

第2章 电磁场的基本规律



本章讨论内容

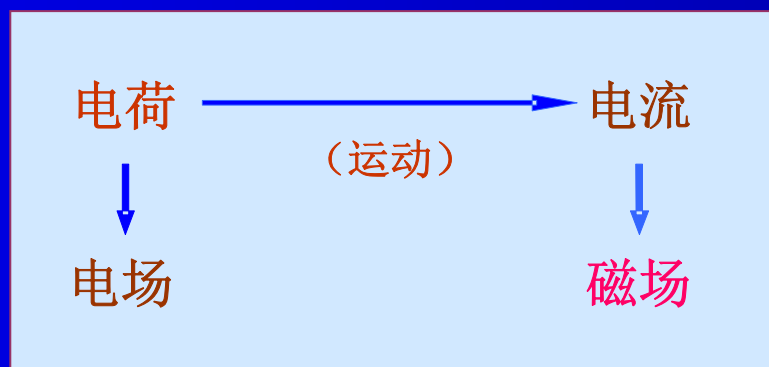
- 2.1 电荷守恒定律
- 2.2 真空中静电场的基本规律
- 2.3 真空中恒定磁场的基本规律
- 2.4 媒质的电磁特性
- 2.5 电磁感应定律和位移电流
- 2.6 麦克斯韦方程组
- 2.7 电磁场的边界条件



2.1 电荷守恒定律

电磁场物理模型中的基本物理量可分为源量和场量两大类。

源量为电荷 $q(\vec{r}', t)$ 和电流 $I(\vec{r}', t)$ ，分别用来描述产生电磁效应的两类场源。电荷是产生电场的源，电流是产生磁场的源。



本节内容

2.1.1 电荷与电荷密度

2.1.2 电流与电流密度

2.1.3 电荷守恒定律



2.1.1 电荷与电荷密度

- 电荷是物质基本属性之一。
- 1897年英国科学家汤姆逊(J.J.Thomson)发现电子。
- 1907—1913年间，美国科学家密立根(R.A.Miliken)精确

测定电子电荷的量值

$$e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19} \quad (\text{单位: C})$$

确认了电荷的量子化概念。换句话说， e 是最小的电荷，而任何带电粒子所带电荷都是 e 的整数倍。

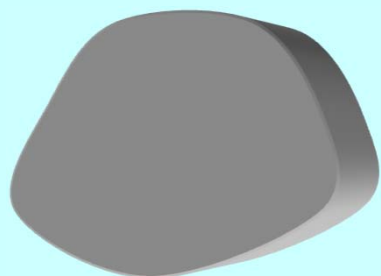
从微观上看，电荷是以离散的方式出现在空间中的。

宏观分析时，电荷常是数以亿计的电子电荷 e 的集合，故可不考虑其量子化的事实，而认为电荷量 q 可任意连续取值。

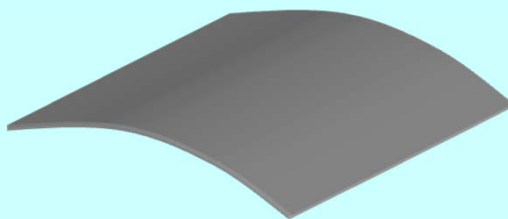


理想化实际带电系统的电荷分布形态分为四种形式：

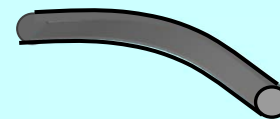
- 体分布电荷——分布在一体积内
- 面分布电荷——分布在一个薄层上，厚度可以忽略
- 线分布电荷——分布在一根细线上，横截面积可以忽略
- 点电荷——分布在一个小区域内，几何尺寸可以忽略



体分布电荷



面分布电荷



线分布电荷



点电荷

1. 电荷体密度

电荷连续分布于体积 V 内，用电荷体密度来描述其分布

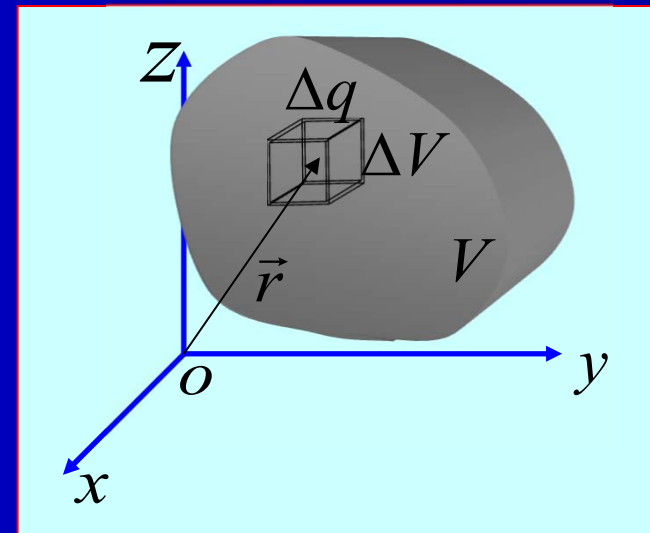
$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta V} = \frac{dq(\vec{r})}{dV}$$

体积元 ΔV 中的
电荷电量

单位: C/m^3 (库/米³)

根据电荷密度的定义，如果已知某空间区域 V 中的电荷体密度，则区域 V 中的总电荷 q 为

$$q = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$



2. 电荷面密度

若电荷分布在薄层上，当仅考虑薄层外、距薄层的距离要比薄层的厚度大得多处的电场，而不分析和计算该薄层内的电场时，可将该薄层的厚度忽略，认为电荷是面分布。面分布的电荷可用电荷面密度表示。

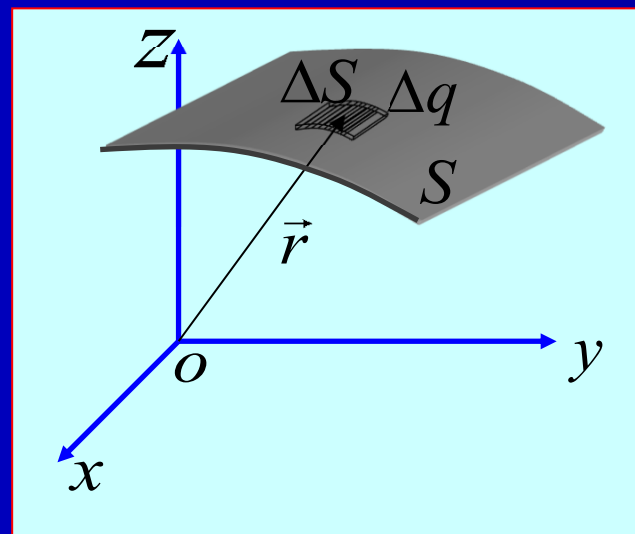
$$\rho_s(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta S} = \frac{dq(\vec{r})}{dS}$$

单位: C/m² (库/米²)

如果已知某空间曲面 S 上的电荷面密度，则该曲面上的总电荷 q 为

$$q = \int_S \rho_s(\vec{r}) dS$$

面积元 ΔS 中的
电荷电量



3. 电荷线密度

若电荷分布在细线上，当仅考虑细线外、距细线的距离要比细线的直径大得多处的电场，而不分析和计算线内的电场时，可将线的直径忽略，认为电荷是线分布。线分布的电荷可用电荷线密度表示。

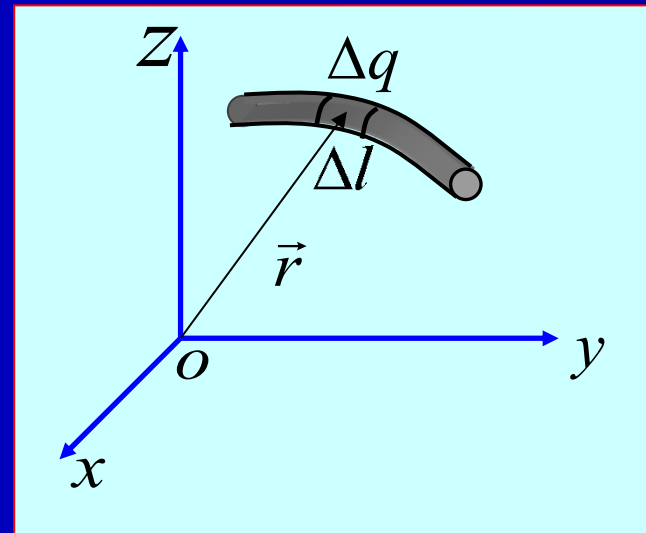
$$\rho_l(\vec{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta l} = \frac{dq(\vec{r})}{dl}$$

长度元 Δl 中的电荷电量

单位: C / m (库/米)

如果已知某空间曲线上的电荷线密度，则该曲线上的总电荷 q 为

$$q = \int_C \rho_l(\vec{r}) dl$$



4. 点电荷

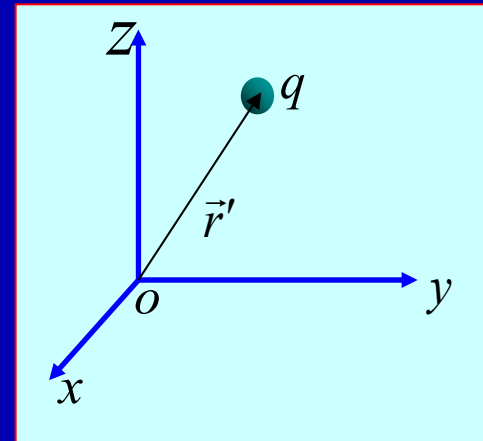
对于总电荷为 q 的电荷集中在很小区域 V 的情况，当不分析和计算该电荷所在的小区域中的电场，而仅需要分析和计算电场的区域又距离电荷区很远，即场点距源点的距离远大于电荷所在的源区的线度时，小体积 V 中的电荷可看作位于该区域中心、电荷为 q 的点电荷。

点电荷的电荷密度表示

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq \vec{r}' \\ \infty, & \vec{r} = \vec{r}' \end{cases}$$

$$\text{且} \int_V \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \begin{cases} 0, & \text{积分区域不包含 } \vec{r} = \vec{r}' \text{ 的点} \\ 1, & \text{积分区域包含 } \vec{r} = \vec{r}' \text{ 的点} \end{cases}$$



2.1.2 电流与电流密度

电流——电荷的定向运动而形成，用*i*表示，其大小定义为：
单位时间内通过某一横截面*S*的电荷量，即

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta q / \Delta t) = dq / dt$$

单位：A（安）

电流方向：正电荷的流动方向

形成电流的条件：

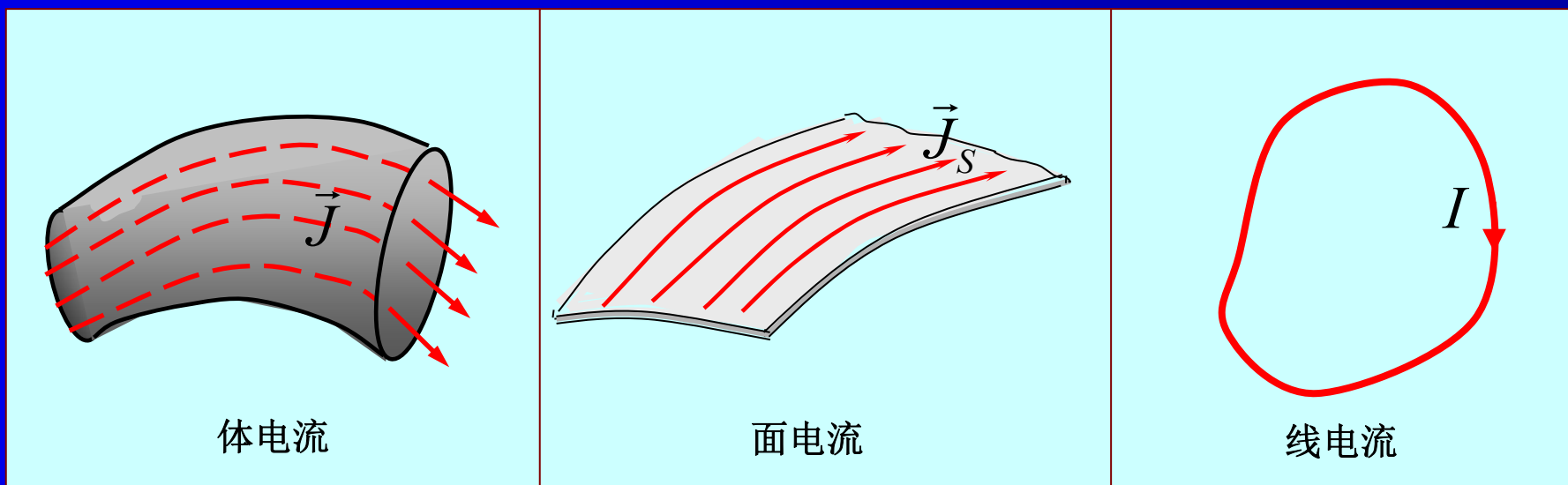
- 存在可以自由移动的电荷；
- 存在电场。

说明：电流通常是时间的函数，不随时间变化的电流称为**恒定电流**，用*I*表示。



一般情况下，在空间不同的点，电流的大小和方向往往是不同的。在电磁理论中，常用体电流、面电流和线电流来描述电流的分布状态。

- 体电流——分布在一体积内
- 面电流——分布在一个薄层上，厚度可以忽略
- 线电流——分布在一根细线上，横截面积可以忽略



1. 体电流

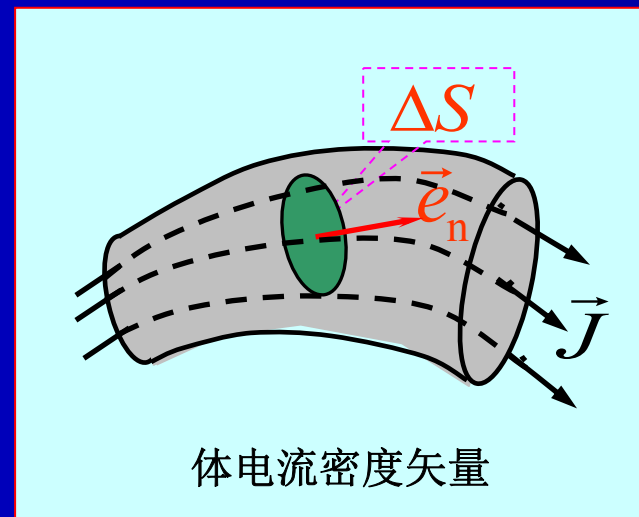
电荷在某一体积内定向运动所形成的电流称为体电流，用电流密度矢量 \vec{J} 来描述。

$$\vec{J} = \vec{e}_n \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S} = \vec{e}_n \frac{di}{dS}$$

单位：A / m²（安/米²）。

流过任意曲面 S 的电流为

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



正电荷运动的方向





关于体电流密度的说明

- ➡ 反映空间各点电流流动情况的物理量，形成一个空间矢量场
- ➡ 一般是座标 \mathbf{r} 和时间 t 的函数，即 $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$
- ➡ \mathbf{J} 在空间某点的方向为该点电流流动的方向
- ➡ \mathbf{J} 在空间某点的大小为单位时间内垂直通过单位面积的电量
- ➡ 如有 N 种带电粒子，电荷密度分别为 ρ_i ，平均速度 \mathbf{v}_i ，则有

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^N \rho_i \mathbf{v}_i$$

- ➡ $\rho = 0$ 时可能存在电流。如导体中电荷体密度为0，但因正电荷不动，有

$$\mathbf{J} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_- \approx \rho_- \mathbf{v}_- \neq 0$$



2. 面电流

电荷在一个厚度可以忽略的薄层内定向运动所形成的电流称为面电流，用面电流密度矢量 \vec{J}_S 来描述其分布

$$\vec{J}_S = \vec{e}_t \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} = \vec{e}_t \frac{di}{dl}$$

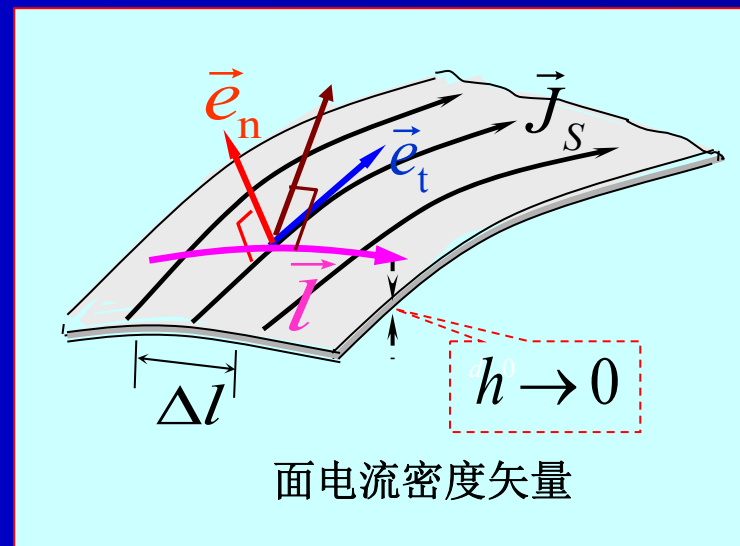
单位：A/m（安/米）。

正电荷运动的方向

通过薄导体层上任意有向曲线 \vec{l} 的电流为

$$i = \int_l \vec{J}_S \cdot (\vec{e}_n \times d\vec{l})$$

薄导体层的法向单位矢量



例 2.1.1 若表面电流密度矢量场 $\vec{J}_S(\vec{r}) = (\vec{e}_x y + \vec{e}_y x) A/m$, 计算穿过表面两点A (2,1) 和B (5,1) 间的线段的电流。

