

## 第7章 有限脉冲响应FIR数字滤波器的设计

1、定义：单位冲激响应 $h(n)$ 长度有限的滤波器——FIR滤波器。

LTI系统

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

当 $a_i=0$

$$H(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j}$$

Z逆变换：

$$h(n) = \sum_{j=0}^M b_j = \{b_0, b_1, \dots, b_M\}$$

## 2、IIR与FIR数字滤波器的差异：

$$\text{IIR: } H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

$$\text{FIR: } H(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j}$$

对比维度	FIR 滤波器	IIR 滤波器
冲激响应长度	有限长 ( $h(n)$ 仅前 $N$ 个点非零)	无限长 ( $h(n)$ 理论上永远不为零)
系统结构	无反馈 (仅前馈, 类似“加权求和”)	有反馈 (包含延迟单元的输出反馈到输入)
稳定性与线性相位	必然稳定 (因极点全在原点) ; 可设计线性相位	需保证极点在单位圆内才稳定; 难实现线性相位

## 两种滤波器的对比举例：

### 1、冲激响应长度：

FIR 就像“一次性响应”：输入一个冲激，滤波器输出有限个值后就归于零（比如拍手后，回声 3 次就消失）。

IIR 就像“无限回声”：输入一个冲激，输出会无限衰减但理论上永远不为零（比如山谷中拍手，回声越来越弱但一直有）。

### 2、系统结构：

FIR 是“单程车”：信号从输入到输出，只经过延迟和加权求和，没有“回头路”（无反馈）。

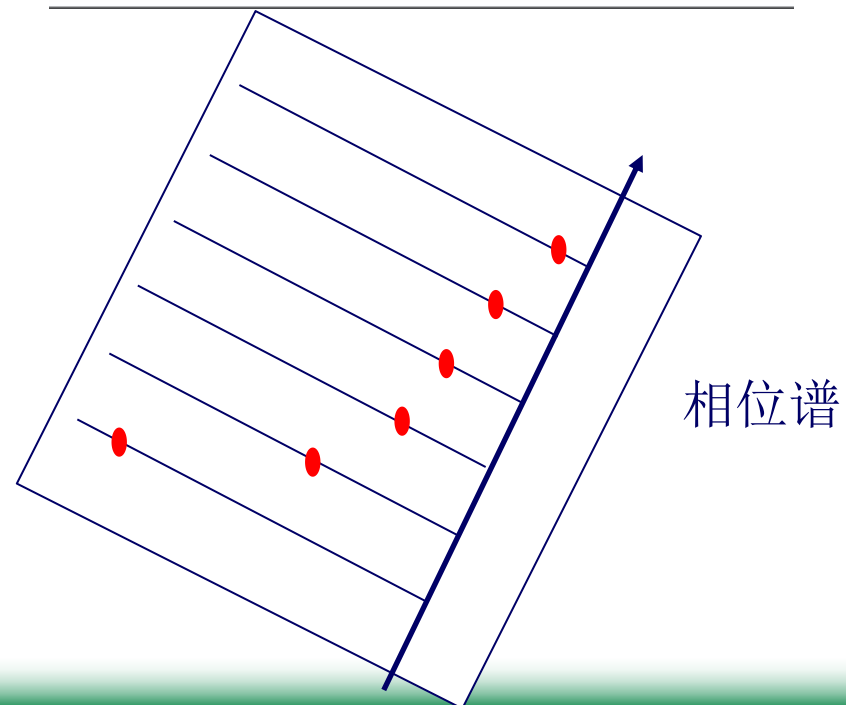
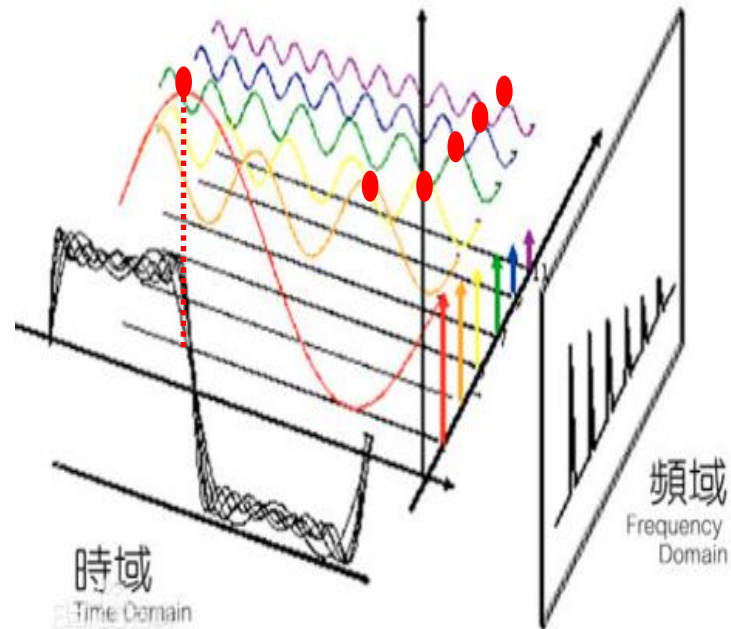
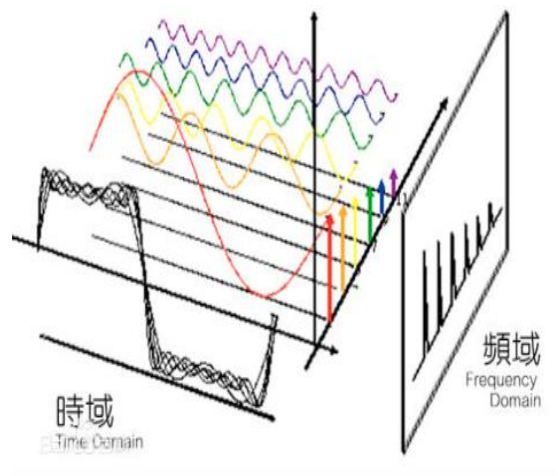
IIR 是“循环车”：信号除了前馈，还要把输出的延迟信号“送回”输入端再处理（有反馈）。

