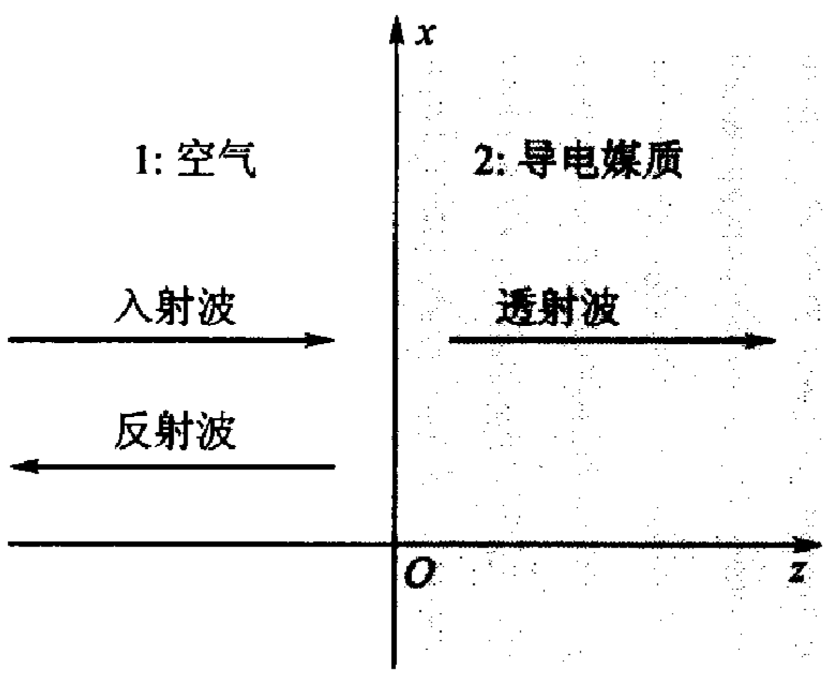
$$\Gamma = \frac{\eta_{2c} - \eta_1}{\eta_{2c} + \eta_1} = \frac{\sqrt{2}(1 + j) - 120}{\sqrt{2}(1 + j) + 120}$$

故入射波功率被海平面反射的百分比为

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}} = |\Gamma|^2 = 97.7\%$$

6.16 均匀平面波的电场强度为 $\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{e}_x 10 e^{-j6z}$，此波从空中垂直入射到 $\varepsilon_r = 2.5$、损耗角正切为 0.5 的导电媒质表面上，如图题 6.16 所示。

(1) 求反射波和透射波的电场与磁场的瞬时表达式；



图题 6.16

（2）求空气中及损耗媒质中的时间平均坡印廷矢量。

解　(1) 根据已知条件求得如下参数。

在空气中

$$\beta_1 = 6 \text{ rad/m}$$

$$\omega = \beta_1 c = 6 \times 3 \times 10^8 \text{ rad/s} = 1.8 \times 10^9 \text{ rad/s}$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \ \Omega$$

在导电媒质中

$$\tan\delta = \frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2} = 0.5$$

$$\alpha_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^2}-1\right]}$$

$$= 1.8 \times 10^9\sqrt{\frac{2.5\mu_0\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+0.5^2}-1\right]} = 2.31 \text{ Np/m}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^2}+1\right]}$$

$$= 1.8 \times 10^9\sqrt{\frac{2.5\mu_0\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+0.5^2}+1\right]} = 9.77 \text{ rad/m}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\Big/\sqrt{1-\mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}}\Big/\sqrt{1-\mathrm{j}0.5}$$

$$= 225\mathrm{e}^{\mathrm{j}13.3^\circ} = 218.96 + \mathrm{j}51.76 \ \Omega$$

分界面上的反射系数为

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{218.96 + \mathrm{j}51.76 - 377}{218.96 + \mathrm{j}51.76 + 377} = 0.278\mathrm{e}^{\mathrm{j}156.9^\circ}$$

透射系数为

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2 \times 225\mathrm{e}^{\mathrm{j}13.3^\circ}}{218.96 + \mathrm{j}51.76 + 377} = 0.752\mathrm{e}^{\mathrm{j}8.34^\circ}$$

故反射波的电场和磁场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{e}_x\Gamma \times 10\mathrm{e}^{\mathrm{j}6z} = \boldsymbol{e}_x 2.78\mathrm{e}^{\mathrm{j}156.9^\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{j}6z}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\eta_1}(-\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}) = \frac{1}{377}(-\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x 2.78\mathrm{e}^{\mathrm{j}156.9^\circ}\mathrm{e}^{\mathrm{j}6z})$$

$$= -\boldsymbol{e}_y 7.37\times 10^{-3} e^{j156.9^\circ} e^{j6z}$$

则其瞬时表示式为

$$\boldsymbol{E}_r(z,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_r e^{j\omega t}] = \boldsymbol{e}_x 2.78\cos(1.8\times 10^9 t + 6z + 156.9^\circ) \quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_r(z,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{H}_r e^{j\omega t}] = -\boldsymbol{e}_y 7.37\times 10^{-3}\cos(1.8\times 10^9 t + 6z + 156.9^\circ) \quad \mathrm{A/m}$$

而媒质 2 中的透射波电场和磁场为

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{e}_x \tau\times 10 e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z} = \boldsymbol{e}_x 7.52 e^{-2.31z} e^{-j9.77z} e^{j8.34^\circ}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{1}{\eta_2}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{225 e^{j13.3^\circ}}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x 7.52 e^{-2.31z} e^{-j9.77z} e^{j8.34^\circ}$$

$$= \boldsymbol{e}_y 0.033 e^{-2.31z} e^{-j9.77z} e^{-j4.96^\circ}$$

故其瞬时表示式为

$$\boldsymbol{E}_2(z,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_2 e^{j\omega t}]$$

$$= \boldsymbol{e}_x 7.52 e^{-2.31z}\cos(1.8\times 10^9 t - 9.77z + 8.34^\circ) \quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}_2(z,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{H}_2 e^{j\omega t}]$$

$$= \boldsymbol{e}_y 0.033 e^{-2.31z}\cos(1.8\times 10^9 t - 9.77z - 4.96^\circ) \quad \mathrm{A/m}$$

