



第5章

时域离散系统的网络结构



第5章 时域离散系统的网络结构

本章主要内容

- 离散时间系统的描述
- 用信号流图表示网络结构
- 无限长单位脉冲响应基本网络结构
- 有限长单位脉冲响应基本网络结构



5.1 引言

时域离散系统或网络的描述方法：

- **差分方程**: 描述时域离散系统输入输出之间的关系。
- **单位脉冲响应**: 系统对 $\delta(n)$ 的零状态响应。
- **系统函数**: 系统单位脉冲响应 $h(n)$ 的Z变换。

如果系统输入输出服从 N 阶差分方程，即：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) - \frac{1}{3}x(n-1)$$

其系统函数 $H(z)$ 为：
$$Y(z) = \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) + X(z) - \frac{1}{3}z^{-1}X(z)$$

$$\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z) = \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right)}$$



5.1 引言

为了用计算机或专用硬件对输入信号进行处理，必须把上式变换成一种算法，按照这种算法对输入信号进行运算。

系统函数是抽象的数学模型，而网络结构是具象的“实现方案”：

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

对应的网络结构是“两个延迟单元、几个加法器和乘法器器”——硬件上，延迟单元对应寄存器，加法器对应运算放大器，乘法器对应系数乘法器；软件上，延迟单元对应数组缓存，加法器和乘法器对应基本运算代码。

如果没有网络结构，只看公式，根本不知道该用哪些元器件 / 代码实现这个滤波器——这就是网络结构的核心价值：连接理论模型与工程实现。



5.1 引言

给定一个差分方程，对应不同的算法有很多种，例如：

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{-1.5}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{2.5}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$$H_3(z) = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