解 (1) 面电流场矢量线方程

$$\frac{dx}{J_{Sx}} = \frac{dy}{J_{Sy}} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow x dy = y dx \Rightarrow x^2 - y^2 = C^2$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0, x^2 - y^2 = 1^2, x^2 - y^2 = 2^2, \dots$$

(2) 电流

线段AB: $y = 1 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow d\vec{l} = \vec{e}_x dx$

$$\vec{e}_n = \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow I = \int_l \vec{J}_S \cdot (\vec{e}_n \times d\vec{l}) = \int_{AB} (\vec{e}_x y + \vec{e}_y x) \cdot (\vec{e}_z \times \vec{e}_x dx) = \int_2^5 x dx = 1.05 mA$$

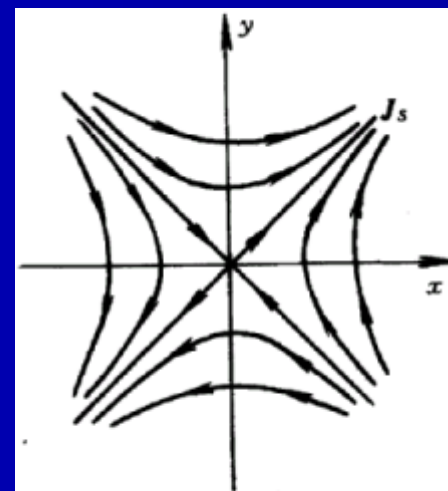


图 2.2.3 $\vec{J}_S = \vec{e}_x y + \vec{e}_y x$ 的图



关于面电流密度的说明

- ➡ **J_s** 是反映薄层中各点电流流动情况的物理量，它形成一个空间矢量场分布
- ➡ **J_s** 在某点的方向为该点电流流动的方向
- ➡ **J_s** 在某点的大小为单位时间内垂直通过单位长度的电量
- ➡ 当薄层的厚度趋于零时，面电流称为理想面电流
- ➡ 只有当电流密度 **J** 趋于无穷，面电流密度 **J_s** 才不为零，即

$$J_s = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ J \rightarrow \infty}} hJ \neq 0$$



3. 线电流

电荷在一个横截面积可以忽略的细线中定向运动所形成的电流称为线电流，可认为电流集中在细导线的轴线上。

长度元 dl 中流过电流 I ，将 $I dl$ 成为电流元。



- 运动电荷的电流

$$\vec{J} = \rho \vec{v} \qquad \vec{J}_S = \rho_S \vec{v} \qquad I = \rho_l v$$

\vec{v} —— 电荷运动速度

- 电流元——类似于点电荷

$$\vec{J} dV \qquad \vec{J}_S dS \qquad I d\vec{l}$$



2.1.3 电荷守恒定律（电流连续性方程）

电荷守恒定律:电荷既不能被创造,也不能被消灭,只能从物体的一部分转移到另一部分,或者从一个物体转移到另一个物体。

电荷守恒定律是电磁现象中的基本定律之一。

电流连续性方程

积分形式 $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$

流出闭曲面 S 的电流
等于体积 V 内单位时
间所减少的电荷量

微分形式 $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (散度定理)

积分形式反映的是电荷变化与电流流动的宏观关系,而微分形式则描述空间各点电荷变化与电流流动的局部关系。



当电流不随时间变化时，称为恒定电流（或稳恒电流）。此时要求电荷分布与时间无关，即 ρ 对时间的偏导数为零，可以得到。

恒定电流的连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0, \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

恒定电流是无源场，电流线是连续的闭合曲线，既无起点也无终点



【例2.1.2】在球面坐标系中，传导电流密度为 $J = e_r 10r^{-1.5} (\text{A/m})$ ，求：(1) 通过半径 $r = 1\text{mm}$ 的球面的电流值；(2) 在半径 $r = 1\text{mm}$ 的球面上电荷密度的增加率；(3) 在半径 $r = 1\text{mm}$ 的球体内总电荷的增加率。

【解】 (1)
$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 10r^{-1.5} r^2 \sin\theta d\theta d\phi \Big|_{r=1\text{mm}}$$
$$= 40\pi r^{0.5} \Big|_{r=1\text{mm}} = 3.97(\text{A})$$

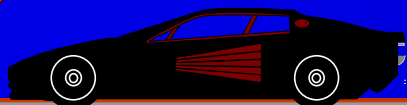
(2) 在球面坐标系中

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\nabla \cdot \vec{J} \Big|_{r=1\text{mm}} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 10r^{-1.5}) \Big|_{r=1\text{mm}} \\ &= -5r^{-2.5} \Big|_{r=1\text{mm}} = -1.58 \times 10^8 (\text{A/m}^3) \end{aligned}$$



(3) 由电荷守恒定律，得

$$\frac{dq}{dt} = -\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -3.97(\text{A})$$



2.2 真空中静电场的基本规律

静电场：由静止电荷产生的电场。

重要特征：对位于电场中的电荷有电场力作用。

本节内容

2.2.1 库仑定律 电场强度

2.2.2 静电场的散度与旋度



2.2.1 库仑定律 电场强度

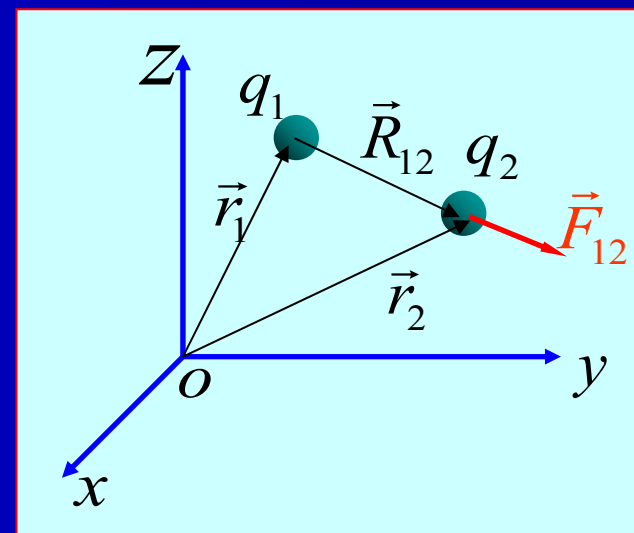
1. 库仑（Coulomb）定律(1785年)

真空中静止点电荷 q_1 对 q_2 的作用力:

$$\vec{F}_{12} = \vec{e}_R \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3}$$

■ 说明:

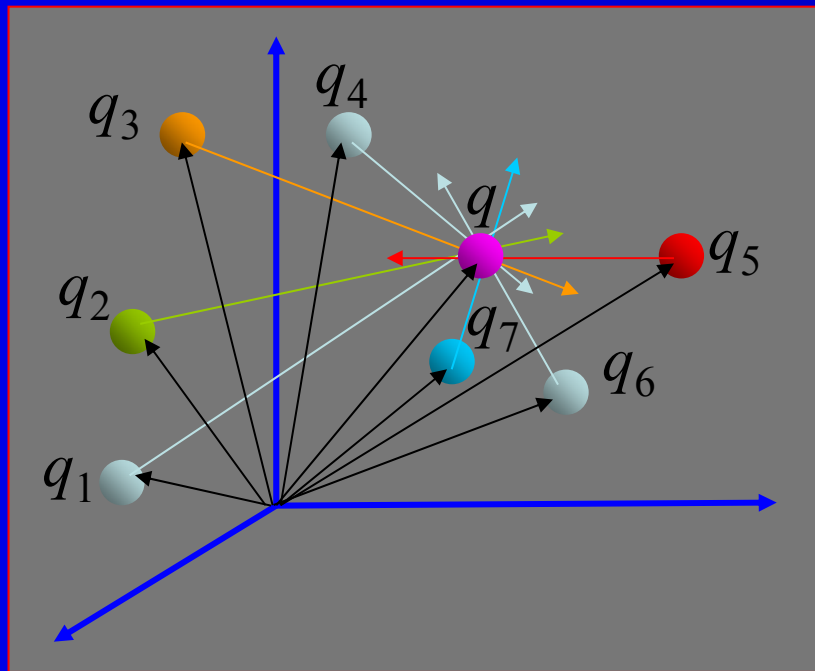
- 大小与两电荷的电荷量成正比，与两电荷距离的平方成反比；
- 方向沿 q_1 和 q_2 连线方向，同性电荷相排斥，异性电荷相吸引；
- $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ，满足牛顿第三定律。



- 电场力服从叠加定理

真空中的 N 个点电荷 q_1 、 q_2 、 \cdots 、 q_N (分别位于 \vec{r}_1 、 \vec{r}_2 、 \cdots 、 \vec{r}_N)对点电荷 q (位于 \vec{r})的作用力为

$$\vec{F}_q = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{q_i q} = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i \vec{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \quad (\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i)$$

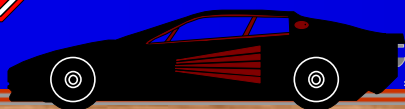
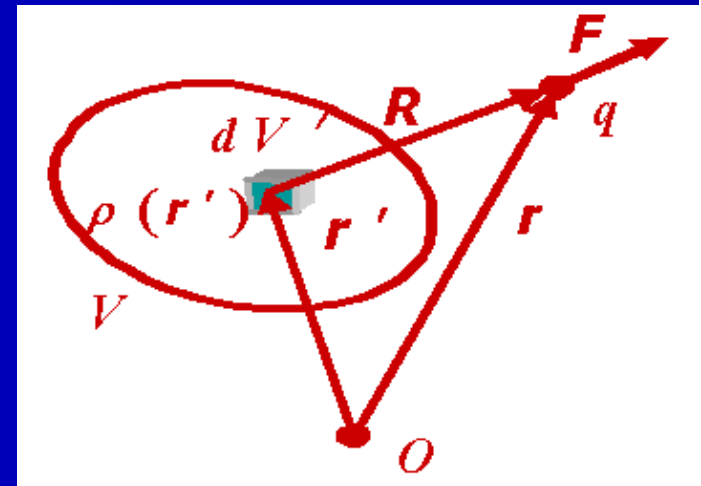


例 2.2.1 体积为 V 的区域中体电荷密度为 $\rho(\mathbf{r}')$ ，空间 \mathbf{r} 处有一个点电荷 q ，如图所示。写出 V 中的电荷作用在点电荷 q 上的静电力表达式。如果电荷是分布在一个曲面或曲线上，写出静电力的表达式。

$$\vec{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \vec{R}}{R^3} dV' \quad (\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}')$$

$$\vec{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\mathbf{r}') \vec{R}}{R^3} dS'$$

$$\vec{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l(\mathbf{r}') \vec{R}}{R^3} dl'$$



2. 电场强度

电场强度矢量 \vec{E} ——描述电场分布的基本物理量

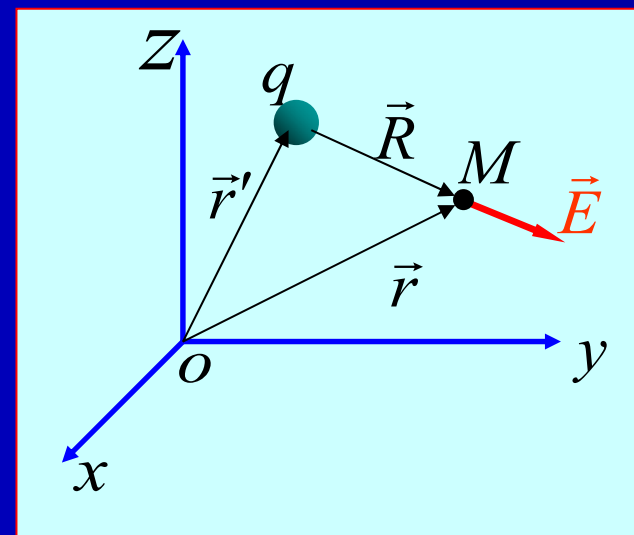
空间某点的电场强度定义为置于该点的单位点电荷（又称试验电荷）受到的作用力，即

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \quad q_0 \text{——试验正电荷}$$

根据上述定义，真空中静止点电荷 q 激发的电场为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}')$$

如果电荷是连续分布呢？分几种分布情况讨论？

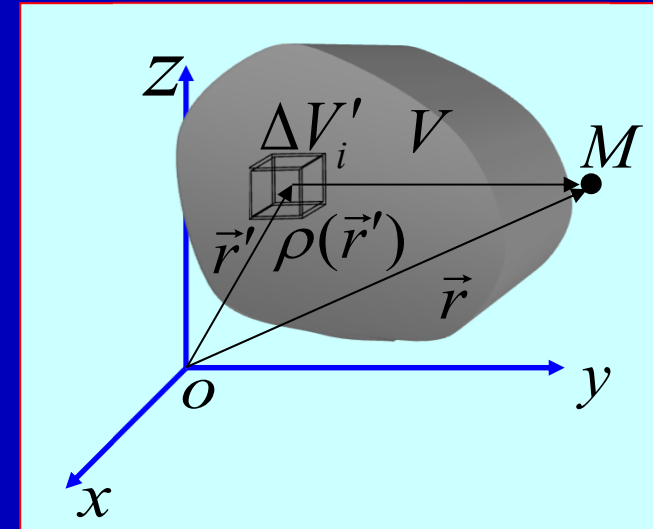


- 体密度为 $\rho(\vec{r})$ 的体分布电荷产生的电场强度

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\rho(\vec{r}'_i) \Delta V'_i \vec{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dV'$$

小体积元中的电荷产生的电场



- 面密度为 $\rho_s(\vec{r})$ 的面分布电荷的电场强度

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dS'$$

- 线密度为 $\rho_l(\vec{r})$ 的线分布电荷的电场强度

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_l(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dl'$$



例2.2.2 在空气中有一点Q(0.2, 0.1, -2.5)，该处有一个 $5 \times 10^{-9} \text{ C}$ 的点电荷，求它在P(-0.2, 0, -2.3)处产生的电场强度。

解:场点的位置矢量 $\vec{r} = \vec{e}_x(-0.2) + \vec{e}_z(-2.3)$

源点的位置矢量 $\vec{r}' = \vec{e}_x(0.2) + \vec{e}_y(0.1) + \vec{e}_z(-2.5)$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = \vec{e}_x(-0.4) + \vec{e}_y(-0.1) + \vec{e}_z(0.2)$$

$$\Rightarrow |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(-0.4)^2 + (-0.1)^2 + (0.2)^2} \approx 0.458$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = 214.5[\vec{e}_x(-0.873) + \vec{e}_y(-0.218) + \vec{e}_z(0.417)]$$



3. 几种典型电荷分布的电场强度

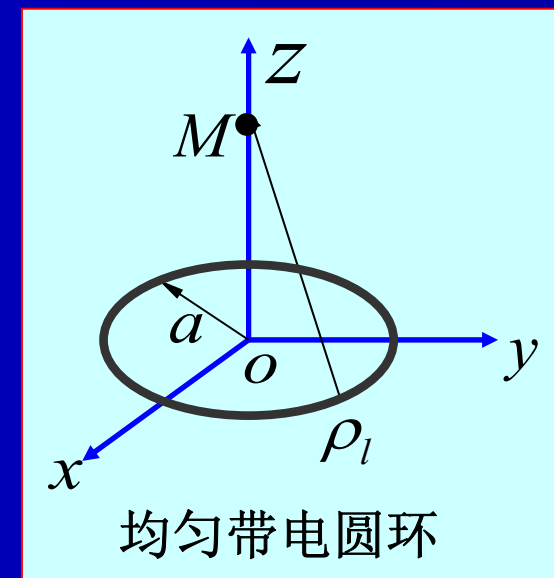
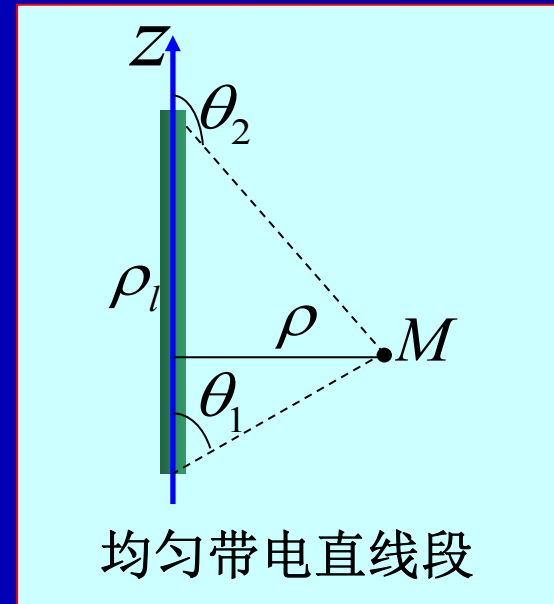
● 均匀带电直线段的电场强度

$$\begin{cases} E_{\rho} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0\rho} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \\ E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0\rho} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \end{cases} \quad (\text{有限长})$$

$$E_{\rho} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (\text{无限长})$$

● 均匀带电圆环轴线上的电场强度

$$E_z(0,0,z) = \frac{a\rho_l z}{2\epsilon_0(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



