

2.3

习题解答

2.1 已知半径 $r = a$ 的导体球面上分布着面电荷密度为 $\rho_s = \rho_{s0} \cos \theta$ 的电荷, 式中的 ρ_{s0} 为常数。试计算球面上的总电荷量。

解 球面上的总电荷量等于面电荷密度沿 $r = a$ 的球面上的积分, 即

$$q = \int_S \rho_s dS = \int_S \rho_{s0} \cos \theta dS_r = \int_0^\pi \rho_{s0} \cos \theta 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = 0$$

2.2 已知半径为 a 、长为 L 的圆柱体内分布着轴对称的电荷，电荷体密度为 $\rho = \rho_0 \frac{r}{a}, 0 \leq r \leq a$ ，式中的 ρ_0 为常数，试求圆柱体内的总电荷量。

解 圆柱体内的总电荷量等于体电荷密度对半径为 a 、长度为 L 的圆柱体的体积分，即

$$q = \int_V \rho_s dV = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\rho_0 r}{a} r dr d\phi dz = \frac{2\pi\rho_0 L}{a} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^a = \frac{2\pi\rho_0 La^2}{3} \text{ C}$$

2.3 电荷 q 均匀分布在半径为 a 的导体球面上，当导体球以角速度 ω 绕通过球心的 z 轴旋转时，试计算导体球面上的面电流密度。

解 导体球上的面电荷密度为

$$\rho_s = \frac{q}{4\pi a^2}$$

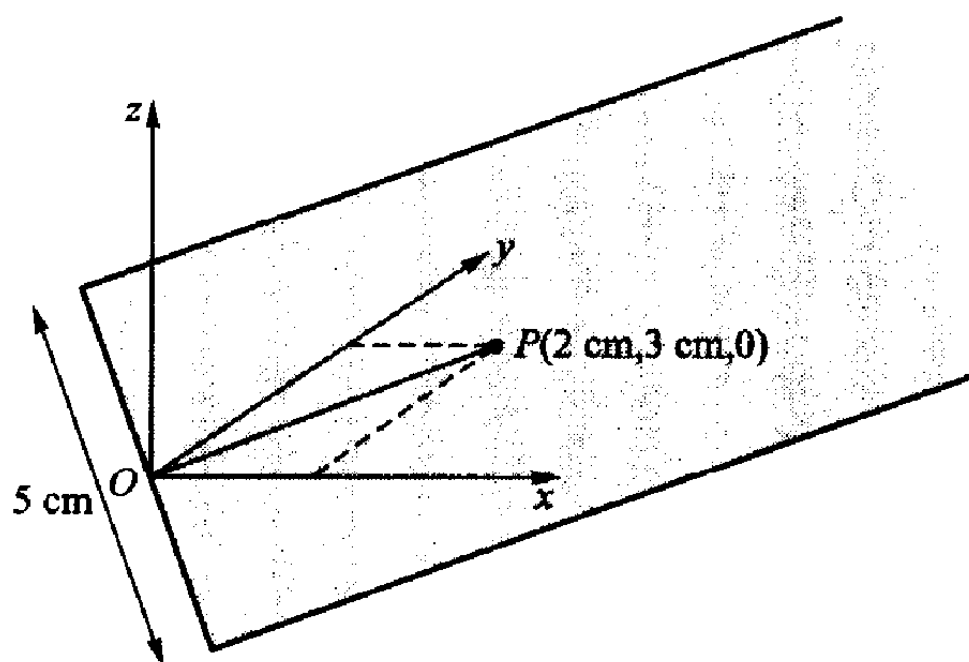
球面上任意一点的位置矢量为 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r a$ ，当导体球以角速度 ω 绕通过球心的轴旋转时，该点的线速度为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_z \omega \times \mathbf{e}_r a = \mathbf{e}_\phi \omega a \sin \theta$$

则得导体球面上的面电流密度为

$$\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v} = \mathbf{e}_\phi \frac{q\omega}{4\pi a} \sin \theta$$

2.4 宽度为 5 cm 的无限薄导电平面置于 $z=0$ 的平面内，若有 10 A 电流从原点朝向点 $P(2 \text{ cm}, 3 \text{ cm}, 0)$ 流动，如图题 2.4 所示，试写出面电流密度的表示式。



图题 2.4

解 面电流流动方向的单位矢量为

$$\mathbf{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2}}(\mathbf{e}_x 2 + \mathbf{e}_y 3) = \frac{1}{\sqrt{13}}(\mathbf{e}_x 2 + \mathbf{e}_y 3)$$

面电流密度的大小为

$$|\mathbf{J}_s| = \frac{10}{5 \times 10^{-2}} \text{ A/m} = 200 \text{ A/m}$$

故得面电流密度矢量表示式为

$$\mathbf{J}_s = \frac{200}{\sqrt{13}}(\mathbf{e}_x 2 + \mathbf{e}_y 3) \text{ A/m}$$

2.5 一个半径为 a 的球形体积内均匀分布着总电荷量为 q 的电荷,当球体以均匀角速度 ω 绕一条直径旋转时,试计算球内的电流密度。

解 球体内的电荷体密度为

$$\rho = \frac{q}{4\pi a^3/3}$$

设以球心为坐标原点,旋转轴为 z 轴,则球体内任意一点 P 的位置矢量为 $\mathbf{r} = e_r r$,故该点的线速度为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = e_\phi \omega r \sin \theta$$

因此,所求的电流密度矢量为

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = e_\phi \frac{q}{4\pi a^3/3} \omega r \sin \theta = e_\phi \frac{3q\omega}{4\pi a^3} r \sin \theta$$

2.6 平行板真空二极管两极板间的电荷体密度为 $\rho = -\frac{4}{9}\epsilon_0 U_0 d^{-4/3} x^{-2/3}$, 阴极板位于 $x=0$ 处,阳极板位于 $x=d$ 处,极间电压为 U_0 ;如果 $U_0 = 40 \text{ V}$, $d = 1 \text{ cm}$,横截面 $S = 10 \text{ cm}^2$,试求:(1) $x=0$ 至 $x=d$ 区域内的总电荷量;(2) $x = d/2$ 至 $x=d$ 区域内的总电荷量。

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad q_1 &= \int_{V_1} \rho dV = \int_0^d \left(-\frac{4}{9}\epsilon_0 U_0 d^{-4/3} x^{-2/3} \right) S dx \\ &= -\frac{4}{3d}\epsilon_0 U_0 S \\ &= -4.72 \times 10^{-11} \text{ C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad q_2 &= \int_{V_2} \rho dV = \int_{d/2}^d \left(-\frac{4}{9}\epsilon_0 U_0 d^{-4/3} x^{-2/3} \right) S dx \\ &= -\frac{4}{3d} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right) \epsilon_0 U_0 S \\ &= -0.97 \times 10^{-11} \text{ C} \end{aligned}$$

2.7 在真空中, 点电荷 $q_1 = -0.3 \mu\text{C}$ 位于点 $A(25 \text{ cm}, -30 \text{ cm}, 15 \text{ cm})$; 点电荷 $q_2 = 0.5 \mu\text{C}$ 位于点 $B(-10 \text{ cm}, 8 \text{ cm}, 12 \text{ cm})$ 。试求: (1) 坐标原点处的电场强度; (2) 点 $P(15 \text{ cm}, 20 \text{ cm}, 50 \text{ cm})$ 处的电场强度。

解 (1) 源点的位置矢量及其大小分别为

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{e}_x 25 - \mathbf{e}_y 30 + \mathbf{e}_z 15 \text{ cm}, \quad |\mathbf{r}'_1| = \sqrt{25^2 + 30^2 + 15^2} \text{ cm} = 41.83 \text{ cm}$$

$$\mathbf{r}'_2 = -\mathbf{e}_x 10 + \mathbf{e}_y 8 + \mathbf{e}_z 12 \text{ cm}, \quad |\mathbf{r}'_2| = \sqrt{10^2 + 8^2 + 12^2} \text{ cm} = 17.55 \text{ cm}$$

而场点 O 的位置矢量 $\mathbf{r}_0 = 0$, 故坐标原点处的电场强度为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_1|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_1) + \frac{q_2}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_2|^3} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_2) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-0.3 \times 10^{-6}}{(41.83 \times 10^{-2})^3} (-\mathbf{e}_x 25 + \mathbf{e}_y 30 - \mathbf{e}_z 15) \times 10^{-2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{0.5 \times 10^{-6}}{(17.55 \times 10^{-2})^3} (\mathbf{e}_x 10 - \mathbf{e}_y 8 - \mathbf{e}_z 12) \times 10^{-2} \right] \\ &= \mathbf{e}_x 92.37 - \mathbf{e}_y 77.62 - \mathbf{e}_z 94.37 \quad \text{kV/m} \end{aligned}$$

(2) 场点 P 的位置矢量为

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{e}_x 15 + \mathbf{e}_y 20 + \mathbf{e}_z 50 \text{ cm}$$

故

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'_1 = -\mathbf{e}_x 10 + \mathbf{e}_y 50 + \mathbf{e}_z 35$$

$$\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'_2 = \mathbf{e}_x 25 + \mathbf{e}_y 12 + \mathbf{e}_z 38$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-0.3 \times 10^{-6}}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'_1|^3} (-\mathbf{e}_x 10 + \mathbf{e}_y 50 + \mathbf{e}_z 35) \times 10^{-2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{0.5 \times 10^{-6}}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}'_2|^3} (\mathbf{e}_x 25 + \mathbf{e}_y 12 + \mathbf{e}_z 38) \times 10^{-2} \right] \\ &= \mathbf{e}_x 11.94 - \mathbf{e}_y 0.549 + \mathbf{e}_z 12.4 \text{ kV/m} \end{aligned}$$

2.8 点电荷 $q_1 = q$ 位于点 $P_1(-a, 0, 0)$ 处, 另一个点电荷 $q_2 = -2q$ 位于 $P_2(a, 0, 0)$ 处, 试问空间中是否存在 $\mathbf{E} = 0$ 的点?

