3-1　已知系统微分方程、起始条件以及激励信号分别为

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=4x(t), y(0_-)=2, x(t)=e^{-2t}\mathrm{u}(t)$$

试求解该系统的全响应。

解：由题可知：

$\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=4x(t)$ 的特征方程为 $\lambda+3=0$;　 $\lambda=-3$

（1）零输入响应：

$$y_x(t)=C_1e^{-3t}u(t)$$

$$\because\ y(0_-)=2 \quad \therefore C_1=2$$

$$\therefore\ y_x(t)=2e^{-3t}u(t)$$

（2）零状态响应：

设该方程的特解为 $y_p(t)=Pe^{-2t}u(t)$

$$\therefore -2P+3P=4 \quad \therefore P=4$$

$$\therefore\ y_p(t)=4e^{-2t}u(t)$$

又$\because$ 方程的特征根 $\lambda=-3$

$$\therefore\ y_f(t)=C_2e^{-3t}u(t)+4e^{-2t}u(t)$$

初始为 0，$\therefore C_2=-4$

$$\therefore\ y_f(t)=-4e^{-3t}u(t)+4e^{-2t}u(t)$$

全响应= $y_x(t)+y_f(t)=4e^{-2t}u(t)-2e^{-3t}u(t)$

3-2　描述某 LTI 系统的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+2y(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+6f(t)$$

已知 $y(0\_)=2, y^{'}(0\_)=0, f(t)=\mathrm{u}(t)$**，求系统的全响应。**

解：特征方程为：$\lambda^2+3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=-2$

零输入响应：

$$y_x(t)=C_1e^{-t}u(t)+C_2e^{-2t}u(t)$$

由 $y(0_-)=2$, $y'(0_-)=0$ 得： $\begin{cases} C_1+C_2=2 \\ -C_1-2C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=4 \\ C_2=2 \end{cases}$

$\therefore\ y_x(t)=(4e^{-t}-2e^{-2t})u(t)$

零状态响应：设特解为 $y_p(t)=Au(t) \Rightarrow A=6$ 即 $y_p(t)=6u(t)$

$\therefore$ 零状态响应方程为： $y_f(t)=(C_3e^{t}+C_4e^{-2t}+6)u(t)$

又初始值为零， $\therefore\ y_f(0_-)=0$ ， $\dfrac{dy_f(t)}{dt}=0$

$$在0_-<t<0_+时,\begin{cases} \dfrac{d^2y_f(t)}{dt^2}=a\delta(t)+b\vartriangle u \\ \dfrac{dy(t)}{dt}=a\vartriangle u \\ y(t)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

$\therefore\ y''(0_+)=y''(0_-)+1, y''(0_+)=y'(0_-)+3, y(0_+)=y(0_-)$

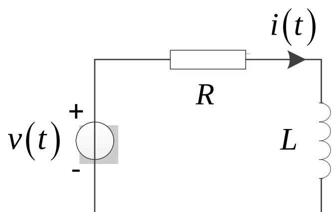
$\Rightarrow y_f(0_+)=y_f(0_-)=0, \dfrac{dy_f(0_+)}{dt}=\dfrac{dy(0_-)}{dt}+3$

代入得 $C_3=-9$ ， $C_4=3$

$\therefore\ y_f(t)=(-9e^{-t}+3e^{-2t}+6)u(t)$

全响应 $y_c(t)=(-5e^{-t}+e^{-2t}+6)u(t)$

3-3 电路如题图 3-3 所示，已知 $v(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left[\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-2)\right]$ **，求** $i(t)$ **的零状态响应。**



题图 3-3

解： $v(t)=Ri(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}$**,** $Rj(t)+L\dfrac{di(t)}{dt}=e^{-\frac{t}{2}}[u(t)-u(t-2)]$

