

# 第3章 静态电磁场及其边值问题的解



- 静态电磁场：场量不随时间变化，包括：  
    静电场、恒定电场和恒定磁场
- 时变情况下，电场和磁场相互关联，构成统一的电磁场
- 静态情况下，电场和磁场由各自的源激发，且相互独立

## 本章内容

3.1 静电场分析

3.2 导电媒质中的恒定电场分析

3.3 恒定磁场分析

3.4 静态场的边值问题及解的惟一性定理



## 3.1 静电场分析

### 本节内容

- 3.1.1 静电场的基本方程和边界条件
- 3.1.2 电位函数
- 3.1.3 导体系统的电容与部分电容
- 3.1.4 静电场的能量



### 3.1.1 静电场的基本方程和边界条件

#### 1. 基本方程

微分形式: 
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$
 积分形式: 
$$\begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

本构关系:  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

2. 边界条件 
$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \end{cases}$$
 或 
$$\begin{cases} D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \\ E_{1t} - E_{2t} = 0 \end{cases}$$

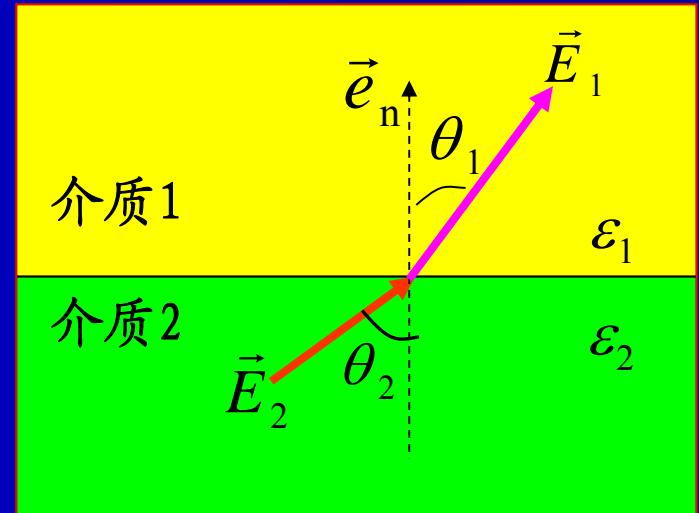
若分界面上不存在面电荷, 即  $\rho_s = 0$ , 则

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \end{cases}$$
 或 
$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases}$$



## ■ 场矢量的折射关系

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{\epsilon_1 / D_{1n}}{\epsilon_2 / D_{2n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$



## ■ 导体表面的边界条件

在静电平衡的情况下，导体内部的电场为0，则导体表面的边界条件为

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot \vec{D} = \rho_s \\ \vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} D_n = \rho_s \\ E_t = 0 \end{cases}$$



### 3.1.2 电位函数

#### 1. 电位函数的定义

$$\text{由 } \nabla \times \vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$$

即静电场可以用一个标量函数的梯度来表示，标量函数  $\varphi$  称为静  
电场的标量电位或简称电位。



## 2. 电位的表达式

对于连续的体分布电荷，由

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \nabla \left( \frac{1}{R} \right) dV'$$

$$= -\nabla \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \left( \frac{1}{R} \right) dV' \right]$$

$$\nabla \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

故得  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + C$

同理得，面电荷的电位：  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}')}{R^3} dS' + C$

线电荷的电位：  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_l(\vec{r}')}{R} dl' + C$

点电荷的电位：  $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + C$



### 3. 电位差

将  $\vec{E} = -\nabla\varphi$  两端点乘  $d\vec{l}$ , 则有

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\nabla\varphi \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = -d\varphi$$

上式两边从点  $P$  到点  $Q$  沿任意路径进行积分, 得

电场力做  
的功

$$\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_P^Q d\varphi = [\varphi(P) - \varphi(Q)]$$

$P$ 、 $Q$  两点间的电位差



关于电位差的说明

- $P$ 、 $Q$  两点间的电位差等于电场力将单位正电荷从  $P$  点移至  $Q$  点所做的功, 电场力使单位正电荷由高电位处移到低电位处。
- 电位差也称为电压, 可用  $U$  表示。
- 电位差有确定值, 只与首尾两点位置有关, 与积分路径无关。



#### 4. 电位参考点

静电位不惟一，可以相差一个常数，即

$$\varphi' = \varphi + C \Rightarrow \nabla \varphi' = \nabla(\varphi + C) = \nabla \varphi$$

为使空间各点电位具有确定值，可以选定空间某一点作为参考点，且令参考点的电位为零，由于空间各点与参考点的电位差为确定值，所以该点的电位也就具有确定值，即



- 选择电位参考点的原则
  - 应使电位表达式有意义。
  - 应使电位表达式最简单。若电荷分布在有限区域，通常取无限远作电位参考点。
  - 同一个问题只能有一个参考点。



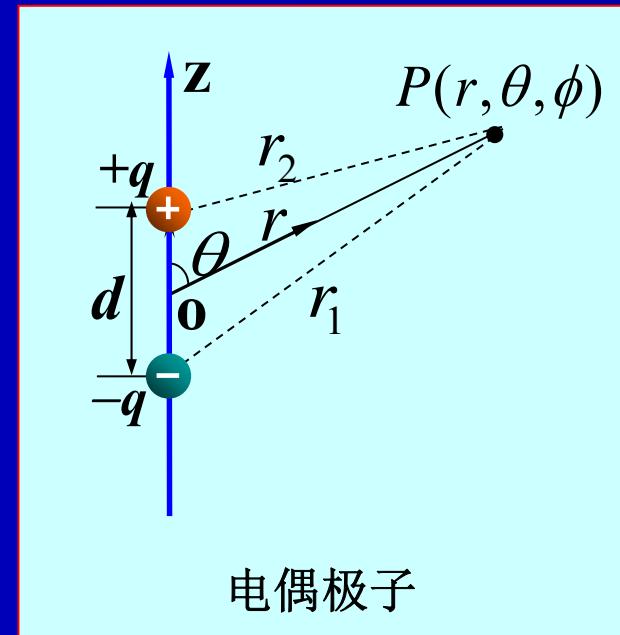
例 3.1.1 求电偶极子的电位。

解 在球坐标系中

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 - rd \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 + rd \cos \theta}$$



用二项式展开，由于  $r \gg d$ ，得  $r_1 = r - \frac{d}{2} \cos \theta$ ,  $r_2 = r + \frac{d}{2} \cos \theta$