解 $q_1 = q$ 在空间任意点 $P(x, y, z)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_x(x+a) + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

电荷 $q_2 = -2q$ 在点 $P(x, y, z)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_x(x-a) + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

故在点 $P(x, y, z)$ 处的电场则为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ 。令 $\mathbf{E} = 0$, 则有

$$\frac{\mathbf{e}_x(x+a) + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{2[\mathbf{e}_x(x-a) + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z]}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

由此得

$$(x+a)[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} = 2(x-a)[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} \quad (1)$$

$$y[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} = 2y[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} \quad (2)$$

$$z[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} = 2z[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} \quad (3)$$

当 $y \neq 0$ 或 $z \neq 0$ 时, 将式 (2) 或式 (3) 代入式 (1), 得 $a = 0$ 。所以, 当 $y \neq 0$ 或 $z \neq 0$ 时, 无解。

当 $y = 0$ 且 $z = 0$ 时, 由式 (1), 有

$$(x+a)(x-a)^3 = 2(x-a)(x+a)^3$$

解得

$$x = (-3 \pm 2\sqrt{2})a$$

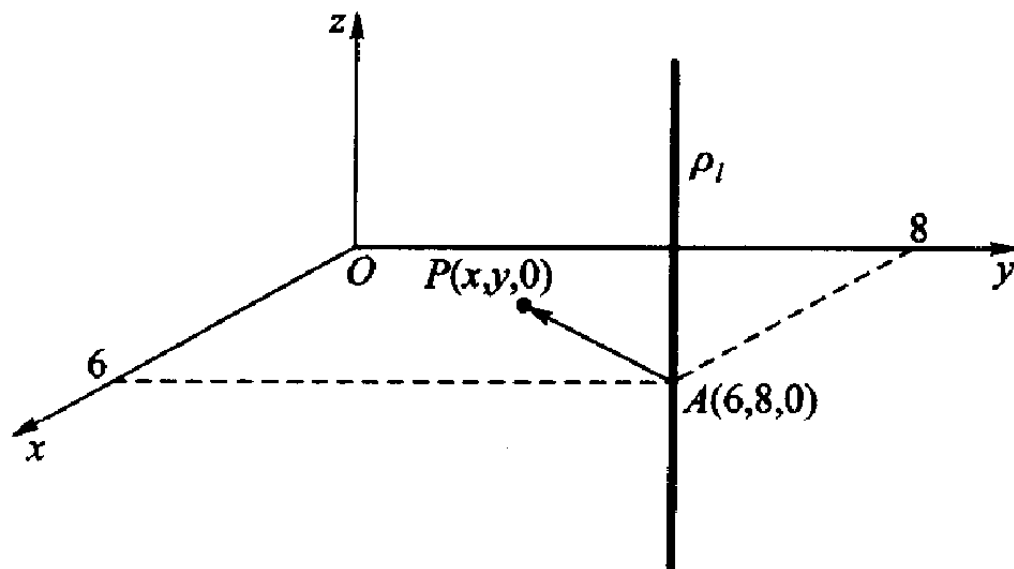
但 $x = -3a + 2\sqrt{2}a$ 不合题意, 故仅在 $(-3a - 2\sqrt{2}a, 0, 0)$ 处电场强度 $\mathbf{E} = 0$ 。

2.9 无限长线电荷通过点 $A(6, 8, 0)$ 且平行于 z 轴, 线电荷密度为 ρ_l , 试求点 $P(x, y, 0)$ 处的电场强度 \mathbf{E} 。

解 线电荷沿 z 方向为无限长, 故电场分布与 z 无关。设点 P 位于 $z = 0$ 的平面上, 如图题 2.9 所示, 线电荷与点 P 的距离矢量为

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}_x(x-6) + \mathbf{e}_y(y-8)$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}$$



图题 2.9

$$\mathbf{e}_R = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{e}_x(x-6) + \mathbf{e}_y(y-8)}{\sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}}$$

根据高斯定律得点 P 处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_R \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 |\mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \cdot \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 |\mathbf{R}|} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{e}_x(x-6) + \mathbf{e}_y(y-8)}{(x-6)^2 + (y-8)^2}$$

2.10 半径为 a 的一个半圆环上均匀分布着线电荷 ρ_l , 如图题 2.10 所示。试求垂直于半圆环所在平面的轴线上 $z=a$ 处的电场强度 $\mathbf{E}(0,0,a)$ 。

解 如图题 2.10 所示, 场点 $P(0,0,a)$ 的位置矢量为 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_z a$, 电荷元 $\rho_l dl' = \rho_l a d\phi'$ 的位置矢量 $\mathbf{r}' = \mathbf{e}_x a \cos \phi' + \mathbf{e}_y a \sin \phi'$, 故

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= |\mathbf{e}_z a - \mathbf{e}_x a \cos \phi' - \mathbf{e}_y a \sin \phi'| \\ &= \sqrt{a^2 + (a \cos \phi')^2 + (a \sin \phi')^2} \\ &= \sqrt{2}a \end{aligned}$$

电荷元 $\rho_l dl' = \rho_l a d\phi'$ 在轴线上 $z=a$ 处的电场强度为

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{\rho_l a}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{(\sqrt{2}a)^3} d\phi' \\ &= \frac{\rho_l}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_x \cos \phi' + \mathbf{e}_y \sin \phi')}{a} d\phi' \end{aligned}$$

在半圆环上对上式积分, 即得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(0,0,a) &= \int d\mathbf{E} \\ &= \frac{\rho_l}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_x \cos \phi' + \mathbf{e}_y \sin \phi')] d\phi' \\ &= \frac{\rho_l (\mathbf{e}_z \pi - \mathbf{e}_x 2)}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

2.11 三根长度均为 L 、线电荷密度分别为 ρ_{l1} 、 ρ_{l2} 和 ρ_{l3} 的线电荷构成一个等边三角形, 设 $\rho_{l1} = 2\rho_{l2} = 2\rho_{l3}$, 试求三角形中心的电场强度。

解 根据题意建立图题 2.11 所示的坐标系, 三角形中心到各边的距离为

$$d = \frac{L}{2} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6} L$$

直接利用有限长直线电荷的电场强度公式

$$E_r = \frac{\rho_{\text{II}}}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

得

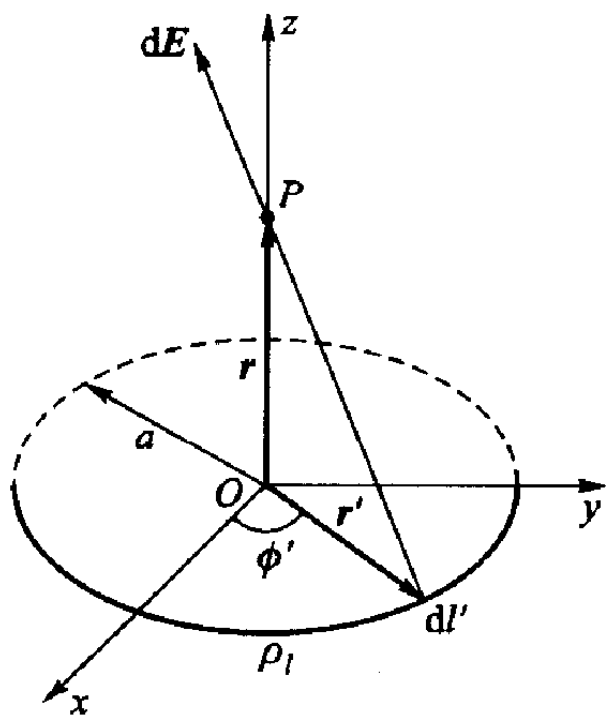
$$E_1 = e_y \frac{\rho_{\text{II}}}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos 30^\circ - \cos 150^\circ) = e_y \frac{3\rho_{\text{II}}}{2\pi\epsilon_0 L}$$

$$E_2 = - (e_x \cos 30^\circ + e_y \sin 30^\circ) \frac{3\rho_{\text{II}}}{2\pi\epsilon_0 L} = - (e_x \sqrt{3} + e_y) \frac{3\rho_{\text{II}}}{8\pi\epsilon_0 L}$$

