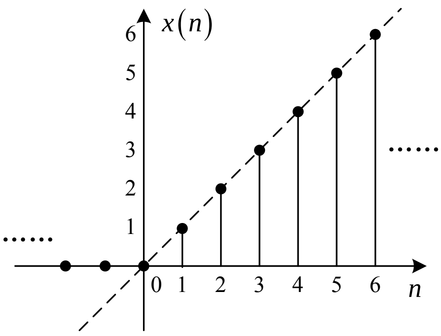
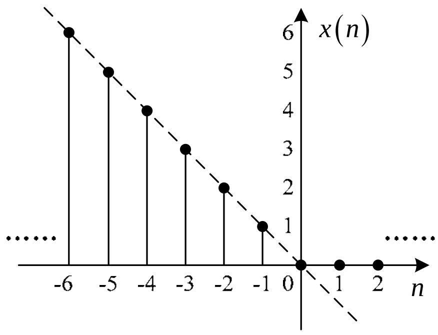
6-1 分别绘出以下各序列的图形：

（1） $x(n)=n\mathrm{u}(n)$ （2） $x(n)=-n\mathrm{u}(-n)$

解：（1） $x(n)=n\mathrm{u}(n)$



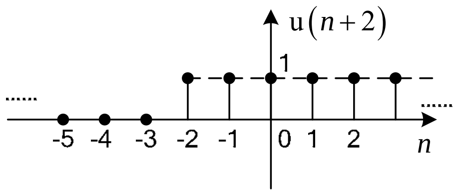

（2） $x(n)=-n\mathrm{u}(-n)$

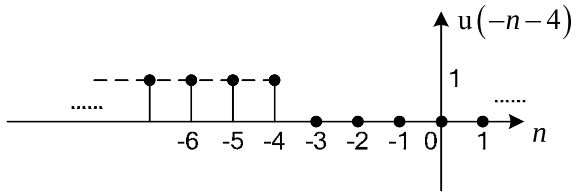



6-2 分别绘出以下各序列的图形：

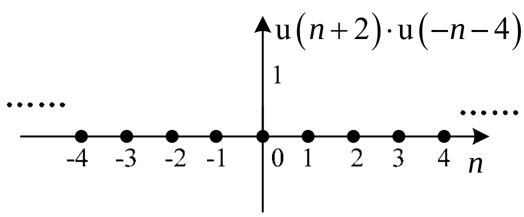
（1） $\mathrm{u}(n+2)\cdot\mathrm{u}(-n-4)$ （2） $(n-1)[\delta(n-1)-\delta(n+1)]$

解：（1）

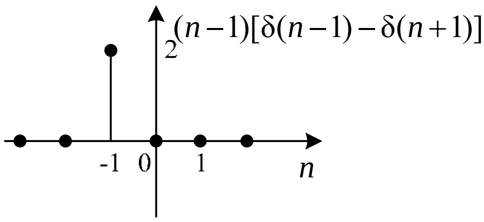



则两个离散序列相乘得：



（2）$(n-1)[\delta(n-1)-\delta(n+1)]=2\delta(n+1)$



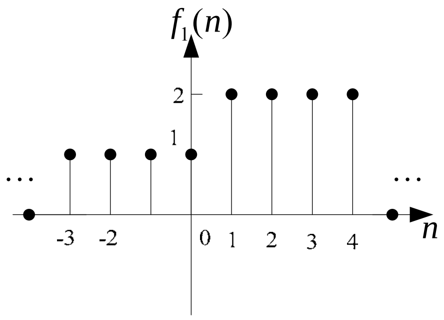

6-3 判断下列信号是否是周期信号，如果是请写出其周期。

（2）$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{5}-6\pi\right)}$　　（3）$x(n)=\sin\frac{2n\pi}{5}+\cos\frac{3n\pi}{7}$