(2) $$\boldsymbol{S}_{1av} = \boldsymbol{S}_{iav} + \boldsymbol{S}_{rav} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_i\times\boldsymbol{H}_i^*] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_r\times\boldsymbol{H}_r^*]$$

$$= \boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\times\frac{10^2}{377} - \boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\times\frac{2.78^2}{377} = \boldsymbol{e}_z 0.122 \quad \mathrm{W/m^2}$$

$$\boldsymbol{S}_{2av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2^*]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x 7.52 e^{-2.31z} e^{-j9.77z} e^{j8.34^\circ}\times\boldsymbol{e}_y 0.033 e^{-2.31z} e^{j9.77z} e^{j4.96^\circ}]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_z 0.248 e^{-4.62z} e^{j13.3^\circ}] = \boldsymbol{e}_z 0.122 e^{-4.62z} \quad \mathrm{W/m^2}$$

6.17 $z<0$ 为自由空间，$z>0$ 的区域中为导电媒质（$\varepsilon = 20\ \mathrm{pF/m}$、$\mu = 5\ \mu\mathrm{H/m}$ 及 $\sigma = 0.004\ \mathrm{S/m}$）。均匀平面波垂直入射到分界面上，$E_{ix} = 100 e^{-\alpha_1 z}\times\cos(10^8 t - \beta_1 z)\ \mathrm{V/m}$。试求：

(1) α_1 和 β_1；

(2) 分界上的反射系数 Γ；

(3) 反射波电场 E_{rx}；

(4) 透射波电场 E_{tx}。

解 (1) 由题意，1 区为自由空间，2 区为损耗媒质，则

$$\alpha_1 = 0$$

$$\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 10^8 \times \frac{1}{3\times 10^8}\ \text{rad/m} = 0.33\ \text{rad/m}$$

(2) $\dfrac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2} = \dfrac{0.004}{10^8 \times 20 \times 10^{-12}} = 2$

$$\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{2c}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2 - \mathrm{j}\dfrac{\sigma_2}{\omega}}} = \sqrt{\frac{5\times 10^{-6}}{20\times 10^{-12} - \mathrm{j}\dfrac{0.004}{10^8}}} = 334\mathrm{e}^{\mathrm{j}31.7^\circ}$$

反射系数

$$\Gamma = \frac{\eta_{2c} - \eta_1}{\eta_{2c} + \eta_1} = \frac{334\mathrm{e}^{\mathrm{j}31.7^\circ} - 377}{334\mathrm{e}^{\mathrm{j}31.7^\circ} + 377}$$

$$= \frac{-92.8 + \mathrm{j}175.6}{661.2 + \mathrm{j}175.6} = \frac{198.3\mathrm{e}^{\mathrm{j}117.9^\circ}}{684.1\mathrm{e}^{\mathrm{j}14.87^\circ}} = 0.29\mathrm{e}^{\mathrm{j}103^\circ}$$

(3) $E_{rx} = |\Gamma| E_{im}\cos(10^8 t + \beta_1 z + \phi_\Gamma) = 29\cos(10^8 t + 0.33z + 103^\circ)$ V/m

(4) $E_{ix} = |\tau| E_{im}\mathrm{e}^{-\alpha_2 z}\cos(10^8 t - \beta_2 z + \phi_\tau)$

式中

$$\alpha_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^2} - 1\right]}^{1/2} = 0.78\ \text{Np/m}$$

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2}\right)^2} + 1\right]}^{1/2} = 1.27\ \text{rad/m}$$

$$\tau = 1 + \Gamma = 1 + 0.29\mathrm{e}^{-\mathrm{j}103^\circ} = 0.935 + \mathrm{j}0.283 = 0.978\mathrm{e}^{-\mathrm{j}16.8^\circ}$$

所以

$$\boldsymbol{E}_{tx} = 97.8\mathrm{e}^{-0.78z}\cos(10^8 t - 1.27z + 16.8^\circ)\ \text{V/m}$$

6.18 在自由空间($z<0$)中沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波，垂直入射到 $z=0$ 处的导体平面上。导体的电导率 $\sigma = 61.7$ MS/m、$\mu_r = 1$。 自由空间电磁波的频率 $f = 1.5$ MHz、电场振幅为 1 V/m。在分界面($z=0$)处，$\boldsymbol{E}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{E}(0,t) = \boldsymbol{e}_y \sin 2\pi f t$$

对于 $z>0$ 的区域，求 $\boldsymbol{H}_2(z,t)$。

解　在导体中

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{61.7\times 10^6}{2\pi\times 1.5\times 10^6\varepsilon_0} = 704.4\times 10^9 \gg 1$$

可见，在 $f=1.5$ MHz 的频率该导体可视为良导体，故

$$\alpha \approx \sqrt{\pi f\mu\sigma} = \sqrt{\pi(1.5\times10^{6})\times4\pi\times10^{-7}\times61.7\times10^{6}} = 1.91\times10^{4}\ \text{Np/m}$$

$$\beta \approx \sqrt{\pi f\mu\sigma} = 1.91\times10^{4}\ \text{rad/m}$$

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j45^\circ} = \sqrt{\frac{2\pi\times1.5\times10^{6}\times4\pi\times10^{-7}}{61.7\times10^{6}}}e^{j45^\circ}$$

$$= 4.38\times10^{-4}e^{j45^\circ} = (3.1+j3.1)\times10^{-4}\ \Omega$$

分界面上的透射系数为

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1} = \frac{2\eta_c}{\eta_c+\eta_0} = \frac{2\times4.38\times10^{-4}e^{j45^\circ}}{(3.1+j3.1)10^{-4}+377} \approx 2.32\times10^{-6}e^{j45^\circ}$$