特征方程 $R+L\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{R}{L}$

零状态：设特解$i_P(t)=Pe^{-\frac{t}{2}}[u(t)-u(t-2)]$

$$\therefore i_R(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}u(t)-Pe^{-\frac{t}{2}}[u(t)-u(t-2)]\Rightarrow P=\frac{2}{2R-L}$$

$$\because v(0_+)=v(0_-)=0\quad\therefore C=\frac{2}{L-2R}$$

$$\therefore i_f(t)=\frac{2}{L-2R}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)-\frac{2}{2R\text{-}L}e^{-\frac{t}{2}}[u(t)-u(t-2)]$$

3-4 已知一 **LTI** 系统对激励为 $f_1(t)=\mathrm{u}(t)$ 时的完全响应为 $y_1(t)=2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)$，对激励为 $f_2(t)=\delta(t)$ 时的完全响应为 $y_2(t)=\delta(t)$，试求

（**1**） 该系统的零输入响应 $y_x(t)$；

（**2**） 该系统的阶跃响应 $g(t)$。

解：(1)设 $f_1(t)=u(t)$，零状态响应为 $y(t)$

$$\because\ f_2(t)=\frac{df_1(t)}{dt}\quad\therefore\begin{cases}y_1(t)=2e^{-t}u(t)=y_{zi}(t)+y(t) & ①\\ y_2(t)=\delta(t)=y_{zi}(t)+\dfrac{dy(t)}{dt} & ②\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{dy(t)}{dt}-y(t)=\delta(t)-2e^{-t}u(t)\qquad ③$$

设特解为 Be^{-t} $\because$ 忽略③中的 $\delta(t)$ $\Rightarrow B=1$

设齐次解为 $Ae^{\lambda t}$ $\therefore\ y(t)=Ae^{\lambda t}+e^{-t}$

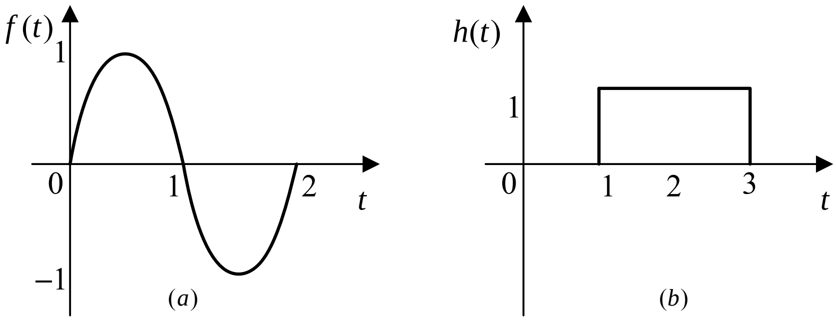
$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy(t)}{dt}=a\delta(t)+b\Delta u\\ y(t)=a\Delta u\end{cases}\Rightarrow a=1$$

$\therefore\ y(0_+)=y(0_-)+1$ 代入 $y(t)=Ae^{\lambda t}+e^{-t}$ 得 A=0

$\therefore\ y(t)=e^{-t}u(t)$ 将 $y(t)$ 代入 $y_1(t)=2e^{-t}u(t)=y_{zi}(t)+y(t)$ $\Rightarrow y_{zi}(t)$=$e^{-t}u(t)$

（**2**） $y(t)$ 即为阶跃响应。 $\therefore\ g(t)=y(t)=e^{-t}u(t)$

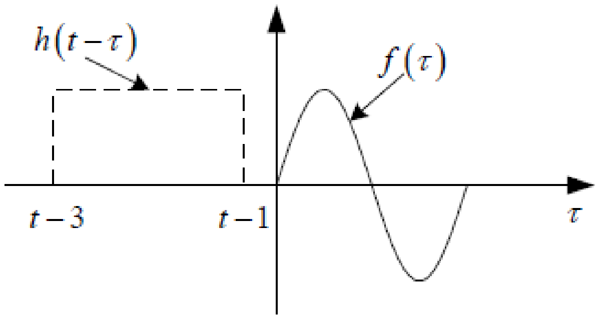
3-7 已知一个线性时不变系统的输入信号 $f(t)$ 及单位冲激响应 $h(t)$ 如题图 **3-7** 所示，求零状态响应 $y_f(t)$。