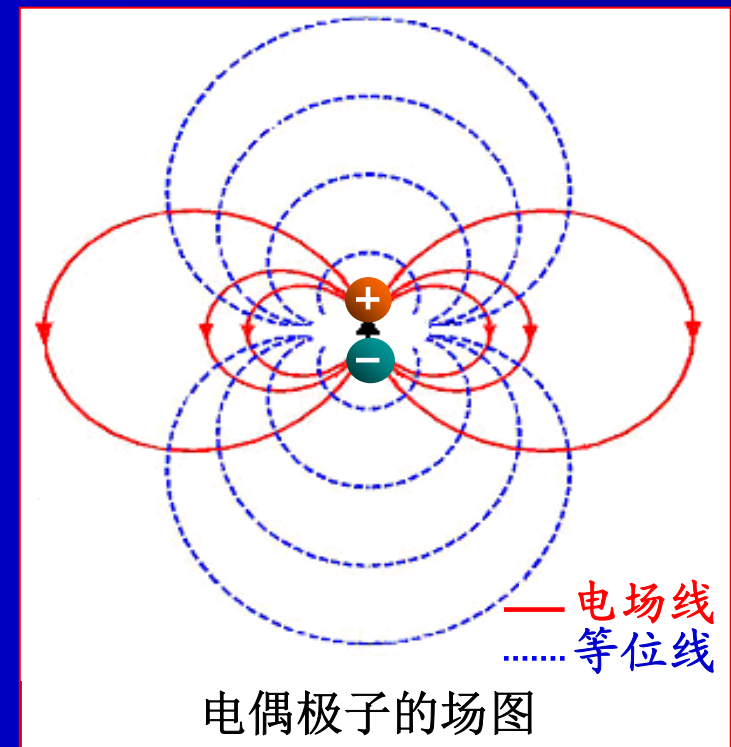
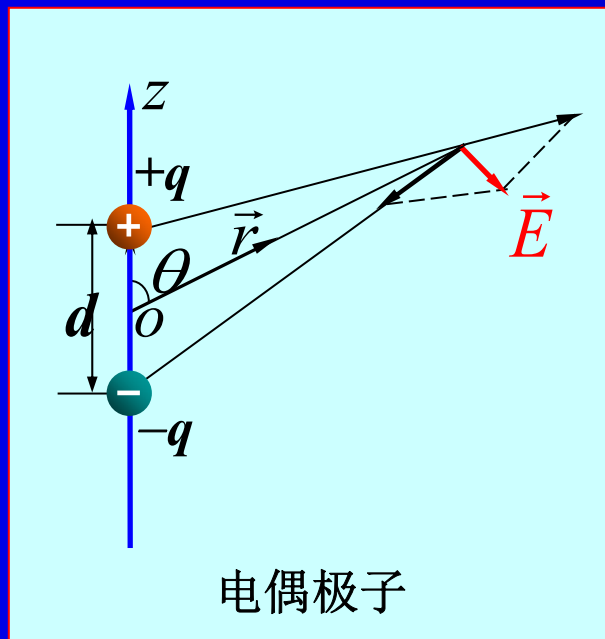
- 电偶极子的电场强度:

P50, 2.2.1

电偶极子是由相距很近、带等值异号的两个点电荷组成的电荷系统，其远区电场强度为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{e}_r 2\cos\theta + \vec{e}_\theta \sin\theta)$$

$\vec{p} = q\vec{d}$ ——电偶极矩



● 例2.2.3 均匀带电直线段的电场强度：

解：线元 dz' 在场点 P 电场分量：

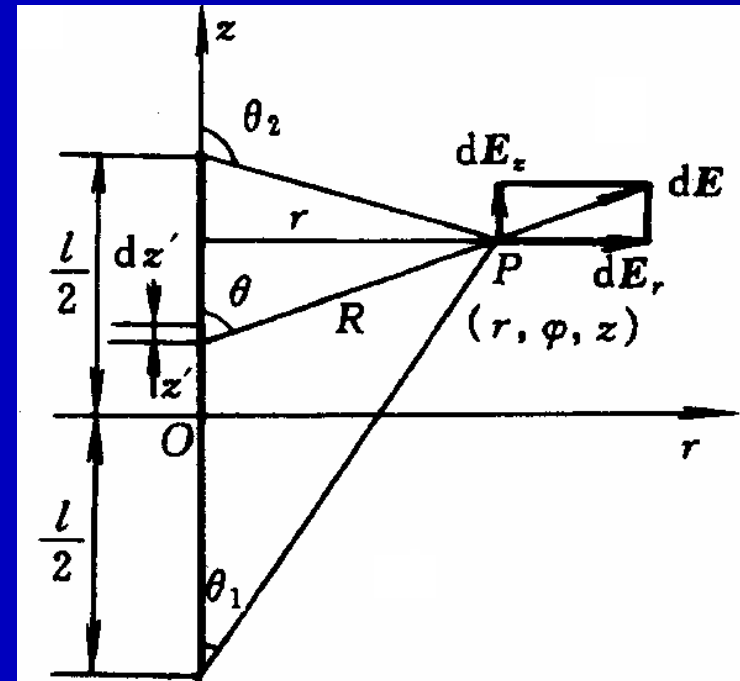
$$r = R \sin \theta \Rightarrow R = \frac{r}{\sin \theta} = r \csc \theta$$

$$z = z' + r \cot \theta \Rightarrow z' = z - r \cot \theta$$

$$dz' = r \csc^2 \theta d\theta$$

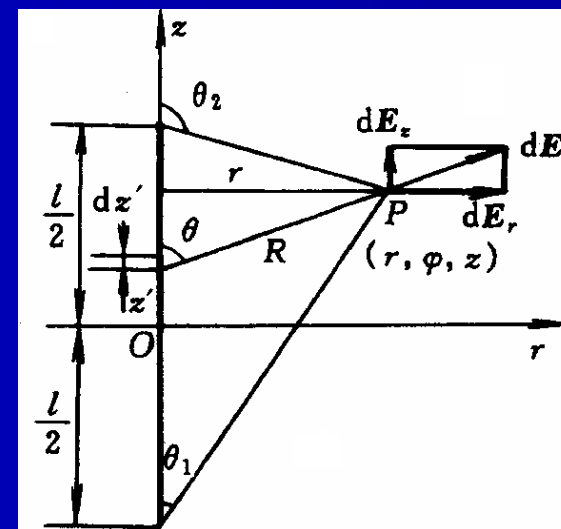
$$dE_r = dE \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz'}{R^2} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l r \csc^2 \theta \sin \theta d\theta}{r^2 \csc^2 \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \sin \theta d\theta}{r}$$



$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dz'}{R^2} \cos \theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l r \csc^2 \theta \cos \theta d\theta}{r^2 \csc^2 \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \cos \theta d\theta}{r}$$



$$\therefore \begin{cases} E_r = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \end{cases}$$

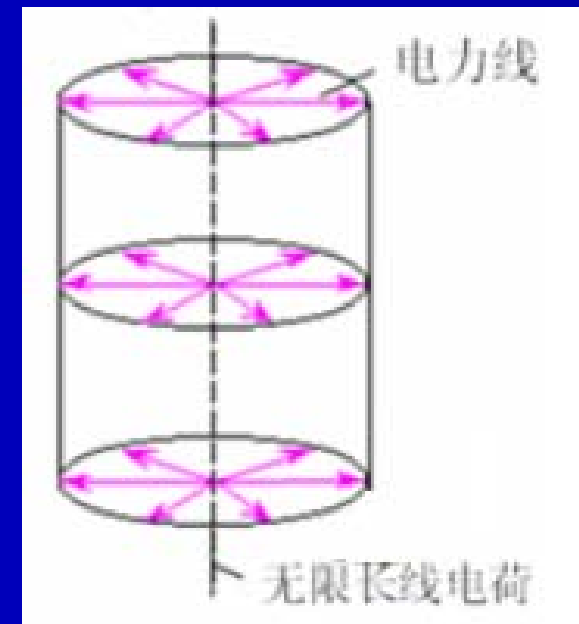


当均匀带电直线段无限长时

$$\theta_1 = 0?, \quad \theta_2 = 180?$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l}{r} \\ E_z = 0 \end{cases}$$

$$? \quad \vec{E} = \vec{e}_r E_r = \vec{e}_r \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l}{r}$$



● 例2.2.4 均匀带电圆环轴线上的电场强度

解: $\vec{r} = \vec{e}_z z, \vec{r}' = \vec{e}_x a \cos \theta + \vec{e}_y a \sin \theta$

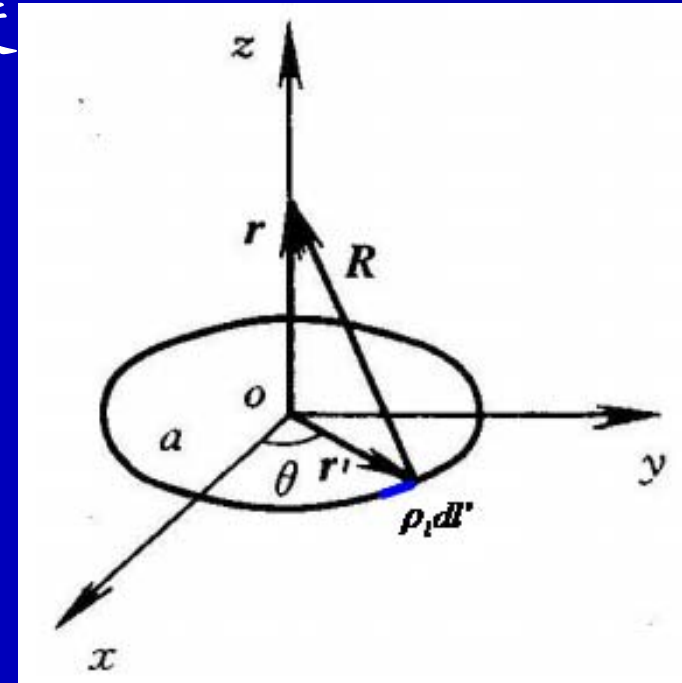
$$\Rightarrow |\vec{R}| = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$dl' = a d\theta$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl'$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{e}_z z - \vec{e}_x a \cos \theta - \vec{e}_y a \sin \theta)}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\theta$$

$$= \vec{e}_z \frac{a\rho_l}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$



【例 2.2.5】如图所示，均匀带电的环形薄圆盘的内半径为 a 、外半径为 b ，电荷面密度为 ρ_{S0} 。计算环形薄圆盘轴线上任意点的电场强度。

【解】环形薄圆盘的面积元： $dS' = \rho' d\rho' d\phi'$

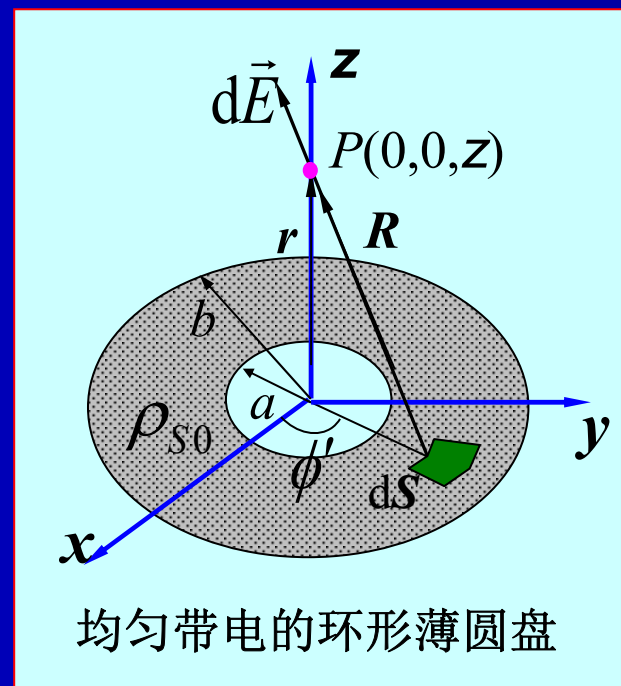
源点位置矢量： $\vec{r}' = \vec{e}_\rho \rho'$

所带的电量： $dq = \rho_S dS' = \rho_S \rho' d\rho' d\phi'$

轴线上的场点 P 的位置矢量： $\vec{r} = \vec{e}_z z$

因此
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dS'$$

$$= \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_z z - \vec{e}_{\rho'} \rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi'$$



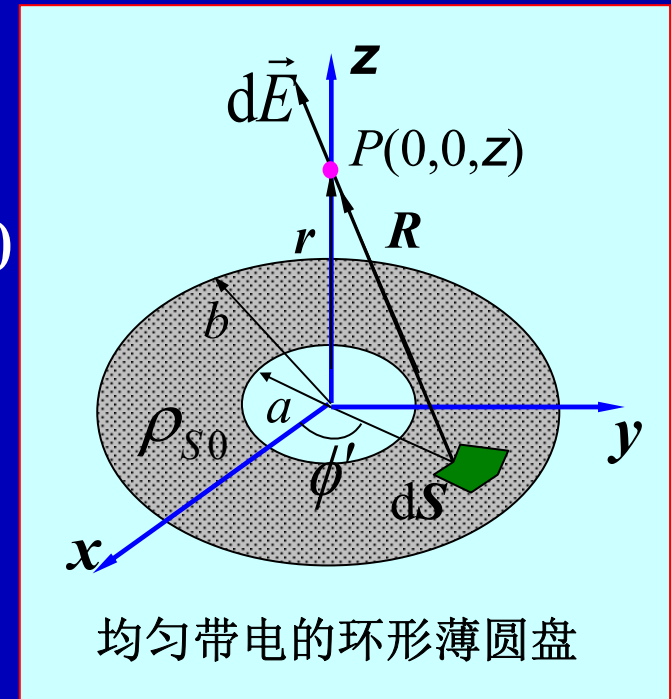
由于 $\vec{e}_{\rho'} = \vec{e}_x \cos \phi' + \vec{e}_y \sin \phi'$

$$\rightarrow \int_0^{2\pi} \vec{e}_{\rho'} d\phi' = \int_0^{2\pi} (\vec{e}_x \cos \phi' + \vec{e}_y \sin \phi') d\phi' = 0$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi' = 2\pi$$

故 $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_z z - \vec{e}_{\rho} \rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi'$

$$= \vec{e}_z \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{\rho' d\rho'}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} = \vec{e}_z \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(z^2 + b^2)^{1/2}} \right]$$



2.2.2 静电场的散度与旋度

1. 静电场散度与高斯定理

静电场的散度（微分形式）

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

静电场的高斯定理（积分形式）

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

高斯定理表明：静电场是有源场，电力线起始于正电荷，终止于负电荷。

对静电场高斯定理的讨论

- 空间任意点电场的散度只与当地的电荷分布有关
- 静电荷是静电场的散度源，激发起扩散或汇集状的静电场
- 穿过任意闭合面的电通量正比于闭合面所包围的总电量
- 无电荷处，源的强度(散度)为零，但电场不一定为零



2. 静电场旋度与环路定理

静电场的旋度（微分形式）

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

静电场的环路定理（积分形式）

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0$$

环路定理表明：静电场是无旋场，是保守场，电场力做功与路径无关。

对环路定理的讨论

- 空间中静电场旋度处处为零，静电场中不存在旋涡源，电力线不构成闭合回路
- 静电场沿任意闭合回路的积分都为零
- 虽然空间中电场的旋度处处为零，但电场却可能存在，二者没有必然的联系

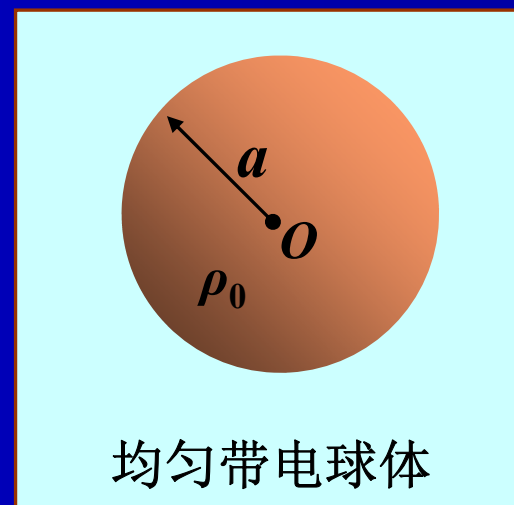
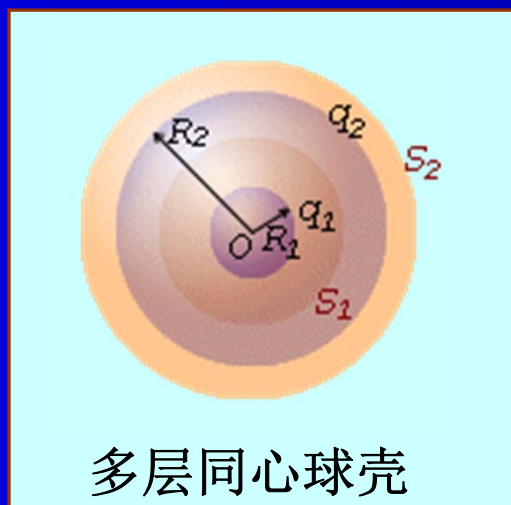
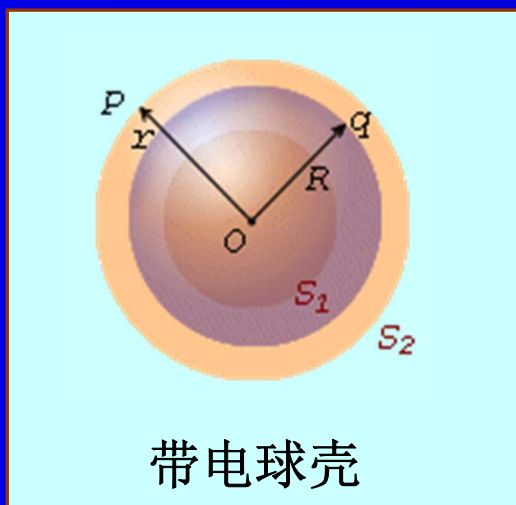