入射波电场的复数表示式可写为

$$\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{e}_y e^{-j\beta_0 z}e^{-j\frac{\pi}{2}}\quad \text{V/m}$$

则 $z>0$ 区域的透射波电场的复数形式为

$$\boldsymbol{E}_2(z) = \boldsymbol{e}_y \tau e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{e}_y 2.32\times10^{-6}e^{j45^\circ}e^{-1.91\times10^{4}z}e^{-j1.91\times10^{4}z}e^{-j\frac{\pi}{2}}\quad \text{V/m}$$

与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}_2(z) = \frac{1}{\eta_c}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}_2(z)$$

$$= \frac{1}{4.38\times10^{-4}e^{j45^\circ}}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y 2.32\times10^{-6}e^{-1.91\times10^{4}z}e^{-j\left(1.91\times10^{4}z-45^\circ+\frac{\pi}{2}\right)}$$

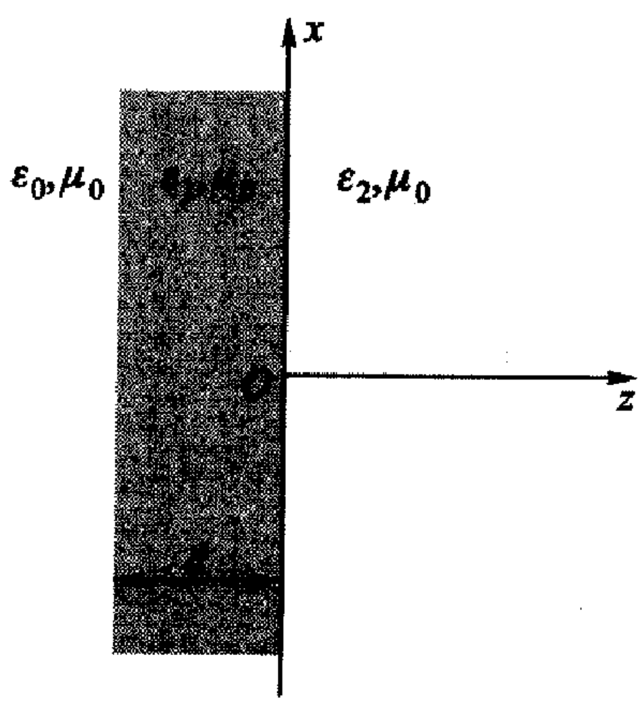
$$= -\boldsymbol{e}_x 0.53\times10^{-2}e^{-1.91\times10^{4}z}e^{-j\left(1.91\times10^{4}z+\frac{\pi}{2}\right)}\quad \text{A/m}$$

则

$$\boldsymbol{H}_2(z,t) = \text{Re}[\boldsymbol{H}_2(z)e^{j\omega t}]$$

$$= -\boldsymbol{e}_x 0.53\times10^{-2}e^{-1.91\times10^{4}z}$$

$$\sin(3\pi\times10^{6}t-1.91\times10^{4}z)\quad \text{A/m}$$



图题 6.19

6.19 如图题 6.19 所示，$z>0$ 区域的媒质介电常数为 ε_2，在此媒质前置有厚度为 d、介电常数为 ε_1 的介质板。对于一个从左面垂直入射来的 TEM 波，证明当 $\varepsilon_{r1}=\sqrt{\varepsilon_{r2}}$、$d=\dfrac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$

时(λ 为自由空间的波长)，没有反射。

解　媒质 1 中的波阻抗为

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}\eta_0 \tag{1}$$

媒质 2 中的波阻抗为

$$\eta_{21} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\eta_0 \tag{2}$$

当 $\varepsilon_{r1} = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$ 时，由式(1)和(2)得

$$\eta_1^2 = \frac{\eta_0^2}{\varepsilon_{r1}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}}}\cdot\eta_0 = \eta_2\eta_0 \tag{3}$$

而分界面 $z = -d$ 处的等效波阻抗为

$$\eta_{ef} = \eta_1\frac{\eta_2 + j\eta_1\tan\beta_1 d}{\eta_1 + j\eta_2\tan\beta_1 d}$$

当 $d = \frac{1}{4}\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$ 即 $d = \frac{\lambda_1}{}$ 时

$$\eta_{ef} = \frac{\eta_1^2}{\eta_2} \tag{4}$$

分界面处的反射系数为

$$\Gamma = \frac{\eta_{ef} - \eta_0}{\eta_{ef} + \eta_0} \tag{5}$$

将式(3)和(4)代入式(5)，则得

$$\Gamma = 0$$

即 $\varepsilon_{r1} = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$ 且 $d = \frac{1}{4}\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{r1}}}$ 时，分界面 $z = -d$ 处无反射。

6.20　均匀平面波从空气中垂直入射到厚度 $d_2 = \frac{\lambda_2}{8}$ m 的聚丙烯($\varepsilon_{r2} = 2.25$、$\mu_{r2} = 1$、$\sigma_2 = 0$)　平板上。(1) 计算入射波能量被反射的百分比；(2) 计算空气中的驻波比。

解　(1) $\beta_2 d_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{8} = \frac{\pi}{4}$，$\eta_1 = \eta_3 = \eta_0$，$\eta_2 = \eta_0/\sqrt{\varepsilon_{r2}} = 2\eta_0/3$

反射面处的等效波阻抗为

$$\eta_{ef} = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan(\beta_2 d_2)}{\eta_2 + j\eta_3 \tan(\beta_2 d_2)} = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2}{\eta_2 + j\eta_3} = \frac{2\eta_0}{3} \frac{\eta_0 + j2\eta_0/3}{2\eta_0/3 + j\eta_0} = \frac{6 + j4}{6 + j9}\eta_0$$

反射系数

$$\Gamma = \frac{\eta_{ef} - \eta_0}{\eta_{ef} + \eta_0} = \frac{-j5}{12 + j13}$$