代入上式，得  $\varphi(\vec{r}) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

$\vec{p} = qd$  表示电偶极矩，方向由负电荷指向正电荷。

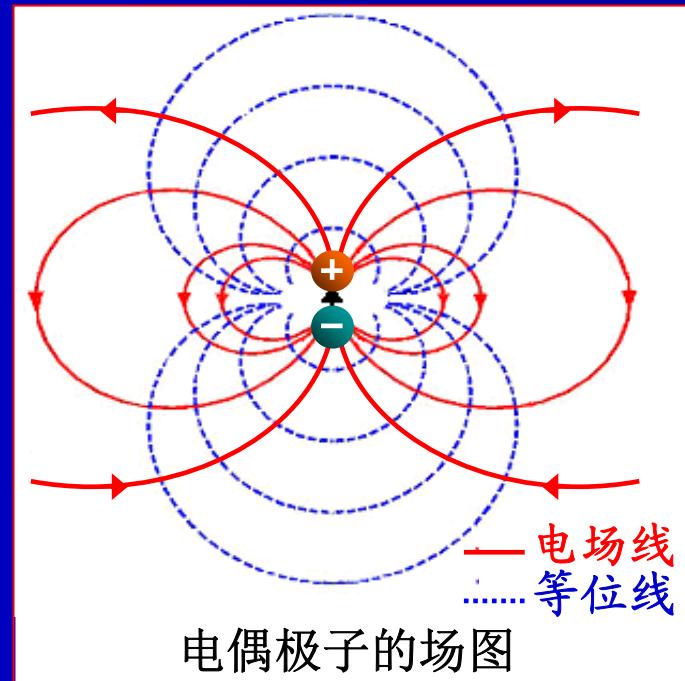


由球坐标系中的梯度公式，可得到电偶极子的远区电场强度

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla \varphi = -\left(\vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{e}_r 2 \cos \theta + \vec{e}_\theta \sin \theta)\end{aligned}$$

- 等位线方程：

$$\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = C \rightarrow r^2 = C' \cos \theta$$

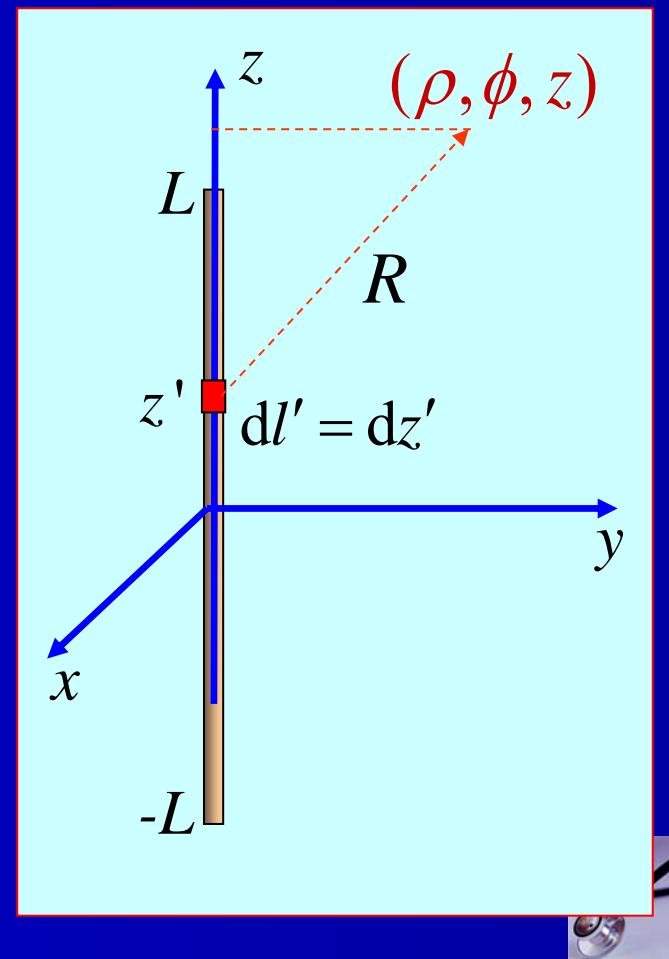


电偶极子的场图

例3.1.2 求长度为 $2L$ 、电荷线密度为 $\rho_{l0}$ 的均匀带电线的电位。

解 采用圆柱坐标系，令线电荷与 $z$ 轴相重合，中点位于坐标原点。由于轴对称性，电位与 $\phi$ 无关。在带电线上位于 $z'$ 处的线元  $dl' = dz'$ ，它到点  $P(\rho, \phi, z)$  的距离  $R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ ，则

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}') &= \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} dz' \\ &= \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln[z' - z + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}] \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (z - L)^2} - (z - L)}{\sqrt{\rho^2 + (z + L)^2} - (z + L)}\end{aligned}$$



在上式中若令  $L \rightarrow \infty$ , 则可得到无限长直线电荷的电位。当  $L \gg R$  时, 上式可写为

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + L^2} + L}{\sqrt{\rho^2 + L^2} - L} = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + L^2} + L}{\rho} \approx \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L}{\rho}$$

当  $L \rightarrow \infty$  时, 上式变为无穷大, 这是因为电荷不是分布在有限区域内, 而将电位参考点选在无穷远点之故。这时可在上式中加上一个任意常数, 则有

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L}{\rho} + C$$

并选择有限远处为电位参考点。例如, 选择  $\rho = a$  的点为电位参考点, 则有

$$C = -\frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L}{a} \quad \longrightarrow \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho}$$



## 5. 电位的微分方程

在均匀介质中，有

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon \\ \vec{E} = -\nabla \varphi \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon}$$

标量泊松方程

$$\text{在无源区域, } \rho = 0 \rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

拉普拉斯方程



## 6. 静电位的边界条件

设 $P_1$ 和 $P_2$ 是介质分界面两侧紧贴界面的相邻两点，其电位分别为 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 。当两点间距离 $\Delta l \rightarrow 0$ 时

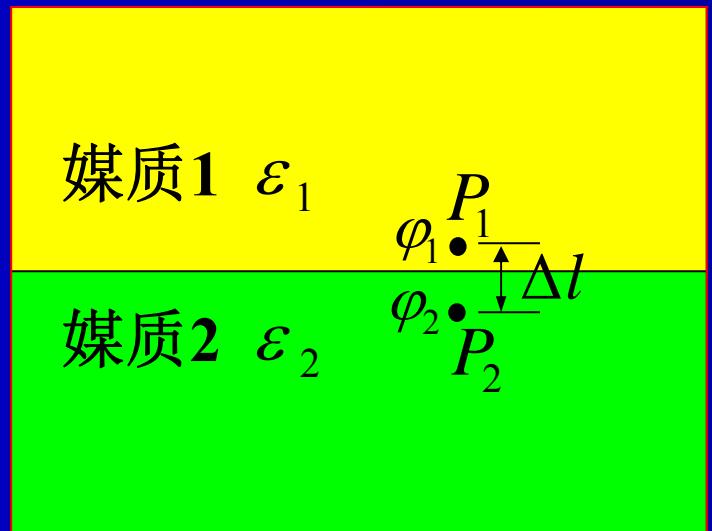
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