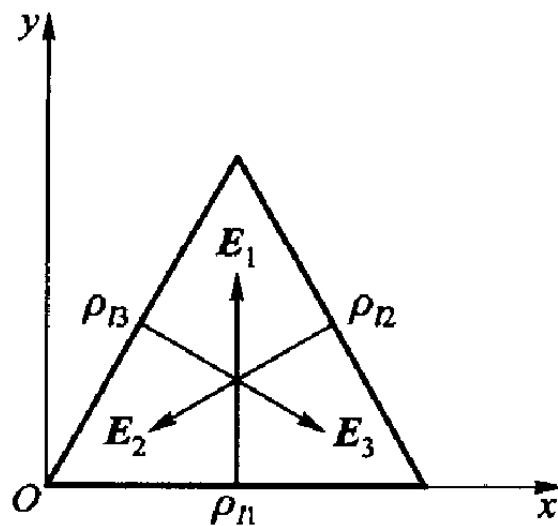
$$E_3 = (e_x \cos 30^\circ - e_y \sin 30^\circ) \frac{3\rho_{\text{II}}}{2\pi\epsilon_0 L} = (e_x \sqrt{3} - e_y) \frac{3\rho_{\text{II}}}{8\pi\epsilon_0 L}$$

故等边三角形中心处的电场强度为

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_3 \\ &= e_y \frac{3\rho_{\text{II}}}{2\pi\epsilon_0 L} - (e_x \sqrt{3} + e_y) \frac{3\rho_{\text{II}}}{8\pi\epsilon_0 L} + (e_x \sqrt{3} - e_y) \frac{3\rho_{\text{II}}}{8\pi\epsilon_0 L} \\ &= e_y \frac{3\rho_{\text{II}}}{4\pi\epsilon_0 L} \end{aligned}$$



图题 2.10



图题 2.11

2.12 一个很薄的无限大导体带电平面，其上的面电荷密度为 ρ_s 。试证明：垂直于平面的 z 轴上 $z = z_0$ 处的电场强度中，有一半是由平面上半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生的。

证 如图题 2.12 所示，在导体平面上取面积元 $dS' = r' d\phi' dr'$ ，其所带的电荷 $dq = \rho_s dS' = \rho_s r' dr' d\phi'$ ，电荷元 dq 在 $z = z_0$ 处产生的电场强度为

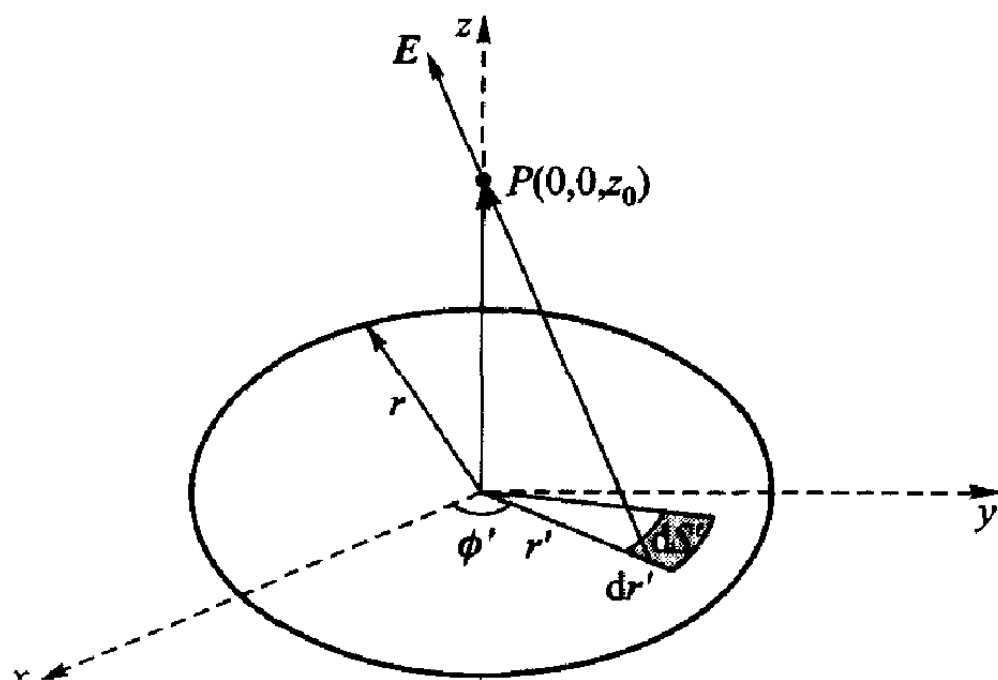
$$dE = \frac{\rho_s r' dr' d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e_z z_0 + e_r r'}{(z_0^2 + r'^2)^{3/2}}$$

则整个导体带电面在 z 轴上 $z = z_0$ 处的电场强度为

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{e_z z_0 + e_r r'}{(z_0^2 + r'^2)^{3/2}} r' dr' d\phi' \\ &= e_z \frac{\rho_s z_0}{2\epsilon_0} \int_0^r \frac{r' dr'}{(r'^2 + z_0^2)^{3/2}} = -e_z \frac{\rho_s z_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{(r'^2 + z_0^2)^{1/2}} \Big|_0^r \end{aligned}$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, $E = e_z \frac{\rho_s}{2\epsilon_0}$, 而 $r = \sqrt{3}z_0$ 时

$$E' = -e_z \frac{\rho_s z_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{(r'^2 + z_0^2)^{1/2}} \Big|_0^{\sqrt{3}z_0} = e_z \frac{\rho_s}{4\epsilon_0} = \frac{1}{2}E$$



图题 2.12

2.13 自由空间有三个无限大的均匀带电平面: 位于点 $A(0,0,-4)$ 处的平面上 $\rho_{s1} = 3 \text{ nC/m}^2$, 位于点 $B(0,0,1)$ 处的平面上 $\rho_{s2} = 6 \text{ nC/m}^2$, 位于点 $C(0,0,4)$ 处的平面上 $\rho_{s3} = -8 \text{ nC/m}^2$ 。试求以下各点的电场强度 E : (1) $P_1(2,5,-5)$; (2) $P_2(-2,4,5)$; (3) $P_3(-1,-5,2)$ 。

解 无限大的均匀面电荷产生的电场为均匀场, 利用前面的结果得

$$\begin{aligned} (1) E_1 &= -e_z \frac{\rho_{s1}}{2\epsilon_0} - e_z \frac{\rho_{s2}}{2\epsilon_0} + e_z \frac{\rho_{s3}}{2\epsilon_0} = -e_z \frac{1}{2\epsilon_0} (3 + 6 - 8) \times 10^{-9} \\ &= -e_z \frac{1}{2 \times 8.85 \times 10^{-12}} \times 10^{-9} = -e_z 56.49 \text{ V/m} \end{aligned}$$

$$(2) E_2 = e_z \frac{\rho_{s1}}{2\epsilon_0} + e_z \frac{\rho_{s2}}{2\epsilon_0} + e_z \frac{\rho_{s3}}{2\epsilon_0} = e_z \frac{1}{2\epsilon_0} (3 + 6 - 8) \times 10^{-9} = e_z 56.49 \text{ V/m}$$

$$(3) E_3 = e_z \frac{\rho_{s1}}{2\epsilon_0} + e_z \frac{\rho_{s2}}{2\epsilon_0} - e_z \frac{\rho_{s3}}{2\epsilon_0} = e_z \frac{1}{2\epsilon_0} (3 + 6 + 8) \times 10^{-9} = e_z 960.5 \text{ V/m}$$

2.14 在下列条件下, 对给定点求 $\nabla \cdot E$ 的值。

$$(1) E = e_x(2xyz - y^2) + e_y(x^2z - 2xy) + e_z x^2y \text{ V/m}$$

求点 $P_1(2, 3, -1)$ 处 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 的值。

$$(2) \mathbf{E} = \mathbf{e}_\rho 2\rho z^2 \sin^2 \phi + \mathbf{e}_\phi \rho z^2 \sin 2\phi + \mathbf{e}_z 2\rho^2 z \sin^2 \phi \quad \text{V/m}$$

求点 $P_2(\rho=2, \phi=110^\circ, z=-1)$ 处 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 的值。

$$(3) \mathbf{E} = \mathbf{e}_r 2r \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\theta r \cos \theta \cos \phi - \mathbf{e}_\phi r \sin \phi \quad \text{V/m}$$