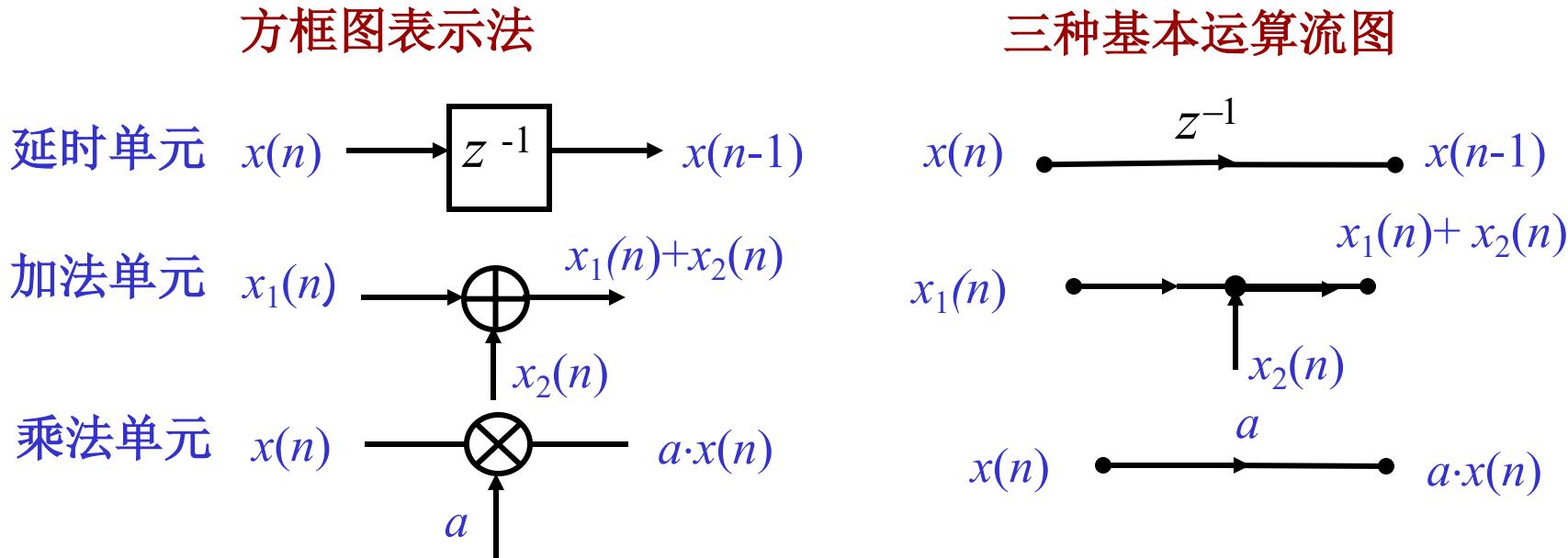
$$H_1(z)=H_2(z)=H_3(z)$$

具有相同系统函数 $H(z)$ 的离散时间系统可以有不同的实现方法（算法），不同的算法直接影响系统运算误差，运算速度以及系统的复杂程度和成本。

因此研究实现信号的算法是一个很重要的问题，可用网络结构表示具体的算法，因此，网络结构实际表示的是一种运算结构。本章重点介绍数字系统的基本网络结构。

5.2 用信号流图表示网络结构

1. 数字信号处理中的三种基本运算：乘法、加法和单位延迟



不同的信号流图代表不同的运算方法，而对于同一个系统函数可以有多种信号流图相对应。

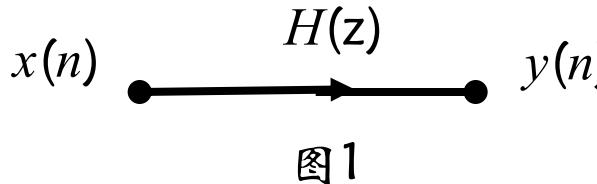


5.2 用信号流图表示网络结构

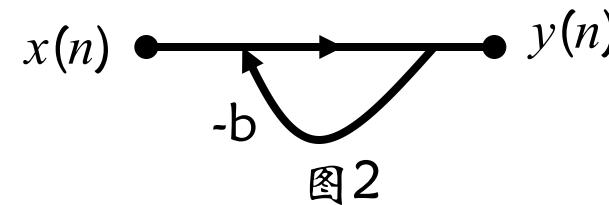
2. 基本信号流图

- 信号流图中所有支路的增益是常数或者是 z^{-1} ;
- 流图环路中必须存在延时支路;
- 节点和支路的数目是有限的。

例：判断下列两图是否为基本信号流图。



支路的增益不是常数或 z^{-1}



流图环路中没有延时支路

网络结构可以通过基本信号流图来描述。

基本信号流图对应一种具体的运算方法，非基本信号流图不能用一种具体的运算方法来实现。

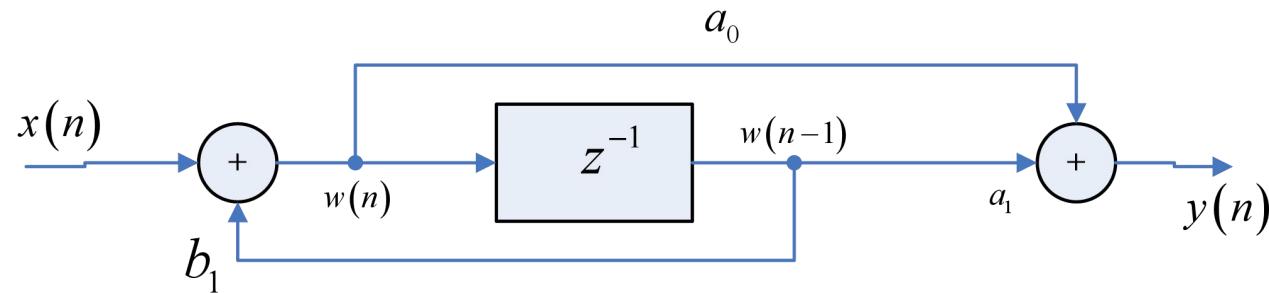


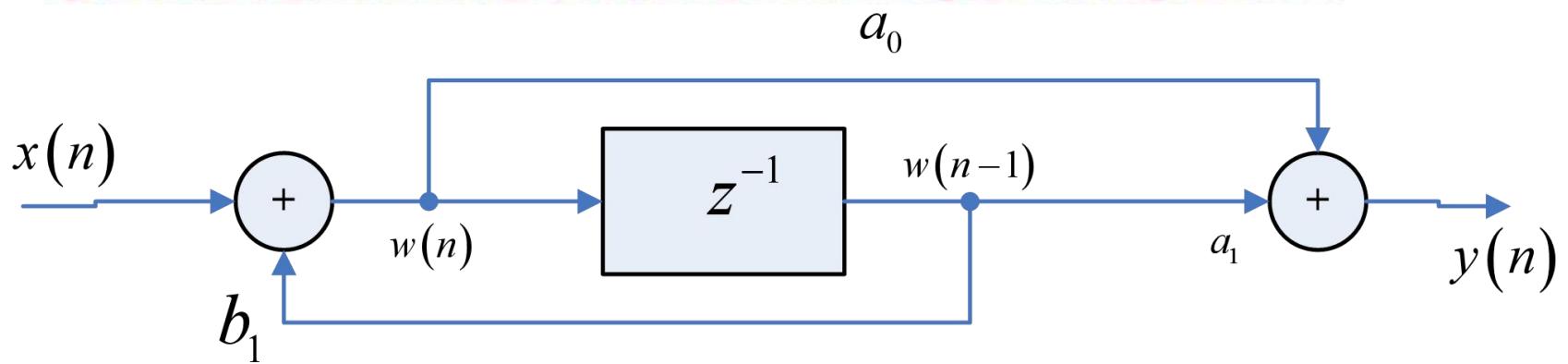
5.2 用信号流图表示网络结构

3. 由基本信号流图求系统函数 $H(z)$

- 根据给定的信号流图，设置中间节点变量，**节点变量 $w(n)$** 或者 **$w(z)$** 等于该节点的所有输入支路变量之和。代入中间节点变量，可以最终确定流图的输入与输出关系，并根据输入、输出关系求出系统函数 $H(z)$ 。

- 例：下图是某一阶系统结构，要求
- (1) 列出系统的差分方程和传递函数。（提示：利用 $w(n)$ 和 $w(n-1)$ 作为中间变量）
- (2) $b_1 = 0.5, a_0 = -0.5, a_1 = 1$ 时，分析系统的零极点分布，判断是最小相位系统或最大相位系统或混合相位系统；
- (3) 求出 $b_1 = 0.5, a_0 = -0.5, a_1 = 1$ 时的单位脉冲响应 $h(n)$





解：设2个参考点位 $w(n)$ 和 $w(n-1)$ ，可得到两个方程

$$w(n) = b_1 w(n-1) + x(n)$$

$$y(n) = a_0 w(n) + a_1 w(n-1)$$

取Z变换得到

$$W(z) = b_1 W(z) z^{-1} + X(z)$$

$$Y(z) = a_0 W(z) + a_1 W(z) z^{-1}$$

$$W(z) = \frac{X(z)}{1 - b_1 z^{-1}}$$

$$W(z) = \frac{Y(z)}{a_0 + a_1 z^{-1}}$$



两式合并得到

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}$$

取反Z变换

$$y(n) - b_1 y(n-1) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1)$$

$$y(n) = a_0 x(n) + a_1 x(n-1) + b_1 y(n-1)$$



- (2) $b_1 = 0.5, a_0 = -0.5, a_1 = 1$ 时, 分析系统的零极点分布, 判断是最小相位系统或最大相位系统或混合相位系统;

代入已知参数得到

$$H(z) = \frac{-0.5 + z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}, \text{ 极点为 } 0.5, \text{ 零点为 } 2,$$

零点在单位圆外, 极点在单位圆内, 故是最大相位系统。

- (3) 求出 $b_1 = 0.5, a_0 = -0.5, a_1 = 1$ 时的单位脉冲响应 $h(n)$

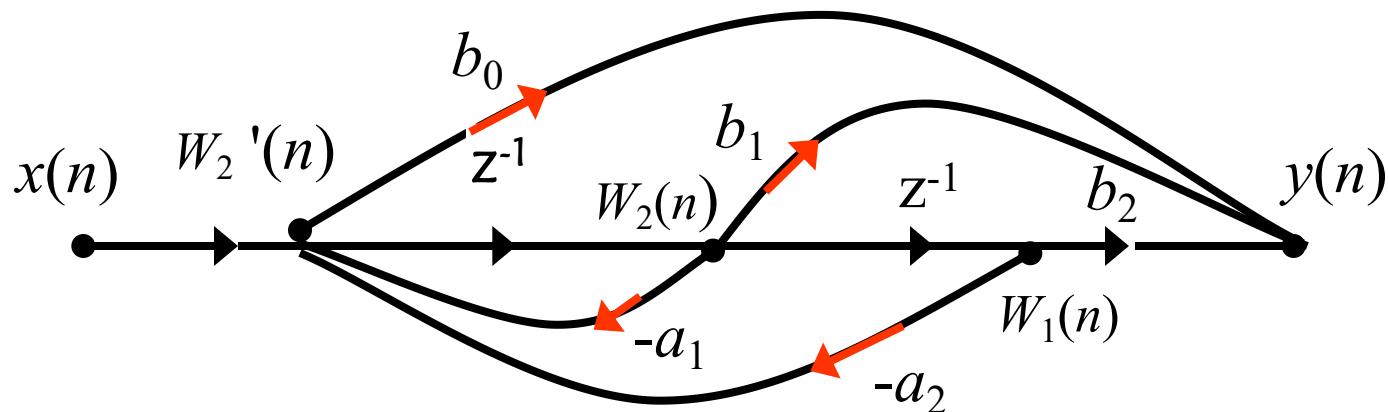
$$H(z) = \frac{-0.5 + z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{-0.5}{1 - 0.5z^{-1}} + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}z^{-1}$$

$$h(n) = -0.5(0.5)^n u(n) + (0.5)^{n-1} u(n-1)$$



5.2 用信号流图表示网络结构

例：已知基本信号流图如下，求其系统函数 $H(z)$ 。



解：

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1(n)=w_2(n-1); \\ w_2(n)=w_2'(n-1); \\ w_2'(n)=x(n)-a_1w_2(n)-a_2w_1(n); \\ y(n)=b_2w_1(n)+b_1w_2(n)+b_0w_2'(n); \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\text{ }} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1(z)=W_2(z)z^{-1}; \\ W_2(z)=W_2'(z)z^{-1}; \\ W_2'(z)=X(z)-a_1W_2(z)-a_2W_1(z); \\ Y(z)=b_2W_1(z)+b_1W_2(z)+b_0W_2'(z); \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$



5.2 用信号流图表示网络结构

4. 网络结构分类

一般将网络结构分成两类：

*无限长单位脉冲响应网络
(IIR)(Infinite Impulse Response)

特点：(1) 网络的单位脉冲响应 $h(n)$ 是无限长的；
(2) 网络结构中存在输出对输入的反馈支路，
即：信号流图中存在环路。

描述系统的差分方程为：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$



LTI系统

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

$a_1 \dots a_N$ 中至少有一项为非零值时，

$$H(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i z}{z - p_i}$$

$$h(n) = IFT[H(z)] = \sum_{i=1}^N A_i (p_i)^n u(n)$$

长度无限



*有限长单位脉冲响应网络

(FIR) (Finite Impulse Response)

特点：

- (1) 单位脉冲响应 $h(n)$ 有限长(有限个n值不为零)；
- (2) 网络结构中不存在输出对输入的反馈支路；

其差分方程可表示为：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i), M \text{ 为有限值}$$



FIR、IIR系统举例

$$1、y(n)=\sum_{i=0}^M b_i x(n-i)=x(n)+0.8x(n-1)-x(n-2)-0.8x(n-3)\Rightarrow b_n=h(n)$$

$$2、y(n)-1.7y(n-1)=x(n)+0.8x(n-1)-x(n-2)$$

$$3、y(n)=ay(n-1)+x(n)\Rightarrow h(n)=a^n u(n)$$

$$4、H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

$$5、H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}$$



5.3 IIR系统的基本网络结构

IIR基本网络结构有三种：直接型、级联型和并联型

一、直接型：(直接I型、II型)