由  $\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$  和  $\vec{D} = -\varepsilon \nabla \varphi$

$$\rightarrow \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_s$$

- 若介质分界面上无自由电荷，即 $\rho_s = 0 \rightarrow \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$
- 导体表面上电位的边界条件：  $\varphi = \text{常数}$ ,  $\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\rho_s$



## 小结

定义:  $\vec{E} = -\nabla \varphi \longleftrightarrow \varphi(P) = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$

方程:  $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon$      $\nabla^2 \varphi = 0$

计算式:  $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_q \frac{1}{R} dq(\vec{r}')$

边界条件:  $\varphi_1 = \varphi_2$      $\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_s$  (一般形式)

$\varphi_1 = \varphi_2$      $\epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$  (电介质分界面)

$\varphi = \text{常数},$      $\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\rho_s$  (导体表面)



例3.1.3 两块无限大接地导体平板分别置于  $x = 0$  和  $x = a$  处，在两板之间的  $x = b$  处有一面密度为  $\rho_{S0}$  的均匀电荷分布，如图所示。求两导体平板之间的电位和电场。

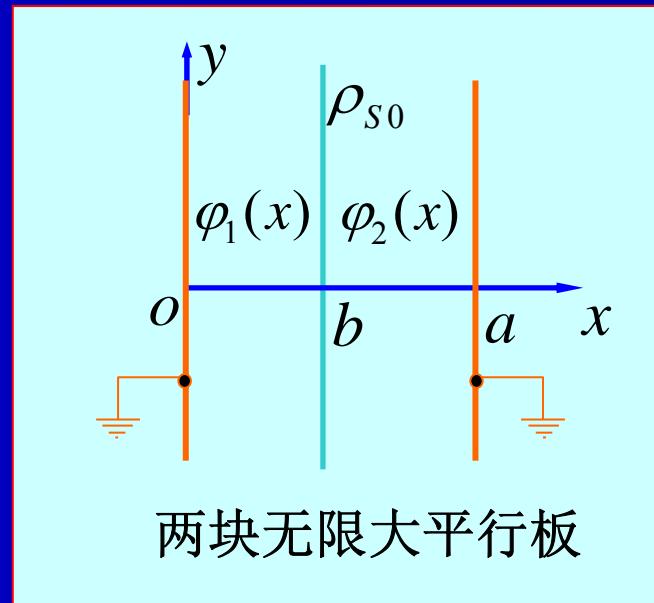
解 在两块无限大接地导体平板之间，除  $x = b$  处有均匀面电荷分布外，其余空间均无电荷分布，故电位函数满足一维拉普拉斯方程

$$\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} = 0, \quad (0 < x < b)$$

$$\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} = 0, \quad (b < x < a)$$

方程的解为  $\varphi_1(x) = C_1x + D_1$

$$\varphi_2(x) = C_2x + D_2$$



两块无限大平行板

利用边界条件，有

$$x=0 \text{ 处}, \varphi_1(0)=0$$

$$x=a \text{ 处}, \varphi_2(a)=0$$

$$x=b \text{ 处}, \varphi_1(b)=\varphi_2(b),$$

$$\left[ \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \right]_{x=b} = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}$$

$$\text{所以 } D_1 = 0$$

$$C_2 a + D_2 = 0$$

$$C_1 b + D_1 = C_2 b + D_2$$

$$C_2 - C_1 = -\frac{\rho_{s0}}{\epsilon_0}$$

由此解得

$$C_1 = -\frac{\rho_{s0}(b-a)}{\epsilon_0 a}, \quad D_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{\rho_{s0}b}{\epsilon_0 a}, \quad D_2 = \frac{\rho_{s0}b}{\epsilon_0}$$

最后得

$$\varphi_1(x) = \frac{\rho_{s0}(a-b)}{\epsilon_0 a} x, \quad (0 \leq x \leq b)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\rho_{s0}b}{\epsilon_0 a} (a-x), \quad (b \leq x \leq a)$$

$$\vec{E}_1(x) = -\nabla \varphi_1(x) = -\vec{e}_x \frac{\rho_{s0}(a-b)}{\epsilon_0 a}$$

$$\vec{E}_2(x) = -\nabla \varphi_2(x) = \vec{e}_x \frac{\rho_{s0}b}{\epsilon_0 a}$$



### 3.1.3 导体系统的电容

电容是导体系统的一种基本属性，是描述导体系统 储存电荷能力的物理量。

#### ■ 孤立导体的电容

定义:  $C = \frac{q}{\varphi}$

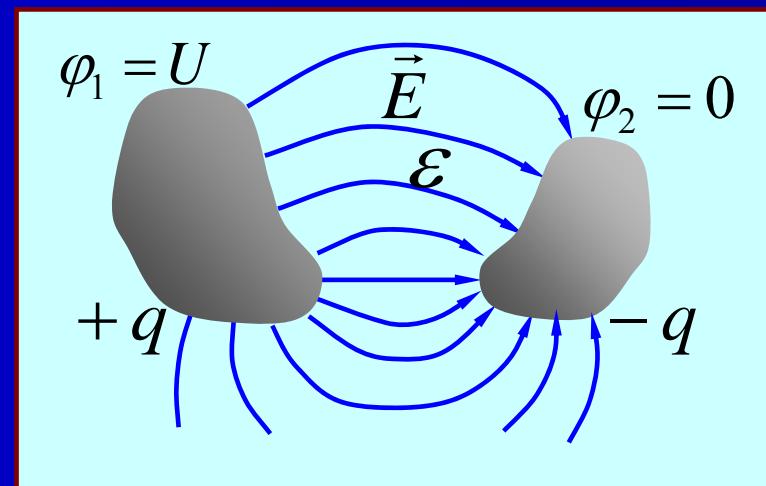
孤立导体所带的电量

孤立导体的电位

#### ■ 电容器的电容

两个带等量异号电荷 ( $\pm q$ ) 的导体构成电容器，其电容为

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{|\varphi_1 - \varphi_2|}$$



■ 特点: 电容的大小只与导体系统的几何尺寸、形状和及周围电介质的特性参数有关，而与导体的带电量和电位无关。

■ 计算电容的方法一：

- (1) 假定两导体上分别带电荷 $+q$  和  $-q$ ；
- (2) 计算两导体间的电场强度 $E$ ；
- (3) 由  $U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ，求出两导体间的电位差；
- (4) 求比值  $C = q/U$ ，即得出所求电容。

■ 计算电容的方法二：

- (1) 假定两电极间的电位差为  $U$ ；
- (2) 计算两电极间的电位分布  $\varphi$ ；
- (3) 由  $\vec{E} = -\nabla \varphi$  得到  $E$ ；
- (4) 由  $\rho_s = \epsilon E_n$  得到  $\rho_s$ ；
- (5) 由  $q = \oint_S \rho_s dS$ ，求出导体的电荷  $q$ ；
- (6) 求比值  $C = q/U$ ，即得出所求电容。