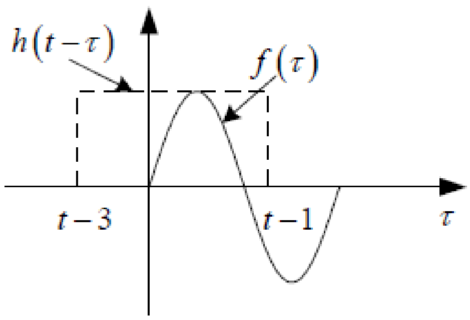
题图 3-7

解：由题图 3-8 可得：$f(t)=\sin\pi t\left[\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-2)\right]$，$h(t)=\mathrm{u}(t-1)-\mathrm{u}(t-3)$

故系统的零状态响应 $y_f(t)=f(t)*h(t)$，该题采用图解法较容易。

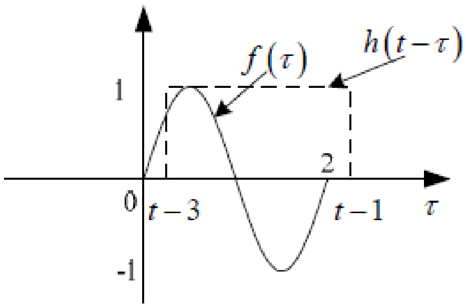


当 $t-1<0 \Rightarrow t<1$ 时，$y_f(t)=f(t)*h(t)=0$



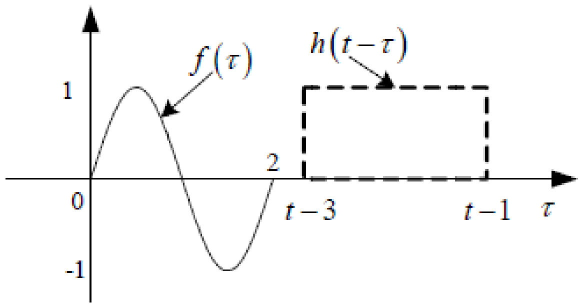
当$0<t-1<2\Rightarrow 1<t<3$时，

$$y_f(t)=f(t)*h(t)=\int_0^{t-1}\sin\pi\tau\,\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{\pi}\cos\pi\tau\Big|_0^{t-1}=\frac{1}{\pi}\left[1-\cos\pi(t-1)\right]$$



当$0<t-3<2\Rightarrow 3<t<5$时，

$$y_f(t)=f(t)*h(t)=\int_{t-3}^{2}\sin\pi\tau\,\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{\pi}\cos\pi\tau\Big|_{t-3}^{2}=\frac{1}{\pi}\left[\cos\pi(t-3)-1\right]$$

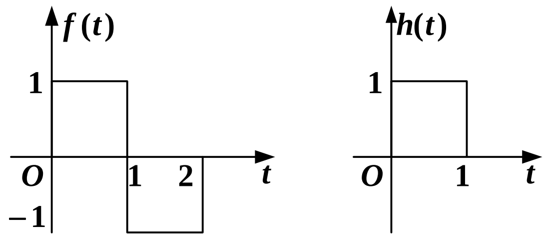


当$t-3>2\Rightarrow t>5$时，$y_f(t)=f(t)*h(t)=0$

故$y_f(t)=f(t)*h(t)=\frac{1}{\pi}\left[1-\cos\pi(t-1)\right]\cdot\left[\mathrm{u}(t-1)-\mathrm{u}(t-3)\right]$

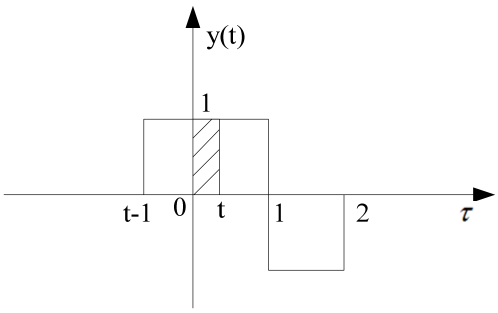
$$+\frac{1}{\pi}\left[\cos\pi(t-3)-1\right]\cdot\left[\mathrm{u}(t-3)-\mathrm{u}(t-5)\right]$$