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}$$

对N阶差分方程：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

1、直接I型：

从差分方程出发，用基本运算单元直接画出网络流图，第一部分
(**输入**)对应 $\sum_{i=0}^M b_i \cdot x(n-i)$ ，第二部分(**反馈**)对应 $\sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$

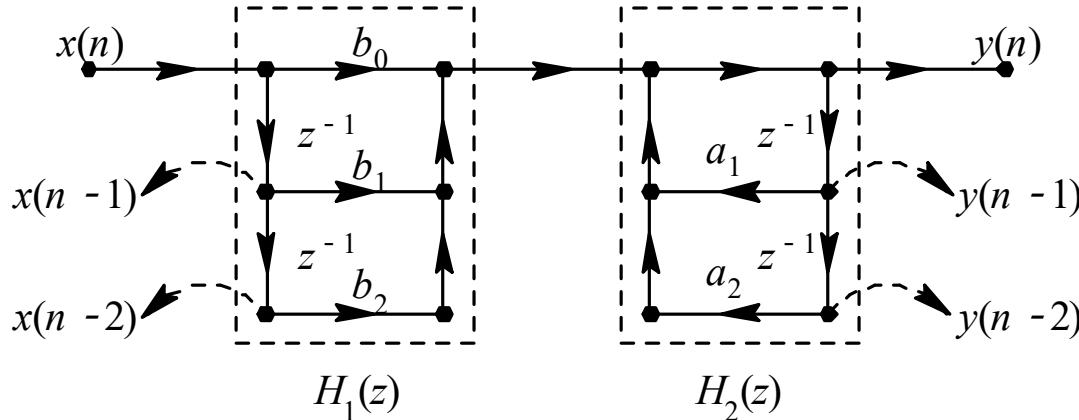
设： $M=N=2$ ， 系统函数为：

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} = H_1(z) \bullet H_2(z)$$

直接画出网络结构：

5.3 IIR系统的基本网络结构

$$H(z) = H_1(z) \bullet H_2(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



直接I型：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

优点： 结构简单、清晰；

缺点： 所用运算单元多，延时支路较多；

a_k 、 b_k 常数对滤波器的性能控制作用不明显；

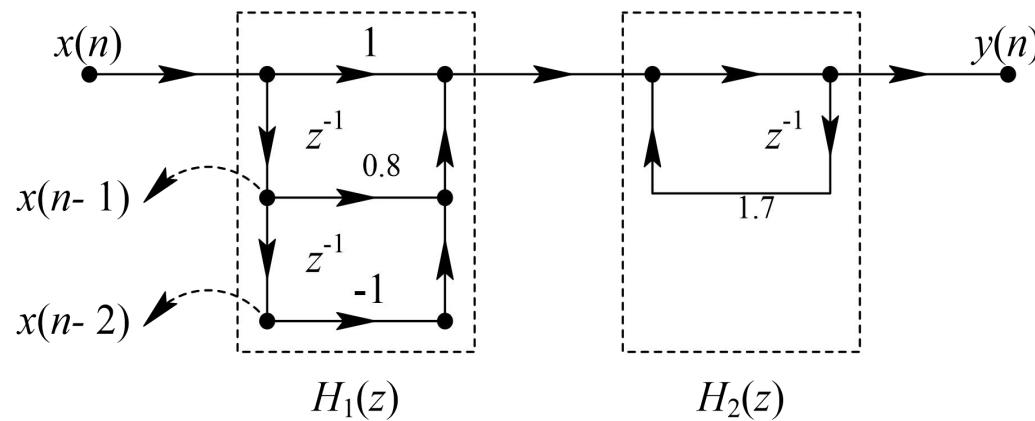
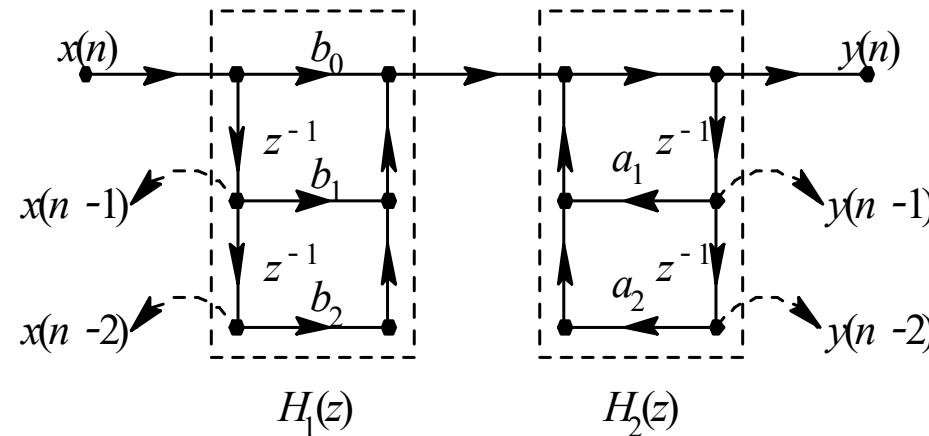
零、极点关系不明显，调整困难。



5.3 IIR系统的基本网络结构

$$y(n) - 1.7y(n-1) = x(n) + 0.8x(n-1) - x(n-2)$$

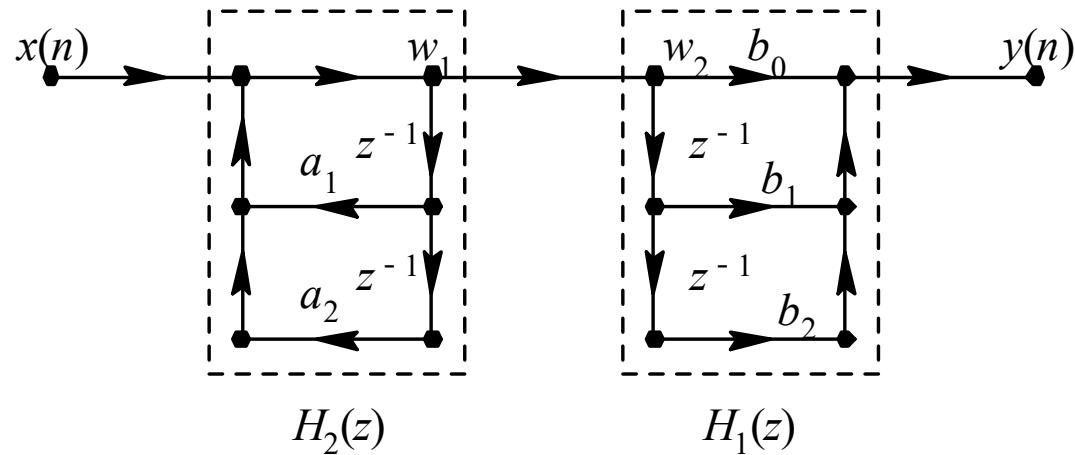
$$H(z) = \frac{1 + 0.8z^{-1} - 1z^{-2}}{1 - 1.7z^{-1}} = H_1(z) \cdot H_2(z)$$



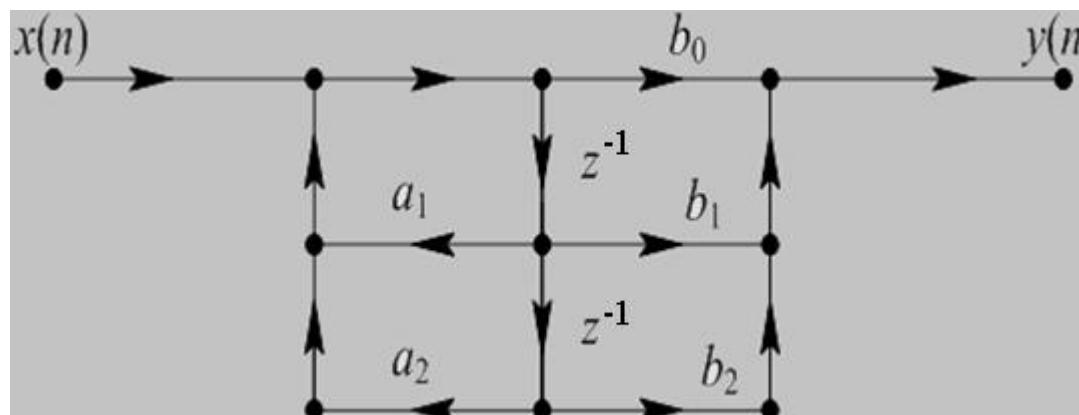
5.3 IIR系统的基本网络结构

2. 直接II型：

由于系统函数 $H(z) = H_1(z)H_2(z) = H_2(z)H_1(z)$, 上图中两部分交换位置:



由于节点变量 $w_2=w_1$, 前后两部分延时支路可以合并:



优点:

结构简单、清晰，延时支路比直接I型减少一半。

缺点:

- a_k 、 b_k 常数对滤波器的性能控制作用不明显；
- 零、极点关系不明显，调整困难；

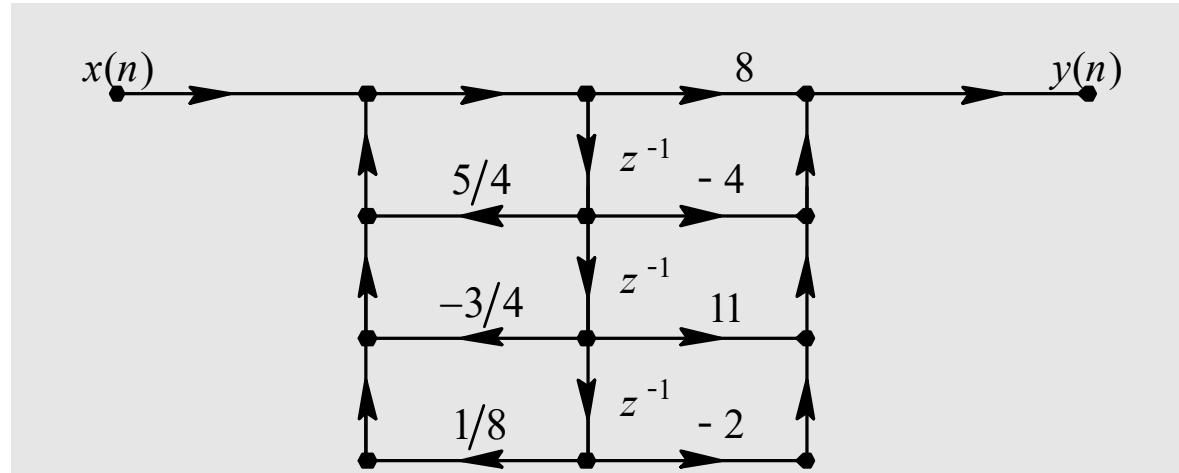


5.3 IIR系统的基本网络结构

例：已知IIR数字滤波器的系统函数，画出该滤波器的直接II型结构。

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

解：

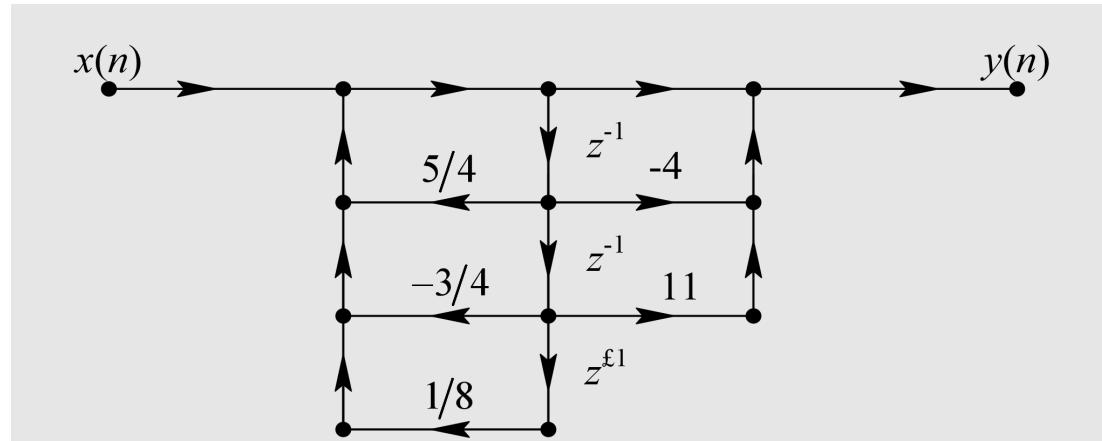


5.3 IIR系统的基本网络结构

例：已知IIR数字滤波器的系统函数，画出该滤波器的直接型II结构。

$$H(z) = \frac{1 - 4z^{-1} + 11z^{-2}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

解：由 $H(z)$ 写出差分方程如下：





5.3 IIR系统的基本网络结构

二、级联型

$H(z)$ 分解成一些一阶或二阶数字网络的级联形式:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_k(z) \quad H_3(z) = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

将分子分母多项式分别进行因式分解:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^N a_j \cdot z^{-j}} = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - C_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})}$$

式中, A 是常数, C_r , d_r 分别表示零点、极点, 为实数或共轭成对的复数。

- 如零点、极点为实数, 则构成一阶节(网络)
- 如零点、极点为复数, 将共轭成对的零点(极点)放在一起, 形成一个二阶多项式, 系数仍为实数, 则构成二阶节(网络)

5.3 IIR系统的基本网络结构

一阶网络系统函数为:

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1}}{1 - \alpha_{1j}z^{-1}}$$

二阶网络系统函数为:

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1} + \beta_{2j}z^{-2}}{1 - \alpha_{1j}z^{-1} - \alpha_{2j}z^{-2}}$$

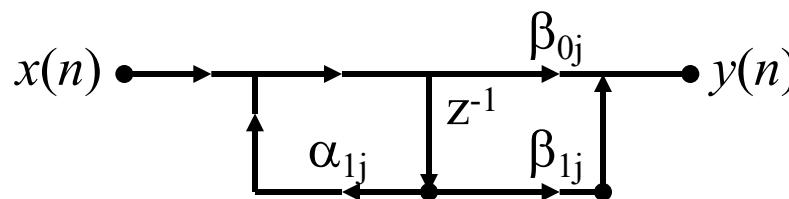
式中: β_{0j} 、 β_{1j} 、 β_{2j} 、 α_{1j} 和 α_{2j} 均为实数。

$H(z)$ 分解成一些一阶或二阶数字网络的级联形式:

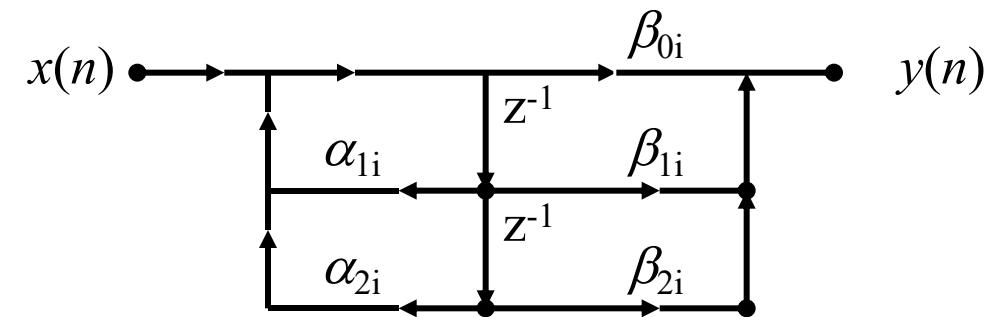
$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_k(z)$$