**例3.1.4** 同轴线内导体半径为 $a$ ，外导体半径为 $b$ ，内外导体间填充的介电常数为 $\epsilon$ 的均匀介质，求同轴线单位长度的电容。

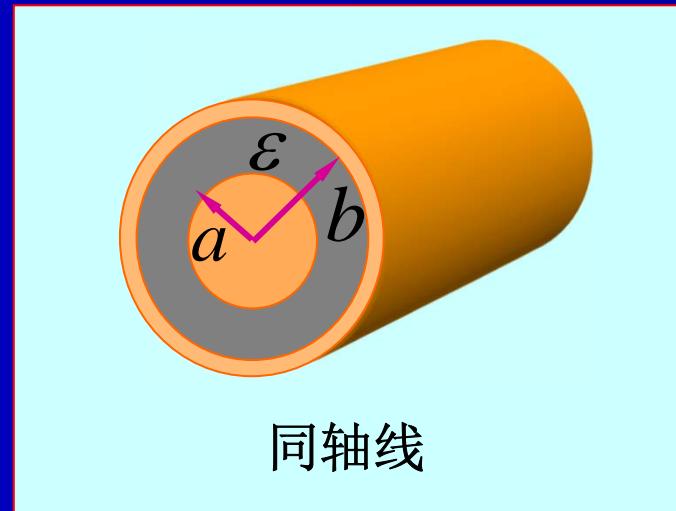
**解** 设同轴线的内、外导体单位长度带电量分别为 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$ ，应用高斯定理可得到内外导体间任一点的电场强度为

$$\vec{E}(\rho) = \vec{e}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho}$$

内外导体间的电位差

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b \vec{E}(\rho) \cdot \vec{e}_\rho d\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln(b/a) \end{aligned}$$

故得同轴线单位长度的电容为  $C_1 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$  (F/m)



### 3.1.4 静电场的能量

■ 带电导体系统的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i$$

■ 点电荷系统的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i$$

■ 电容器中储存的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2C} q^2$$

■ 体密度分布系统的电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$$

■ 静电场能量

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV$$

■ 静电场能量密度  $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$



例3.1.5 半径为 $a$  的球形空间内均匀分布有电荷体密度为 $\rho$ 的电荷，试求静电场能量。

解：方法一，利用  $W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$  计算

根据高斯定理求得电场强度

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_r \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < a)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_r \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > a)$$

$$\text{故 } W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_{V_1} \epsilon_0 E_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} \epsilon_0 E_2^2 dV$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{\rho^2 a^6}{9\epsilon_0^2 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \right) = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 a^5$$



方法二：利用  $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$  计算

先求出电位分布

$$\varphi_1 = \int_r^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_a^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^a \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (r \leq a)$$

$$\varphi_2 = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \quad (r \geq a)$$

故

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi_1 dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \int_0^a \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 a^5$$



## 3.2 导电媒质中的恒定电场分析

### 本节内容

3.2.1 恒定电场的基本方程和边界条件

3.2.2 恒定电场与静电场的比拟

3.2.3 漏电导



### 3.2.1 恒定电场的基本方程和边界条件

- 恒定电场：电荷作稳定运动、但电荷分布是不随时间变化时所产生的电场。
- 恒定电场和静电场具有相同的性质：有源无旋场。
- 恒定电场与静电场的重要区别：
  - (1) 恒定电场可以存在于导体内部；
  - (2) 恒定电场中有恒定电流，会产生电场能量的损耗，要维持导体中的恒定电流，必须有外加电源来不断补充被损耗的电场能量。



## 1. 恒定电场的基本方程

- 恒定电场的基本场矢量:  $\vec{J}(\vec{r}) \quad \vec{E}(\vec{r})$
- 恒定电场的基本方程

微分形式: 
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

积分形式: 
$$\begin{cases} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

- 线性各向同性导电媒质的本构关系:  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

若媒质是均匀的  $\rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$

- 恒定电场的电位函数

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$$

均匀导电媒质中  
没有体分布电荷

由  $\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0 \rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$



## 2. 恒定电场的边界条件

- 场矢量的边界条件

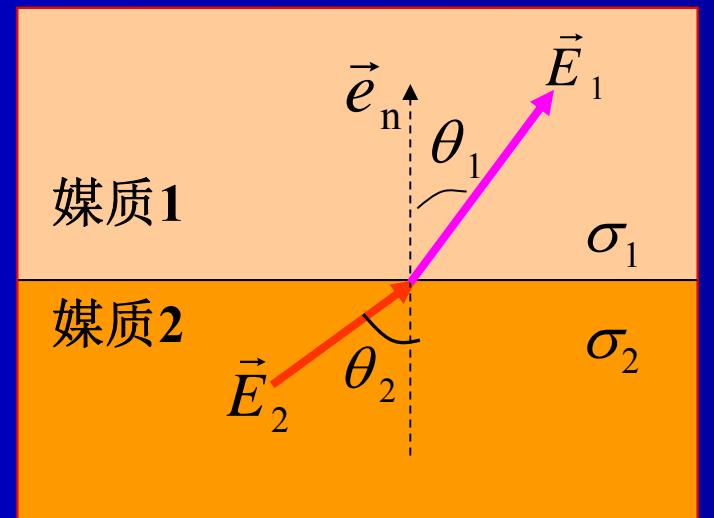
$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow \vec{e}_n \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad \text{即 } J_{1n} = J_{2n}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad \text{即 } E_{1t} = E_{2t}$$

- 场矢量的折射关系

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{\sigma_1 / J_{1n}}{\sigma_2 / J_{2n}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

- 导电媒质分界面上的电荷面密度



$$\rho_s = \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \vec{e}_n \cdot \left( \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \vec{J}_1 - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \vec{J}_2 \right) = \left( \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) J_n$$



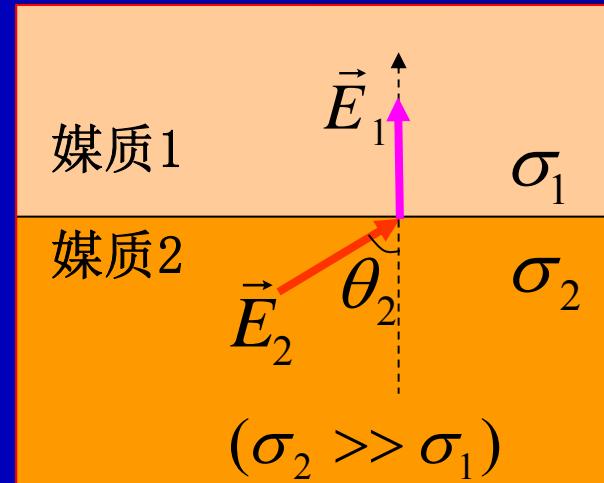
- 电位的边界条件  $\varphi_1 = \varphi_2, \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$