3. 利用高斯定理计算电场强度

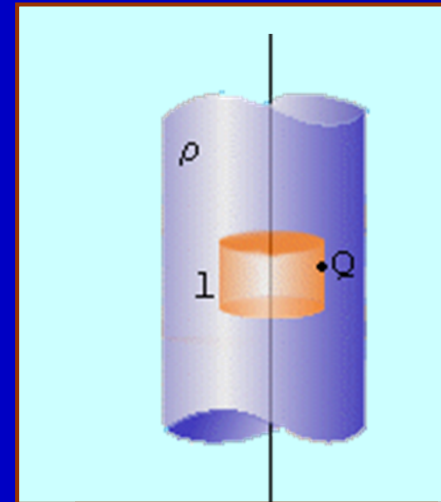
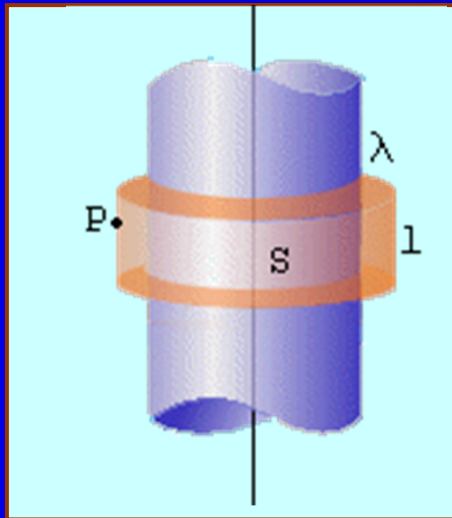
在电场分布具有一定对称性的情况下，可以利用高斯定理计算电场强度。

具有以下几种对称性的场可用高斯定理求解：

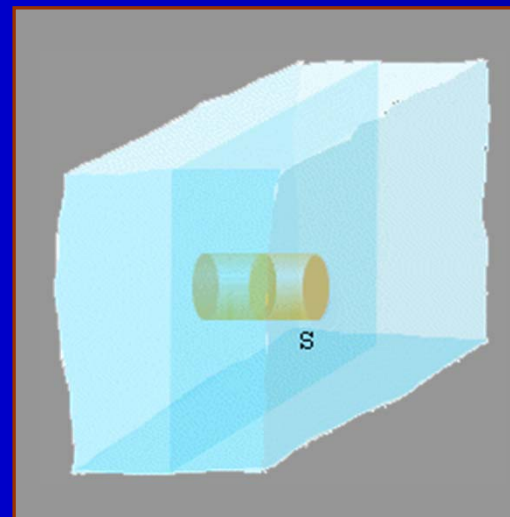
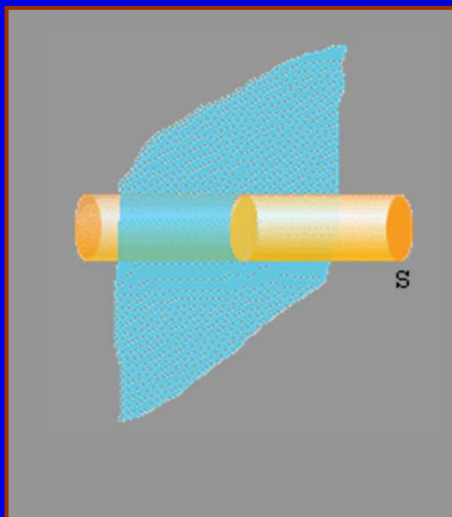
- **球对称分布**：包括均匀带电的球面，球体和多层同心球壳等。



- 轴对称分布：如无限长均匀带电的直线，圆柱面，圆柱壳等。



- 无限大平面电荷：如无限大的均匀带电平面、平板等。



例2.2.6 求真空中均匀带电球体的场强分布。已知球体半径为 a ，电荷密度为 ρ_0 。

解：（1）球外某点的场强

由
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0$$

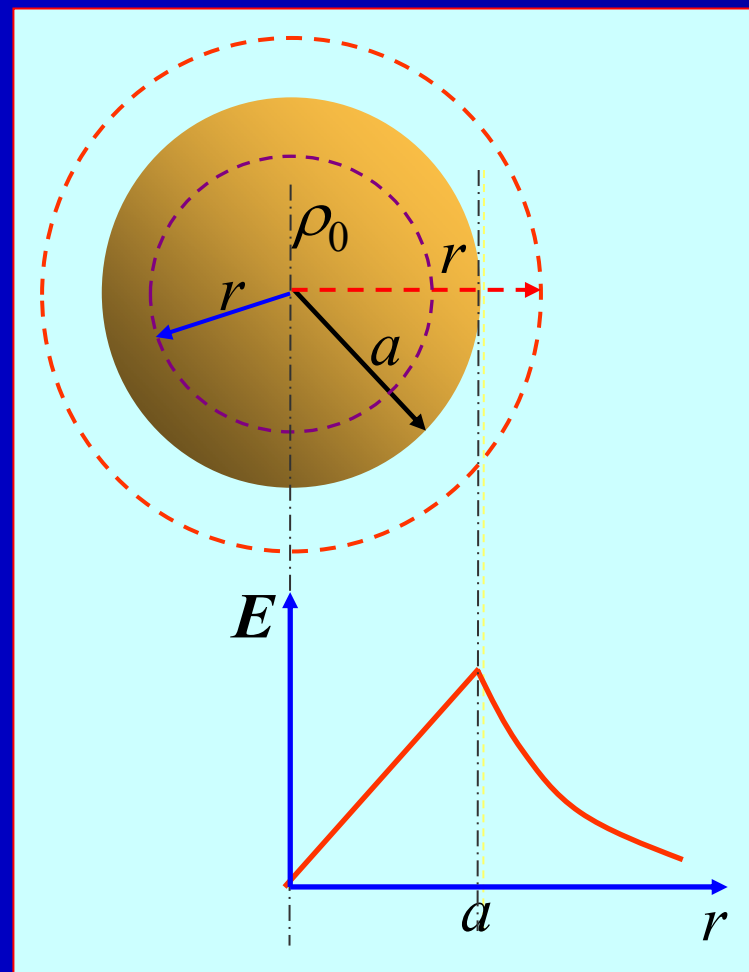
→
$$E = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geq a)$$

（2）求球体内一点的场强

由
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_0 dV$$

→
$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{4\pi a^3/3} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$

→
$$E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \quad (r < a)$$



2.3 真空中恒定磁场的基本规律

本节内容

2.3.1 安培力定律 磁感应强度

2.3.2 恒定磁场的散度与旋度

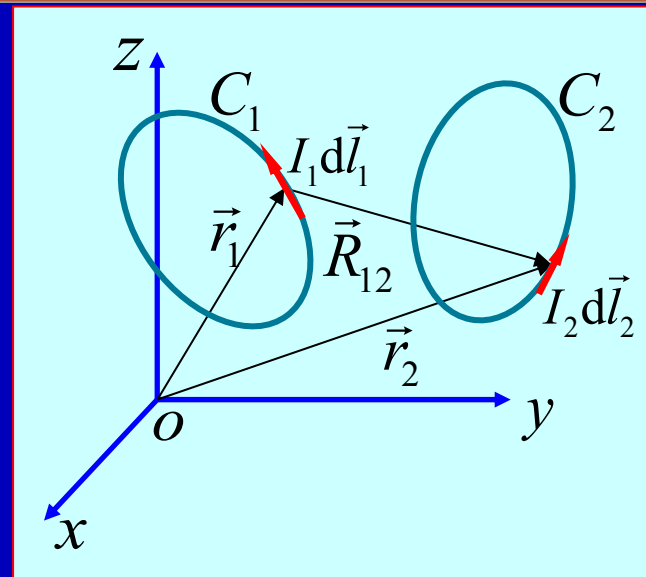


2.3.1 安培力定律 磁感应强度

1. 安培 (Ampere) 力定律

- 真空中的载流回路 C_1 对载流回路 C_2 的作用力

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3}$$



安培力定律的积分形式

其中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

真空中的磁导率

- 电流元 $I_1 d\vec{l}_1$ 对电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 的作用力

$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

安培力定律的微分形式

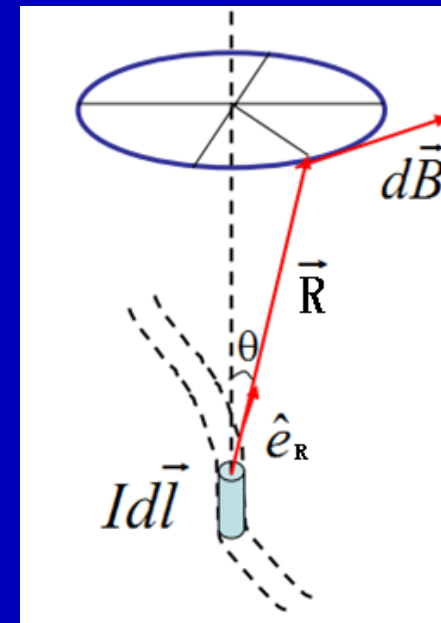
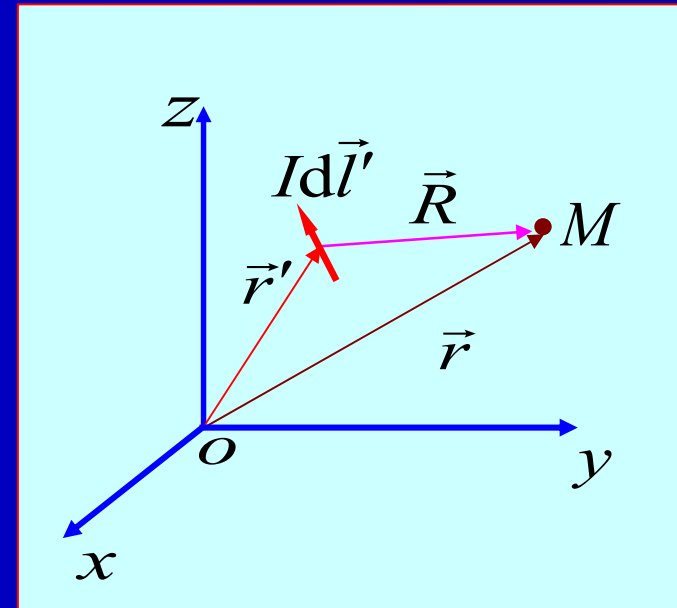
2. 磁感应强度 \vec{B}

- 电流元 $Id\vec{l}'$ 产生的磁感应强度

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times (Id\vec{l}' \times \vec{R})}{R^3}$$

单位: T (特斯拉)

$$\longrightarrow d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$



- 任意电流回路 C 产生的磁感应强度

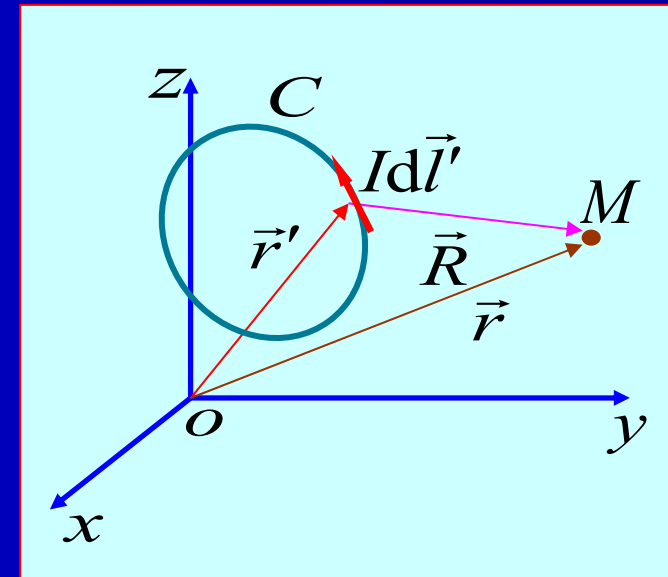
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$

- 体电流产生的磁感应强度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV'$$

- 面电流产生的磁感应强度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dS'$$



3. 几种典型电流分布的磁感应强度

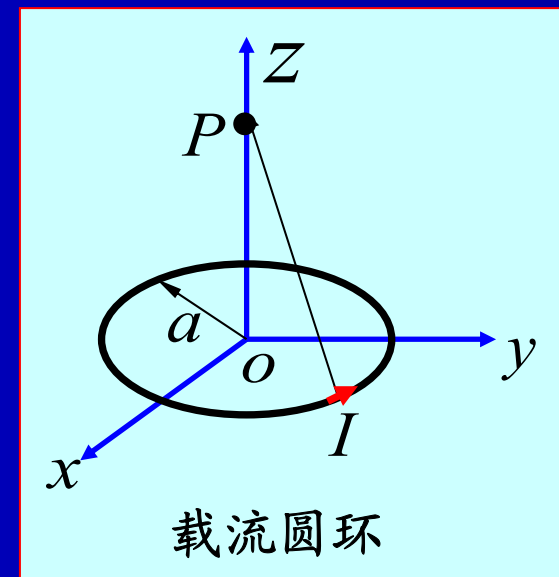
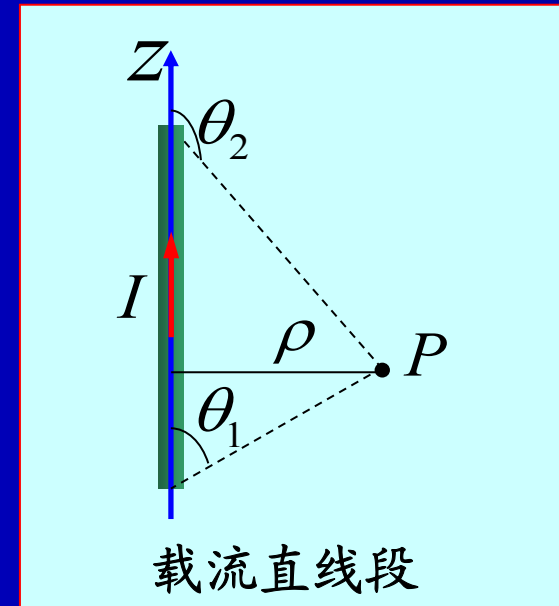
- 载流直线段的磁感应强度：

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (\text{有限长})$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (\text{无限长})$$

- 载流圆环轴线上的磁感应强度：

$$\vec{B}(0,0,z) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



例 2.3.1 求有限长直线电流在空间产生的磁感应强度。

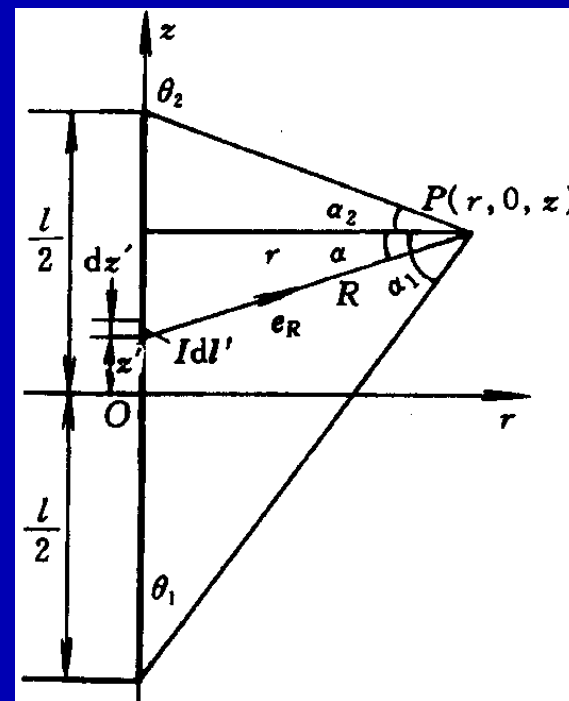
解：采用圆柱坐标，使轴与线电流相合，原点在线的中点。场由于轴对称关系，只要求出 φ 为常数平面内的磁场即可。

$$R = \bar{e}_r r + \bar{e}_z (z - z') \quad r' = \bar{e}_z z'$$

$$Idl' = \bar{e}_z Idz'$$

由毕奥—萨伐尔定律，得

$$\begin{aligned} \bar{B}(r) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{Idz' \bar{e}_z \times [\bar{e}_r r + \bar{e}_z (z - z')]}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \bar{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{rdz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \\ &= \bar{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = \bar{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$