级联型结构不是唯一的

式中 $H_i(z)$ 表示一个一阶或二阶的数字网络的系统函数, 每个 $H_i(z)$ 的网络结构均采用前面介绍的直接型网络结构表示。



直接型一阶网络结构图

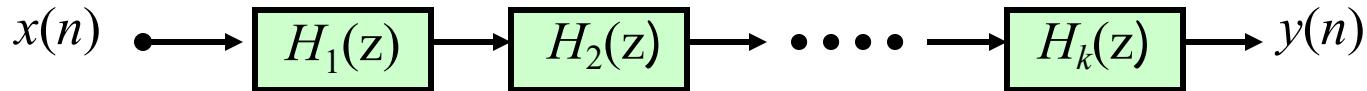


直接型二阶网络结构



5.3 IIR系统的基本网络结构

IIR的级联型网络结构: $H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_k(z)$, 级联型示意图:



优点:

- 每个一阶网络决定一个零点、一个极点，每个二阶网络决定一对零点、一对极点。调整一阶网络和二阶网络系数可以改变零极点位置，所以零、极点调整方便，便于调整频响。

缺点:

- 存在误差积累、级联结构中后面的网络输出不会传送到前面，所以运算误差的积累相对于直接型要小；



5.3 IIR系统的基本网络结构

工程案例（级联型）

串联结构 ($H(z) = H_1(z)H_2(z)\dots H_K(z)$)：解决“高稳定性、易实现”的问题

工程场景1：信号的“分步处理”

如“语音信号处理”：先通过“预加重子系统” ($H_1(z) = 1 - 0.97z^{-1}$) 提升高频分量，再通过“降噪子系统” ($H_2(z)$) 过滤噪声，最后通过“放大子系统” ($H_3(z) = 10$) 提升信号幅度——三个子系统串联，信号依次经过处理，每个子系统专注一个功能，便于模块化设计和维护。

工程场景2：线性相位滤波器实现

FIR 滤波器可实现严格的线性相位（无相位失真），但高阶 FIR 滤波器的延迟单元多，直接实现成本高。

解决方案：用串联结构，将高阶 FIR 滤波器拆成多个低阶 FIR 滤波器的串联（如 8 阶拆成 4 个 2 阶）。

- 优势：每个低阶 FIR 滤波器的延迟单元少，硬件实现成本低（高阶 FIR 对系数精度要求极高，微小误差会严重影响滤波性能，且高阶时加法器输入端口过多，会增加电路复杂度与成本），且串联结构的相位是各子系统相位之和，仍能保持线性相位（因每个子系统都是线性相位）。

5.3 IIR系统的基本网络结构

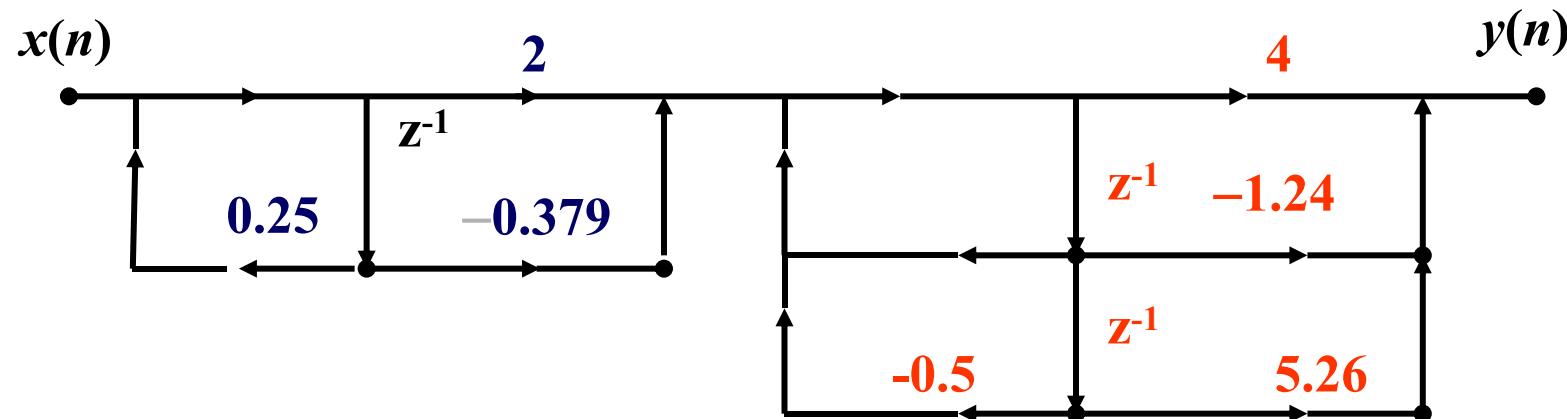
例：已知IIR数字滤波器的系统函数，画出该滤波器的级联型结构。

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$

解：将 $H(z)$ 的分子、分母进行因式分解，得

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})} \\ &= \frac{(2 - 0.379z^{-1})}{(1 - 0.25z^{-1})} \cdot \frac{(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})} \end{aligned}$$

则 $H(z)$ 的级联型结构为：



为了减少单位延迟的数量，将一阶的分子、分母多项式组成一个一阶网络，二阶的分子、分母多项式组成一个二阶网络。

5.3 IIR系统的基本网络结构

三、并联型

$$H_2(z) = \frac{-1.5}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{2.5}{1 - 0.5z^{-1}}$$

将 $H(z)$ 展成部分分式形式得到 IIR 并联型结构，即：

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_k(z)$$

式中， $H_i(z)$ 通常为一阶网络和二阶网络，网络系数均为实数。

二阶网络的系统函数一般为：

$$H_i(z) = \frac{\beta_{0i} + \beta_{1i}z^{-1}}{1 - a_{1i}z^{-1} - a_{2i}z^{-2}}$$

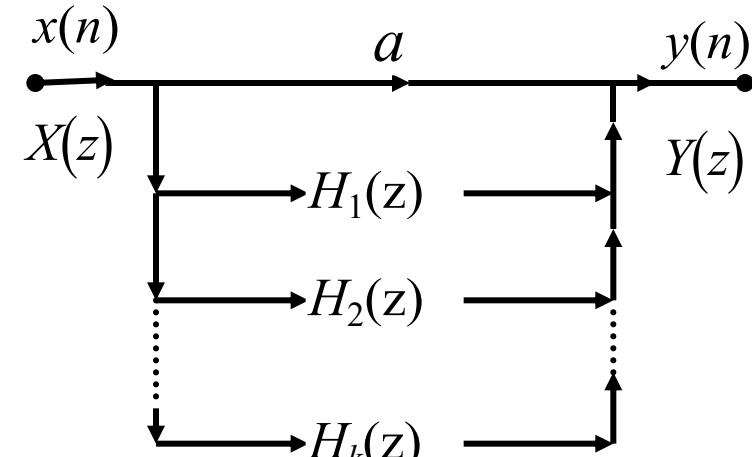
$$\text{or } H_i(z) = \frac{\beta_{0i}}{1 - a_{1i}z^{-1}}$$

其输出 $Y(z)$ 表示为：

$$Y(z) = H_1(z)X(z) + H_2(z)X(z) + \dots + H_k(z)X(z)$$

表明：将 $x(n)$ 送入每个二阶(或一阶)网络后，将所有输出相加得到输出 $y(n)$

式中， β_{0i} 、 β_{1i} 、 a_{1i} 和 a_{2i} 都是实数。如果 $a_{2i} = \beta_{1i} = 0$ 则构成一阶网络。





5.3 IIR系统的基本网络结构

优点:

- 运算速度最高; 
- 无误差积累, 各级误差互不影响, 仅极点调整方便。所以, 在要求准确传输极点的场合, 宜采用这种结构;

缺点:

- 零点调整不方便, 当 $H(z)$ 有多阶极点时, 部分分式展开不易。

例: 若系统函数 $H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}$, 求 $H(z)$ 的并联型结构。

解: 将 $H(z)$ 表示成 z 的正幂形式:

$$H(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-0.5)(z-0.25)}$$

对 $H(z)$ 展开成部分分式:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{(z+1)^2}{z(z-0.5)(z-0.25)} = \frac{A}{z-0.5} + \frac{B}{z-0.25} + \frac{C}{z}$$