### ■ 关于恒定电场的进一步说明：

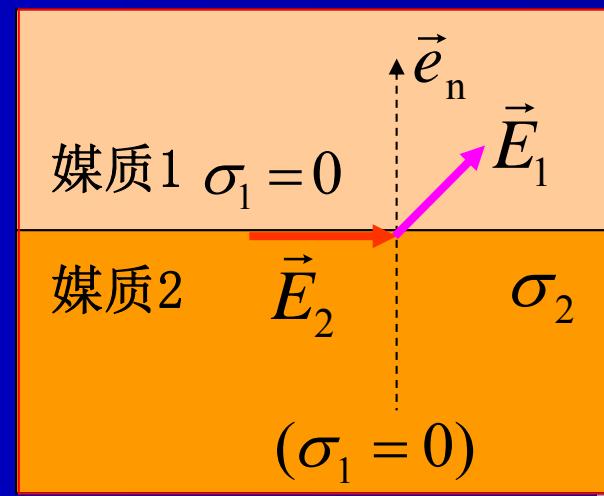
- 恒定电场与静电场性质相同，但产生的源不同，分别为运动电荷和静止电荷，但其密度都不随时间变化；
- 恒定电场同时存在于导体内部和外部，在导体表面上的电场既有法向分量又有切向分量，电场并不垂直于导体表面，因而导体表面不是等位面；
- 恒定电场问题可利用对应量变换，先变成静电场问题求解，最后再换回来；



- 如  $\sigma_2 \gg \sigma_1$ 、且  $\theta_2 \neq 90^\circ$ ，则  $\theta_1 = 0$ ，即电场线近似垂直于良导体表面。此时，良导体表面可近似地看作为等位面；



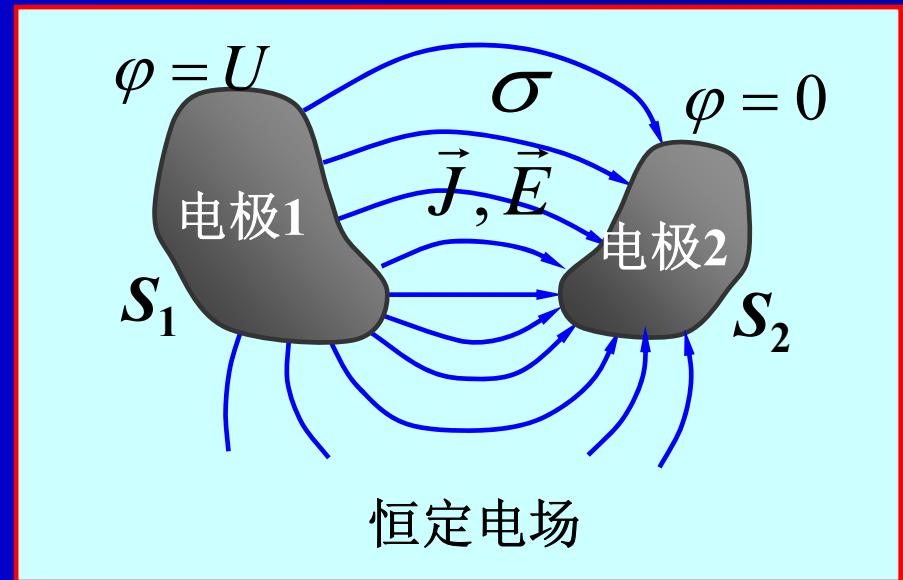
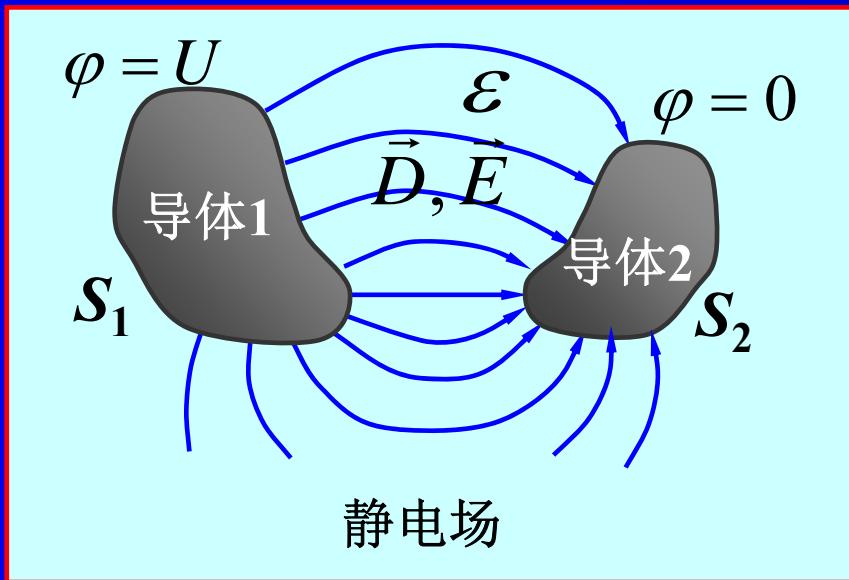
- 若媒质1为理想介质，即  $\sigma_1 = 0$ ，则  $J_1 = 0$ ，故  $J_{2n} = 0$  且  $E_{2n} = 0$ ，即导体中一侧中只有切向电流和切向电场。



### 3.2.2 恒定电场与静电场的比拟

	静电场 ( $\rho = 0$ 区域)	恒定电场 (电源外)
基本方程	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$	$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ $\nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$
本构关系	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$
位函数	$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0$	$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0$
边界条件	$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}$ $\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$	$E_{1t} = E_{2t}, \quad J_{1n} = J_{2n}$ $\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$

对应物理量	静电场	$\vec{E}$	$\vec{D}$	$\varphi$	$q$	$\epsilon$	$C$
	恒定电场	$\vec{E}$	$\vec{J}$	$\varphi$	$I$	$\sigma$	$G$