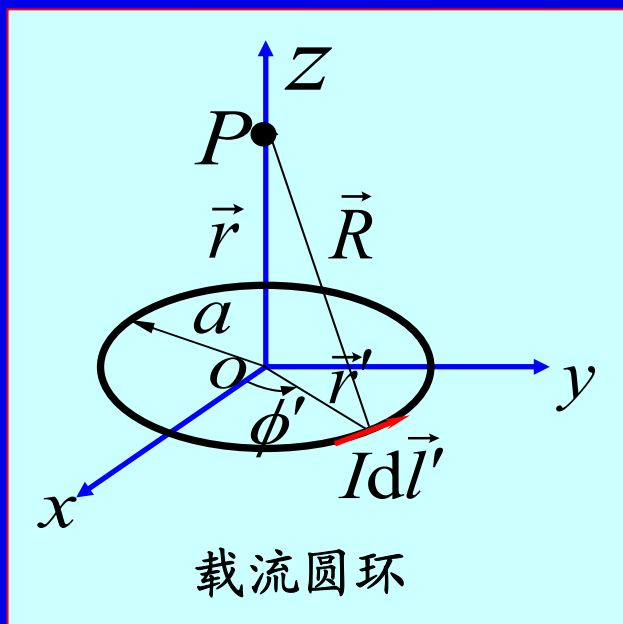


当导线为无限长时， $\theta_1 \rightarrow 0$ ， $\theta_2 \rightarrow \pi$ ，有 $\bar{B} = \bar{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



例 2.3.2 计算线电流圆环轴线上任一点的磁感应强度。

解：设圆环的半径为 a ，流过的电流为 I 。为计算方便取线电流圆环位于 xOy 平面上，则所求场点为 $P(0, 0, z)$ ，如图所示。采用圆柱坐标系，圆环上的电流元为 $Id\vec{l}' = \vec{e}_\phi I a d\phi'$ ，其位置矢量为 $\vec{r}' = \vec{e}_\rho a$ ，而场点 P 的位置矢量为 $\vec{r} = \vec{e}_z z$ ，故得



$$\vec{r} - \vec{r}' = \vec{e}_z z - \vec{e}_\rho a, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} Id\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \vec{e}_\phi I a d\phi' \times (\vec{e}_z z - \vec{e}_\rho a) \\ &= \vec{e}_\rho I a z d\phi' + \vec{e}_z I a^2 d\phi' \end{aligned}$$

轴线上任一点 $P(0, 0, z)$ 的磁感应强度为

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_\rho z + \vec{e}_z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi'$$



由于 $\int_0^{2\pi} \vec{e}_\rho d\phi' = \int_0^{2\pi} (\vec{e}_x \cos\phi' + \vec{e}_y \sin\phi') d\phi' = 0$, 所以

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{e}_z a}{(z^2 + a^2)^{3/2}} d\phi' = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

可见, 线电流圆环轴线上的磁感应强度只有轴向分量, 这是因为圆环上各对称点处的电流元在场点 P 产生的磁感应强度的径向分量相互抵消。

在圆环的中心点上, $z=0$, 磁感应强度最大, 即

$$\vec{B}(0) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2a}$$

当场点 P 远离圆环, 即 $z \gg a$ 时, 因 $(z^2 + a^2)^{3/2} \approx z^3$, 故

$$\vec{B} = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}$$



2.3.2 恒定磁场的散度和旋度

1. 恒定磁场的散度与磁通连续性原理

恒定场的散度（微分形式）

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

磁通连续性原理（积分形式）

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0$$

磁通连续性原理表明：恒定磁场是无散度源场，磁感应线是无起点和终点的闭合曲线。

对静磁场散度定理的讨论

- ➡ 静磁场的散度处处为零，不存在磁力线的扩散源和汇集源
- ➡ 磁力线连续不断，无头无尾，穿过任何闭合面的通量为零



2. 恒定磁场的旋度与安培环路定理

恒定磁场的旋度（微分形式）

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

安培环路定理（积分形式）

$$\oint_C \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I$$

安培环路定理表明：恒定磁场是有旋场，是非保守场、电流是磁场的旋涡源。

对安培环路定理的讨论

- ➡ 空间任意点磁场的旋度只与当地的电流密度有关
- ➡ 恒定电流是静磁场的旋涡源，电流激发旋涡状的静磁场，并决定旋涡源的强度和旋涡方向
- ➡ 任意回路上恒定磁场的回路积分，等于穿过回路所围区域的总电流强度



3. 利用安培环路定理计算磁感应强度

在磁场分布具有一定对称性的情况下，可以利用安培环路定理计算磁感应强度。

安培环路定律

线电流:
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{内}}$$

面电流:
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_l \vec{J}_s \cdot (\vec{e}_n \times d\vec{l})$$

体电流:
$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



例2.3.3 求载流无限长同轴电缆产生的磁感应强度。

解 选用圆柱坐标系，则 $\vec{B} = \vec{e}_\phi B(\rho)$

(1) $0 \leq \rho < a$

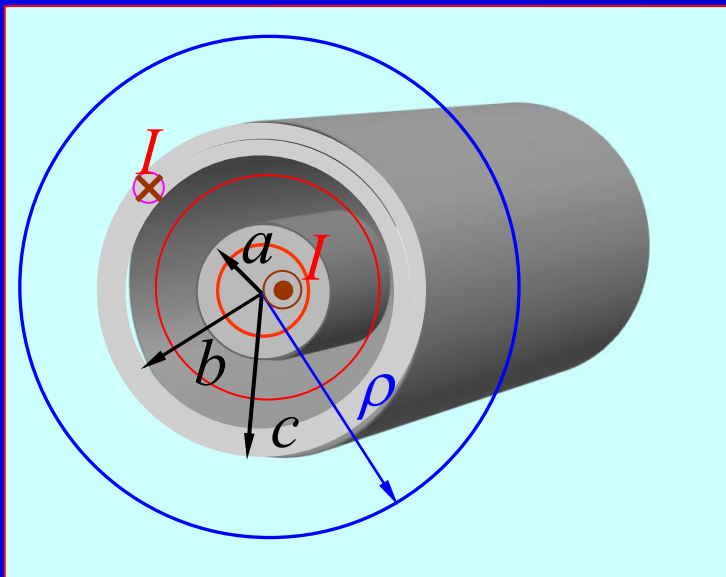
取安培环路 ($\rho < a$)，交链的电流为

$$I_1 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

应用安培环路定理，得

$$2\pi\rho B_1 = \mu_0 \frac{I\rho^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$



$$(2) \quad a \leq \rho < b$$

$$2\pi\rho B_2 = \mu_0 I \quad \longrightarrow \quad \vec{B}_2 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$(3) \quad b \leq \rho < c$$

$$I_3 = I - I \frac{\pi(\rho^2 - b^2)}{\pi(c^2 - b^2)} = I \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

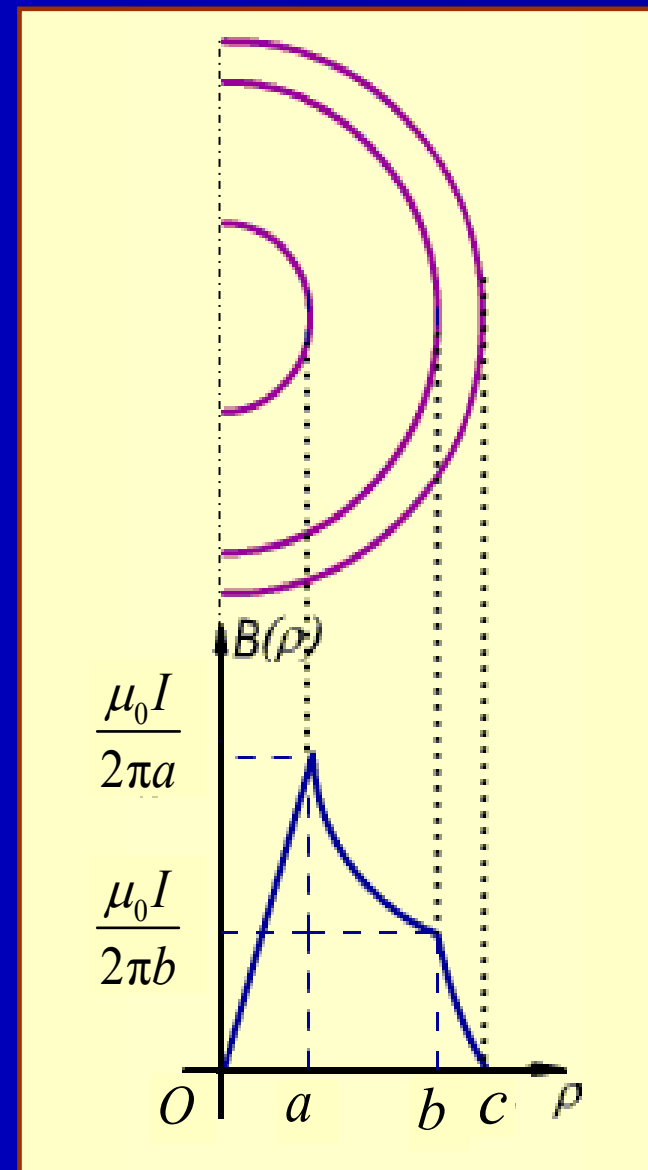
应用安培环路定理，得

$$2\pi\rho B_3 = \frac{\mu_0 I (c^2 - \rho^2)}{c^2 - b^2}$$

$$\longrightarrow \vec{B}_3 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

$$(4) \quad c \leq \rho < \infty$$

$$I_4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{B}_4 = 0$$



2.4 媒质的电磁特性

- 媒质对电磁场的响应可分为三种情况：极化、磁化和传导。
- 描述媒质电磁特性的参数为：介电常数、磁导率和电导率。

本节内容

2.4.1 电介质的极化 电位移矢量

2.4.2 磁介质的磁化 磁场强度

2.4.3 媒质的传导特性



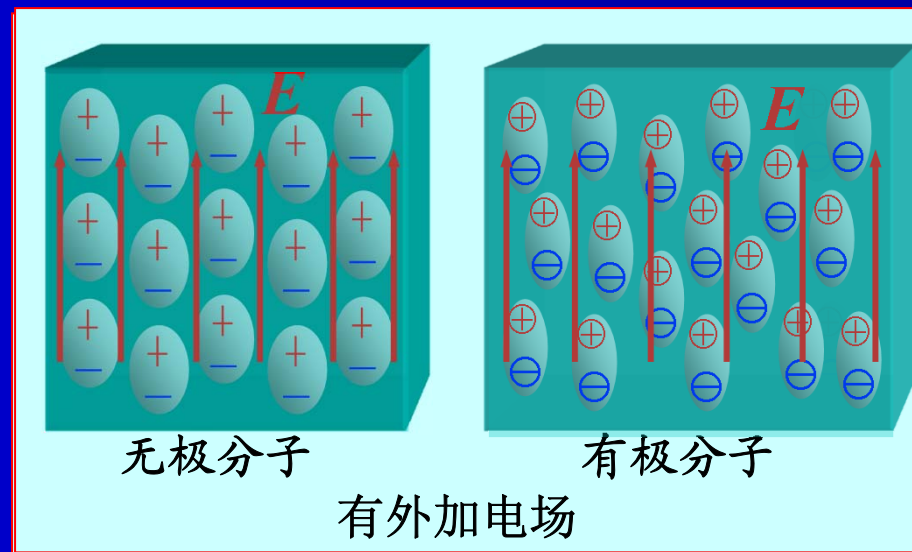
2.4.1 媒质的极化 电位移矢量

1. 媒质的极化机理

● 媒质的分子

无极分子 和 有极分子。

● 无外加电场



无极分子 —— 正负电荷中心重合

有极分子 —— 固有电偶极矩无序排列

不具有宏观电特性

● 有外加电场

无极分子 —— 正负电荷中心漂移

有极分子 —— 固有电偶极矩有序排列

漂移极化

具有宏观电特性

取向极化

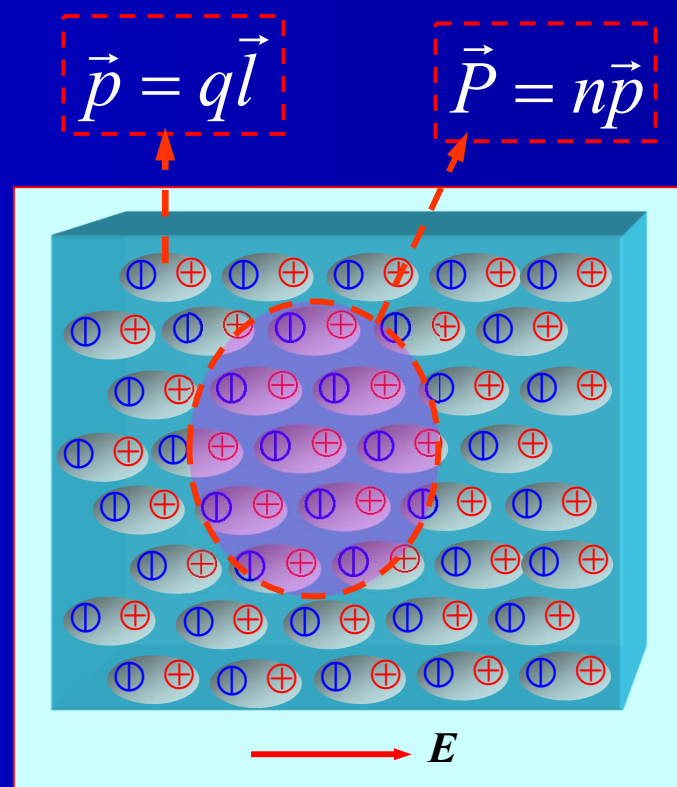
2. 极化强度矢量 \vec{P} (C/m²)

- 极化强度矢量 \vec{p} : 描述媒质极化程度的物理量。

$$\text{定义: } \vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = n\vec{p}$$

$\vec{p} = q\vec{l}$ —— 分子的平均电偶极矩

物理意义: 单位体积内分子电偶极矩的矢量和。



- 极化强度与电场强度有关，其关系一般比较复杂。
- 在线性、各向同性的媒质中， \vec{P} 与电场强度成正比，即

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad \chi_e (> 0) \text{ —— 媒质的电极化率}$$



3. 极化电荷

媒质极化后，内部可能出现体分布的极化电荷，表面上有面分布的极化电荷。

- 极化电荷体密度 ρ_P

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

- 极化电荷面密度 ρ_{Sp}

$$\rho_{Sp} = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$

■ 说明：

- 极化电荷的总和为零，即 $\int_V \rho_P dV + \oint_S \rho_{Sp} dS = 0$
- P 为常数时称为均匀极化，此时媒质内部不会出现极化电荷，极化电荷只会出现在媒质表面上。
- 均匀媒质内部一般不存在极化电荷



4. 电位移矢量 媒质中的高斯定理

媒质极化后，空间的电场应该是自由电荷和极化电荷共同产生，即

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho + \rho_p \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V (\rho + \rho_p) dV$$

由于 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$ $\longrightarrow \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho - \nabla \cdot \vec{P} \longrightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$

引入电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (单位: C/m^2) $\longrightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

任意闭合曲面电位移矢量 \vec{D} 的通量
等于该曲面包含自由电荷的代数和

媒质中的高
斯定理的积
分形式

媒质中的高
斯定理的微
分形式

5. 本构关系

- 极化强度 \vec{P} 与电场强度 \vec{E} 之间的关系由媒质的性质决定。
- 对于线性、各向同性媒质 $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$

→ $\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$ —— 电介质的本构关系

其中: $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) = \varepsilon_r \varepsilon_0$ —— 媒质的介电常数;

$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ —— 媒质的相对介电常数 (无量纲)

* 媒质的分类:

- 线性和非线性媒质
- 均匀和非均匀
- 各向同性与各向异性媒质
- 时变和时不变媒质
- 确定性和随机媒质



【例2.4.1】半径为 a 、介电常数为 ε 的球形电介质内的极化强度为 $\vec{P} = \vec{e}_r k/r$ ，式中的 k 为常数。(1) 计算极化电荷体密度和面密度；(2) 计算电介质球内自由电荷体密度。

【解】 (1) $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 P_r) = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{k}{r} \right) = -\frac{k}{r^2}$

$r = a$ 处的极化电荷面密度为 $\rho_{SP} = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = \vec{e}_r \frac{k}{r} \cdot \vec{e}_r \Big|_{r=a} = \frac{k}{a}$

(2) 因 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ，故

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\vec{D}}{\varepsilon} + \nabla \cdot \vec{P}$$

$$\longrightarrow (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{P}$$

故 $\rho = \nabla \cdot \vec{D} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \nabla \cdot \vec{P} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \frac{k}{r^2}$



小 结

- 媒质中静电场的基本方程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{微分形式}), \quad \left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{积分形式})$$

- 线性、各向同性媒质的本构关系 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

- 极化强度矢量 $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = (1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) \vec{D}$