5.3 IIR系统的基本网络结构

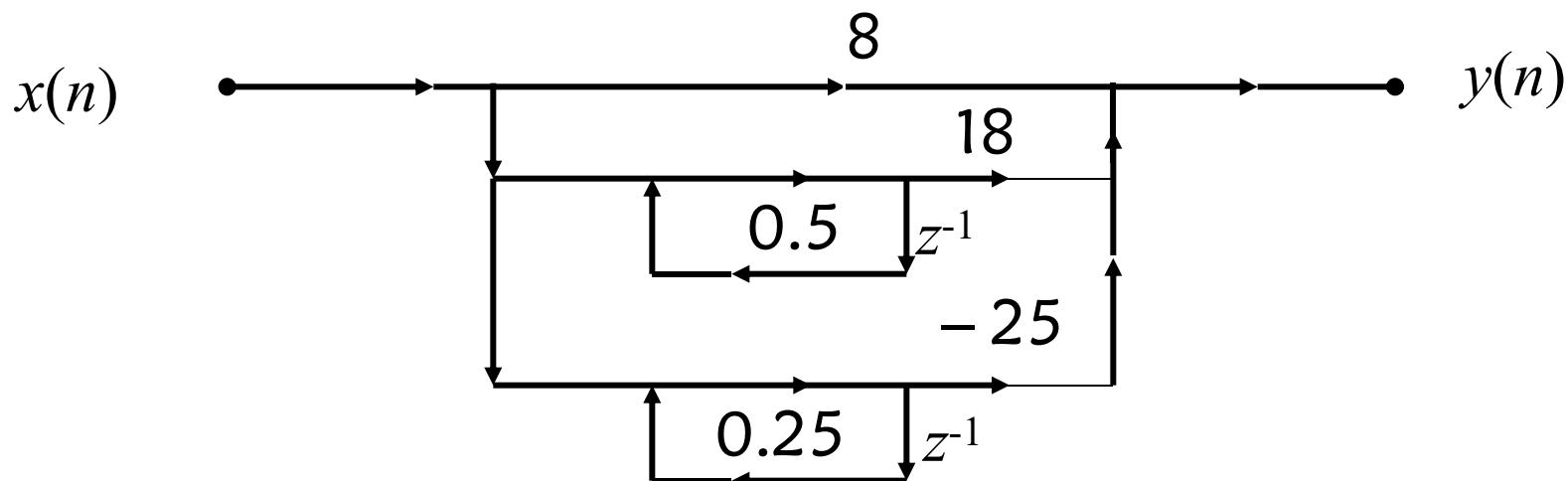
$$A = \frac{H(z)}{z}(z - 0.5) \Big|_{z=0.5} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z(z - 0.25)} \Big|_{z=0.5} = 18$$

$$B = \frac{H(z)}{z}(z - 0.25) \Big|_{z=0.25} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z(z - 0.5)} \Big|_{z=0.25} = -25$$

$$C = \frac{H(z)}{z} z \Big|_{z=0} = \frac{z^2 + 2z + 1}{(z - 0.5)(z - 0.25)} \Big|_{z=0} = 8$$

$$H(z) = \frac{H(z)}{z} \cdot z = \frac{Az}{z - 0.5} + \frac{Bz}{z - 0.25} + C = \frac{18}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{25}{1 - 0.25z^{-1}} + 8$$

将上式每一部分用直接型结构实现，其并联型结构如下图：





5.3 IIR系统的基本网络结构

工程案例（并联型）

并联结构 ($H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_K(z)$) : 解决“复杂系统拆解为简单系统”的问题

工程场景：多频段信号处理

如“均衡器”（耳机的EQ调节），需要分别处理低频、中频、高频信号：

- 低频子系统 $H_L(z)$: 只放大低频信号；
- 中频子系统 $H_M(z)$: 保持中频信号不变；
- 高频子系统 $H_H(z)$: 衰减高频信号；
- 三个子系统并联，输入同一音频信号，输出相加就是均衡后的音频——用户调节各频段增益，本质就是调节各子系统的乘法器系数。



5.4 FIR系统的基本网络结构

FIR网络结构特点：

- 无反馈，其单位脉冲响应是有限长的。
- 可用直接型、级联型和其他类型实现。

FIR网络可表示为：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad \text{或}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) \\ &= h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(n-N+1) \end{aligned}$$

$$H(z) = 1 + 0.9z^{-1} + 2.1z^{-2} + 0.9z^{-3} + z^{-4}$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) = x(n) + 0.8x(n-1) - x(n-2) - 0.8x(n-3) \Rightarrow b_n = h(n)$$



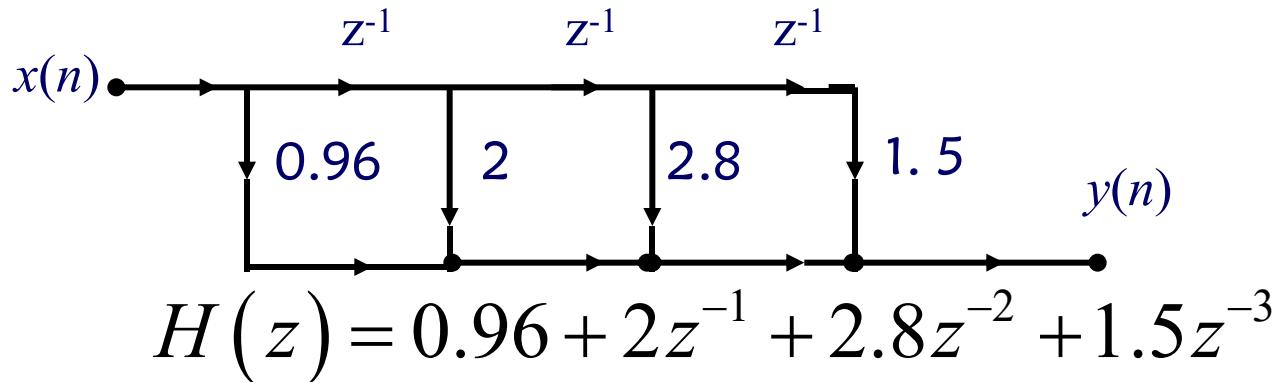
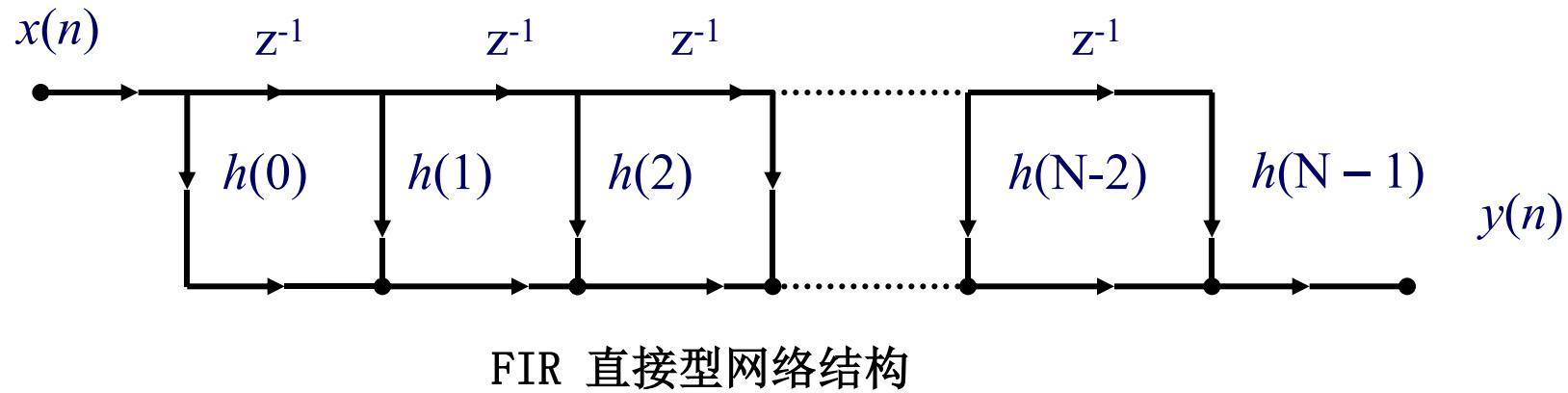
5.4 FIR系统的基本网络结构