3-9 已知 $f(t)$和$h(t)$ 的波形如题图 **3-9** 所示。试用图解法求 $f(t)*h(t)$ 。



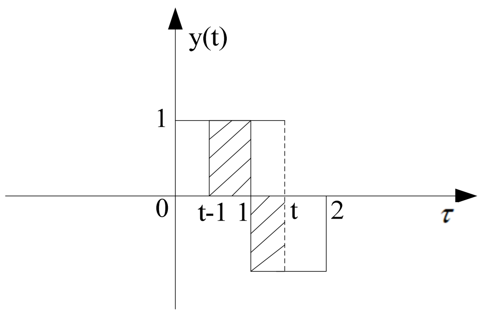
题图 **3-9**

①



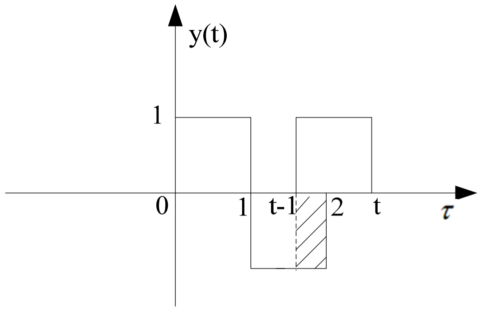
$0 \le t < 1$时， $f(t)*h(t) = t$

②



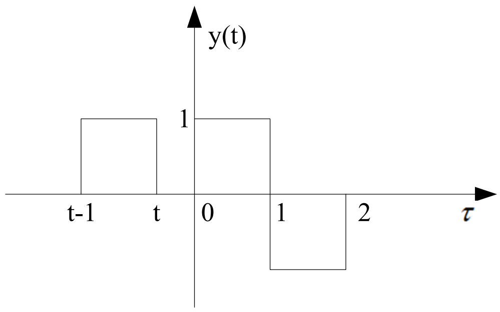
$1 \le t < 2$时， $f(t)*h(t) = 2 - t - (t-1) = 3 - 2t$

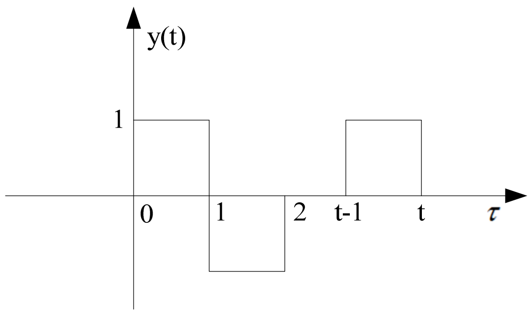
③



$2 \le t < 3$时， $f(t) * h(t) = [2-(t-1)]-(-1) = t-3$

④





$t < 0$或$t \ge 3$时， $f(t) * h(t) = 0$

$$f(t) * h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{或} t \ge 3 \\ t, & 0 \le t < 1 \\ 3-2t, & 1 \le t < 2 \\ t-3, & 2 \le t < 3 \end{cases}$$

3-11 试计算下列卷积：

（**1**） $\mathrm{u}(t) * \mathrm{u}(t)$

解： $\mathrm{u}(t) * \mathrm{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t) d\tau * \delta(t)$

$$=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau=t\cdot u(t)$$

（2） $e^{-t}u(t)*e^{-3t}u(t)$

解： $e^{-t}u(t)*e^{-3t}u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3\tau}u(\tau)\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{0}^{t}e^{-3\tau}\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau\cdot u(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)u(t)$$

（3） $e^{-t}*e^{-3t}u(t)$

解： $e^{-t}*e^{-3t}u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\tau-t}\,e^{-3\tau}u(\tau)d\tau$

$$=e^{-t}\int_{0}^{\infty}e^{-2\tau}d\tau=e^{-t}[-\frac{1}{2}e^{-2t}]_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}$$