故入射波能量被反射的百分比为

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}} = |\Gamma|^2 = \left|\frac{\eta_{ef} - \eta_0}{\eta_{ef} + \eta_0}\right|^2 = \left|\frac{-j5}{12 + j13}\right|^2 = 7.99\%$$

(2) 空气中的驻波比为

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{|12 + j13| + 5}{|12 + j13| - 5} = \frac{22.69}{12.69} = 1.79$$

6.21 最简单的天线罩是单层介质板。若已知介质板的介电常数 $\varepsilon = 2.8\varepsilon_0$，问介质板的厚度应为多少方可使频率为 3 GHz 的电磁波垂直入射到介质板面时没有反射。当频率分别为 3.1 GHz 及 2.9 GHz 时，反射增大多少？

解 通常天线罩的内、外都是空气，即 $\eta_1 = \eta_3 = \eta_0$，无反射的条件为

$$d = \frac{\pi}{\beta_2} = \frac{\lambda_2}{2} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{\varepsilon_{r2}}}$$

频率 $f_0 = 3$ GHz 时

$$\lambda_0 = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^9} \text{ m} = 0.1 \text{ m}$$

则介质板的厚度应为

$$d = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{2.8}} = \frac{0.1}{2 \times 1.67} \text{ m} \approx 30 \text{ mm}$$

当频率偏移到 $f = 3.1$ GHz 时，

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2} = 2\pi \times 3.1 \times 10^9 \sqrt{2.8\mu_0\varepsilon_0} = 108.6 \text{ rad/m}$$

故

$$\tan \beta_2 d = \tan(108.6 \times 30 \times 10^{-3}) = 0.117$$

而

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{2.8\varepsilon_0}} = 225.3\ \Omega$$

故此时的等效波阻抗为

$$\eta_{ef} = 225.3 \times \frac{377 + j225.3 \times 0.117}{225.3 + j377 \times 0.117} = 370.87e^{-j7.08°} = 368 - j45.7\ \Omega$$

反射系数为

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_{ef} - \eta_1}{\eta_{ef} + \eta_1} = \frac{368 - j45.7 - 377}{368 - j45.7 + 377} = 0.06e^{j(180° + 82.37°)}$$

反射功率密度与入射功率密度之比为

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}} = |\Gamma_1|^2 = 0.003\ 6 = 0.36\%$$

即频率偏移到 3.1 GHz 时，反射功率将增大为入射功率的 0.36%。

当频率偏移到 $f = 2.9$ GHz 时，

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = 2\pi \times 2.9 \times 10^9\sqrt{2.8\mu_0\varepsilon_0} = 101.6\ \text{rad/m}$$

故

$$\tan\beta_2 d = \tan(101.6 \times 30 \times 10^{-3}) = -0.093\ 9$$

故此时的等效波阻抗为

$$\eta_{ef} = 225.3 \times \frac{377 - j225.3 \times 0.093\ 9}{225.3 - j377 \times 0.093\ 9} = 372.9e^{j5.72°} = 371.04 + j37.17\ \Omega$$

反射系数为

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_{ef} - \eta_1}{\eta_{ef} + \eta_1} = \frac{371.04 + j37.17 - 377}{371.04 + j37.17 + 377} = 0.05e^{j96.27°}$$

反射功率密度与入射功率密度之比为

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}} = |\Gamma_1|^2 = 0.002\ 5 = 0.25\%$$

即频率下偏到 $f_2 = 2.9$ GHz 时，反射功率将增加为入射功率的 0.25%。

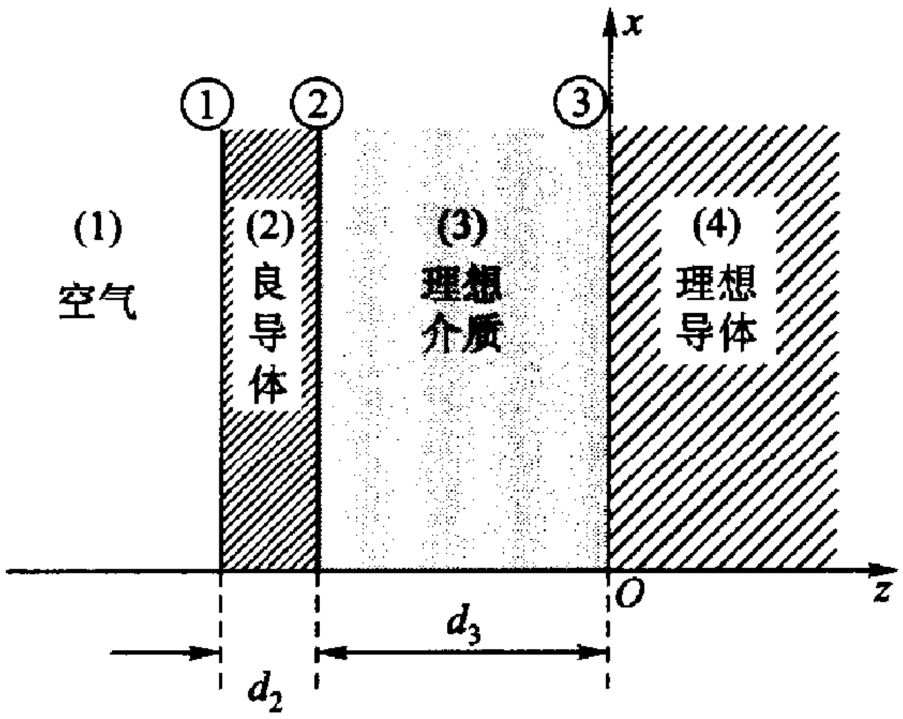
6.22 图题 6.22 所示为隐身飞机的原理示意图。在表示机身的理想导体表面覆盖一层厚度 $d_3 = \lambda_3/4$ 的理想介质膜，又在介质膜上涂一层厚度为 d_2 的良导体材料。试确定消除电磁波从良导体表面上反射的条件。