- 媒质中的极化电荷密度 $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} \quad \rho_{sp} = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$

- 线性、各向同性的均匀媒质中 $\rho_p = -(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) \rho$



2.4.2 磁介质的磁化 磁场强度

1. 磁介质的磁化

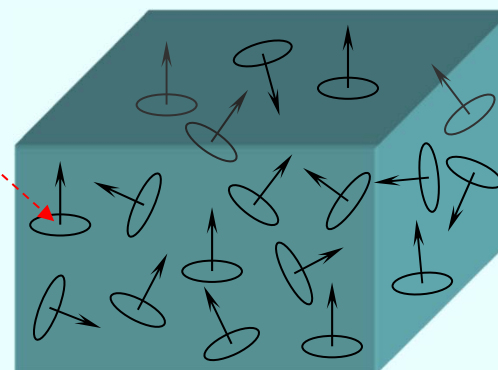
介质中分子或原子内的电子运动形成分子电流，形成分子磁矩

$$\vec{p}_m = i\Delta\vec{S}$$

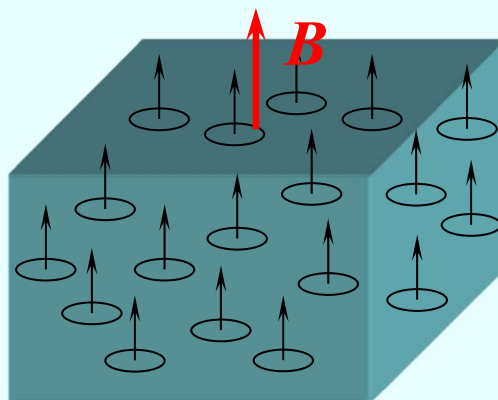
无外磁场作用时，分子磁矩不规则排列，宏观上不显磁性。

在外磁场作用下，分子磁矩定向排列，宏观上显示出磁性，这种现象称为磁介质的**磁化**。

$$\vec{p}_m = i\Delta\vec{S}$$



无外加磁场



外加磁场

2. 磁化强度矢量 \vec{M}

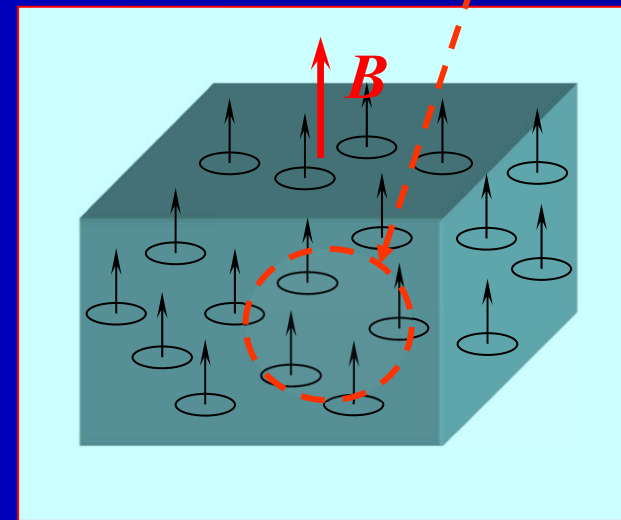
磁化强度 \vec{M} 是描述媒质磁化程度的物理量。

$$\text{定义: } \vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V} = n\vec{p}_m$$

单位: A/m 。

物理意义: 单位体积中的分子磁矩的矢量和

$$\vec{M} = n\vec{p}_m$$



3. 磁化电流

媒质被磁化后，在其内部与表面上可能出现宏观的电流分布，称为磁化电流。

- 磁化电流体密度 \vec{J}_M

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

- 磁化电流面密度 \vec{J}_{SM}

$$\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \vec{e}_n$$

- 说明：

- \vec{M} 为常数时称为均匀磁化，此时媒质内部不会出现磁化电流，磁化电流只会出现在媒质表面上。
- 均匀媒质内部一般不存在磁化电流。
- 传导电流所在地一定有磁化电流出现。



4. 磁场强度 媒质中安培环路定理

外加磁场使媒质发生磁化，形成磁化电流。磁化电流同样也激发磁感应强度，即

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) \qquad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \vec{J}_M) \cdot d\vec{S}$$

由 $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ $\longrightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$

定义**磁场强度** \vec{H} 为: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$, 即 $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

$\longrightarrow \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \qquad \oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = I$

磁通连续性定理为 $\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$

介质中的安培环路定理



5. 本构关系

- 磁化强度 \vec{M} 和磁场强度 \vec{H} 之间的关系由媒质的性质决定。
- 对于线性各向同性媒质, \vec{M} 与 \vec{H} 之间存在简单的线性关系:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \longrightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$$

其中: χ_m —— 媒质的磁化率 (也称为磁化系数);

$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_r \mu_0$ —— 媒质的磁导率 (H / m);

$\mu_r = 1 + \chi_m$ —— 媒质的相对磁导率 (无量纲)。

- 媒质的分类:
 - $\mu_r > 1$ —— 顺磁质
 - $\mu_r < 1$ —— 抗磁质
 - $\mu_r \gg 1$ —— 铁磁质



例2.4.2 有一磁导率为 μ ，半径为 a 的无限长导磁圆柱，其轴线处有无限长的线电流 I ，圆柱外是空气 (μ_0)，试求圆柱内外的 \vec{B} 、 \vec{H} 和 \vec{M} 的分布。

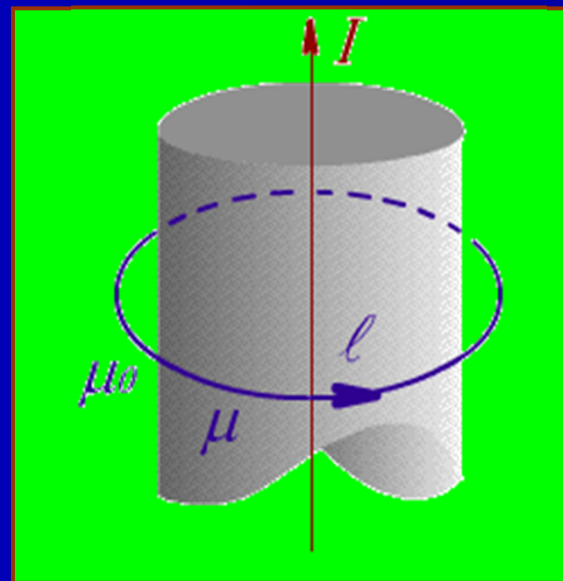
解 磁场为平行平面场，且具有轴对称性，应用安培环路定理，得

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi\rho H_\phi = I$$

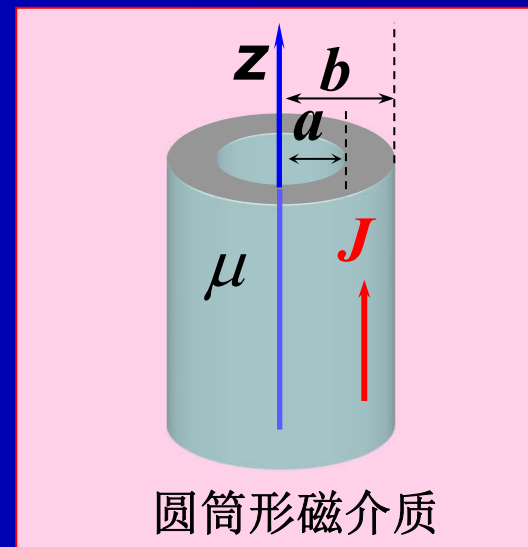
磁场强度 $\vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho} \quad 0 < \rho < \infty$

磁感应强度 $\vec{B} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \frac{\mu I}{2\pi\rho} & 0 < \rho < a \\ \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & a < \rho < \infty \end{cases}$

磁化强度 $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \cdot \frac{I}{2\pi\rho} & \rho < a \\ 0 & a < \rho < \infty \end{cases}$



【例2.4.3】内、外半径分别为 a 和 b 的圆筒形磁介质中，沿轴向有电流密度为 $\vec{J} = \vec{e}_z J_0$ 的传导电流，如图所示。设磁介质的磁导率为 μ ，求磁化电流分布。



【解】 在 $\rho < a$ 的区域，得 $2\pi\rho H_{1\phi} = 0$

$$\longrightarrow \vec{H}_1 = 0, \quad \vec{B}_1 = 0$$

在 $a < \rho < b$ 的区域，得 $2\pi\rho H_{2\phi} = J_0\pi(\rho^2 - a^2)$

$$\longrightarrow \vec{H}_2 = \vec{e}_\phi H_{2\phi} = \vec{e}_\phi \frac{J_0}{2\rho}(\rho^2 - a^2) \quad \vec{B}_2 = \mu \vec{H}_2 = \vec{e}_\phi \frac{\mu J_0}{2\rho}(\rho^2 - a^2)$$

在 $\rho > b$ 的区域，得 $2\pi\rho H_{3\phi} = J_0\pi(b^2 - a^2)$

$$\longrightarrow \vec{H}_3 = \vec{e}_\phi H_{3\phi} = \vec{e}_\phi \frac{J_0}{2\rho}(b^2 - a^2) \quad \vec{B}_3 = \mu_0 \vec{H}_3 = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 J_0}{2\rho}(b^2 - a^2)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{H}_2 = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{H}_2 = \vec{e}_\phi \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 \rho} J_0(\rho^2 - a^2) \quad (a < \rho < b)$$

$$\longrightarrow \vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_\rho & \rho M_\phi & M_z \end{vmatrix} = \vec{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho M_\phi) = \vec{e}_z \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} J_0$$

在磁介质圆筒内表面上

$$\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \vec{e}_n \Big|_{\rho=a} = \vec{M} \times (-\vec{e}_\rho) \Big|_{\rho=a} = \vec{e}_z \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 a} J_0(a^2 - a^2) = 0$$

在磁介质圆筒外表面上

$$\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \vec{e}_n \Big|_{\rho=b} = \vec{M} \times \vec{e}_\rho \Big|_{\rho=b} = -\vec{e}_z \frac{\mu - \mu_0}{2\mu_0 b} J_0(b^2 - a^2)$$



小 结

- 媒质中磁场的基本方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = I \\ \oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

(微分形式)

(积分形式)

- 线性各向同性媒质的本构关系

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

- 磁化强度矢量 $\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{H} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu}\right) \vec{B}$

- 媒质中的磁化电流密度

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \quad \vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \vec{e}_n$$

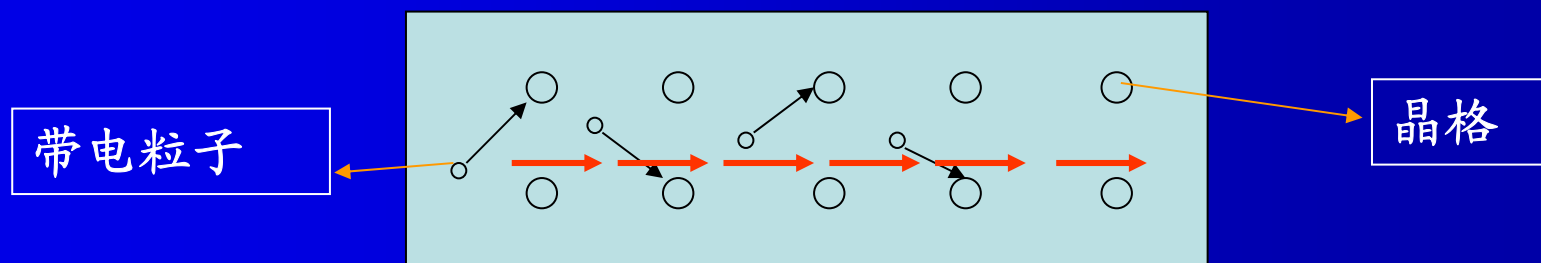
- 线性、各向同性的均匀媒质中

$$\vec{J}_M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{J}$$



2.4.3 媒质的传导特性

存在可以自由移动带电粒子的介质称为**导电媒质**。在外场作用下，导电媒质中将形成定向移动电流。



对于线性和各向同性导电媒质，媒质内任一点的电流密度矢量 \vec{J} 和电场强度 \vec{E} 成正比，表示为

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

这就是欧姆定律的微分形式。式中的比例系数 σ 称为媒质的电导率，单位是S/m（西/米）。



2.5 电磁感应定律和位移电流

- 电磁感应定律 —— 揭示时变磁场产生电场。
- 位移电流 —— 揭示时变电场产生磁场。
- 重要结论：在时变情况下，电场与磁场相互激励，形成统一的电磁场。

本节内容

2.5.1 电磁感应定律

2.5.2 位移电流



2.5.1 电磁感应定律

● 电磁感应现象

当穿过的导体回路中磁通量发生变化时，回路中就会出现感应电流。

● 法拉第电磁感应定律

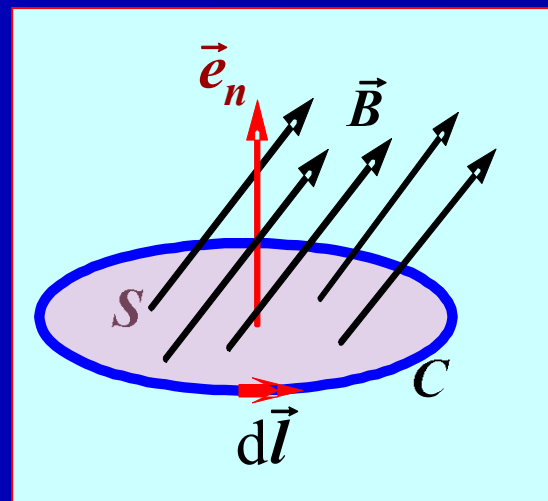
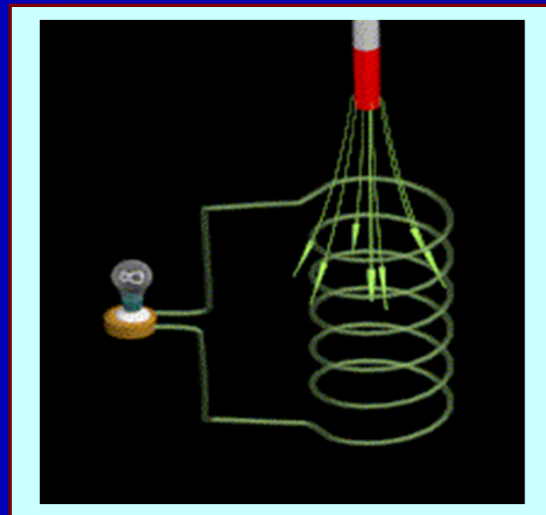
$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad \text{或} \quad \oint_C \vec{E}_{\text{in}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$\mathcal{E}_{\text{in}} = \oint_C \vec{E}_{\text{in}} \cdot d\vec{l}$ ——导体回路中的感应电动势

$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ——穿过导体回路的磁通

物理意义：

回路中的感应电动势的大小等于磁通量的时间变化率的负值，负号表示感应电流产生的磁场总是阻止磁通量的变化。



■ 对感应电场的讨论

- 感应电场是由变化的磁场所激发的电场。
- 感应电场是有旋场。
- 感应电场不仅存在于导体回路中，也存在于导体回路之外的空间。
- 对空间中的任意回路（不一定是导体回路） C ，都有

$$\oint_C \vec{E}_{\text{in}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- 若空间同时存在由电荷产生的电场 \vec{E}_c ，则总电场 \vec{E} 应为 \vec{E}_{in} 与 \vec{E}_c 之和，即 $\vec{E} = \vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_c$ 。由于 $\oint_C \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ ，故有

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

推广的法拉第
电磁感应定律

- 引起回路中磁通变化的几种情况

- (1) 回路不变，磁场随时间变化

磁通量的变化由磁场随时间变化引起，因此有

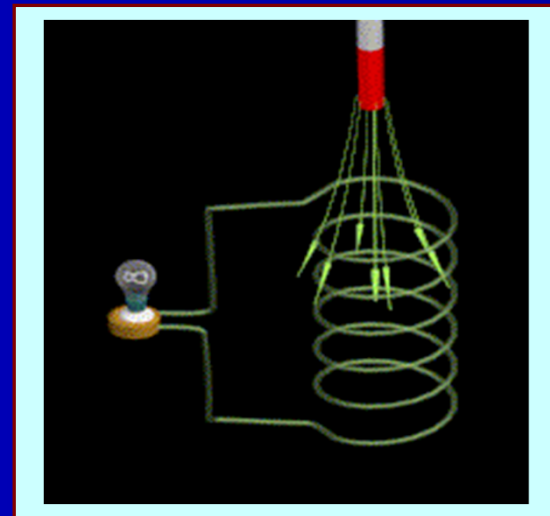
$$\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \varepsilon_{\text{in}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