（4） $e^{-t}u(t)*tu(t)$

解： $e^{-t}u(t)*tu(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau u(\tau)\cdot e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau=\left[\int_{0}^{t}\tau\cdot e^{-(t-\tau)}d\tau\right]\cdot u(t)$

$$=\left[e^{-t}\int_{0}^{t}\tau e^{\tau}d\tau\right]\cdot u(t)=\left[e^{-t}\int_{0}^{t}\tau d\left(e^{\tau}\right)\right]\cdot u(t)=\left[e^{-t}\cdot\tau e^{\tau}\Big|_{0}^{t}-e^{-t}\int_{0}^{t}e^{\tau}d\tau\right]\cdot u(t)$$

$$=\left[t-e^{-t}\cdot e^{-\tau}\Big|_{0}^{t}\right]\cdot u(t)=\left[t-e^{-t}\left(e^{t}-1\right)\right]\cdot u(t)=\left(t-1+e^{-t}\right)\cdot u(t)$$

（6） $te^{-t}u(t)*[u(t)-u(t-2)]$

解： $te^{-t}u(t)*[u(t)-u(t-2)]=te^{-t}u(t)*u(t)-te^{-t}u(t)*u(t-2)$

$$te^{-t}u(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\tau e^{-\tau}u(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau=\left[\int_{0}^{t}\tau e^{-\tau}d\tau\right]\cdot u(t)=\left[-\tau e^{-\tau}\Big|_{0}^{t}+\int_{0}^{t}e^{-\tau}d\tau\right]\cdot u(t)$$

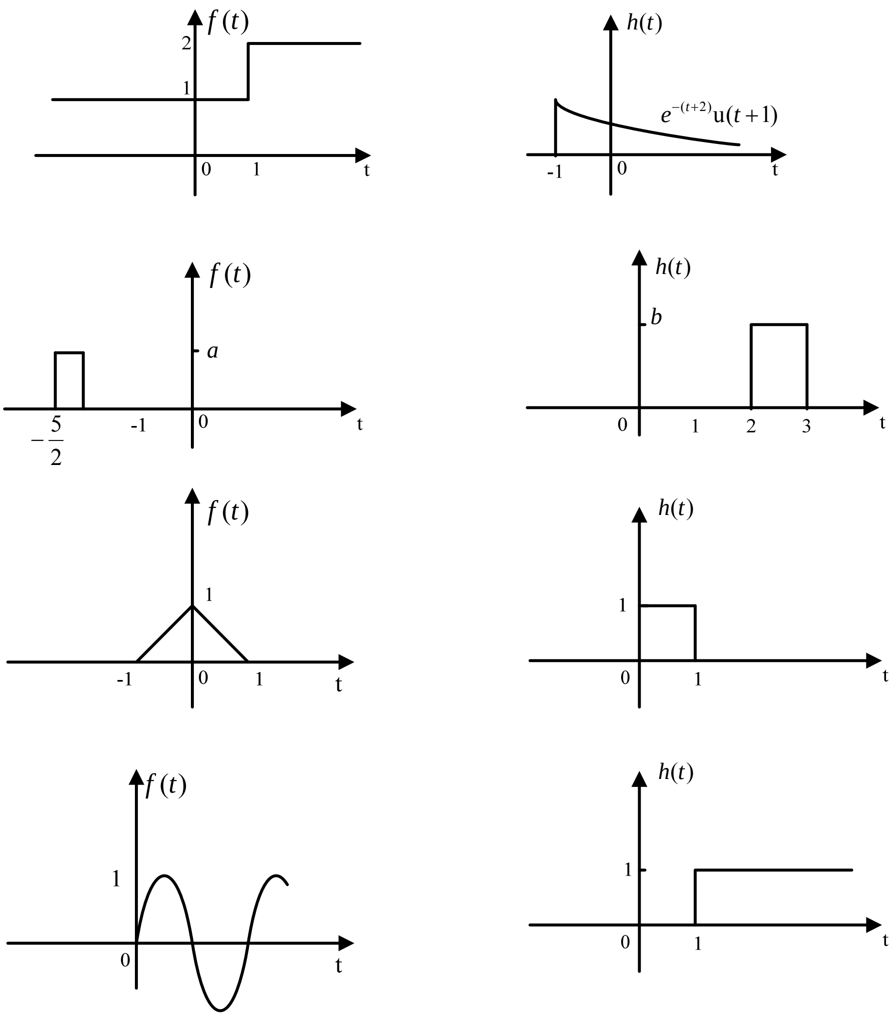
$$=\left[-te^{-t}-e^{-\tau}\Big|_{0}^{t}\right]\cdot u(t)=\left[-te^{-t}-e^{-t}+1\right]\cdot u(t)$$