如果两种场具有相同的场方程和相同的边界条件，则其解也相同。只需要求出一种场的解，就可以用对应的物理量作替换而得到另一种场的解。这种求解场的方法称为比拟法。



### 3.2.3 漏电导

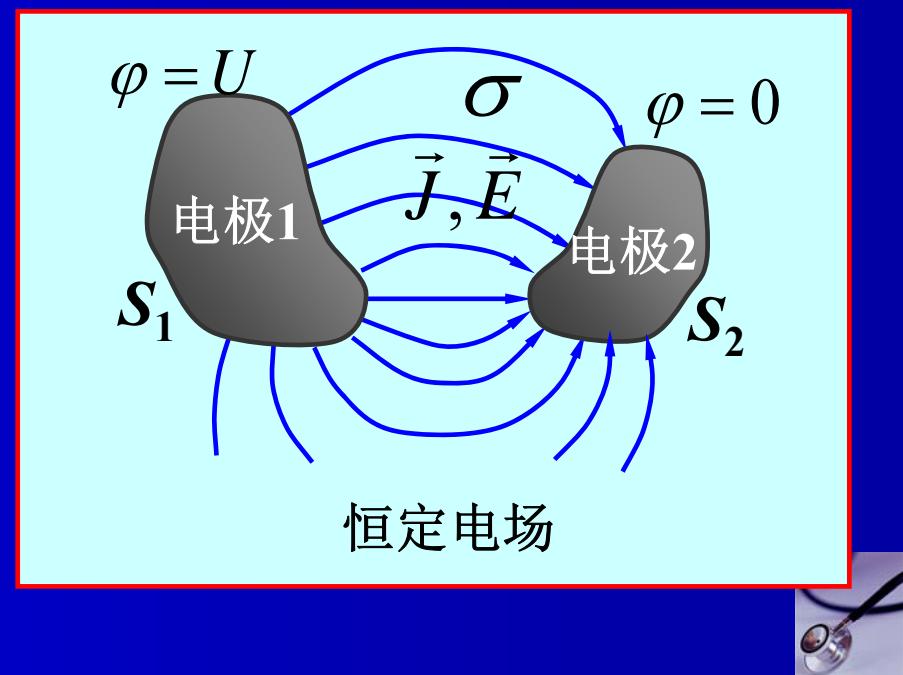
工程上，常在电容器两极板之间、同轴电缆的芯线与外壳之间，填充不导电的材料作电绝缘。这些绝缘材料的电导率远远小于金属材料的电导率，但毕竟不为零，因而当在电极间加上电压  $U$  时，必定会有微小的漏电流  $J$  存在。

漏电流与电压之比为漏电导，即

$$G = \frac{I}{U}$$

其倒数称为绝缘电阻，即

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I}$$



- 计算电导的方法一：

- (1) 假定两电极间的电流为  $I$ ；
- (2) 计算两电极间的电流密度矢量  $J$ ；
- (3) 由  $J = \sigma E$  得到  $E$ ；
- (4) 由  $U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ，求出两导体间的电位差；
- (5) 求比值  $G = I/U$ ，即得出所求电导。

- 计算电导的方法二：

- (1) 假定两电极间的电位差为  $U$ ；
- (2) 计算两电极间的电位分布  $\varphi$ ；
- (3) 由  $\vec{E} = -\nabla \varphi$  得到  $E$ ；
- (4) 由  $J = \sigma E$  得到  $J$ ；
- (5) 由  $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ ，求出两导体间电流；
- (6) 求比值  $G = I/U$ ，即得出所求电导。

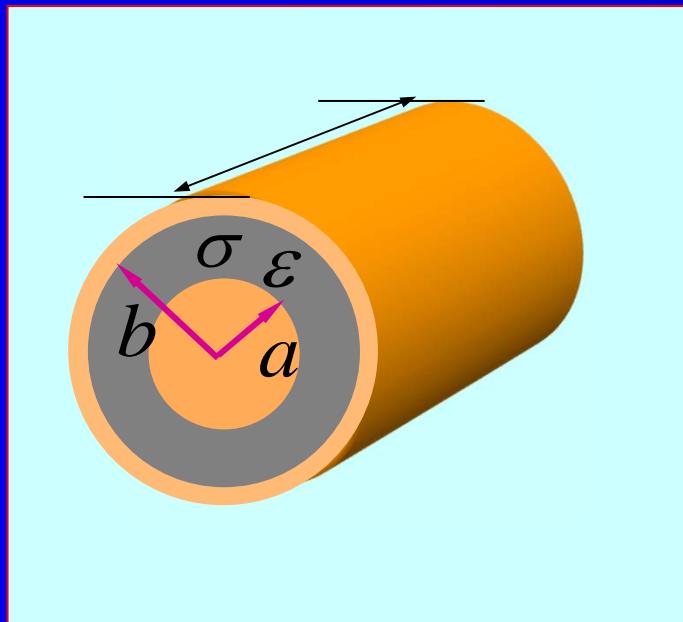
- 计算电导的方法三：

$$\text{静电比拟法: } \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \rightarrow G = \frac{\sigma}{\epsilon} C$$



例3.2.1 求同轴电缆的绝缘电阻。设内外的半径分别为 $a$ 、 $b$ ，长度为 $l$ ，其间媒质的电导率为 $\sigma$ 、介电常数为 $\epsilon$ 。

解：直接用恒定电场的计算方法  
设由内导体流向外导体的电流为 $I$ 。



$$\text{则 } I \rightarrow J = \frac{I}{2\pi\rho l} \rightarrow E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\rho l \sigma}$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{I}{2\pi\rho l \sigma} d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{电导 } G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\sigma l}{\ln(b/a)}$$

$$\text{绝缘电阻 } R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$



## 3.3 恒定磁场分析

### 本节内容

- 3.3.1 恒定磁场的基本方程和边界条件
- 3.3.2 恒定磁场的矢量磁位和标量磁位
- 3.3.3 电感
- 3.3.4 恒定磁场的能量



### 3.3.1 恒定磁场的基本方程和边界条件

#### 1. 基本方程

微分形式: 
$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

积分形式: 
$$\begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

本构关系:  $\vec{B} = \mu \vec{H}$

#### 2. 边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = J_s \end{cases}$$

若分界面上不存在面电流, 即  $J_s = 0$ , 则

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = 0 \end{cases}$$



### 3.3.2 恒定磁场的矢量磁位和标量磁位

#### 1. 恒定磁场的矢量磁位

##### ■ 矢量磁位的定义

$$\text{由 } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

矢量磁位或称磁矢位

##### ■ 磁矢位的任意性

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \rightarrow \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \vec{A}$$

即磁矢位不是惟一确定的，它加上任意一个标量  $\psi$  的梯度以后，仍然表示同一个磁场。

原因：没有规定  $\mathbf{A}$  的散度。

恒定磁场中，通常规定  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，并称为库仑规范。



## ■ 磁矢位的微分方程

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \end{array} \right\} \rightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}$$

矢量泊松方程 —————  $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$  —————  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

在无源区:  $\vec{J} = 0 \rightarrow \nabla^2 \vec{A} = 0$  ————— 矢量拉普拉斯方程

## ■ 磁矢位的表达式

在直角坐标系中, 矢量位A的各分量满足标量泊松方程, 即

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_i \quad (i=1,2,3) \longrightarrow \text{其中 } 1, 2, 3 \text{ 分别对应 } x, y, z$$