求点 $P(r=1.5, \theta=30^\circ, \phi=50^\circ)$ 处 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 的值。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial}{\partial x}(2xyz - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2z - 2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2y) \\ &= 2 \times 3(-1) - 2 \times 2 = -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho(2\rho z^2 \sin^2 \phi)] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho z^2 \sin 2\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (2\rho^2 z \sin^2 \phi) \\ &= \frac{1}{\rho} 2z^2 \sin^2 \phi \times 2\rho + \frac{1}{\rho} 2\rho z^2 \cos 2\phi + 2\rho^2 \sin^2 \phi \\ &= 4 \times 1 \times \sin^2 110^\circ + 2 \times 1 \times \cos 2 \times 110^\circ + 2 \times 2^2 \times \sin^2 110^\circ \\ &= 9.06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \times 2r \sin \theta \cos \phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \times r \cos \theta \cos \phi) + \\ &\quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (-r \sin \phi) = \frac{1}{r^2} \times 2 \sin \theta \cos \phi \times 3r^2 + \\ &\quad \frac{1}{r \sin \theta} r \cos \phi (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \\ &= 0.637 \end{aligned}$$

2.15 半径为 a 的球形体积内充满密度为 $\rho(r)$ 的体电荷, 若已知球形体积内外的电位移分布为

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_r D_r = \begin{cases} \mathbf{e}_r (r^3 + Ar^2), & 0 < r \leq a \\ \mathbf{e}_r \frac{a^5 + Aa^4}{r^2}, & r \geq a \end{cases}$$

式中 A 为常数, 试求电荷密度 $\rho(r)$ 。

解 由 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, 得

$$\rho(r) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_r)$$

故在 $0 < r \leq a$ 区域, 有

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 (r^3 + Ar^2)] = 5r^2 + 4Ar$$

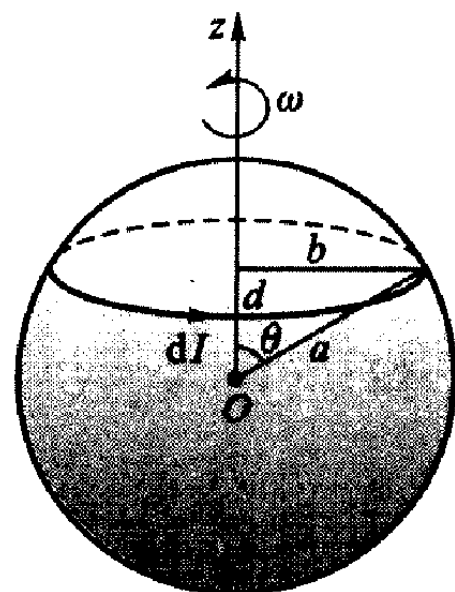
在 $r > a$ 区域

$$\rho(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{(a^5 + Aa^4)}{r^2} \right] = 0$$

2.16 一个半径为 a 的导体球带电荷量为 q , 当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转时 (如图题 2.16 所示), 试求球心处的磁感应强度 B 。

解 导体球面上的电荷面密度为 $\rho_s = \frac{q}{4\pi a^2}$, 当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转时, 球面上位置矢量 $r = e_r a$ 点处的电流面密度为

$$\begin{aligned} J_s &= \rho_s v = \rho_s \omega \times r = \rho_s e_r \omega \times e_r a \\ &= e_\phi \omega \rho_s a \sin \theta = e_\phi \frac{\omega q}{4\pi a} \sin \theta \end{aligned}$$



图题 2.16

将球面划分为无数个宽度为 $dl = a d\theta$ 的细圆环, 则球面上任一个宽度为 $dl = a d\theta$ 细圆环的电流为

$$dI = J_s dl = \frac{\omega q}{4\pi} \sin \theta d\theta$$

该细圆环的半径为 $b = a \sin \theta$, 细圆环平面到球心的距离 $d = a \cos \theta$, 利用电流圆环的轴线上任意一点的磁场公式, 可得到该细圆环电流在球心处产生的磁场为

$$\begin{aligned} dB &= e_z \frac{\mu_0 b^2 dI}{2(b^2 + d^2)^{3/2}} = e_z \frac{\mu_0 \omega q a^2 \sin^3 \theta d\theta}{8\pi(a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} \\ &= e_z \frac{\mu_0 \omega q \sin^3 \theta d\theta}{8\pi a} \end{aligned}$$

故整个球面电流在球心处产生的磁场为

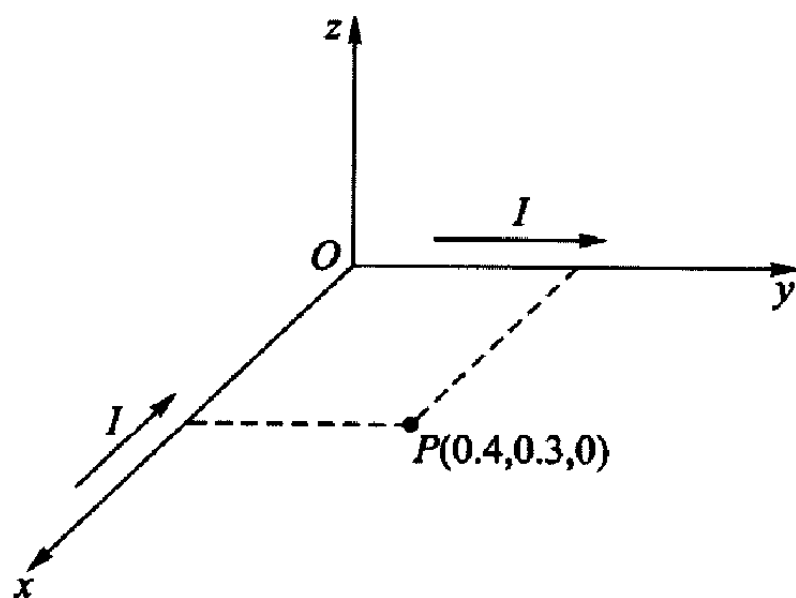
$$B = \int dB = \int_0^\pi e_z \frac{\mu_0 \omega q \sin^3 \theta}{8\pi a} d\theta = e_z \frac{\mu_0 \omega q}{6\pi a}$$

2.17 假设电流 $I = 8 \text{ A}$ 从无限远处沿 x 轴流向原点, 再离开原点沿 y 轴流向无限远, 如图题 2.17 所示。试求 xy 平面上一点 $P(0.4, 0.3, 0)$ 处的磁感应强度 B 。

解 直接利用有限长直线电流的磁场计算公式

$$B = e_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

对于点 $P(0.4, 0.3, 0)$ 单位矢量 e_ϕ 即为



图题 2.17

$-\mathbf{e}_z$ 。因此,计算 x 轴上的电流在点 P 产生的磁场时

$$\rho = 0.3 \text{ m}$$

$$\theta_1 = 0^\circ$$

$$\begin{aligned}\theta_2 &= 180^\circ - \arctan\left(\frac{0.3}{0.4}\right) \\ &= 180^\circ - 36.9^\circ = 143.1^\circ\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{P(x)} &= -\mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \times 8}{4\pi \times 0.3} (\cos 0^\circ - \cos 143.1^\circ) \\ &= -\mathbf{e}_z \frac{12\mu_0}{\pi}\end{aligned}$$

同样,计算 y 轴上的电流在点 P 产生的磁场时, $\rho = 0.4 \text{ m}$, $\theta_1 = \arctan\left(\frac{0.4}{0.3}\right) = 53.1^\circ$, $\theta_2 = 180^\circ$, 故

$$\mathbf{B}_{P(y)} = -\mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \times 8}{4\pi \times 0.4} (\cos 53.1^\circ - \cos 180^\circ) = -\mathbf{e}_z \frac{8\mu_0}{\pi}$$

则

$$\mathbf{B}_P = \mathbf{B}_{P(x)} + \mathbf{B}_{P(y)} = -\mathbf{e}_z \frac{20\mu_0}{\pi} = -\mathbf{e}_z 8 \mu\text{T}$$

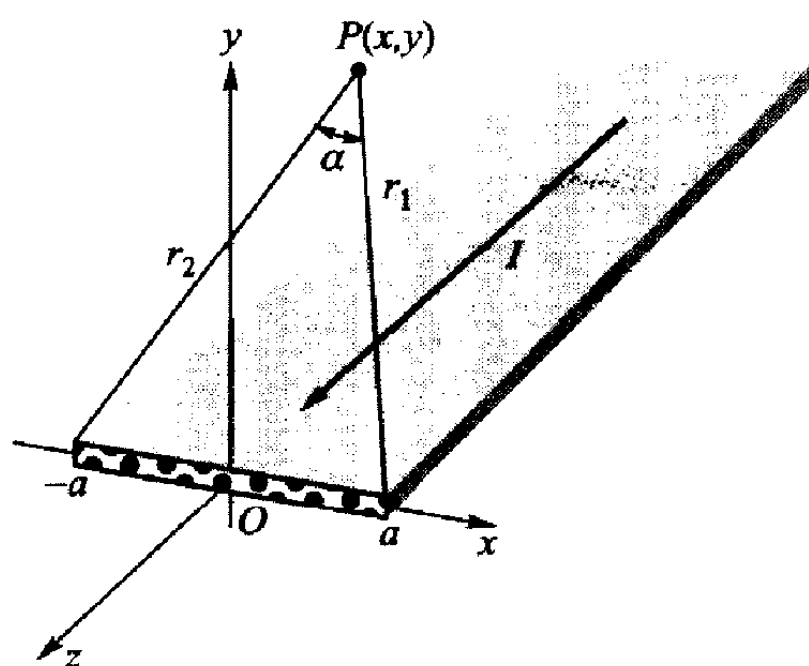
2.18 一条扁平的直导体带, 宽度为 $2a$, 中心线与 z 轴重合, 通过的电流为 I 。试证明在第一象限内任意一点 P 的磁感应强度为