解　在图题 6.22 中，区域(1)为空气，其波阻抗为

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

区域(2)为良导体，其波阻抗为

$$\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{\sigma_2}}e^{j45°}$$



图题 6.22

区域(3)为理想介质，其波阻抗为

$$\eta_3 = \sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}}$$

区域(4)为理想导体($\sigma_4 = \infty$)，其波阻抗为

$$\eta_4 = \sqrt{\frac{\omega\mu_4}{\sigma_4}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ} = 0$$

分界面②上的等效波阻抗为

$$\eta_{\mathrm{ef2}} = \eta_3 \frac{\eta_4 + \mathrm{j}\eta_3 \tan \beta_3 d_3}{\eta_3 + \mathrm{j}\eta_4 \tan \beta_3 d_3} = \eta_3 \frac{\mathrm{j}\eta_3 \tan\left(\dfrac{2\pi}{\lambda_3} \cdot \dfrac{\lambda_3}{4}\right)}{\eta_3} = \mathrm{j}\eta_3 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$$

分界面①上的等效波阻抗为

$$\eta_{\mathrm{ef1}} = \eta_{2\mathrm{c}} \frac{\eta_{\mathrm{ef2}} + \eta_{2\mathrm{c}} \tanh \gamma_2 d_2}{\eta_{2\mathrm{c}} + \eta_{\mathrm{ef2}} \tanh \gamma_2 d_2} = \frac{\eta_{2\mathrm{c}}}{\tanh \gamma_2 d_2} \tag{1}$$

式中的 γ_2 是良导体中波的传播常数，$\tanh \gamma_2 d_2$ 为双曲正切函数。

由于良导体涂层很薄，满足 $\gamma_2 d_2 \ll 1$，故可取 $\tanh \gamma_2 d_2 \approx \gamma_2 d_2$，则式(1)变为

$$\eta_{\mathrm{ef1}} \approx \frac{\eta_2}{\gamma_2 d_2} \tag{2}$$

分界面①上的反射系数为

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_{\mathrm{ef1}} - \eta_1}{\eta_{\mathrm{ef1}} + \eta_1}$$

欲使区域(1)中无反射，必须使

$$\eta_{ef1} = \eta_1 = \eta_0$$

故由式(2)，得

$$\frac{\eta_{2c}}{\gamma_2 d_2} = \eta_0 \tag{3}$$

将良导体中的传播常数 $\gamma_2 = \sqrt{\omega\mu_2\sigma_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}$ 和波阻抗 $\eta_{2c} = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_2}{\sigma_2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45^\circ}$ 代入式(3)，得

$$d_2 = \frac{\eta_{2c}}{\eta_0\gamma_2} = \frac{1}{\sigma_2\eta_0} = \frac{1}{377\sigma_2} = \frac{2.65\times10^{-3}}{\sigma_2}$$

这样，只要取理想介质层的厚度 $d_3 = \lambda_3/4$，而良导体涂层的厚度 $d_2 = 2.65\times10^{-3}/\sigma_2$，就可消除分界面①上的反射波，即雷达发射的电磁波从空气中投射到分界面①时，不会产生回波，从而实现飞机隐身的目的。此结果可作如下的物理解释：由于电磁波在理想导体表面（即分界面③）上产生全反射，则在离该表面 $\lambda_3/4$ 处（即分界面②）出现电场的波腹点。而该处放置了厚度为 d_2 的良导体涂层，从而使电磁波大大损耗，故反射波就趋于零了。

6.23 均匀平面波从空气中以 30° 的入射角进入折射率为 $n_2 = 2$ 的玻璃中，试分别就下列两种情况计算入射波能量被反射的百分比：

（1）入射波为垂直极化波；

（2）入射波为平行极化波。

解　（1）入射波为垂直极化波时，反射系数

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{n_2^2 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{n_2^2 - \sin^2\theta_i}} = \frac{\sqrt{3}/2 - \sqrt{4-(1/2)^2}}{\sqrt{3}/2 + \sqrt{4-(1/2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{15}}{\sqrt{3} + \sqrt{15}} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

入射波能量被反射的百分比为

$$\frac{S_{rav}}{S_{iav}} = |\Gamma_\perp|^2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} = 0.146 = 14.6\%$$

（2）入射波为平行极化波时，反射系数

$$\Gamma_{/\!/} = \frac{n_2^2\cos\theta_i - \sqrt{n_2^2 - \sin^2\theta_i}}{n_2^2\cos\theta_i + \sqrt{n_2^2 - \sin^2\theta_i}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{4-(1/2)^2}}{2\sqrt{3} + \sqrt{4-(1/2)^2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{15}}{4\sqrt{3} + \sqrt{15}} = \frac{21-8\sqrt{5}}{11} = 0.283$$

入射波能量被反射的百分比为

$$\frac{S_{\text{rav}}}{S_{\text{iav}}} = |\Gamma_{/\!/}|^2 = 0.08 = 8\%$$

6.24 垂直极化的均匀平面波从水下以入射角 $\theta_i = 20°$ 投射到水与空气的分界面上，已知淡水的 $\varepsilon_r = 81$、$\mu_r = 1$、$\sigma = 0$，试求：

(1) 临界角；

(2) 反射系数及透射系数；

(3) 透射波在空气中传播一个波长的距离的衰减量（以 dB 表示）。

解 (1) 临界角为

$$\theta_c = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0}}\right) = 6.38°$$

(2) 反射系数为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos 20° - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0} - \sin^2 20°}}{\cos 20° + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0} - \sin^2 20°}}$$

$$= \frac{0.94 - \sqrt{0.012 - 0.117}}{0.94 + \sqrt{0.012 - 0.117}} = \frac{0.94 - j0.32}{0.94 + j0.32} = e^{-j38.04°}$$