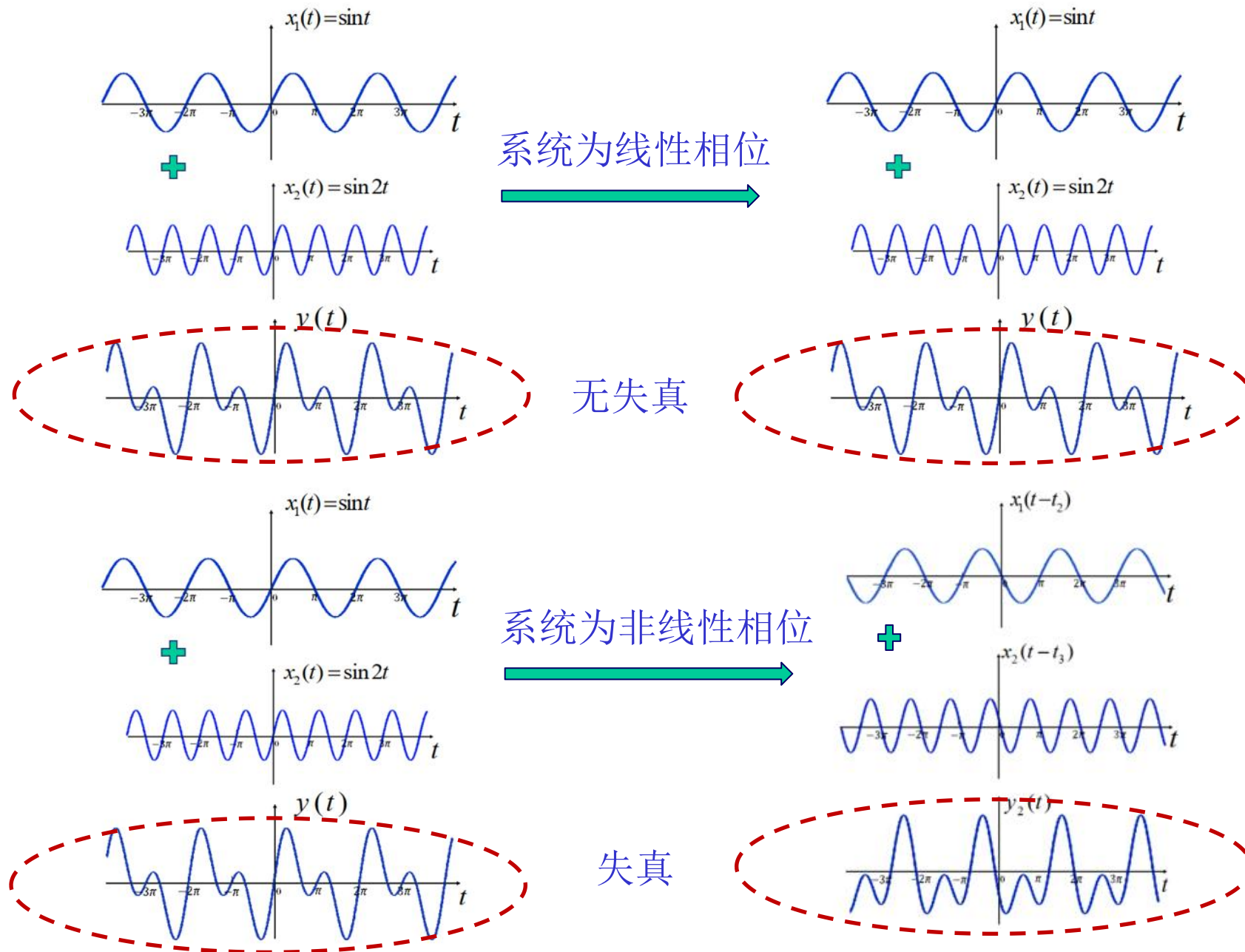
### 3、关键特性：

FIR 的“天然优势”：不用担心稳定性（极点全在原点，绝对安全），且能设计出线性相位（相位随频率线性变化，避免信号失真），适合音频、通信等需要保信号波形的场景。

IIR 的“权衡点”：结构简单、滤波效率高，但稳定性需要额外保证，且线性相位很难实现（相位失真可能导致信号波形畸变）。

### 3、非线性相位特点：





## 线性相位的重要性举例：

想象你在听一场乐队演奏：

吉他、贝斯、鼓的声音本该“同步到达”你的耳朵，形成和谐的节奏；

但如果某件乐器的声音“延迟变形”（比如鼓点的相位被扭曲），整个音乐就会变得“杂乱无章”，甚至听不出原本的旋律。



这就是相位失真的直观表现 —— 它会破坏信号各频率分量的“时间同步性”，导致信号波形严重畸变。

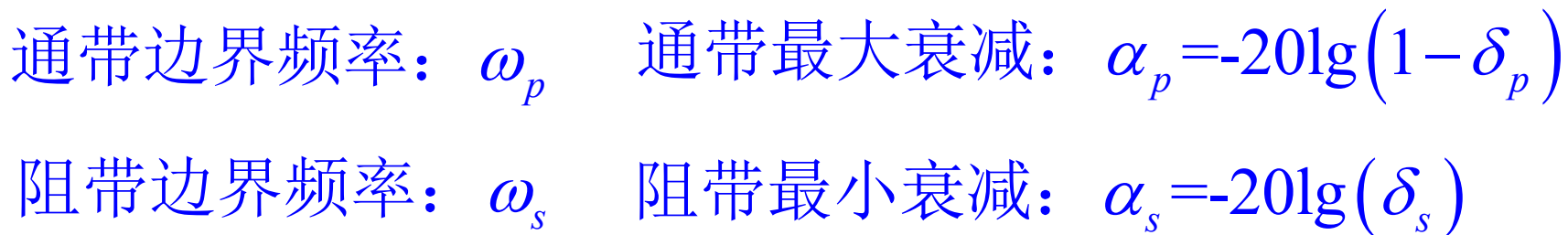
“线性相位的核心价值是‘保形’—— 它能让信号在滤波后，仅发生‘整体时间延迟’，而波形形状、各频率分量的相对关系完全不变。对于需要‘原汁原味’保留信号特征的场景（如**音频、通信、图像**），线性相位是刚需；反之，若只关心幅度滤波（如**电源滤波、简单噪声抑制**），相位失真的影响可忽略。”

## 5、FIR数字滤波器的设计目标

$$H(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} \quad h(n) = \sum_{j=0}^M b_j = \{b_0, b_1, \dots, b_M\}$$

$$H(z) = \sum_{j=0}^M b_j z^{-j} = \sum_{n=0}^M h(n) z^{-n}$$

有限长单位脉冲响应，求出 $h(n)$ 就可以很容易的得到 $H(z)$ ，对FIR数字滤波器，可以只求出 $h(n)$ 即可。



## 主要内容

7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器

7.3 利用频率采样法设计FIR滤波器

7.5 IIR和FIR数字滤波器的比较

## 7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

### 1. 线性相位系统的时域充要条件

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} |H(e^{j\omega})| e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

$H_g(\omega)$ 称为幅度特性函数， $\theta(\omega)$ 称为相位特性。

这里 $H_g(\omega)$ 不同于 $|H(e^{j\omega})|$ ， $H_g(\omega)$ 为 $\omega$ 的实函数，可能取负值，而 $|H(e^{j\omega})|$ 总是正值。