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha$$

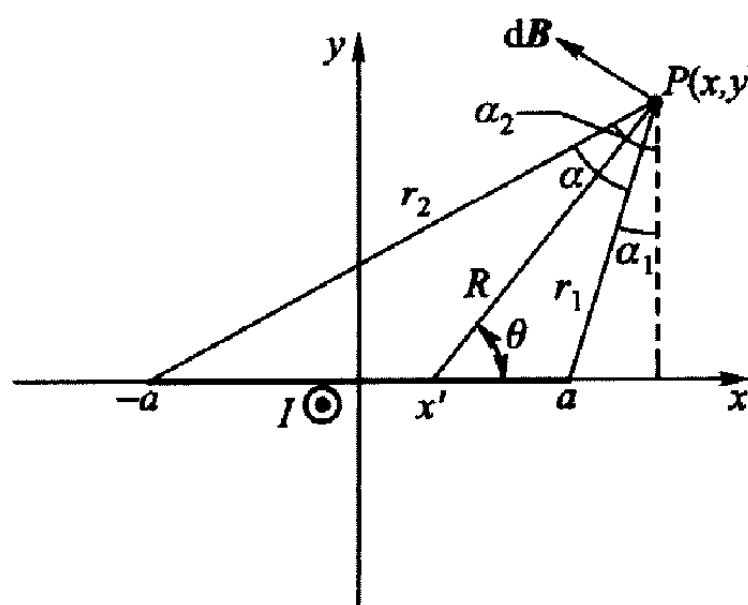
$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

式中的 α 、 r_1 和 r_2 如图题 2.18 所示。

证 将导体带划分为无数个宽度为 dx' 的细条带, 每一细条带的电流 $dI = \frac{I}{2a} dx'$ 。根据安培环路定律, 可得到位于 x' 处的细条带的电流 dI 在 P 点处的磁场为



图题 2.18



图题 2.18(附)

$$dB = e_{\phi} \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = e_{\phi} \frac{\mu_0 I dx'}{4\pi a R} = e_{\phi} \frac{\mu_0 I dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]^{1/2}}$$

故

$$dB_x = -dB \sin \theta = -\frac{\mu_0 I y dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]}$$

$$dB_y = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I (x-x') dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]}$$

式中的 x' 如图题 2.18(附)所示, 则得

$$\begin{aligned} B_x &= - \int_{-a}^a \frac{\mu_0 I y dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]} \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \arctan\left(\frac{x' - x}{y}\right) \Big|_{-a}^a \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\arctan\left(\frac{a-x}{y}\right) - \arctan\left(\frac{-a-x}{y}\right) \right] \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\arctan\left(\frac{x+a}{y}\right) - \arctan\left(\frac{x-a}{y}\right) \right] \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= - \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha \end{aligned}$$

$$B_y = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 I (x-x') dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]} = - \frac{\mu_0 I}{8\pi a} \ln[(x-x')^2 + y^2] \Big|_{-a}^a$$

$$= \frac{\mu_0 I}{8 \pi a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4 \pi a} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

2.19 两平行无限长直线电流 I_1 和 I_2 , 间距为 d , 试求每根导线单位长度受到的安培力 F_m 。

解 无限长直线电流 I_1 产生的磁场为

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2 \pi \rho}$$

此磁场对直线电流 I_2 每单位长度受到的安培力为

$$\mathbf{F}_{m12} = \int_0^l I_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1 dz = -\mathbf{e}_{12} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi d}$$

式中, \mathbf{e}_{12} 是由电流 I_1 指向电流 I_2 的单位矢量。

同样, 可求出直线电流 I_2 产生的磁场对电流 I_1 每单位长度受到的安培力为

$$\mathbf{F}_{m21} = -\mathbf{F}_{m12} = \mathbf{e}_{12} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2 \pi d}$$

2.20 在半径 $a = 1 \text{ mm}$ 的非磁性材料圆柱形实心导体内, 沿 z 轴方向通过电流 $I = 20 \text{ A}$, 试求: (1) $\rho = 0.8 \text{ mm}$ 处的 \mathbf{B} ; (2) $\rho = 1.2 \text{ mm}$ 处的 \mathbf{B} ; (3) 圆柱内单位长度的总磁通。

解 (1) 圆柱形导体内的电流密度为

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_z \frac{I}{\pi a^2} = \mathbf{e}_z \frac{20}{\pi (1 \times 10^{-3})^2} \text{ A/m}^2 = \mathbf{e}_z 6.37 \times 10^6 \text{ A/m}^2$$

利用安培环路定律得

$$\mathbf{B}_{0.8 \text{ mm}} = \mathbf{e}_\phi \frac{1}{2} \mu_0 J \rho = \mathbf{e}_\phi \frac{1}{2} \times 4 \pi \times 10^{-7} \times 6.37 \times 10^6 \times 0.8 \times 10^{-3} \text{ T}$$

$$= \mathbf{e}_\phi 3.2 \times 10^{-3} \text{ T}$$

(2) 利用安培环路定律得

$$\mathbf{B}_{1.2 \text{ mm}} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2 \pi \rho} = \mathbf{e}_\phi \frac{4 \pi \times 10^{-7} \times 20}{2 \pi \times 1.2 \times 10^{-3}} \text{ T} = \mathbf{e}_\phi 3.33 \times 10^{-3} \text{ T}$$

$$(3) \Phi_l = \int \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{S} = \int_0^a \frac{1}{2} \mu_0 J \rho d\rho = \frac{1}{2} \mu_0 J \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \pi \times 10^{-7} \times \frac{20}{\pi (1 \times 10^{-3})^2} \times \frac{1 \times 10^{-6}}{2} \text{ Wb}$$

$$= 2 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

2.21 下面的矢量函数中哪些可能是磁场？如果是，求出其源量 \mathbf{J} 。

(1) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\rho a\rho, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (圆柱坐标系)

(2) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_x(-ay) + \mathbf{e}_y ax, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

(3) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_x ax - \mathbf{e}_y ay, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

(4) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi ar, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (球坐标系)

解 根据静态磁场的基本性质，只有满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的矢量函数才可能是磁场的场矢量，对于磁场矢量，则可由方程 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ 求出源分布。

(1) 在圆柱坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) = \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(a\rho^2) = 2a\mu_0 \neq 0$$

可见，矢量 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\rho a\rho$ 不是磁场矢量。

(2) 在直角坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x}(-ay) + \frac{\partial}{\partial y}(ax) = 0$$

故矢量 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_x(-ay) + \mathbf{e}_y ax$ 是磁场矢量，其源分布为

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -ay & ax & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z 2a$$

(3) 在直角坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(-ay) = 0$$

故矢量 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_x ax - \mathbf{e}_y ay$ 是磁场矢量，其源分布为

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax & -ay & 0 \end{vmatrix} = 0$$

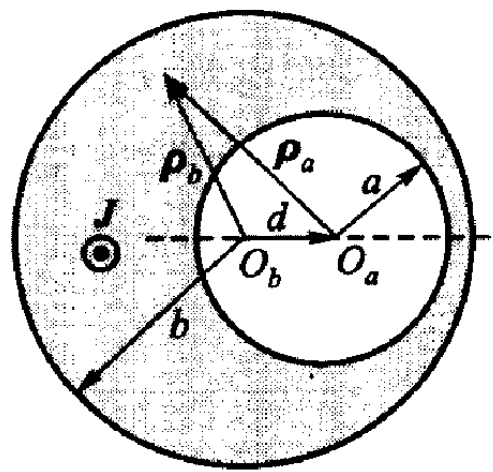
(4) 在球坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(ar) = 0$$

故矢量 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi ar$ 是磁场矢量，其源分布为

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & ar^2 \sin \theta \end{vmatrix} = \mathbf{e}_r a \cot \theta - \mathbf{e}_\theta 2a$$

2.22 通过电流密度为 \mathbf{J} 的均匀电流的长圆柱导体中有一平行的圆柱形空腔，其横截面如图题 2.22 所示。试计算各部分的磁感应强度，并证明空腔内的磁场是均匀的。



图题 2.22

解 将题所给的非对称电流分布分解为两个对称电流分布的叠加：一个是电流密度 \mathbf{J} 均匀分布在半径为 b 的圆柱内，另一个是电流密度 $-\mathbf{J}$ 均匀分布在半径为 a 的圆柱内。原有的空腔被看作是同时存在 \mathbf{J} 和 $-\mathbf{J}$ 两种电流密度。这样就可以利用安培环路定律分别求出两种对称电流分布的磁场，再进行叠加即可得到解答。