利用时移性可得：

$$te^{-t}u(t)*[u(t)-u(t-2)]=te^{-t}u(t)*u(t)-te^{-t}u(t)*u(t)\Big|_{t\to t-2}$$

$$=\left[-te^{-t}-e^{-t}+1\right]\cdot u(t)-\left[-(t-2)e^{-(t-2)}-e^{-(t-2)}+1\right]\cdot u(t-2)$$

3-14 $x(t)$和$h(t)$如题图 **3-14** 所示，试求 $f(t)*h(t)$。



题图 3-14

(1) 解：$f(\mathrm{t}) = 1 + \mathrm{u}(\mathrm{t}-1)$

$$\therefore f(\mathrm{t}) * h(\mathrm{t})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [1 + \mathrm{u}(t-\tau+1)] e^{-(\tau+2)} u(\tau+1) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau+2)} u(\tau+1) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau-1) e^{-(\tau+2)} u(\tau+1) d\tau$$

$$= \int_{-1}^{\infty} e^{-(\tau+2)} d\tau + \int_{-1}^{t-1} e^{-(\tau+2)} d\tau$$

$$= (2e^{-1} - e^{-1}\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

$$= e^{-1}(2 - \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

（2） $f(\mathrm{t}) = a[\mathrm{u}(\mathrm{t}+\frac{s}{2}) - \mathrm{u}(\mathrm{t}+2)]$ $\quad h(\mathrm{t}) = b[\mathrm{u}(\mathrm{t}-2) - \mathrm{u}(\mathrm{t}-3)]$

$$f(\mathrm{t}) * h(\mathrm{t}) = \mathrm{ab}[(\mathrm{t}+\frac{1}{2})\,\mathrm{u}(\mathrm{t}+\frac{1}{2}) - (\mathrm{t}-\frac{1}{2})\,\mathrm{u}(\mathrm{t}-\frac{1}{2}) - \mathrm{tu}(\mathrm{t}) + (\mathrm{t}-1)\,\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)]$$

（3） $f(\mathrm{t})=(\mathrm{t}+1)[\mathrm{u}(\mathrm{t}+1)-\mathrm{u}(\mathrm{t})]+(1-\mathrm{t})[\mathrm{u}(\mathrm{t})-\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)]$

$$h(\mathrm{t})=\mathrm{u}(\mathrm{t})-\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)$$

$$f(\mathrm{t})*h(\mathrm{t})=\frac{1}{2}[(\mathrm{t}+1)^2\,\mathrm{u}(\mathrm{t}+1)-(\mathrm{t}-2)^2\,\mathrm{u}(\mathrm{t}-2)-3\,\mathrm{t}^2\mathrm{u}(\mathrm{t})+3(\mathrm{t}-1)^2\,\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)]$$

（4） $f(\mathrm{t})=\sin\pi t \qquad \mathrm{h}(\mathrm{t})=u(\mathrm{t}-1)$

$$f(\mathrm{t})*h(\mathrm{t})=h'(\mathrm{t})*\int_{-\infty}^{t}\sin w_0\tau u(\tau)d\tau$$

$$=\delta(\mathrm{t}-1)*\int_{0}^{t}\sin w_0\tau d\tau$$

$$=\delta(\mathrm{t}-1)*[\frac{1}{w_0}(1-\cos w_0 t)]\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

$$=\frac{1}{w_0}[1-\cos w_0(t-1)]\mathrm{u}(\mathrm{t}-1)$$

3-16 **已知某系统满足微分方程** $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f'(t)+2f(t)$**，若激励分别为** $(a)\,f(t)=\mathrm{u}(t),(b)\,f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t),\ (c)\,f(t)=\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)$ **时，试用卷积分析法分别求系统的零状态响应**