感生电动势

相应的微分形式为

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

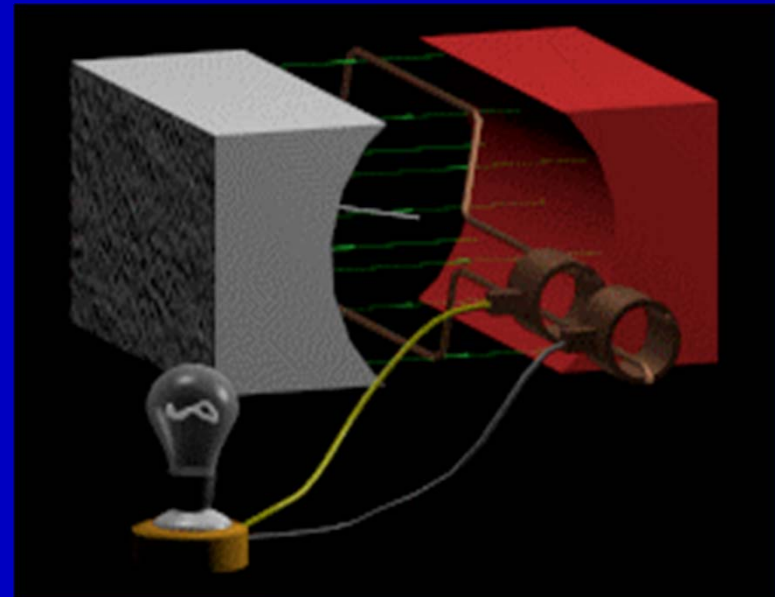
时变磁场产生电场



(2) 导体回路在恒定磁场中运动

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

动生电动势



(3) 导体回路在时变磁场中运动

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



例 2.5.1 长为 a 、宽为 b 的矩形环中有均匀磁场 \vec{B} 垂直穿过，如图所示。在以下三种情况下，求矩形环内的感应电动势。

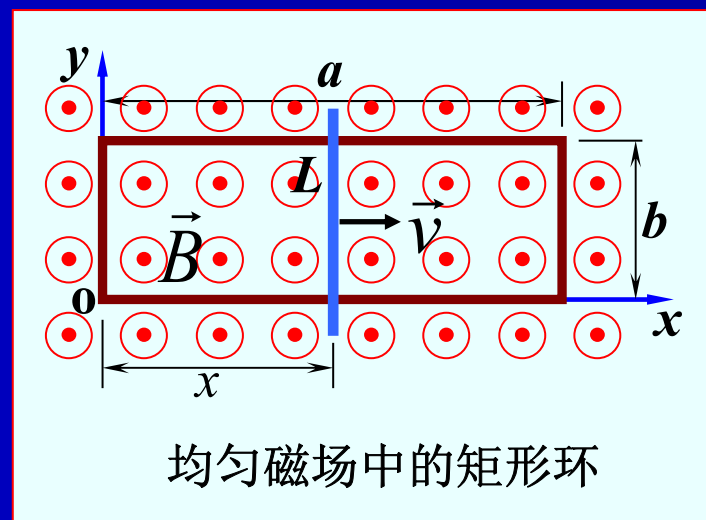
(1) $\vec{B} = \vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)$ ，矩形回路静止；

(2) $\vec{B} = \vec{e}_z B_0$ ，矩形回路的宽边 $b = \text{常数}$ ，但其长边因可滑动导体 L 以匀速 $\vec{v} = \vec{e}_x v$ 运动而随时间增大；

(3) $\vec{B} = \vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)$ ，且矩形回路上的可滑动导体 L 以匀速 $\vec{v} = \vec{e}_x v$ 运动。

解：(1) 均匀磁场 \vec{B} 随时间作简谐变化，而回路静止，因而回路内的感应电动势是由磁场变化产生的，故

$$\varepsilon_{\text{in}} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} [\vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)] \cdot \vec{e}_z dS = \omega ab B_0 \sin(\omega t)$$



(2) 均匀磁场 \vec{B} 为恒定磁场，而回路上的可滑动导体以匀速运动，因而回路内的感应电动势全部是由导体 L 在磁场中运动产生的，故得

$$\varepsilon_{\text{in}} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{e}_x v \times \vec{e}_z B_0) \cdot \vec{e}_y dl = -v b B_0$$

或

$$\varepsilon_{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} (b B_0 v t) = -b B_0 v$$

(3) 矩形回路中的感应电动势是由磁场变化以及可滑动导体 L 在磁场中运动产生的，故得

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{in}} &= \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_C [\vec{e}_x v \times \vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)] \cdot \vec{e}_y dl - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} [\vec{e}_z B_0 \cos(\omega t)] \cdot \vec{e}_z dS \\ &= v t \omega b B_0 \sin(\omega t) - v b B_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$



2.5.2 位移电流

静态情况下的电场基本方程在非静态时发生了变化，即

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{👉} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

法拉第电磁
感应定律

这不仅是方程形式的变化，而是一个本质的变化，其中包含了重要的物理事实，即 **时变磁场可以激发电场**。

问题：随时间变化的磁场要产生电场，那么随时间变化的电场是否会产生磁场？

在时变情况下，**安培环路定理**是否要发生变化？有什么变化？即

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

(恒定磁场)



$$\nabla \times \vec{H} = ?$$

(时变场)



1. 全电流定律

非时变情况下，电荷分布随时间变化，由电流连续性方程有

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

发生矛盾

而由 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \longrightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$

在时变的情况下不适用

■ 解决办法：对安培环路定理进行修正

$$\text{由 } \nabla \cdot \vec{D} = \rho \longrightarrow \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) \longrightarrow \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

将 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ 修正为： $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

矛盾解决

时变电场会激发磁场



全电流定律:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{—— 微分形式}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \text{—— 积分形式}$$

全电流定律揭示不仅传导电流激发磁场，变化的电场也可以激发磁场。它与变化的磁场激发电场形成自然界的一个对偶关系。



2. 位移电流密度

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

□ 电位移矢量随时间的变化率，能像电流一样产生磁场，故称“位移电流”。

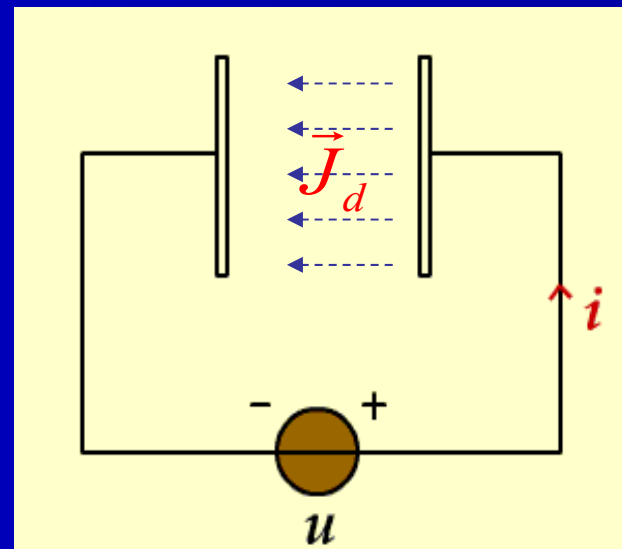
□ 变化的电场会激发磁场，这就是位移电流的物理意义。

□ 位移电流是一种假想电流，由麦克斯韦用数学方法引入，它深刻揭示了时变电场产生磁场这一重要的物理概念，由此建立了麦克斯韦方程组，奠定了电磁理论的基础。

注：在绝缘介质中，无传导电流，但有位移电流。

在理想导体中，无位移电流，但有传导电流。

在一般介质中，既有传导电流，又有位移电流。



例 2.5.3 海水的电导率为 4 S/m ，相对介电常数为 81 ，求频率为 1 MHz 时，位移电流振幅与传导电流振幅的比值。

解：设电场随时间作正弦变化，表示为

$$\vec{E} = \vec{e}_x E_m \cos \omega t$$

则位移电流密度为 $\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{e}_x \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_m \sin(\omega t)$

其振幅值为 $J_{dm} = \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r E_m = 4.5 \times 10^{-3} E_m$

传导电流的振幅值为 $J_{cm} = \sigma E_m = 4 E_m$

故 $\frac{J_{dm}}{J_{cm}} = 1.125 \times 10^{-3}$



例 2.5.4 自由空间的磁场强度为

$$\vec{H} = \vec{e}_x H_m \cos(\omega t - kz) \quad (\text{A/m})$$

式中的 k 为常数。试求：位移电流密度和电场强度。

解 自由空间的传导电流密度为0，故由式 $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ，得

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} = (\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \times \vec{e}_x H_x$$

$$= \vec{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} = \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial z} [H_m \cos(\omega t - kz)]$$

$$= \vec{e}_y k H_m \sin(\omega t - kz) \quad (\text{A/m}^2)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dt = \frac{1}{\epsilon_0} \int \vec{e}_y k H_m \sin(\omega t - kz) dt$$

$$= -\vec{e}_y \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_m \cos(\omega t - kz) \quad (\text{V/m})$$



2.6 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组——宏观电磁现象所遵循的基本规律，是电磁场的基本方程。

本节内容

2.6.1 麦克斯韦方程组的积分形式

2.6.2 麦克斯韦方程组的微分形式

2.6.3 媒质的本构关系



2.6.1 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \end{array} \right.$$

磁场强度沿任意闭合曲线的环量，等于穿过以该闭合曲线为周界的任意曲面的传导电流与位移电流之和。

电场强度沿任意闭合曲线的环量，等于穿过以该闭合曲线为周界的任一曲面的磁通量变化率的负值

穿过任意闭合曲面的磁感应强度的通量恒等于零

穿过任意闭合曲面的电位移的通量等于该闭合面所包围的自由电荷的代数和



2.6.2 麦克斯韦方程组的微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

麦克斯韦第一方程，表明传导电流和变化的电场都能产生磁场

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right.$$

麦克斯韦第二方程，表明变化的磁场产生电场

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

麦克斯韦第三方程表明磁场是无源场，磁感线总是闭合曲线

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

麦克斯韦第四方程，表明电荷产生电场

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



2.6.3 媒质的本构关系

各向同性线性媒质的本构关系为

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

代入麦克斯韦方程组中，有

限定形式的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \vec{E}) \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{H}) \\ \nabla \cdot (\mu \vec{H}) = 0 \\ \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \rho \end{cases}$$



(均匀、时
不变媒质)

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon \end{cases}$$

- 时变电场的激发源除了电荷以外，还有变化的磁场；而时变磁场的激发源除了传导电流以外，还有变化的电场。
- 电场和磁场互为激发源，相互激发。
- 时变电磁场的电场和磁场不再相互独立，而是相互关联，构成一个整体 —— 电磁场。电场和磁场分别是电磁场的两个分量。
- 在离开辐射源（如天线）的无源空间中，电荷密度和电流密度矢量为零，电场和磁场仍然可以相互激发，从而在空间形成电磁振荡并传播，这就是电磁波。



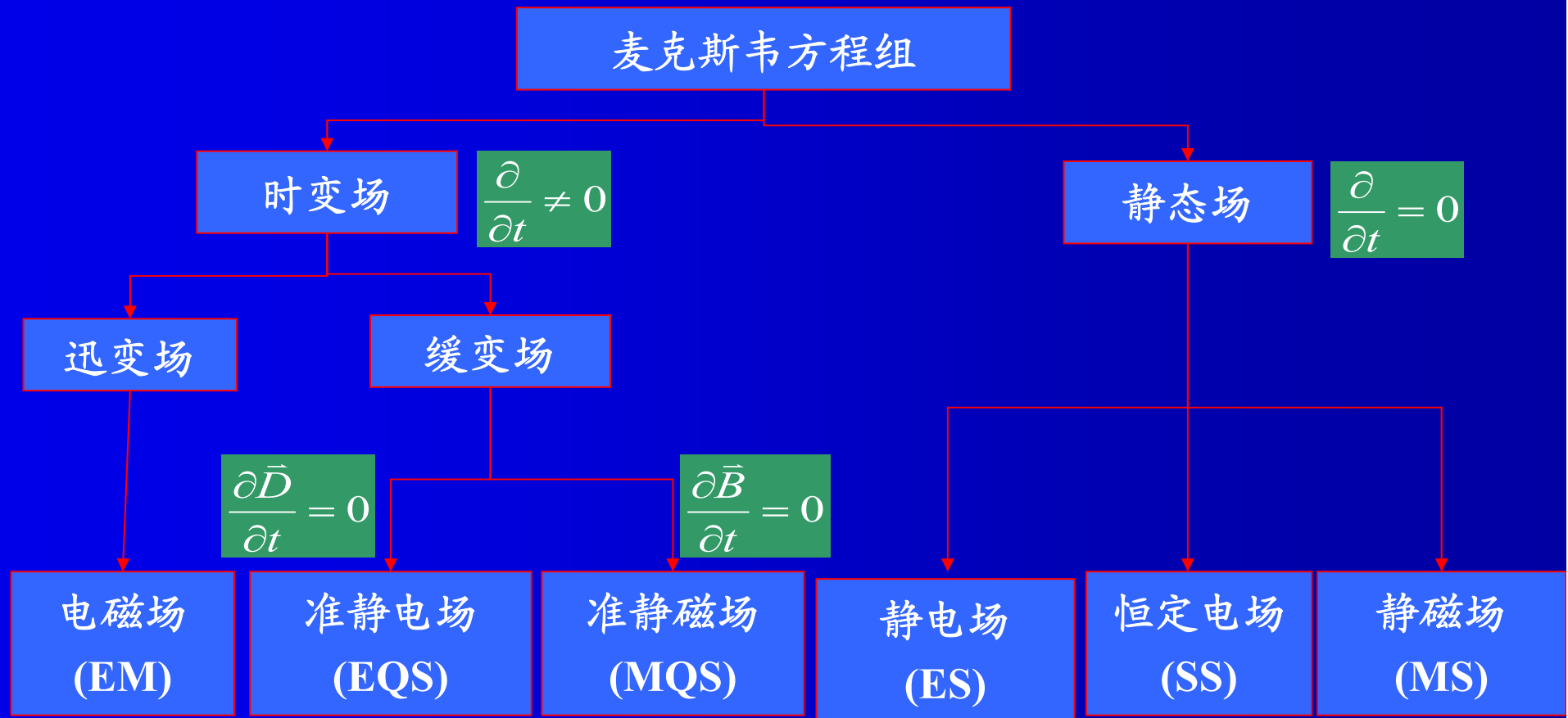
- 麦克斯韦方程组预言了电磁波的存在，且已被“赫兹实验”证实。
- 在无源空间中，两个旋度方程分别为

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

可以看到两个方程的右边相差一个负号，而正是这个负号使得电场和磁场构成一个相互激励又相互制约的关系。当磁场减小时，电场的旋涡源为正，电场将增大；而当电场增大时，使磁场增大，磁场增大反过来又使电场减小。



小结：麦克斯韦方程适用范围：一切宏观电磁现象。



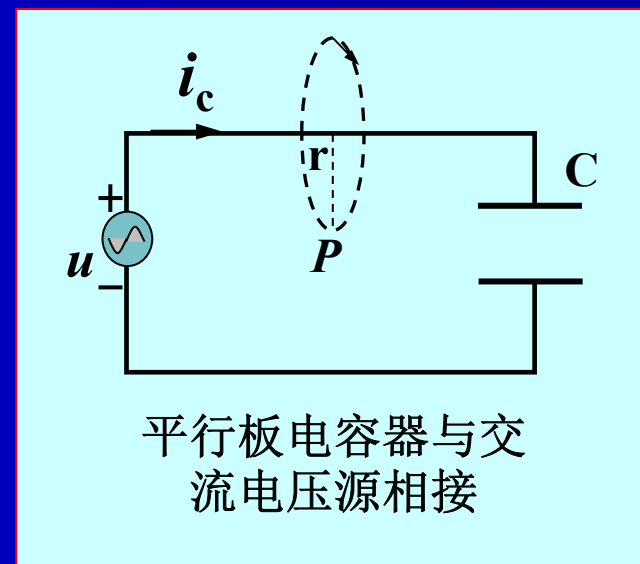
例 2.6.1 正弦交流电压源 $u = U_m \sin \omega t$ 连接到平行板电容器的两个极板上，如图所示。(1) 证明电容器两极板间的位移电流与连接导线中的传导电流相等；(2) 求导线附近距离连接导线为 r 处的磁场强度。

解：(1) 导线中的传导电流为

$$\begin{aligned} i_c &= C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} [U_m \sin(\omega t)] \\ &= C \omega U_m \cos(\omega t) \end{aligned}$$

忽略边缘效应时，间距为 d 的两平行板之间的电场为 $E = u/d$ ，则

$$D = \varepsilon E = \frac{\varepsilon U_m \sin(\omega t)}{d}$$



则极板间的位移电流为

$$\begin{aligned} i_d &= \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS \\ &= \frac{\varepsilon U_m \omega}{d} \cos(\omega t) S_0 = C \omega U_m \cos(\omega t) = i_c \end{aligned}$$

式中的 S_0 为极板的面积，而 $\frac{\varepsilon S_0}{d} = C$ 为平行板电容器的电容。

(2) 以 r 为半径作闭合曲线 C ，由于连接导线本身的轴对称性，使得沿闭合线的磁场相等，故

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H_\phi$$

与闭合线铰链的只有导线中的传导电流 $i_c = C \omega U_m \cos(\omega t)$ ，故得

$$2\pi r H_\phi = C \omega U_m \cos(\omega t)$$

$$\longrightarrow \vec{H} = \vec{e}_\phi H_\phi = \vec{e}_\phi \frac{C \omega U_m}{2\pi r} \cos(\omega t)$$