由安培环路定律 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ ，先求出均匀分布在半径为 b 的圆柱内的 \mathbf{J} 产生的磁场为

$$\mathbf{B}_b = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \boldsymbol{\rho}_b, & \rho_b < b \\ \frac{\mu_0 b^2}{2} \frac{\mathbf{J} \times \boldsymbol{\rho}_b}{\rho_b^2}, & \rho_b > b \end{cases}$$

同样，均匀分布在半径为 a 的圆柱内的 $-\mathbf{J}$ 产生的磁场为

$$\mathbf{B}_a = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \boldsymbol{\rho}_a, & \rho_a < a \\ -\frac{\mu_0 a^2}{2} \frac{\mathbf{J} \times \boldsymbol{\rho}_a}{\rho_a^2}, & \rho_a > a \end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{\rho}_a$ 和 $\boldsymbol{\rho}_b$ 分别是点 O_a 和 O_b 到场点 P 的位置矢量。

将 \mathbf{B} 和 \mathbf{B}_b 叠加，可得到空间各区域的磁场为

$$\text{圆柱外 } (\rho_b > b): \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \left(\frac{b^2}{\rho_b^2} \boldsymbol{\rho}_b - \frac{a^2}{\rho_a^2} \boldsymbol{\rho}_a \right)$$

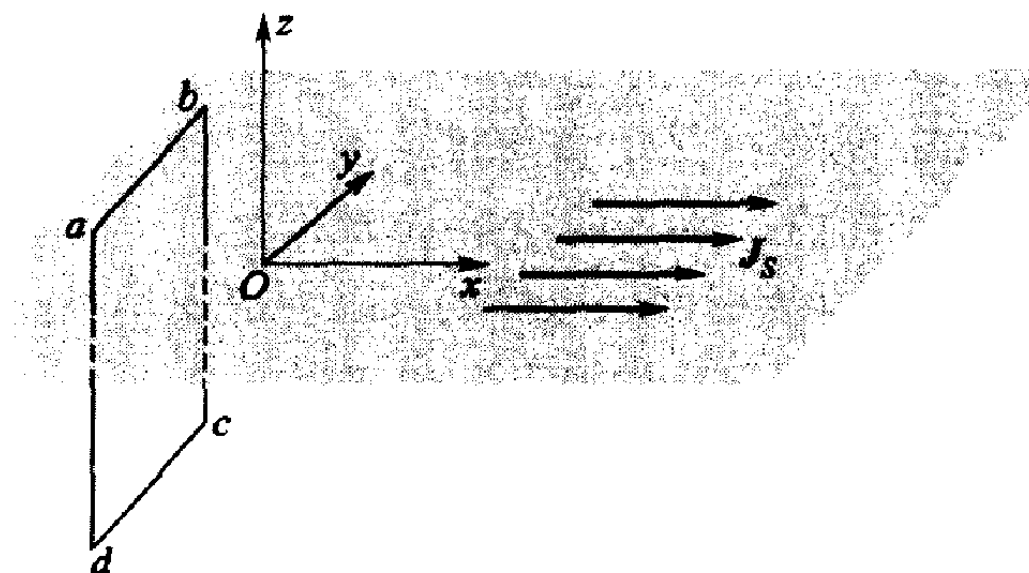
$$\text{圆柱内的空腔外 } (\rho_b < b, \rho_a > a): \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \left(\boldsymbol{\rho}_b - \frac{a^2}{\rho_a^2} \boldsymbol{\rho}_a \right)$$

$$\text{空腔内 } (\rho_a < a): \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times (\boldsymbol{\rho}_b - \boldsymbol{\rho}_a) = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{d}$$

式中, \mathbf{d} 是点 O_b 到点 O_a 的位置矢量。由此可见, 空腔内的磁场是均匀的。

2.23 在 xy 平面上沿 $+x$ 方向有均匀面电流 \mathbf{J}_s , 如图题 2.23 所示。若将 xy 平面视为无限大, 求空间任意一点的 \mathbf{H} 。

解 将面电流 $\mathbf{J}_s = \mathbf{e}_x J_s$ 视为很多线电流的组合, 由毕奥 - 萨伐尔定律可以判定, 沿 x 方向的线电流不会产生 x 方向的磁场。而且, 沿 x 方向的一对位置对称的线电流产生的磁场的 z 分量相抵消。因此, 沿 x 方向的面电流产生的磁场只有 H_y 分量。



图题 2.23

由于对称性, 面电流的上、下两侧的磁场是等值反向的。取如图题 2.23 所示的垂直于 xy 平面的矩形闭合线 $abcd$, 据安培环路定律得

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{ab} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{cd} = J_s(ab)$$

因此, 在 $z > 0$ 区域, 有

$$(-H_y - H_y)(ab) = J_s(ab)$$

即

$$H_y = -\frac{1}{2}J_s$$

而在 $z < 0$ 区域, 则有 $H_y = \frac{1}{2}J_s$

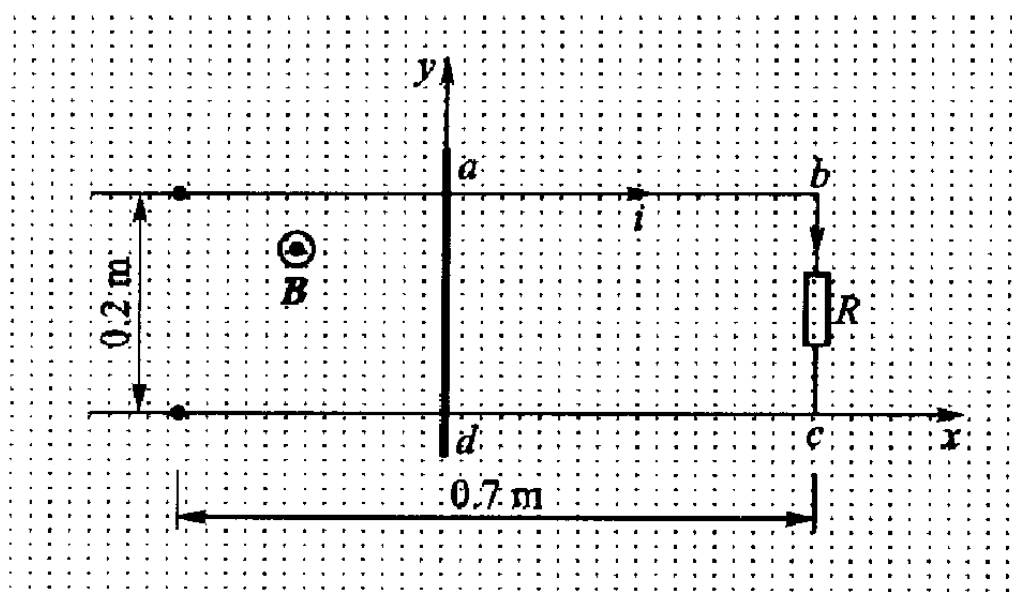
若表示为矢量形式, 则为

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mathbf{J}_s \times \mathbf{e}_n$$

式中, \mathbf{e}_n 是面电流的外法向单位矢量。

2.24 一导体滑片在两根平行的轨道上滑动, 整个装置位于正弦时变磁场

$B = e_z 5 \cos \omega t \text{ mT}$ 之中, 如图题 2.24 所示。滑片的位置由 $x = 0.35(1 - \cos \omega t) \text{ m}$ 确定, 轨道终端接有电阻 $R = 0.2 \Omega$, 试求感应电流 i 。



图题 2.24

解 穿过导体回路 $abcd$ 的磁通为

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = e_z B \cdot e_z ab \times ad = 5 \cos \omega t \times 0.2(0.7 - x) \\ &= \cos \omega t [0.7 - 0.35(1 - \cos \omega t)] \\ &= 0.35 \cos \omega t (1 + \cos \omega t)\end{aligned}$$

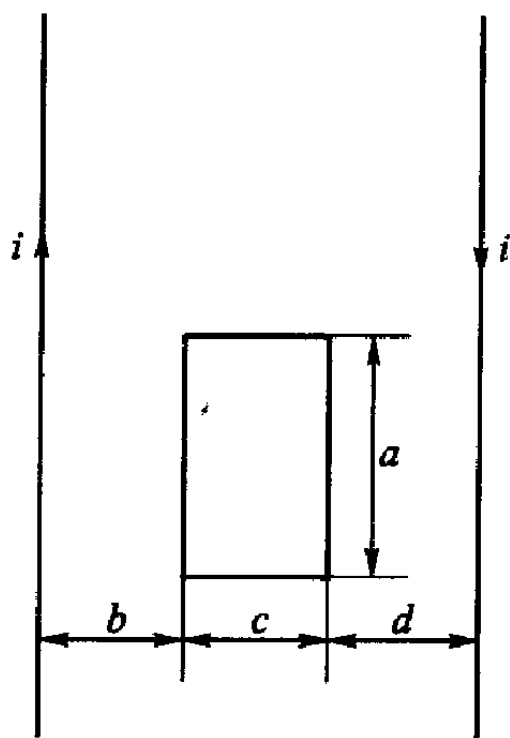
故得感应电流为

$$\begin{aligned}i &= \frac{\mathcal{E}_{\text{in}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{0.2} \times 0.35 \omega \sin \omega t (1 + 2 \cos \omega t) \\ &= -1.75 \omega \sin \omega t (1 + 2 \cos \omega t) \text{ mA}\end{aligned}$$