透射系数为

$$\tau_{\perp} = \frac{2\cos 20°}{\cos 20° + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0} - \sin^2 20°}} = \frac{2 \times 0.94}{0.94 + \sqrt{0.012 - 0.117}} = 1.89e^{-j19.02°}$$

(3) 由于 $\theta_i > \theta_c$，故此时将产生全反射。由斯耐尔折射定律，得

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i = \sqrt{81}\sin 20° = 3.08$$

此时

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - 3.08^2} = -j2.91$$

故空气中的透射波电场的空间变化因子为

$$e^{-jk_2 \boldsymbol{e}_{nt}\cdot \boldsymbol{r}} = e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$= e^{-j3.08k_2x}e^{-jk_2(-j2.19)z} = e^{-j3.08k_2x}e^{-k_2(2.91z)}$$

由上式即可得透射波传播一个波长时的衰减量为

$$20\lg e^{-k_2(2.91\lambda_2)} = 20\lg e^{-\frac{2\pi}{\lambda_2}(2.91\lambda_2)} = -158.8\ \text{dB}$$

6.25 均匀平面波从 $\mu=\mu_0$、$\varepsilon=4\varepsilon_0$ 的理想电介质中斜入射到与空气的分界面上。试求：（1）希望在分界面上产生全反射，应该采取多大的入射角；（2）若入射波是圆极化波，而只希望反射波成为单一的直线极化波，应以什么入射角入射？

解 （1）均匀平面波是从稠密媒质（$\varepsilon_1=4\varepsilon_0$）入射到稀疏媒质（$\varepsilon_2=\varepsilon_0$），若取入射角 θ 大于（或等于）临界角 θ_c，就可产生全反射。

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = 30°$$

故取 $\theta_i \geqslant 30°$ 时可产生全反射。

（2）圆极化波可分解为平行极化和垂直极化两个分量，当入射角 θ 等于布儒斯特角 θ_B 时，平行极化分量就产生全透射，这样，反射波中只有单一的垂直极化分量，即

$$\theta_i = \theta_B = \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = 26.57°$$

6.26 频率 $f=300\ \text{MHz}$ 的均匀平面波从媒质 $1(\mu_1=\mu_0、\varepsilon_1=4\varepsilon_0、\sigma_1=0)$ 斜入射到媒质 $2(\mu_2=\mu_0、\varepsilon_2=\varepsilon_0、\sigma_2=0)$。（1）若入射波是垂直极化波，入射角 $\theta_i=60°$，试问在空气中的透射波的传播方向如何？相速是多少？（2）若入射波是圆极化波，且入射角 $\theta_i=60°$，试问反射波是什么极化波？

解 （1）先计算临界角

$$\theta_c = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) = 30°$$

可见，$\theta_i=60°>30°$，垂直极化波的入射波要产生全反射。据折射定律 $\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$，得

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin 60° = \sqrt{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

可见，θ_t 没有实数解．$\cos\theta_t$ 为虚数，即

$$\cos\theta_t = \sqrt{1-\sin^2\theta_t} = \sqrt{1-(\sqrt{3})^2} = -j\sqrt{2}$$

透射波的波数为

$$k_t = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2\pi\times 3\times 10^8\times\frac{1}{3\times 10^8}\ \mathrm{rad/m} = 2\pi\ \mathrm{rad/m}$$

透射波的波矢量为

$$\boldsymbol{k}_t = \boldsymbol{e}_x k_t\sin\theta_t + \boldsymbol{e}_z k_t\cos\theta_t = \boldsymbol{e}_x 2\sqrt{3}\pi - \boldsymbol{e}_z \mathrm{j}2\sqrt{2}\pi$$

故透射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_y E_{tm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}_t\cdot\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_y E_{tm}\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{2}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\sqrt{3}x}$$

即透射波沿分界面 x 方向传播(表面波),其相速为

$$v_p = \frac{\omega}{k_{tx}} = \frac{2\pi f}{k_{tx}} = \frac{2\pi\times 3\times 10^8}{2\pi\sqrt{3}}\ \mathrm{m/s} = 1.73\times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

(2)当入射波是圆极化波时，入射角 $\theta_i = 60° >$ 临界角 θ_c,故有 $|\rho_\perp| = 1$, $|\rho_{/\!/}| = 1$，即垂直极化分量和水平极化分量都产生全反射，但反射系数的幅角分别为

$$\phi_\perp = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta - \varepsilon_2/\varepsilon_1}}{\cos\theta}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2 60° - 1/4}}{\cos 60°}\right) = 57.74°$$

$$\phi_{/\!/} = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2\theta - \varepsilon_2/\varepsilon_1}}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta}\right) = \arctan\left(\frac{\sqrt{\sin^2 60° - 1/4}}{(1/4)\cos 60°}\right) = 80°$$

故反射波是椭圆极化波。

6.27 一垂直极化波从水中以 45°角入射到水和空气的分界面上，设水的参数为 :$\mu = \mu_0$、$\varepsilon = 81\varepsilon_0$、$\sigma = 0$。若 $t = 0$、$z = 0$ 时,入射波电场 $E_{im} = 1$ V/m ,试求空气中的电场值:(1) 在分界面上;(2) 离分界面$\frac{\lambda}{4}$处。

解　平面波从水($\varepsilon_1 = 81\varepsilon_0$)中入射到空气($\varepsilon_2 = \varepsilon_0$)中,临界角为

$$\theta_c = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{81}}\right) = 6.38°$$

可见,入射角($\theta_i = 45°$)大于临界角($\theta_c = 6.38°$)，将产生全反射。根据折射定律,得

$$\sin\theta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i = \sqrt{81}\sin 45° = 6.36 \tag{1}$$

可见,θ_t 无实数解,$\cos\theta_t$ 为虚数，即

$$\cos\theta_t = \sqrt{1 - \sin^2\theta_t} = \sqrt{1 - 6.36^2} = -\mathrm{j}6.28 \tag{2}$$