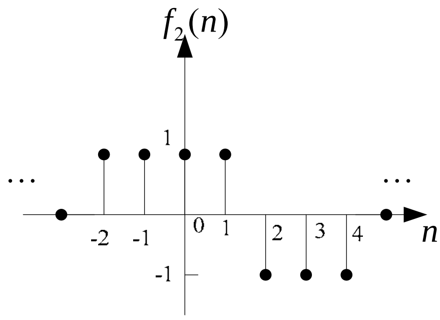
解：（2）$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{n}{5}-6\pi\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot\frac{n}{5}}$，$\Omega_0=\frac{1}{5}$，则$\frac{2\pi}{\Omega_0}=10\pi$（无理数），故序列$x(n)$为非周期序列。

（3）$x(n)=\sin\frac{2n\pi}{5}+\cos\frac{3n\pi}{7}=\sin\frac{2\pi}{5}n+\cos\frac{3\pi}{7}n$，对于序列$\sin\frac{2\pi}{5}n$，$\frac{2\pi}{\Omega_0}=5$，其周期为 5；对于序列$\cos\frac{3\pi}{7}n$，$\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{7}{3}$，其周期为 7，故序列$x(n)=\sin\frac{2n\pi}{5}+\cos\frac{3n\pi}{7}$的周期（最小公倍数）为 35。

6-4 写出题图 6-4 所示各序列的表达式。




(a)




(b)

题图 6-4

解：（a）$f_1(n)=\mathrm{u}(n+3)+\mathrm{u}(n-1)-2\mathrm{u}(n-5)$

（b）$f_2(n)=\mathrm{u}(n+2)-2\mathrm{u}(n-2)+\mathrm{u}(n-5)$

6-6 求下列序列的卷积和。

（1）$\mathrm{u}(n)*\mathrm{u}(n)$　　　　（2）$0.5^n\mathrm{u}(n)*3^n\mathrm{u}(n)$

（3）$2^n\mathrm{u}(n-1)*3^n\mathrm{u}(-n+2)$　　　（4）$n\mathrm{u}(n)*\delta(n+3)$

解：（1）设 $f\left(n\right)=\mathrm{u}(n)*\mathrm{u}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathrm{u}(i)\cdot\mathrm{u}(n-i)=\sum_{i=0}^{n}1=\left(n+1\right)\cdot\mathrm{u}(n)$

（2）$0.5^n\mathrm{u}(n)*3^n\mathrm{u}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}0.5^i\mathrm{u}(i)\cdot3^{n-i}\mathrm{u}(n-i)=3^n\cdot\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{0.5}{3}\right)^i$

利用等比数列部分和公式 $S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ 得：

$$0.5^n\mathrm{u}(n)*3^n\mathrm{u}(n)=3^n\frac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{1}{6}}\mathrm{u}(n)$$

$$=3^n\cdot\frac{6}{5}\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right]\mathrm{u}(n)=\frac{2}{5}\cdot3^{n+1}\left[1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right]\mathrm{u}(n)$$

（3）该卷积和利用定义来做较为简单，

$$2^n\mathrm{u}(n-1)*3^n\mathrm{u}(-n+2)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}3^i\mathrm{u}(-i+2)\cdot2^{n-i}\mathrm{u}(n-i-1)$$

根据单位阶跃序列的定义可得：$-i+2\geq0\Rightarrow i\leq2$；$n-i-1\geq0\Rightarrow i\leq n-1$

当 $n-1\leq2$ 时，则 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}3^i\mathrm{u}(-i+2)\cdot2^{n-i}\mathrm{u}(n-i-1)=2^n\cdot\sum_{i=-\infty}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i$

当 $n-1>2$ 时，则 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}3^i\mathrm{u}(-i+2)\cdot2^{n-i}\mathrm{u}(n-i-1)=2^n\cdot\sum_{i=-\infty}^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i$

故可得：$2^n\mathrm{u}(n-1)*3^n\mathrm{u}(-n+2)=\left[2^n\cdot\sum_{i=-\infty}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i\right]\cdot\mathrm{u}\left(-n+3\right)+\left[2^n\cdot\sum_{i=-\infty}^{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i\right]\mathrm{u}\left(n+4\right)$

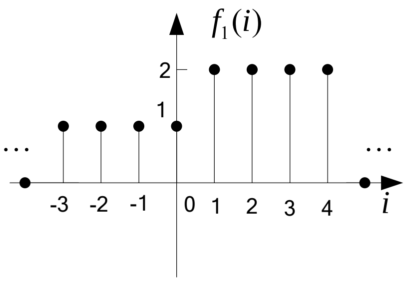
（4）利用卷积的性质（$f(n)*\delta(n-m)=f(n-m)$）可得：