与静电场标量位 $\phi$ 满足的泊松方程比较, 可得 $A_i$ 之解, 即

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \nabla^2 A_i = -\mu J_i \\ \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dV' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \phi \rightarrow A_i \\ \rho \rightarrow J_i \\ \epsilon \rightarrow 1/\mu \end{cases} \Rightarrow A_i = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_i(r')}{|r-r'|} dV'$$



由此可得出  $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV'$

对于面电流和细导线电流回路，磁矢位分别为

$$\text{面电流: } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s(\vec{r}')}{R} dS' \quad \text{细线电流: } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{R}$$

- 利用磁矢位计算磁通量:  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$
- 磁矢位的边界条件

$$\left. \begin{array}{l} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{ }} A_{1t} = A_{2t} \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 \xrightarrow{\text{ }} \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{ }} A_{1n} = A_{2n} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ }} \vec{A}_1 = \vec{A}_2$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \\ \vec{H} = \nabla \times \vec{A} / \mu \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ }} \vec{e}_n \times \left( \frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 \right) = \vec{J}_s$$




## 关于磁矢位A的补充说明

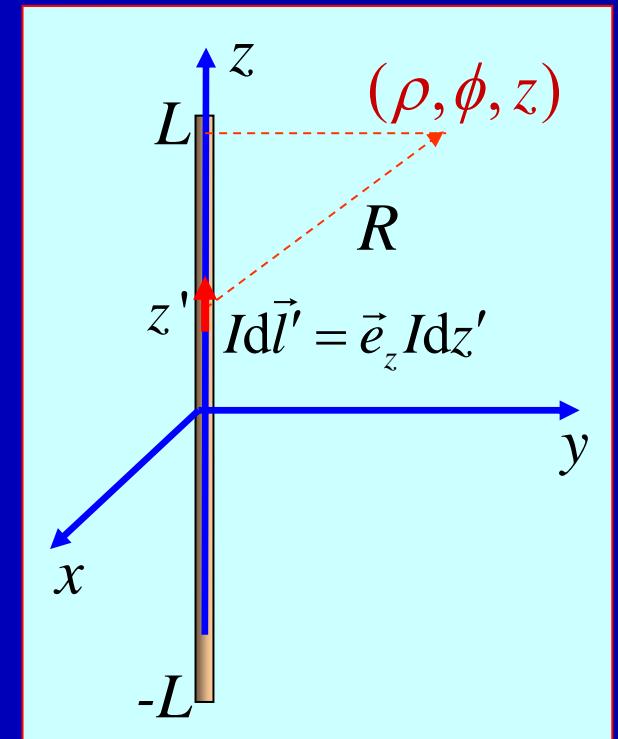
- 线电流的磁矢位与电流方向一致，求解比较简单；
- 对体分布电流，需要直接从泊松方程求解，其过程比较复杂；
- 引入磁矢位A是为了简化求解磁场，但只有对复杂问题才能显示出其优越性，对于简单问题，还是直接求解磁场为宜。



例 3.3.1 求无限长线电流  $I$  的磁矢位，设电流沿 $+z$  方向流动。

解：先求长度为 $2L$  的直线电流的磁矢位。电流元  $I d\vec{l}' = \vec{e}_z I dz'$  到点  $P(\rho, \phi, z)$  的距离  $R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ 。则

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}') &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} dz' \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln[z' - z + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}] \Big|_{-L}^L \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (z - L)^2} - (z - L)}{\sqrt{\rho^2 + (z + L)^2} - (z + L)}\end{aligned}$$



与计算无限长线电荷的电位一样，令  $L \rightarrow \infty$  可得到无限长线电流的磁矢位  $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{2l}{\rho}\right) \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$   $\rho_0$  为矢量磁位的参考点



## 2. 恒定磁场的标量磁位

### ■ 标量磁位的引入

一般情况下，恒定磁场只能引入磁矢位来描述，但在无传导电流 ( $J = 0$ ) 的空间中，则有

标量磁位或磁标位

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \longrightarrow \vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

即在无传导电流 ( $J = 0$ ) 的空间中，可以引入一个标量位函数来描述磁场。

在线性、各向同性的均匀媒质中

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{H}, \quad \vec{H} = -\nabla \varphi_m, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \varphi_m = 0$$

### ■ 标量磁位的边界条件

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad \text{和} \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}$$



### 3.3.3 电感

#### 1. 磁通与磁链

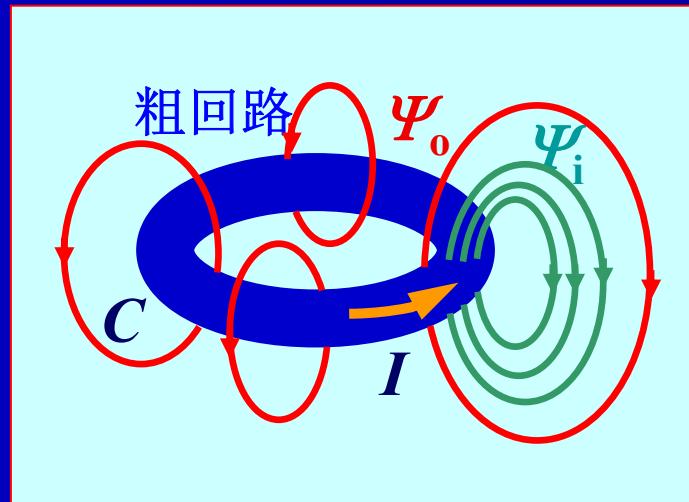
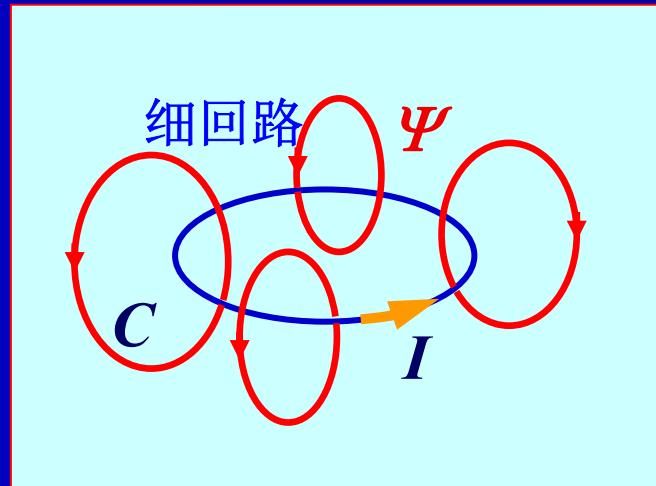
- 单匝线圈形成的回路的磁链定义为穿过该回路的磁通量

$$\Psi = \Phi$$

- 多匝线圈形成的导线回路的磁链定义为所有线圈的磁通总和

$$\Psi = \sum_i \Phi_i$$

- 粗导线构成的回路，磁链分为两部分：一部分是粗导线包围的、磁力线不穿过导体的外磁通量  $\Psi_0$ ；另一部分是磁力线穿过导体、只有粗导线的一部分包围的内磁通量  $\Psi_i$ 。