而垂直极化波斜入射时，透射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{e}_y \tau_\perp E_{im} e^{-jk_t \cdot r} = \boldsymbol{e}_y \tau_\perp E_{im} e^{-jk_t(z\cos\theta_t + x\sin\theta_t)} \tag{3}$$

将式(1)和(2)代入式(3)，得

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{e}_y \tau_\perp E_{im} e^{-6.28k_t z} e^{-j6.36k_t x} \tag{4}$$

式(4)中的透射系数为

$$\tau_\perp = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_i}} = \frac{2\cos 45°}{\cos 45° + \sqrt{\dfrac{1}{81} - \sin^2 45°}} = 1.423e^{-j44.63°}$$

(1) 分界面上的电场值为

$$|\boldsymbol{E}_t|_{z=0} = |\tau_\perp| E_{im} = 1.423\ \text{V/m}$$

(2) 距分界面$\dfrac{\lambda}{4}$处的电场值为

$$|\boldsymbol{E}_t|_{z=\frac{\lambda}{4}} = |\tau_\perp| E_{im} e^{-\frac{2\pi}{\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2}{4}\times 6.28} = 1.423e^{-9.87} = 73.6\ \mu\text{V/m}$$

6.28 一个线极化均匀平面波从自由空间斜入射到 $\sigma_1 = 0$、$\varepsilon_{r1} = 4$、$\mu_{r1} = 1$ 的理想介质分界面上，如果入射波的电场与入射面的夹角为 45°,试求:

(1) 入射角 θ_i 为何值时，反射波为垂直极化波;

(2) 此时反射波的平均功率是入射波的百分之几?

解 (1) 由已知条件可知入射波中包括垂直极化分量和平行极化分量，且两分量的大小相等，均为 $E_{im}/\sqrt{2}$。当入射角 θ_i 等于布儒斯特角 θ_B 时，平行极化波将无反射，反射波中就只有垂直极化分量，所以

$$\theta_i = \theta_B = \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_0}}\right) = \arctan 2 = 63.43°$$

(2) 当 $\theta_i = 63.43°$ 时，垂直极化分量的反射系数为

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_i}} = \frac{\cos 63.43° - \sqrt{\dfrac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_0} - \sin^2 63.43°}}{\cos 63.43° + \sqrt{\dfrac{4\varepsilon_0}{\varepsilon_0} - \sin^2 63.43°}} = -0.6$$

故反射波的平均能流密度为

$$S_{rav} = \frac{1}{2\eta_1}E_{rm}^2 = \frac{1}{2\eta_1}\left(\Gamma_\perp \frac{E_{im}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{E_{im}^2}{2\eta_1} \times 0.18$$

而入射波的平均能流密度为

$$S_{\mathrm{iav}} = \frac{1}{2\eta_1}E_{\mathrm{im}}^2$$

故得到反射波的平均功率与入射波的百分比

$$\frac{S_{\mathrm{rav}}}{S_{\mathrm{iav}}} = 18\%$$

6.29 有一正弦均匀平面波由空气斜入射到位于 $z=0$ 的理想导体平面上，其电场强度的复数形式为 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(x,z)=\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}$ V/m，试求：

（1）入射波的频率 f 与波长 λ；

（2）$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(x,z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(x,z,t)$ 的瞬时表达式；

（3）入射角 θ_{i}；

（4）反射波的 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}(x,z)$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}(x,z)$；

（5）总场的 $\boldsymbol{E}_1(x,z)$ 和 $\boldsymbol{H}_1(x,z)$。

解 （1）由已知条件知入射波的波矢量为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{e}_x 6 + \boldsymbol{e}_z 8$$

$$k_{\mathrm{i}} = |\boldsymbol{k}_i| = \sqrt{6^2+8^2} = 10 \text{ rad/m}$$

故波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{k_{\mathrm{i}}} = 0.628 \text{ m}$$

频率为

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times 10^8}{0.628}\text{ Hz} = 4.78\times 10^8 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 3\times 10^9 \text{ rad/s}$$

（2）入射波传播方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{i}} = \frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}}{k_{\mathrm{i}}} = \frac{\boldsymbol{e}_x 6 + \boldsymbol{e}_z 8}{10} = \boldsymbol{e}_x 0.6 + \boldsymbol{e}_z 0.8$$

入射波的磁场复数表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(x,z) &= \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(x,z)\\ &= \frac{1}{\eta_0}(-\boldsymbol{e}_x 0.6 + \boldsymbol{e}_z 0.8)\times\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}\\ &= \frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8 + \boldsymbol{e}_z 6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}\end{aligned}$$

其瞬时表示式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(x,z,t) &= \mathrm{Re}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(x,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8+\boldsymbol{e}_z 6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\times 10^9 t}\right] \\ &= \frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8+\boldsymbol{e}_z 6)\cos(3\times 10^9 t-6x-8z) \quad \mathrm{A/m}\end{aligned}$$

而电场的瞬时表示式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(x,z,t) &= \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(x,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \\ &= \mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \\ &= \boldsymbol{e}_y 10\cos(3\times 10^9 t-6x-8z) \quad \mathrm{V/m}\end{aligned}$$

(3) 由 $k_{iz}=k_i\cos\theta_i$，得

$$\cos\theta_{\mathrm{i}} = \frac{k_{\mathrm{i}z}}{k_{\mathrm{i}}} = \frac{8}{10} \quad 故 \quad \theta_{\mathrm{i}} = 36.9°$$

(4) 据斯耐尔反射定律知 $\theta_r=\theta_i=36.9°$，反射波的波矢量为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{e}_x 6-\boldsymbol{e}_z 8$$

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}} = \frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}}{k} = \frac{\boldsymbol{e}_x 6-\boldsymbol{e}_z 8}{10} = \boldsymbol{e}_x 0.6-\boldsymbol{e}_z 0.8$$

而垂直极化波对理想导体平面斜入射时，反射系数 $\Gamma_{\perp}=-1$，故反射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}(x,z) = -\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x-8z)} \quad \mathrm{V/m}$$