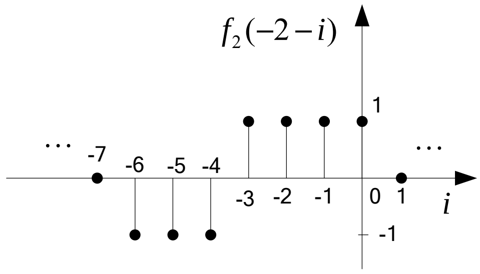
$$n\mathrm{u}(n)*\delta(n+3)=n\mathrm{u}(n)\big|_{n=n+3}=\left(n+3\right)\mathrm{u}(n+3)$$

6-7 如题图 6-4 所示，如果 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)$，则试求 $y(-2)$、$y(0)$、$y(1)$ 的值。

解：由于 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)\cdot f_2(n-i)$，则 $y(-2)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)\cdot f_2(-2-i)$，其图

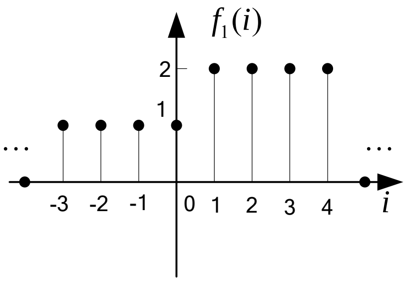
形如下：

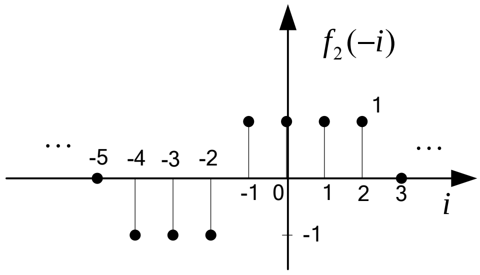



对应时刻点相乘后累加得 $y(-2)=4$ 。

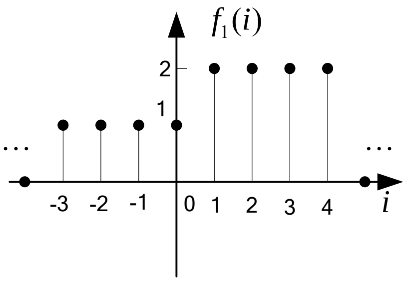
$y(0)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\cdot f_2(-i)$，其图形如下图所示：

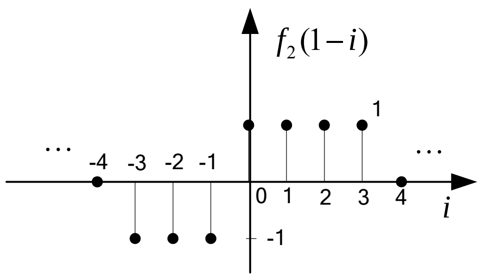



对应时刻点相乘后累加得 $y(0)=4$ 。

$y(1)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i)\cdot f_2(1-i)$，其图形如下图所示：




对应时刻点相乘后累加得 $y(1)=4$ 。

由于 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 为有限序列，故该题可采用数乘法进行计算：

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
 & & & & & & 1 & 1 & 1 & \underset{\uparrow}{1} & 2 & 2 & 2 & 2 \\
 & & & & & & & 1 & 1 & \underset{\uparrow}{1} & 1 & -1 & -1 & -1 \\
\hline
 & & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 \\
 & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & \\
 & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & \underset{\uparrow}{1} & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & & & & & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \underset{\uparrow}{4} & 4 & 5 & 2 & -1 & -4 & -6 & -4 & -2
\end{array}
$$

可得 $y(-2)=4$、 $y(0)=4$、 $y(1)=4$。

6-8 已知两序列

$$
f_1(n)=\{\cdots,0,1,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{2},3,4,0,\cdots\},\ f_2(n)=\{\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},2,3,0,\cdots\},
$$