解：求冲激响应：特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+3=0$

解得 $\lambda=-1$或$\lambda=-3$ $\therefore$ 冲激响应为 $h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

$$h'(t)=(A_1+A_2)\delta(t)+(-A_1e^{-t}-3A_2e^{-2t})u(t)$$

$$h''(t)=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-A_1-3A_2)\delta(t)+(A_1e^{-t}+9Ae^{-3t})u(t)$$

将$f(\mathrm{t})=\delta(\mathrm{t}),\mathrm{h}(\mathrm{t}),\mathrm{h}'(\mathrm{t}),\mathrm{h}''(\mathrm{t})$代入微分方程，有

$$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_1+A_2=1\\3A_1+A_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\dfrac{1}{2}\\[2ex]A_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\therefore h(\mathrm{t})=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t})\,\mathrm{u}(\mathrm{t})$$

(a) $f(\mathrm{t})=\mathrm{u(t)}$ 时，$y_f(\mathrm{t})=\mathrm{f(t)}*h(\mathrm{t})=\frac{1}{2}e^{-t}u(\mathrm{t})*u(\mathrm{t})+\frac{1}{2}e^{-3t}u(\mathrm{t})*u(\mathrm{t})$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-t})u(\mathrm{t})+\frac{1}{6}(1-e^{-3t})u(\mathrm{t})=(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t})u(\mathrm{t})$$

（b） $f(\mathrm{t})=e^{-2t}\,\mathrm{u(t)}$ 时，$y_f(\mathrm{t})=\mathrm{f(t)}*h(\mathrm{t})=\frac{1}{2}e^{-t}u(\mathrm{t})*e^{-2t}u(\mathrm{t})+\frac{1}{2}e^{-3t}u(\mathrm{t})*e^{-2t}u(\mathrm{t})$

$$=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-2t})u(\mathrm{t})-\frac{1}{2}(e^{-2t}-e^{-3t})u(\mathrm{t})$$

$$=(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})u(\mathrm{t})$$

(c) $f(\mathrm{t})=e^{-3t}\,\mathrm{u(t)}$ 时，$y_f(\mathrm{t})=\mathrm{f(t)}*h(\mathrm{t})=\frac{1}{2}e^{-t}u(\mathrm{t})*e^{-3t}u(\mathrm{t})+\frac{1}{2}e^{-3t}u(\mathrm{t})*e^{-3t}u(\mathrm{t})$

$$=\frac{1}{4}(e^{-t}-e^{-3t})u(\mathrm{t})+\frac{1}{2}\mathrm{t}\,e^{-3t}u(\mathrm{t})$$

$$=[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}+(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4})e^{-3t}]u(\mathrm{t})$$

3-19 一个 **LTI** 系统，初始状态不祥。当激励为 $f(t)$ 时其全响应为 $(2\mathrm{e}^{-3t}+\sin 2t)\mathrm{u}(t)$；当激励为 $2f(t)$ 时其全响应为 $(\mathrm{e}^{-3t}+2\sin 2t)\mathrm{u}(t)$。求

（**1**） 初始状态不变，当激励为 $f(t-1)$ 时的全响应，并求出零输入相应、零状态响应；

（**2**） 初始状态是原来的两倍、激励为 $2f(t)$ 时系统的全响应。

解：设零输入响应为 $y_x(t)$（对应的初始状态为 $f_x(t)$），零状态响应为 $y_f(t)$。则根据题意可得：

$$\begin{cases} f(t)+f_x(t)\rightarrow\left(2\mathrm{e}^{-3t}+\sin 2t\right)\mathrm{u}(t)=y_{f1}(t)+y_x(t) \\ 2f(t)+f_x(t)\rightarrow\left(\mathrm{e}^{-3t}+2\sin 2t\right)\mathrm{u}(t)=y_{f2}(t)+y_x(t) \end{cases}$$