与之相伴的磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}(x,z) &= \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}(x,z) = \frac{1}{120\pi}(\boldsymbol{e}_x 0.6-\boldsymbol{e}_z 0.8)\times(-\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x-8z)}) \\ &= \frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8-\boldsymbol{e}_z 6)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x-8z)} \quad \mathrm{A/m}\end{aligned}$$

(5) 合成波的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,z) &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}(x,z)+\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}(x,z) = \boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x+8z)}-\boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(6x-8z)} \\ &= \boldsymbol{e}_y 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}6x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}8z}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}8z}) = -\boldsymbol{e}_y \mathrm{j}20\mathrm{e}^{-\mathrm{j}6x}\sin 8z \quad \mathrm{V/m}\end{aligned}$$

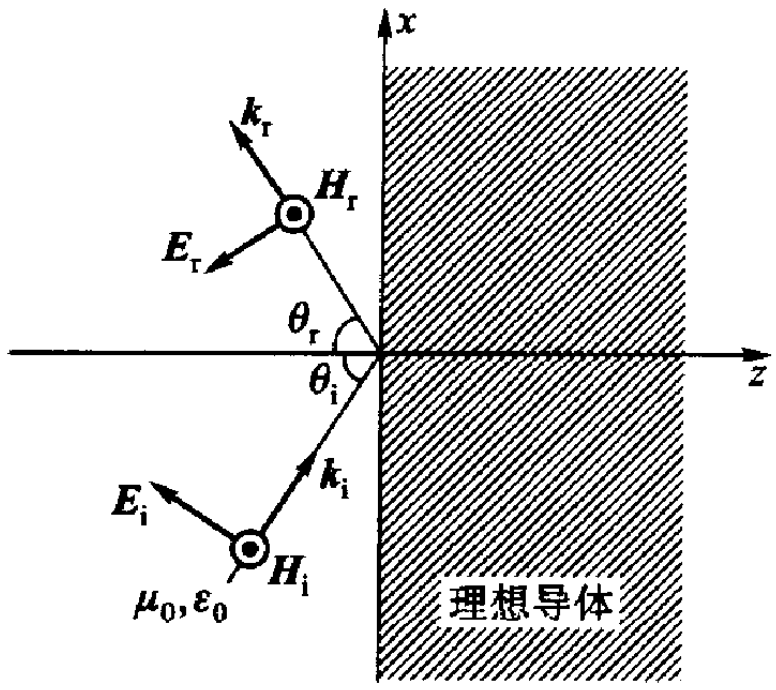
合成波的磁场为

$$\boldsymbol{H}(x,z) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}(x,z)+\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}(x,z)$$

$$= \frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8 + \boldsymbol{e}_z 6)e^{-j(6x+8z)} + \frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 8 - \boldsymbol{e}_z 6)e^{-j(6x-8z)}$$

$$= \frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x 16\cos 8z - \boldsymbol{e}_y j12\sin 8z)e^{-j6x} \quad \text{A/m}$$

6.30 频率 $f = 100$ MHz 的平行极化正弦均匀平面波，在空气（$z<0$ 的区域）中以入射角 $\theta_i = 60°$ 斜入射到 $z=0$ 处的理想导体表面。设入射波磁场的振幅为 0.1 A/m、方向为 y 方向，如图题 6.30 所示。



图题 6.30

（1）求出入射波、反射波的电场和磁场表达式；

（2）求理想导体表面上的感应电流密度和电荷密度；

（3）求空气中的平均功率密度。

解 （1）入射波磁场为

$$\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{e}_y 0.1 e^{-j(k_{ix}x + k_{iz}z)}$$

其中

$$k_{ix} = k_i \sin\theta_i = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$k_{iz} = k_i \cos\theta_i = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\cos 60° = \frac{1}{3}\pi$$

入射波的传播方向的单位矢量

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{k}_i}{k_i} = \boldsymbol{e}_x\frac{\sqrt{3}}{2} + \boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}$$

故入射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_i = \eta_1 \boldsymbol{H}_i \times \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z\sqrt{3})6\pi e^{-j\pi(\sqrt{3}x+z)/3}$$

反射波的磁场为

$$\boldsymbol{H}_r = \boldsymbol{e}_y 0.1 e^{-j\pi(\sqrt{3}x-z)/3}$$

反射波的传播方向的单位矢量

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x\frac{\sqrt{3}}{2} - \boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}$$

故反射波的电场为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = \eta_1 \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{r}} = (-\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z\sqrt{3})6\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(\sqrt{3}x - z)/3}$$

（2）空气中合成波的磁场为

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{H}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{e}_y 0.2\cos(\pi z/3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{3}\pi x/3}$$

理想导体表面的电流密度为

$$\boldsymbol{J}_S = \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times \boldsymbol{H}_1 \big|_{z=0} = -\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{H}_1 \big|_{z=0} = \boldsymbol{e}_x 0.2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{3}\pi x/3}$$

空气中合成波的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} \\ &= (\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z\sqrt{3})6\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\sqrt{3}\pi x/3 + \pi z/3)} + (-\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z\sqrt{3})6\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\sqrt{3}\pi x/3 - \pi z/3)} \\ &= -\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}12\pi\sin(\pi z/3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{3}\pi x/3} - \boldsymbol{e}_z 12\sqrt{3}\pi\cos(\pi z/3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{3}\pi x/3}\end{aligned}$$

理想导体表面的电荷密度为

$$\rho_S = \varepsilon_0 \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \cdot \boldsymbol{E}_1 \big|_{z=0} = -\varepsilon_0 \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{E}_1 \big|_{z=0} = 12\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{3}\pi x/3}$$

（3）$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1^*] = \boldsymbol{e}_x 1.2\sqrt{3}\pi\cos^2(\pi z/3)\quad \mathrm{W/m^2}$