试计算 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)$。

解：由于两个序列为有限长序列，故采用数乘法较为简单：

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 1 & \underset{\uparrow}{2} & 3 & 4 \\
 & & & \underset{\uparrow}{1} & 2 & 3 \\
\hline
 & & 3 & 6 & 9 & 12 \\
 & 2 & 4 & 6 & 8 & \\
1 & \underset{\uparrow}{2} & 3 & 4 & & \\
\hline
1 & \underset{\uparrow}{4} & 10 & 16 & 17 & 12
\end{array}
$$

故 $y(n)=f_1(n)*f_2(n)=\{\cdots,0,1,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{4},10,16,17,12,0,\cdots\}$,

6-9 已知某 LTI 系统的单位脉冲响应为

$$
h(n)=\{\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{2},2,2,0,\cdots\},
$$

则当系统激励 $f(n)=(-1)^n\mathrm{u}(n)$ 时，试求系统的零状态响应 $y_f(n)$。

解：由已知得：$h(n)=2\left\{\mathrm{u}\left(n\right)-\mathrm{u}\left(n-3\right)\right\}$，则系统的零状态响应为

$$y_f(n)=h(n)*f(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-k}\,\mathrm{u}(n-k)\cdot 2\{\mathrm{u}(k)-\mathrm{u}(k-3)\}$$

则当$k\geq 0$；$k\leq 2$；且$n-k\geq 0\Rightarrow k\leq n$时，$y_f(n)$有非零值，故

当$n<0$时，$y_f(n)=h(n)*f(n)=0$

当$0\leq n\leq 2$时，

$$y_f(n)=\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot 2\right]\cdot\left[\mathrm{u}(n)-\mathrm{u}(n-3)\right]=2\cdot(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{-k}\right]\cdot\left[\mathrm{u}(n)-\mathrm{u}(n-3)\right]$$

$$y_f(0)=2\cdot(-1)^0\left[\sum_{k=0}^{0}(-1)^{-k}\right]=2$$

$$y_f(1)=2\cdot(-1)^1\left[\sum_{k=0}^{1}(-1)^{-k}\right]=2\cdot(1-1)=0$$

$$y_f(2)=2\cdot(-1)^2\left[\sum_{k=0}^{1}(-1)^{-k}\right]=2\cdot(1-1+1)=2$$

当$n\geq 3$时，$y_f(n)=\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot 2\right]\cdot\mathrm{u}(n-3)=2\cdot(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{2}(-1)^{-k}\right]\cdot\mathrm{u}(n-3)$

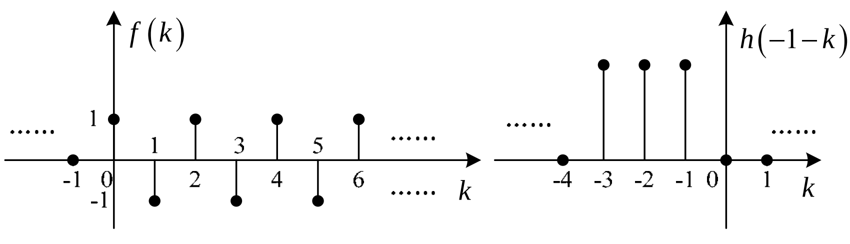
$$y_f(3)=2\cdot(-1)^3\left[\sum_{k=0}^{2}(-1)^{-k}\right]=2\cdot(-1)\cdot(1-1+1)=-2$$

$$y_f(4)=2\cdot(-1)^4\left[\sum_{k=0}^{2}(-1)^{-k}\right]=2\cdot(1)\cdot(1-1+1)=2$$

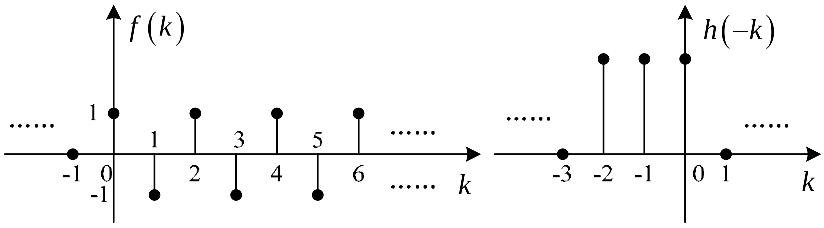
$$y_f(5)=2\cdot(-1)^5\left[\sum_{k=0}^{2}(-1)^{-k}\right]=2\cdot(-1)\cdot(1-1+1)=-2\text{，}\cdots\cdots$$