2.7 电磁场的边界条件

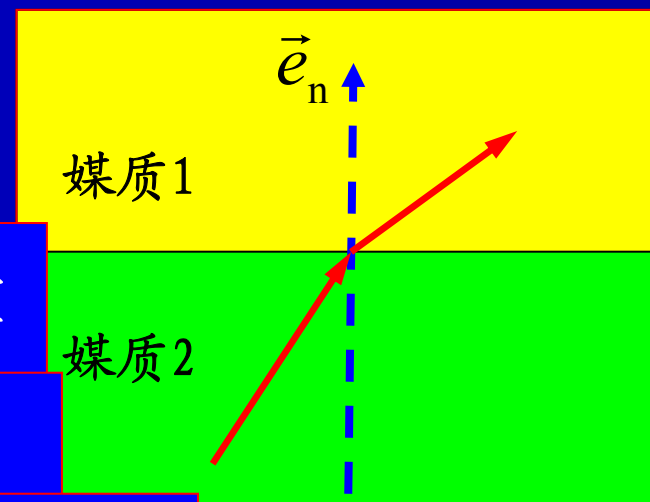
- 什么是电磁场的边界条件？

实际电磁场问题都是在一定的物理空

物理：由于在分界面两侧介质的特性参

数学：麦克斯韦方程组的解是不确定的，
边界

麦克斯韦方程组的积分形式在不同媒质的分界面上仍然适用，由此可导出电磁场矢量在不同媒质分界面上的边界条件。



本节内容

2.7.1 边界条件一般表达式

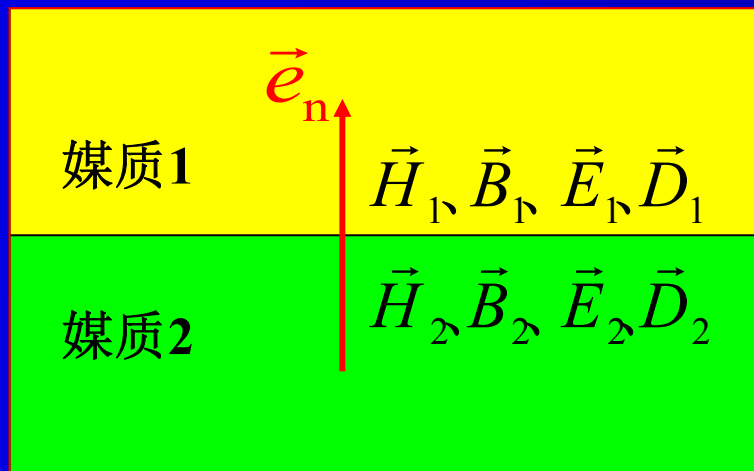
2.7.2 两种常见的情况



2.7.1 边界条件的一般表达式

分界面上的面电流密度

$$\left\{ \begin{array}{ll} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} & \longrightarrow \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} & \longrightarrow \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 & \longrightarrow \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV & \longrightarrow \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \end{array} \right.$$



分界面上的电荷面密度

■ 边界条件的推证

(1) 电磁场量的法向边界条件

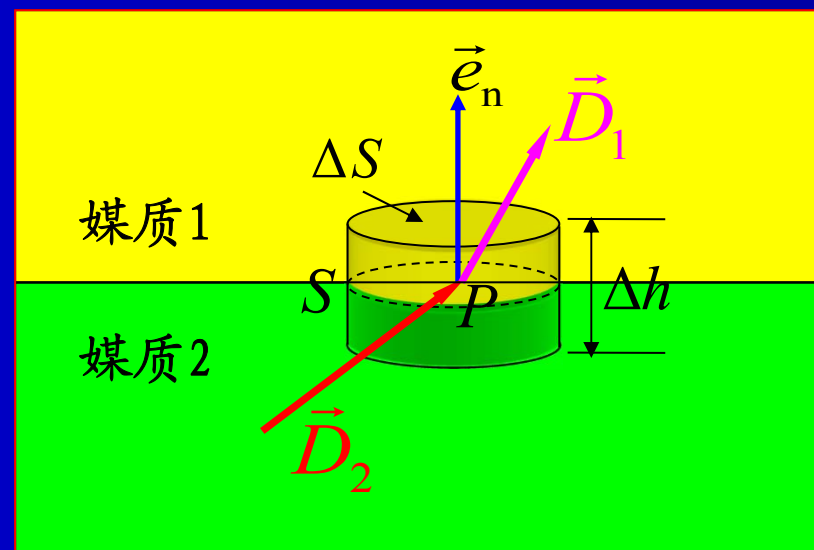
在两种媒质的交界面上任取一点 P ，作一个包围点 P 的扁平圆柱曲面 S ，如图表示。

令 $\Delta h \rightarrow 0$ ，则由

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV \longrightarrow (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{e}_n \Delta S = \rho_S \Delta S$$

即 $\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S$ 或 $D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$

同理，由 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \longrightarrow \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ 或 $B_{1n} = B_{2n}$

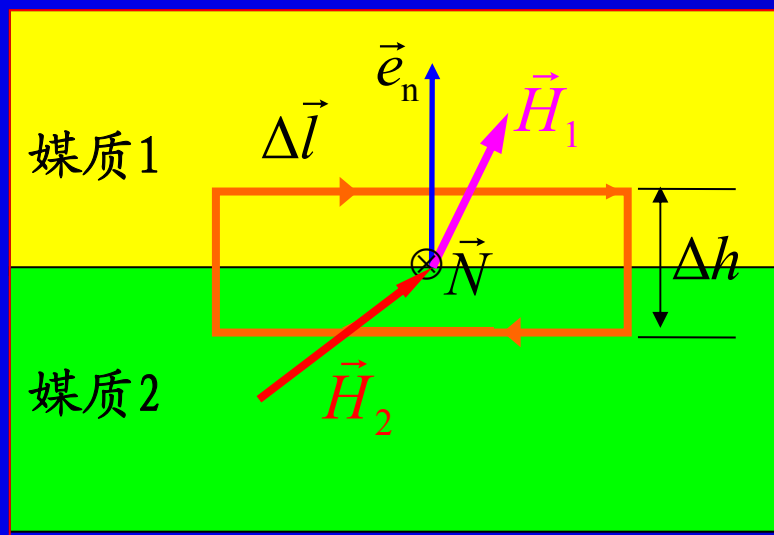


(2) 电磁场量的切向边界条件

在介质分界面两侧，选取如图所示的小环路，令 $\Delta h \rightarrow 0$ ，则由

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \longrightarrow (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \Delta \vec{l} = \vec{J}_S \cdot \vec{N} \Delta l$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{l} &= \vec{N} \times \vec{e}_n \Delta l \longrightarrow (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \Delta \vec{l} = (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\vec{N} \times \vec{e}_n) \Delta l \\ &= [\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)] \cdot \vec{N} \Delta l \end{aligned}$$



故得 $\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$

或 $H_{1t} - H_{2t} = J_S$

同理得 $\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

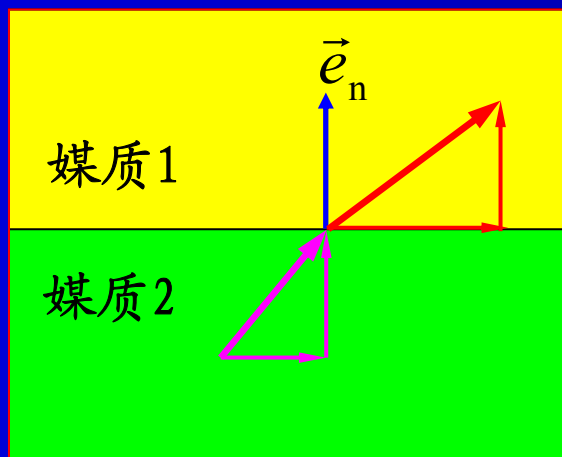
或 $E_{1t} = E_{2t}$



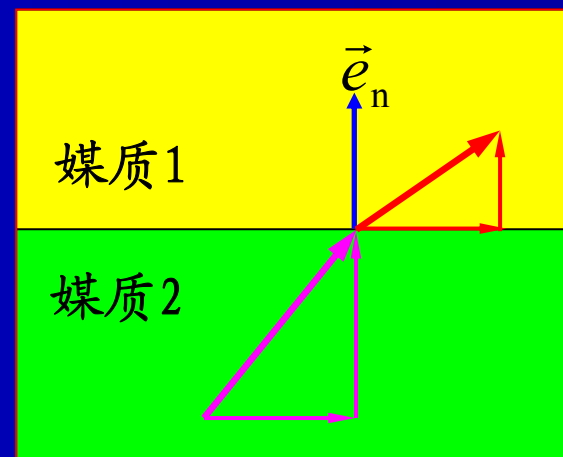
2.7.2 两种常见的情况

1. 两种理想介质分界面上的边界条件

在两种理想介质分界面上，通常没有电荷和电流分布，即 $J_S = 0$ 、 $\rho_S = 0$ ，故



\vec{D} \vec{B} 的法向分量连续



\vec{E} \vec{H} 的切向分量连续

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases}$$

👉 \vec{D} 的法向分量连续

👉 \vec{B} 的法向分量连续

👉 \vec{E} 的切向分量连续

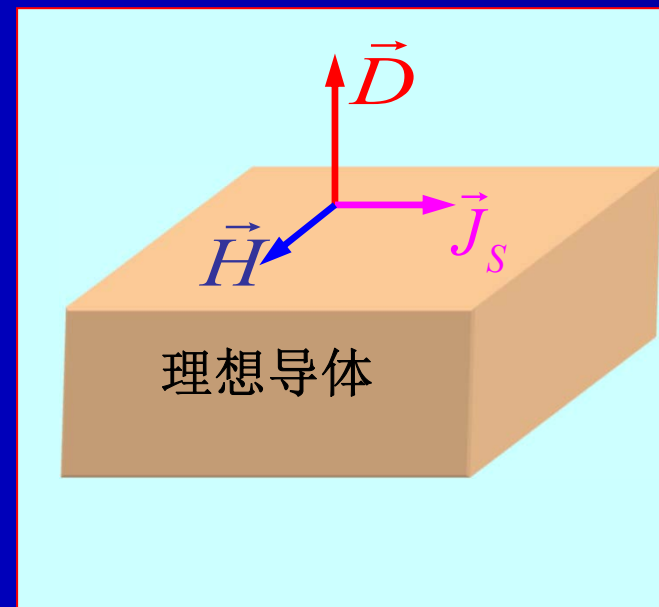
👉 \vec{H} 的切向分量连续



2. 理想导体表面上的边界条件

- 理想导体：电导率为无限大的导电媒质
- 特征：电磁场不可能进入理想导体内
- 理想导体表面上的边界条件

设媒质2为理想导体，则 E_2 、 D_2 、 H_2 、 B_2 均为零，故



$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot \vec{D} = \rho_s \\ \vec{e}_n \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \\ \vec{e}_n \times \vec{H} = \vec{J}_s \end{cases}$$

👉 理想导体表面上的电荷密度等于 \vec{D} 的法向分量

👉 理想导体表面上 \vec{B} 的法向分量为0

👉 理想导体表面上 \vec{E} 的切向分量为0

👉 理想导体表面上的电流密度等于 \vec{H} 的切向分量

例 2.7.1 如图所示, 1区的媒质参数为 $\varepsilon_1 = 5\varepsilon_0$ 、 $\mu_1 = \mu_0$ 、 $\sigma_1 = 0$, 2区的媒质参数为 $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ 、 $\mu_2 = \mu_0$ 、 $\sigma_2 = 0$ 。若已知自由空间的电场强度为

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_x 2y + \vec{e}_y 5z + \vec{e}_z (3 + z) \quad \text{V/m}$$

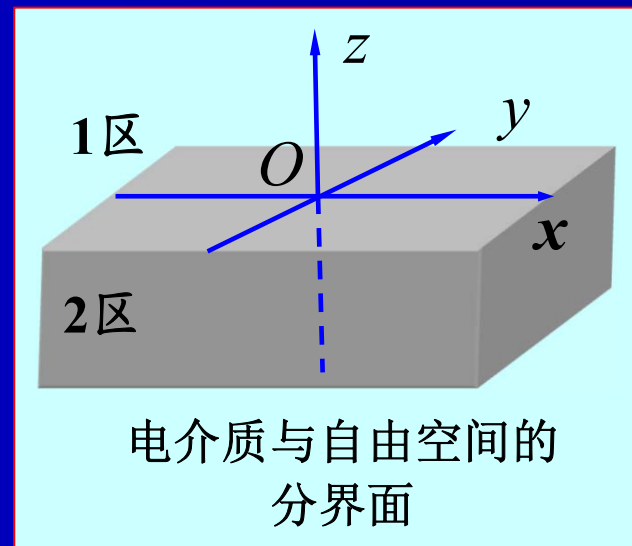
试问关于1区中的 \vec{E}_1 和 \vec{D}_1 能求得出吗?

解 根据边界条件, 只能求得边界面 $z=0$ 处的 \vec{E}_1 和 \vec{D}_1 。

由 $\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$, 有

$$\begin{aligned} & \vec{e}_z \times \{ \vec{e}_x E_{1x} + \vec{e}_y E_{1y} + \vec{e}_z E_{1z} - [\vec{e}_x 2y + \vec{e}_y 5x + \vec{e}_z (3 + z)] \} \Big|_{z=0} \\ &= \vec{e}_y (E_{1x} - 2y) - \vec{e}_x (E_{1y} - 5x) = 0 \end{aligned}$$

则得 $E_{1x} = 2y, \quad E_{1y} = 5x$



$$D_{1x} = \varepsilon_1 E_{1x} = 10\varepsilon_0 y, \quad D_{1y} = \varepsilon_1 E_{1y} = 25\varepsilon_0 x$$

又由 $\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0$ ，有

$$\vec{e}_z \cdot [\vec{e}_x D_{1x} + \vec{e}_y D_{1y} + \vec{e}_z D_{1z} - (\vec{e}_x D_{2x} + \vec{e}_y D_{2y} + \vec{e}_z D_{2z})]_{z=0} = 0$$

则得

$$D_{1z}|_{z=0} = D_{2z}|_{z=0} = \varepsilon_0(3+z)|_{z=0} = 3\varepsilon_0$$

$$E_{1z}|_{z=0} = \frac{D_{1z}}{\varepsilon_1}|_{z=0} = \frac{3\varepsilon_0}{5\varepsilon_0} = \frac{3}{5}$$

最后得到 $\vec{E}_1(x, y, 0) = \vec{e}_x 2y + \vec{e}_y 5x + \vec{e}_z \frac{3}{5}$

$$\vec{D}_1(x, y, 0) = \vec{e}_x 10\varepsilon_0 y + \vec{e}_y 25\varepsilon_0 x + \vec{e}_z 3\varepsilon_0$$



例2.7.2 在两导体平板 ($z=0$ 和 $z=d$) 之间的空气中, 已知电场强度

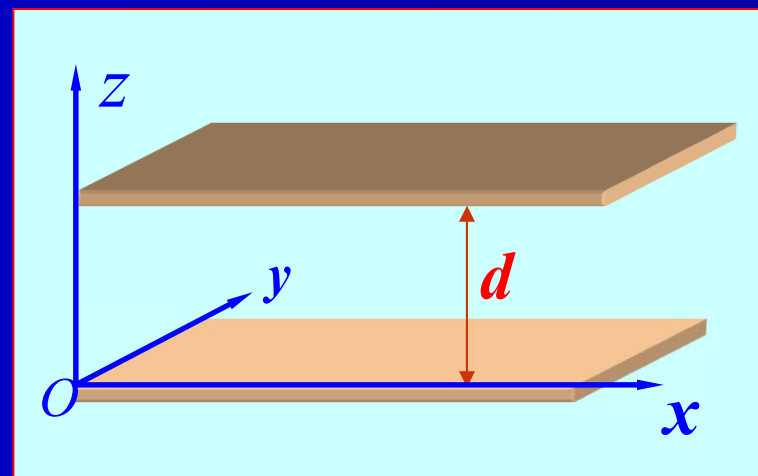
$$\vec{E} = \vec{e}_y E_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) \quad \text{V/m}$$

试求: (1) 磁场强度 \vec{H} ; (2) 导体表面的电流密度 \vec{J}_S 。

解 (1) 由 $\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{E} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \left(-\vec{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{E_0}{\mu_0} \left[\vec{e}_x \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) - \vec{e}_z k_x \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) \right]$$



将上式对时间 t 积分, 得

$$\begin{aligned}\vec{H}(x, z, t) &= \int \frac{\partial \vec{H}(x, z, t)}{\partial t} dt \\ &= \vec{e}_x \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) + \\ &\quad \vec{e}_z \frac{k_x E_0}{\omega \mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) \quad (\text{A/m})\end{aligned}$$

(2) $z=0$ 处导体表面的电流密度为

$$\vec{J}_S = \vec{e}_z \times \vec{H} \Big|_{z=0} = \vec{e}_y \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \sin(\omega t - k_x x) \quad (\text{A/m})$$

$z=d$ 处导体表面的电流密度为

$$\vec{J}_S = (-\vec{e}_z) \times \vec{H} \Big|_{z=d} = \vec{e}_y \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \sin(\omega t - k_x x) \quad (\text{A/m})$$