一、直接型(或称卷积型、横截型、横向型)

直接按 $H(z)$ 或者差分方程画出没有反馈支路的结构图。

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(N-1)x(n-N+1)$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots$$



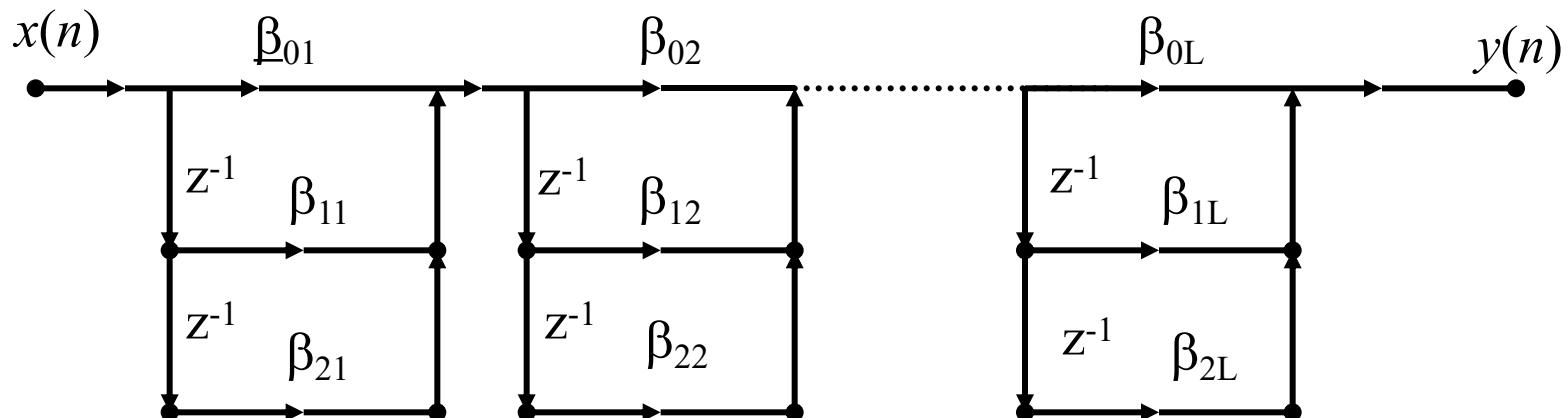
5.4 FIR系统的基本网络结构

二、级联型

$H(z)$ 进行因式分解，并将共轭成对的零点放在一起，形成一个系数为实数的二阶网络，形式如下：

$$H(z) = \prod_{i=1}^L (\beta_{0i} + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2})$$

β_{0i} 、 β_{1i} 、 β_{2i} 都是实数。如果
 $\beta_{2i}=0$ 则为一阶网络。



FIR级联型网络结构示意图

优点：调整零点位置比直接型方便。

缺点：所需乘法器较多， $H(z)$ 阶次较高时，因式分解不容易。



5.4 FIR系统的基本网络结构

*有限长单位脉冲响应网络

(FIR) (Finite Impulse Response)

特点：

- (1) 单位脉冲响应 $h(n)$ 有限长(有限个n值不为零)；
- (2) 网络结构中不存在输出对输入的反馈支路；

其差分方程可表示为：

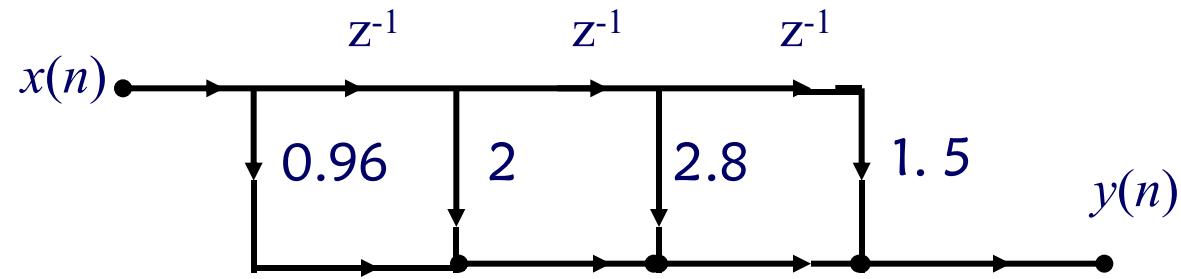
$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i), M \text{ 为有限值}$$



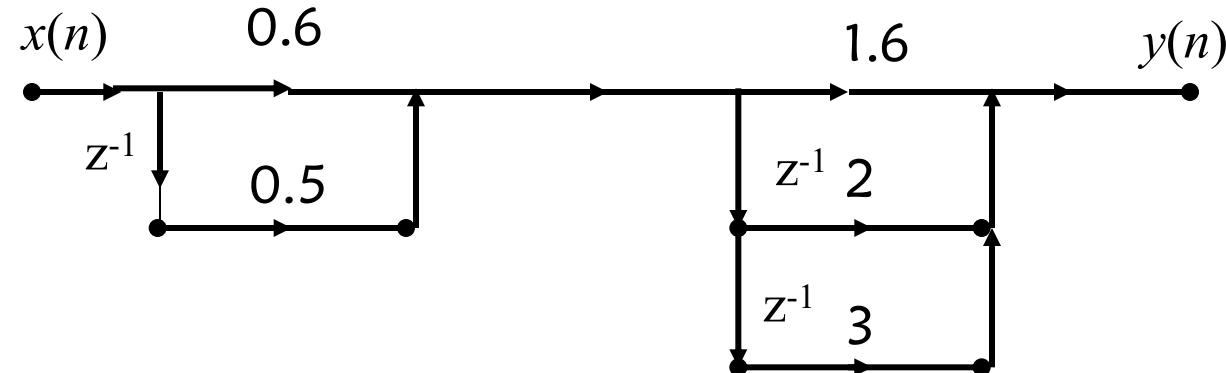
5.4 FIR系统的基本网络结构

例：已知FIR网络系统函数 $H(z)=0.96+2z^{-1}+2.8z^{-2}+1.5z^{-3}$ ，分别画出 $H(z)$ 直接型与级联型结构。

解：1. 根据 $H(z)$ 直接画出FIR直接型结构



2. 对 $H(z)$ 进行因式分解， $H(z)=(0.6+0.5Z^{-1})(1.6+2Z^{-1}+3Z^{-2})$ ，画出级联结构：





5.4 FIR系统的基本网络结构

三. 频率采样结构

频率域等间隔采样，相应的时域信号会以采样点数 N 为周期进行周期性延拓，如果在频率域采样点数 N 大于等于原序列的长度 M ，则不会引起信号时域混叠，此时原序列的z变换 $H(z)$ 与频域采样值 $H(k)$ 满足下面关系式：

$$H(z) = (1 - z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$
$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k=0,1,2,\dots,N-1$$

要求：频率域采样点数 $N \geq M$ ，上式提供了一种称为频率采样的FIR网络结构。
对 $H(z)$ 的内插公式写成下式：

$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$$

$$H_c(z) = 1 - z^{-N} \quad H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$H(z)$ 是由一梳状滤波器 $H_c(z)$ 和
 N 个一阶网络 $H_k(z)$ 的并联结构
进行级联而成。