该题采用图解法相对容易，且不容易出错。

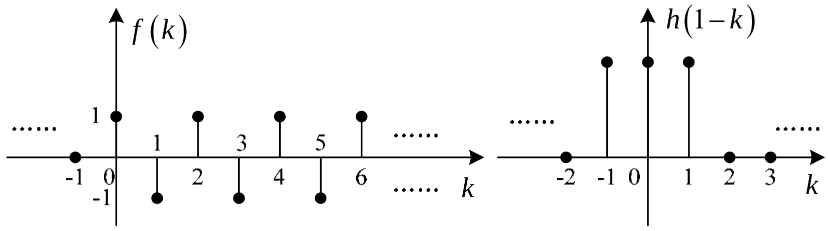
当$n<0$，$f(k)\cdot h(n-k)=0$，例如$n=-1$时的$h(-1-k)$如下图所示：



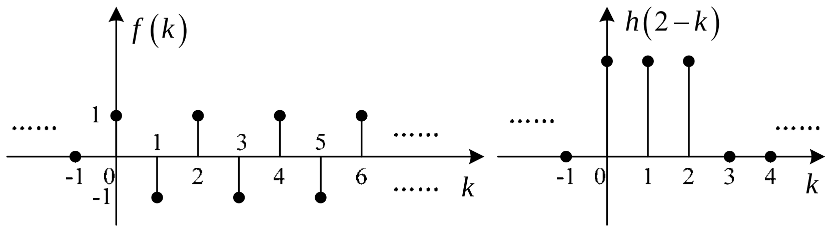

当$n=0$，则$f(k)\cdot h(-k)=2$，如下图所示：



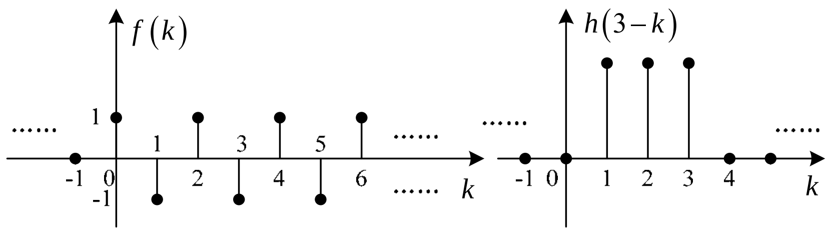

当$n=1$， $f(k)\cdot h(1-k)=2-2=0$，如下图所示：




当$n=2$， $f(k)\cdot h(2-k)=2-2+2=2$，如下图所示：




当$n=3$， $f(k)\cdot h(2-k)=-2+2-2=-2$，如下图所示：




同理可得 $y_f(4)=2$， $y_f(5)=-2$，等等

故可得： $y_f(n)=2\delta(n)+2\cdot(-1)^n\,\mathrm{u}(n-2)$

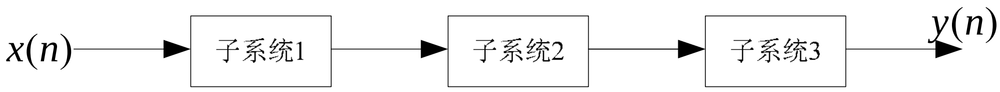
6-17 三个子系统的输入输出关系如下：

子系统 1： $y(n)=x(n/2)-2$

子系统 2： $y(t)=3x(n)$

子系统 3： $y(n)=x(2n)+1$

将三个子系统级联如题图 6-17 所示，则整个系统的输入输出之间是否满足线性、时不变的关系？




题图 6-17

解：非线性、时变系统。

6-19 已知系统的单位脉冲响应如下，试判断系统的因果性和稳定性。

（3） $h(n)=\delta(2n)+\delta(n-1)$ （4） $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\mathrm{u}(-n+3)$

解： （3）因果、稳定系统

（4）非因果、非稳定系统