2.25 平行双线与一矩形回路共面, 如图题 2.25 所示。设 $a = 0.2 \text{ m}$, $b = c = d = 0.1 \text{ m}$, $i = 0.1 \cos(2\pi \times 10^7 t) \text{ A}$, 求回路中的感应电动势。

解 由安培环路定律求出平行双线中的电流在矩形回路平面任意一点产生的磁感应强度分别为

$$\begin{aligned}B_{\text{左}} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \\ B_{\text{右}} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi(b + c + d - r)}\end{aligned}$$



图题 2.25

它们的方向均为垂直于纸面向内。

回路中的感应电动势为

$$\mathcal{E}_{\text{in}} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \left[\int_S B_{\text{左}} dS + \int_S B_{\text{右}} dS \right]$$

式中

$$\int_S B_{\text{左}} dS = \int_b^{b+c} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 a i}{2\pi} \ln\left(\frac{b+c}{b}\right)$$

$$\int_S B_{\text{右}} dS = \int_d^{c+d} \frac{\mu_0 i}{2\pi(b+c+d-r)r} a dr = \frac{\mu_0 a i}{2\pi} \ln\left(\frac{b+c}{b}\right)$$

则

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{in}} &= -2 \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 a i}{2\pi} \ln\left(\frac{b+c}{b}\right) \right] \\ &= -\frac{\mu_0 a}{\pi} \ln\left(\frac{b+c}{b}\right) \frac{d}{dt} [0.1 \cos(2\pi \times 10^7 t)] \\ &= -\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.2}{\pi} \ln 2 \times 0.1 \sin(2\pi \times 10^7 t) \times 2\pi \times 10^7 \text{ V} \\ &= 0.348 \sin(2\pi \times 10^7 t) \text{ V} \end{aligned}$$

2.26 求下列情况下的位移电流密度的大小:

(1) 某移动天线发射的电磁波的磁场强度

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_x 0.15 \cos(9.36 \times 10^8 t - 3.12y) \quad \text{A/m}$$

(2) 一大功率变压器在空气中产生的磁感应强度

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_y 0.8 \cos(3.77 \times 10^2 t - 1.26 \times 10^{-6} x) \quad \text{T}$$

(3) 一大功率电容器在填充的油中产生的电场强度

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x 0.9 \cos(3.77 \times 10^2 t - 2.81 \times 10^{-6} z) \quad \text{MV/m}$$

设油的相对介电常数 $\varepsilon_r = 5$ 。

(4) 频率 $f = 60 \text{ Hz}$ 时的金属导体中, $\mathbf{J} = \mathbf{e}_x \sin(377 \times t - 117.1z) \text{ MA/m}^2$, 设金属导体的 $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ 。

解 (1) 由 $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_d &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_z \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ &= -\mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial y} [0.15 \cos(9.36 \times 10^8 t - 3.12y)] \quad \text{A/m} \end{aligned}$$

$$= -e_z 0.468 \sin(9.36 \times 10^8 t - 3.12y) \text{ A/m}^2$$

故

$$|J_d| = 0.468 \text{ A/m}^2$$

(2) 由 $\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$, $B = \mu_0 H$, 得

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} = e_z \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$= e_z \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} [0.8 \cos(3.77 \times 10^2 t - 1.26 \times 10^{-6} x)]$$

$$= e_z 0.802 \sin(3.77 \times 10^2 t - 1.26 \times 10^{-6} x) \text{ A/m}^2$$

故

$$|J_d| = 0.802 \text{ A/m}^2$$

$$(3) D = \epsilon_r \epsilon_0 E = 5 \epsilon_0 [e_x 0.9 \times 10^6 \cos(3.77 \times 10^2 t - 2.81 \times 10^{-6} z)]$$

$$= e_x 5 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.9 \times 10^6 \cos(3.77 \times 10^2 t - 2.81 \times 10^{-6} z)$$

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = -e_x 15 \times 10^{-3} \sin(3.77 \times 10^2 t - 2.81 \times 10^{-6} z) \text{ A/m}^2$$

故

$$|J_d| = 15 \times 10^{-3} \text{ A/m}^2$$

$$(4) E = \frac{J}{\sigma} = \frac{1}{5.8 \times 10^7} e_x 10^6 \sin(377t - 117.1z)$$

$$= e_x 1.72 \times 10^{-2} \sin(377t - 117.1z) \text{ V/m}$$

$$D = \epsilon E = e_x 8.85 \times 10^{-12} \times 1.72 \times 10^{-2} \sin(377t - 117.1z)$$

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = e_x 15.26 \times 10^{-14} \times 377 \cos(377t - 117.1z)$$

$$= e_x 57.53 \times 10^{-12} \cos(377t - 117.1z) \text{ A/m}^2$$

故

$$|J_d| = 57.53 \times 10^{-12} \text{ A/m}$$

2.27 同轴线的内导体半径 $a = 1 \text{ mm}$, 外导体的内半径 $b = 4 \text{ mm}$, 内、外导体间为空气, 如图题 2.27 所示。假设内、外导体间的电场强度为 $E = e_\rho \frac{100}{\rho} \cos(10^8 t - kz) \text{ V/m}$ 。

(1) 求与 E 相伴的 H ; (2) 确定 k 的值; (3) 求内导体表面的电流密度; (4) 求沿轴线 $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$ 区域内的位移电流。

解 (1) 维系电场 E 和磁场 H 的是麦克斯韦方程。将 $\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$ 在圆柱坐标系中展开, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times E = -e_\phi \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \\ &= -e_\phi \frac{100k}{\mu_0 \rho} \sin(10^8 t - kz) \end{aligned}$$

将上式对时间 t 积分, 得

$$H = e_\phi \frac{100k}{\mu_0 \rho \times 10^8} \cos(10^8 t - kz)$$

(2) 为确定 k 值, 将上述 H 代入 $\nabla \times H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times H = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{e_\rho}{\rho} \left[-\frac{\partial}{\partial z} (\rho H_\phi) \right] \\ &= -e_\rho \frac{100k^2}{\mu_0 \epsilon_0 \rho \times 10^8} \sin(10^8 t - kz) \end{aligned}$$

将上式对时间 t 积分, 得

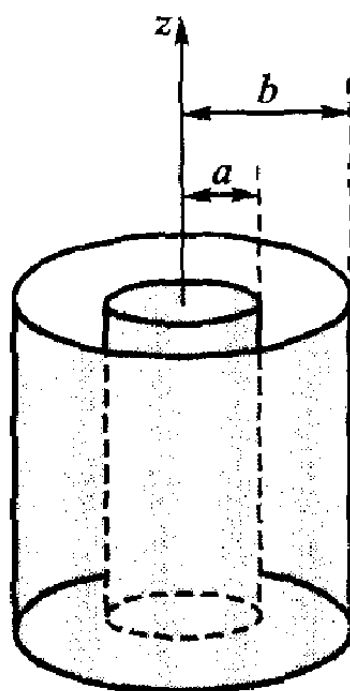
$$E = e_\rho \frac{100k^2}{\mu_0 \epsilon_0 \rho \times (10^8)^2} \cos(10^8 t - kz)$$

将其与题所给的 $E = e_\rho \frac{100}{\rho} \cos(10^8 t - kz)$ 比较, 得

$$k^2 = (10^8)^2 \mu_0 \epsilon_0$$

故

$$k = 10^8 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{10^8}{3 \times 10^8} \text{ rad/m} = \frac{1}{3} \text{ rad/m}$$



图题 2.27

因此, 同轴线内、外导体之间的电场和磁场表示式分别为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_\rho \frac{100}{\rho} \cos\left(10^8 t - \frac{1}{3}z\right) \text{ V/m}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{100}{120\pi\rho} \cos\left(10^8 t - \frac{1}{3}z\right) \text{ A/m}$$

(3) 将内导体视为理想导体, 利用理想导体的边界条件即可求出内导体表面的电流密度

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} \Big|_{\rho=a} = \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\phi \frac{100}{120\pi\rho} \cos\left(10^8 t - \frac{1}{3}z\right) \\ &= \mathbf{e}_z 265.3 \cos\left(10^8 t - \frac{1}{3}z\right) \text{ A/m} \end{aligned}$$