## 2. 自感

设回路  $C$  中的电流为  $I$ , 所产生的磁场与回路  $C$  交链的磁链为  $\Psi$ , 则磁链  $\Psi$  与回路  $C$  中的电流  $I$  有正比关系, 其比值

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

称为回路  $C$  的自感系数, 简称自感。

粗导体回路的自感:  $L = L_i + L_o$

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} \quad \text{—— 内自感}; \quad L_o = \frac{\Psi_o}{I} \quad \text{—— 外自感}$$

### ■ 自感的特点:

自感只与回路的几何形状、尺寸以及周围的磁介质有关, 与电流无关。



### 3.3.4 恒定磁场的能量

■ **N** 个载流回路的磁场能量  $W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \Psi_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \oint_{C_j} \vec{A}_j d\vec{l}_j$

■ 单个载流回路的磁场能量  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

■ 两个载流回路的磁场能量  $W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$

■ 体分布电流的磁场能量  $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$

■ 恒定磁场能量  $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu \vec{H} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV$

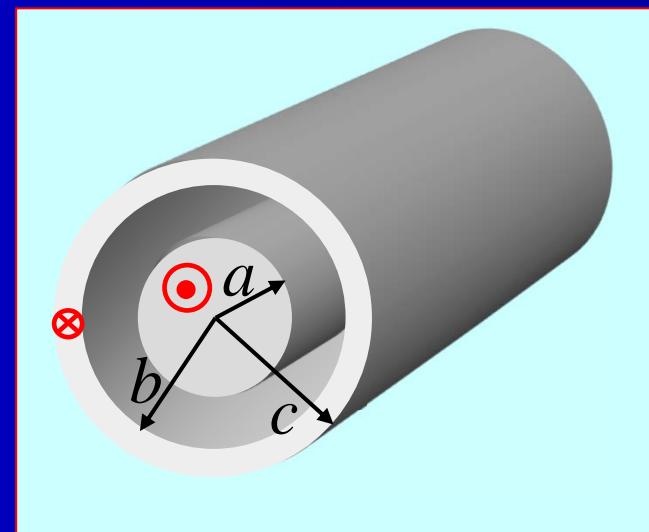
■ 恒定磁场所量密度  $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu \vec{H} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$



例3.3.2 同轴电缆的内导体半径为 $a$ ，外导体的内、外半径分别为 $b$ 和 $c$ ，如图所示。导体中通有电流 $I$ ，试求同轴电缆中单位长度储存的磁场能量。

解：由安培环路定理，得

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \frac{\rho I}{2\pi a^2} & 0 < \rho < a \\ \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho} & a < \rho < b \\ \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} & b < \rho < c \\ 0 & \rho > c \end{cases}$$



三个区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{m1} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^a \left( \frac{\rho I}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$W_{m2} = \frac{\mu_0}{2} \int_a^b \left( \frac{I}{2\pi \rho} \right)^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$W_{m3} = \frac{\mu_0}{2} \int_b^c \left( \frac{I}{2\pi \rho} \right)^2 \left( \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right)^2 2\pi \rho d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[ \frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right]$$



单位长度内总的磁场能量为

$$\begin{aligned}W_m &= W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} \\&= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[ \frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right]\end{aligned}$$



## 3.4 静态场的边值问题及解的惟一性定理

- 边值问题：在给定的边界条件下，求解位函数的泊松方程或拉普拉斯方程

### 本节内容

3.4.1 边值问题的类型

3.4.2 惟一性定理



### 3.4.1 边值问题的类型

- 第一类边值问题（或狄里赫利问题）

已知场域边界面  $S$  上的位函数值，即

$$\varphi|_S = f_1(S)$$

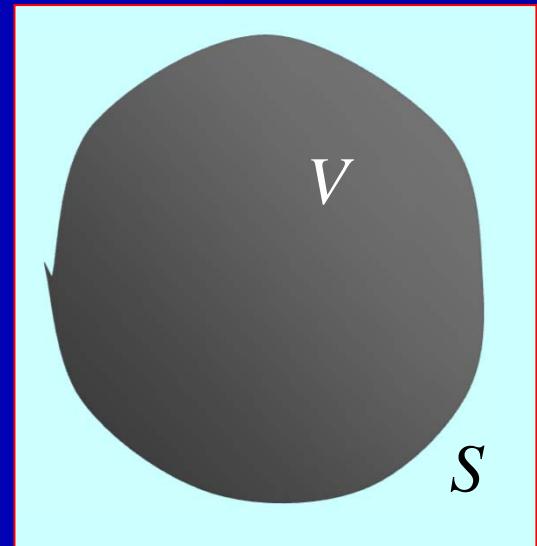
- 第二类边值问题（或纽曼问题）

已知场域边界面  $S$  上的位函数的法向导数值，即  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = f_2(S)$

- 第三类边值问题（或混合边值问题）

已知场域一部分边界面  $S_1$  上的位函数值，而另一部分边界面  $S_2$  上则已知位函数的法向导数值，即

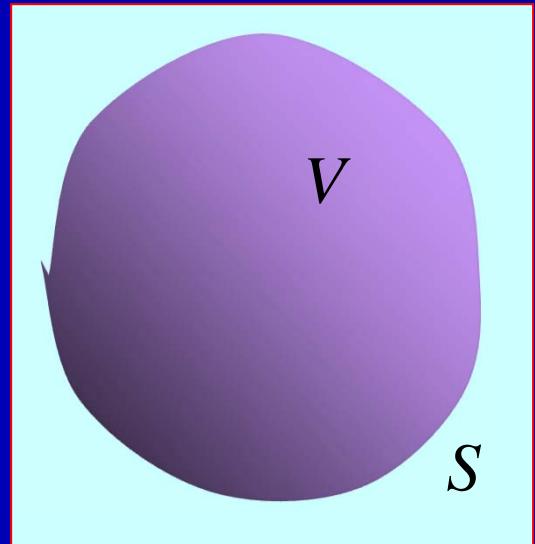
$$\varphi|_{S_1} = f_1(S_1), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{S_2} = f_2(S_2)$$



### 3.4.2 惟一性定理

#### ■ 惟一性定理的表述

在场域  $V$  的边界面  $S$  上给定  $\varphi$  或  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$  的值，则泊松方程或拉普拉斯方程在场域  $V$  具有惟一值。



#### ■ 惟一性定理的重要意义

- 给出了静态场边值问题具有惟一解的条件
- 为静态场边值问题的各种求解方法提供了理论依据
- 为求解结果的正确性提供了判据