后式减去前式得：$f(t)\rightarrow\left(-\mathrm{e}^{-3t}+\sin 2t\right)\mathrm{u}(t)=y_{f2}(t)-y_{f1}(t)$

根据 LTI 系统的特性：当输入信号进行数乘时，其零状态响应也进行相应的数乘，可得 $y_{f2}(t)=2y_{f1}(t)$，故可得该系统的零状态响应为 $y_f(t)=\left(-\mathrm{e}^{-3t}+\sin 2t\right)\mathrm{u}(t)$。

由于全响应等于零输入响应与零状态响应之和，由前式可得该系统的零输入响应为：

$$y_x(t)=\left(2\mathrm{e}^{-3t}+\sin 2t\right)\mathrm{u}(t)-\left(-\mathrm{e}^{-3t}+\sin 2t\right)\mathrm{u}(t)=3\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)$$

由于初始状态不变，其对应的零输入响应仍为 $y_x(t)=3\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)$；输入信号为 $f(t-1)$（相对应于原输入进行了时延），根据 LTI 系统的特性，其对应的零状态响应也进行相应的时延，故 $f(t-1)\rightarrow\left[-\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\sin 2(t-1)\right]\mathrm{u}(t-1)$

系统的全响应为 $3\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)+\left[-\mathrm{e}^{-3(t-1)}+\sin 2(t-1)\right]\mathrm{u}(t-1)$

3-21 已知系统的阶跃响应是 $g(t)=\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)$，求此系统在激励为 $f(t)=3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)$ 作用下系统的零状态响应。

解：由于系统的零状态响应为 $f(t)*h(t)$。根据阶跃响应与冲激相应的关系得系统的单位冲激相应 $h(t)=g'(t)=\left[\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)\right]'=-2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)+\mathrm{e}^{-2t}\delta(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)+\delta(t)$，故系统在激励为 $f(t)=3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)$ 作用下系统的零状态响应为：

$$\begin{aligned} y_f(t)&=f(t)*h(t)=\left[3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)\right]*\left[-2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)+\delta(t)\right] \\ &=3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)-\left[3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)\right]*\left[2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)\right]=3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)-6\left[\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)\right]*\left[\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)\right] \\ &=3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)-6\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{u}(\tau)\cdot\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{u}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &=3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)-6\mathrm{e}^{-2t}\left[\int_0^t\mathrm{d}\tau\right]\cdot\mathrm{u}(t)=3\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)-6t\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t) \end{aligned}$$

3-22 已知微分方程 $y'(t)+2y(t)=f(t)$ 的冲激响应 $h(t)=\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)$。求系统的微分方程为 $y'(t)+2y(t)=2\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)+\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)$ 时系统的零状态响应。

解：$y_f(\mathrm{t})=\mathrm{f(t)}*h(\mathrm{t})=\int_{-\infty}^{\infty}(2e^{-2t}u(\mathrm{t})+e^{-3t}u(\tau)\cdot e^{-2(t-\tau)}u(\mathrm{t})$

$$=\int_0^t 2e^{-2\tau}\cdot e^{-2(t-\tau)}d\tau+\int_0^t 2e^{-3\tau}\cdot e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$= 2e^{-2t}\int_0^t 1d\tau + e^{-2t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau = 2e^{-2t}(\mathrm{t}-0) - e^{-t}\cdot e^{-\tau}\,|_0^t$$

$$= 2 + e^{-2t} - e^{-2t}(e^{-t}-1) = -e^{-3t} + (2\,\mathrm{t}+1)e^{-2t}$$

$$y_f\,'(\mathrm{t}) = [-e^{-3t} + (2\,\mathrm{t}+1)e^{-2t}]\,\mathrm{u(t)}$$