5.4 FIR系统的基本网络结构

$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$$

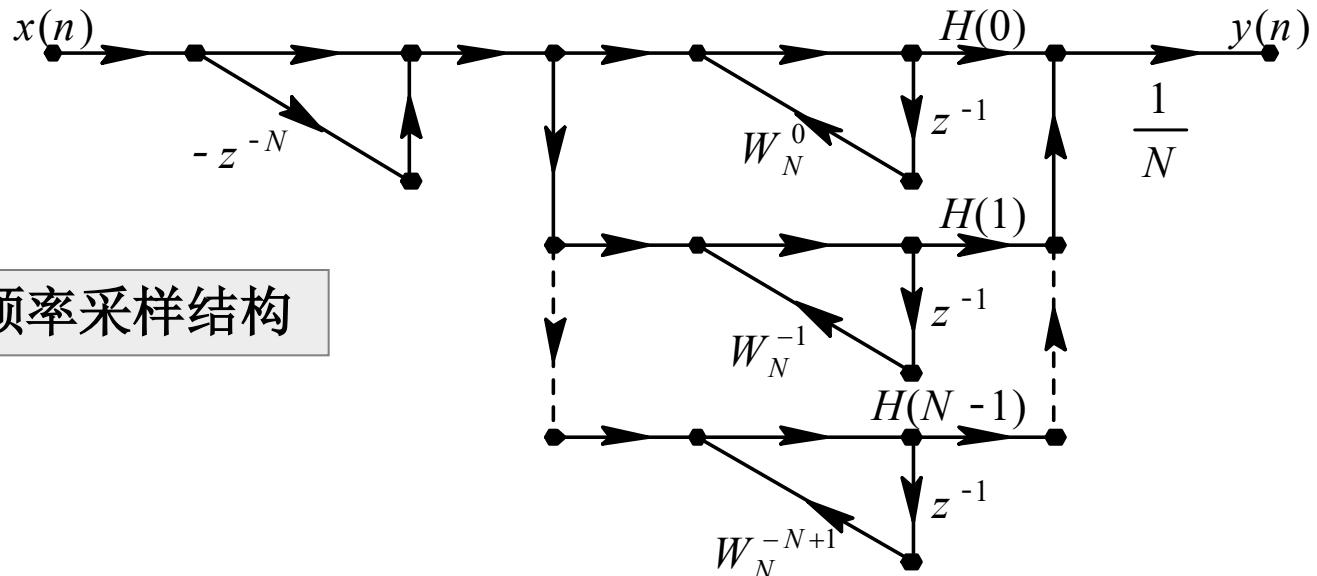
$$H_c(z) = 1 - z^{-N}$$

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

网络结构中有反馈支路，是由 $H_k(z)$ 产生的，其极点为 $Z_k = W_N^{-k}$ ，即单位圆上有等间隔分布的 N 个极点，由于 $H_c(z)$ 为梳状滤波器，其零点为：

$$z_k = e^{j \frac{2\pi}{N} k} = W_N^{-k}, k = 0, 1, 2 \dots, N-1$$

零点也是等间隔分布在单位圆上。理论上，极点和零点相互抵消，保证了网络的稳定性。





5.4 FIR系统的基本网络结构

工程应用 频率采样结构的本质——“用频域采样点描述滤波器”

工程中只要确定了关键频率点的响应（如通带内哪些频率要“全通”，阻带内哪些频率要“全阻”），就能直接用频率采样结构实现，无需反复调整时域系数。

频率采样结构的“特别之处”总结：

特性	频率采样结构	直接型结构
设计核心	频域采样点 $\{H(k)\}$	时域抽头系数 $\{h[n]\}$
特定频率点控制	直接设定 $\{H(k)\}$ ，精度高	需通过调整 $\{h[n]\}$ 间接控制，精度低
多通道滤波	单结构支持多通道，资源省	需多个独立结构，资源占用多
高阶计算复杂度	可借FFT加速， $O(N \log N)$	固定 $O(N)$ ，无加速空间
适用场景	频域指标硬约束、多通道、高阶实时滤波	低阶、相位要求严格的简单滤波



5.4 FIR系统的基本网络结构

优点：

- 频响特性调整方便，在频率采样点 ω_k , $H(e^{j\omega k})=H(k)$, 只要调整 $H(k)$ (即一阶网络 $H_k(z)$ 中乘法器的系数 $H(k)$), 可有效地调整频响特性。
- 易于标准化、模块化：只要 $h(n)$ 长度 N 相同，对于任何频响形状，其梳状滤波器部分和 N 个一阶网络部分结构完全相同，只是各支路增益 $H(k)$ 不同。这样，相同部分便于标准化、模块化。

缺点：

- 系统稳定是靠位于单位圆上的 N 个零极点对消来保证的，由于寄存器的长度有限，对旋转因子量化时产生量化误差，可能使零极点不能完全抵消，影响系统的稳定性。
- 由于 $H(k)$ 和 W_N^{-k} 一般为复数，要求乘法器完成复数乘法运算，这对硬件实现是不方便的。

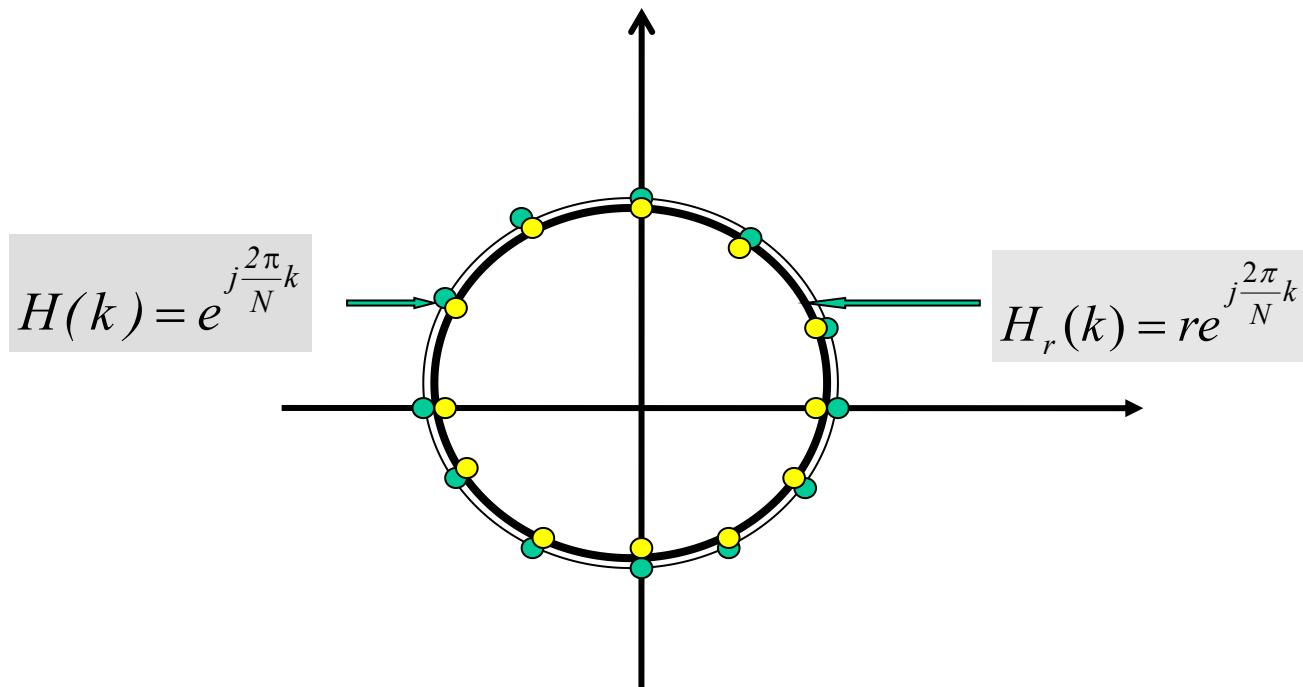
5.4 FIR系统的基本网络结构

为了克服以上缺点，采取下面修正措施：

将单位圆上的零极点向单位圆内收缩一点，收缩到半径 $r < 1$ 且 $r \approx 1$ ，这样：

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$

确保极点在单位圆内，系统稳定。



系统的零极点全部移到内部近似圆中



5.4 FIR系统的基本网络结构

1. 在IIR基本网络结构中，哪种网络结构的误差积累最小
【 ③ 】

- ① 直接型
- ② 级联型
- ③ 并联型
- ④ 无法比较

2. 在IIR基本网络结构中，零、极点调整均方便的网络结构是
【 ② 】

- ① 直接型
- ② 级联型
- ③ 并联型
- ④ 无法比较



本章作业

- 第1题
- 第8题