位移电流密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_d &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathbf{e}_\rho \frac{100}{\rho} \cos\left(10^8 t - \frac{1}{3}z\right) \right] \\ &= -\mathbf{e}_\rho \frac{8.85 \times 10^{-2}}{\rho} \sin\left(10^8 t - \frac{1}{3}z\right) \text{ A/m}^2 \end{aligned}$$

(4) 在 $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$ 区域中的位移电流则为

$$\begin{aligned} i_d &= \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \mathbf{J}_d \cdot \mathbf{e}_\rho 2\pi\rho dz = -2\pi \times 8.85 \times 10^{-2} \int_0^1 \sin\left(10^8 t - \frac{1}{3}z\right) dz \\ &= -2\pi \times 8.85 \times 10^{-2} \times 3 \left[\cos\left(10^8 t - \frac{1}{3}z\right) \right] \Big|_0^1 \\ &= 0.55 \sin\left(10^8 t - \frac{1}{3}\right) \text{ A} \end{aligned}$$

2.28 试将微分形式的麦克斯韦方程组写成 8 个标量方程: (1) 在直角坐标系中; (2) 在圆柱坐标系中; (3) 在球坐标系中。

解 (1) 在直角坐标系中

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

(2) 在圆柱坐标系中

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} = J_\rho + \frac{\partial D_\rho}{\partial t} \\ \frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = J_\phi + \frac{\partial D_\phi}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\rho}{\partial \phi} = J_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_\rho}{\partial t} \\ \frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_\rho}{\partial \phi} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (\text{体电荷密度})$$

(3) 在球坐标系中

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta H_\phi) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] = J_r + \frac{\partial D_r}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r H_\phi) \right] = J_\theta + \frac{\partial D_\theta}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = J_\phi + \frac{\partial D_\phi}{\partial t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\phi) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right] = -\mu \frac{\partial H_r}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] = -\mu \frac{\partial H_\theta}{\partial t} \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -\mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta D_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} = \rho$$

2.29 由置于 $\rho = 3 \text{ mm}$ 和 $\rho = 10 \text{ mm}$ 的导体圆柱面和 $z = 0, z = 20 \text{ cm}$ 的导体平面围成的圆柱形空间内充满 $\varepsilon = 4 \times 10^{-11} \text{ F/m}, \mu = 2.5 \times 10^{-6} \text{ H/m}, \sigma = 0$ 的媒质。若设定媒质中的磁场强度为 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{2}{\rho} \cos 10\pi z \cos \omega t \text{ A/m}$, 利用麦克斯韦方程求: (1) ω ; (2) \mathbf{E} 。

解 (1) 将题所设的 \mathbf{H} 代入方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, 得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{e}_\rho \left(-\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) = -\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{\rho} \cos 10\pi z \cos \omega t \right) \\ &= \mathbf{e}_\rho \frac{2 \times 10\pi}{\rho} \sin 10\pi z \cos \omega t \\ &= \mathbf{e}_\rho \varepsilon \frac{\partial E_\rho}{\partial t} \end{aligned}$$

对时间 t 积分, 得

$$E_\rho = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{20\pi}{\rho} \sin 10\pi z \cos \omega t dt = \frac{20\pi}{\varepsilon \omega \rho} \sin 10\pi z \sin \omega t$$

将 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\rho E_\rho$ 代入方程 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, 得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{e}_\phi \frac{\partial E_\rho}{\partial z} = \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{20\pi}{\varepsilon \omega \rho} \sin 10\pi z \sin \omega t \right) \\ &= \mathbf{e}_\phi \frac{200\pi^2}{\varepsilon \omega \rho} \cos 10\pi z \sin \omega t = \mathbf{e}_\phi \mu \frac{\partial H_\phi}{\partial t} \end{aligned}$$

对时间 t 积分, 得

$$H_{\phi} = -\frac{200\pi^2}{\mu\epsilon\omega\rho}\cos 10\pi z\int\sin\omega t dt = \frac{200\pi^2}{\mu\epsilon\omega^2\rho}\cos 10\pi z\cos\omega t$$

将上式与题所设的 $H_{\phi} = \frac{2}{\rho}\cos 10\pi z\cos\omega t$ 对比,得

$$\omega^2 = \frac{100\pi^2}{\mu\epsilon} = \frac{100\pi^2}{2.5 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-11}} = \pi^2 \times 10^{18}$$

故

$$\omega = \pi \times 10^9 \text{ rad/s}$$

(2) 将 $\omega = \pi \times 10^9 \text{ rad/s}$, $\epsilon = 4 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ 代入 $E_{\rho} = \frac{20\pi}{\epsilon\omega\rho}\sin 10\pi z\sin\omega t$

中,得

$$\begin{aligned} E &= e_{\rho} \frac{20\pi}{4 \times 10^{-11} \times \pi \times 10^9 \rho} \sin 10\pi z \sin 10^9 \pi t \text{ V/m} \\ &= e_{\rho} \frac{10^3}{2\rho} \sin 10\pi z \sin 10^9 \pi t \text{ V/m} \end{aligned}$$

2.30 媒质 1 的电参数为 $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$ 、 $\mu_1 = 2\mu_0$ 、 $\sigma_1 = 0$, 媒质 2 的电参数为 $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$ 、 $\mu_2 = 3\mu_0$ 、 $\sigma_2 = 0$ 。两种媒质分界面上的法向单位矢量为 $e_n = e_x 0.64 + e_y 0.6 - e_z 0.48$, 由媒质 2 指向媒质 1。若已知媒质 1 内邻近分界面上的点 P 处 $B_1 = (e_x - e_y 2 + e_z 3) \sin 300t \text{ T}$, 求 P 点处下列量的大小: (1) B_{1n} ; (2) B_{1t} ; (3) B_{2n} ; (4) B_{2t} 。

解 (1) B_1 在分界面法线方向的分量为

$$\begin{aligned} B_{1n} &= |B_1 \cdot e_n| = |(e_x - e_y 2 + e_z 3) \cdot (e_x 0.64 + e_y 0.6 - e_z 0.48)| \\ &= |0.64 - 1.2 - 1.44| \text{ T} = 2 \text{ T} \end{aligned}$$

$$(2) B_{1t} = |\sqrt{B_1^2 - B_{1n}^2}| = |\sqrt{1 + 2^2 + 3^2 - 2^2}| \text{ T} = 3.16 \text{ T}$$

(3) 利用磁场边界条件, 得

$$B_{2n} = B_{1n} = 2 \text{ T}$$

(4) 利用磁场边界条件, 得

$$B_{2t} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1t} = \frac{3\mu_0}{2\mu_0} \times 3.16 = 4.74 \text{ T}$$

2.31 媒质 1 的电参数为 $\epsilon_1 = 5\epsilon_0$ 、 $\mu_1 = 3\mu_0$ 、 $\sigma_1 = 0$, 媒质 2 可视为理想导体 ($\sigma_2 = \infty$)。设 $y=0$ 为理想导体表面, $y>0$ 的区域(媒质 1)内的电场强度

$$E = e_y 20 \cos(2 \times 10^8 t - 2.58z) \text{ V/m}$$

试计算 $t = 6 \text{ ns}$ 时: (1) 点 $P(2, 0, 0.3)$ 处的面电荷密度 ρ_s ; (2) 点 P 处的 \mathbf{H} ; (3) 点 P 处的面电流密度 \mathbf{J}_s 。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \quad \rho_s &= \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{D} \big|_{y=0} = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y 20 \times 5 \varepsilon_0 \cos(2 \times 10^8 t - 2.58z) \\ &= 20 \times 5 \times 8.85 \times 10^{-12} \cos(2 \times 10^8 \times 6 \times 10^{-9} - 2.58 \times 0.3) \text{ C/m}^2 \\ &= 80.6 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2\end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{由 } \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \text{ 得}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{\mu} \left(-\mathbf{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = \mathbf{e}_x \frac{1}{3\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} [20 \cos(2 \times 10^8 t - 2.58z)] \\ &= \mathbf{e}_x \frac{1}{3\mu_0} 20 \times 2.58 \sin(2 \times 10^8 t - 2.58z)\end{aligned}$$

对时间 t 积分, 得

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{e}_x \frac{1}{3\mu_0} 20 \times 2.58 \int \sin(2 \times 10^8 t - 2.58z) dt \\ &= -\mathbf{e}_x \frac{20 \times 2.58}{3\mu_0 \times 2 \times 10^8} \cos(2 \times 10^8 t - 2.58z) \\ &= -\mathbf{e}_x \frac{20 \times 2.58}{3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 2 \times 10^8} \cos(2 \times 10^8 \times 6 \times 10^{-9} - 2.58 \times 0.3) \text{ A/m} \\ &= -\mathbf{e}_x 62.3 \times 10^{-3} \text{ A/m}\end{aligned}$$

$$(3) \quad \mathbf{J}_s = \mathbf{e}_n \times \mathbf{H} \big|_{y=0} = \mathbf{e}_y \times (\mathbf{e}_x H_x) \big|_{y=0} = \mathbf{e}_z 62.3 \times 10^{-3} \text{ A/m}$$