$H(e^{j\omega})$ 线性相位是指 $\theta(\omega)$ 是 $\omega$ 的线性函数，即

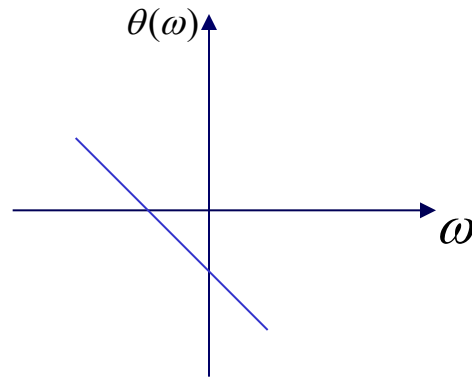
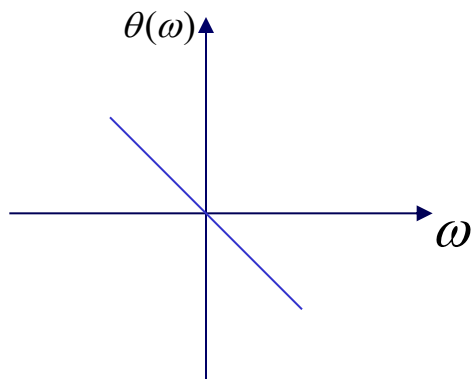
$$\theta(\omega) = -\tau\omega, \quad \tau \text{ 为常数} \quad \text{第一类线性相位}$$

如果 $\theta(\omega)$ 满足下式：

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega, \quad \theta_0 \text{ 是起始相位} \quad \text{第二类线性相位}$$

以上两种情况都满足群时延是一个常数，即：

$$\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = -\tau$$



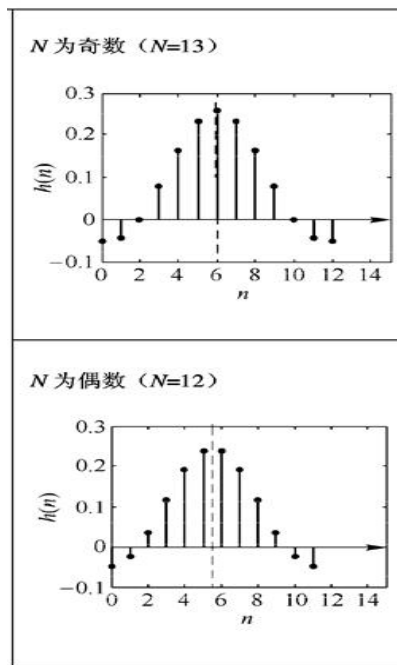
## 2. 线性相位FIR滤波器的时域约束（充要）条件

1) 第一类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

偶对称  
(正镜像)

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

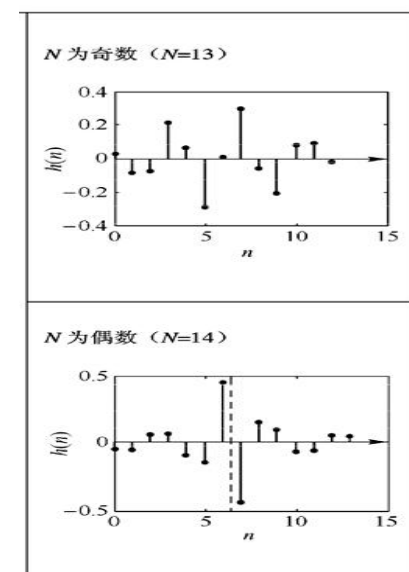
$h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点偶对称。

2) 第二类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

奇对称  
(反镜像)

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点奇对称。



$h(n)$ 的对称性  
(镜像对称)

推导过程（第一类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件）：

第一类线性相位FIR数字滤波器的相位函数 $\theta(\omega)=-\omega\tau$ ，由式（7.1.1）和（7.1.2）得到：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

欧拉公式:  $\sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos \omega n - j \sin \omega n) = H_g(\omega)(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)$

实部虚部各自相等: 
$$\begin{cases} H_g(\omega) \cos \omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \\ H_g(\omega) \sin \omega\tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \end{cases}$$

两等式相除：

$$\frac{\cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \sin \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \cos \omega \tau$$

移项合并：

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n - \tau)] = 0$$

函数 $h(n)\sin\omega(n - \tau)$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称，是满足上式的一组解。因为 $\sin\omega(n - \tau)$ 关于 $n=\tau$ 奇对称，如果取 $\tau=(N-1)/2$ ，则要求 $h(n)$ 关于 $(N-1)/2$ 偶对称，所以要求 $\tau$ 和 $h(n)$ 满足如下条件：

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\omega\tau, & \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

第二类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件证明类似

### 3. 线性相位FIR滤波器幅度特性函数 $H_g(\omega)$ 的特点

#### 1) $h(n)=h(N-n-1), N=\text{奇数}$

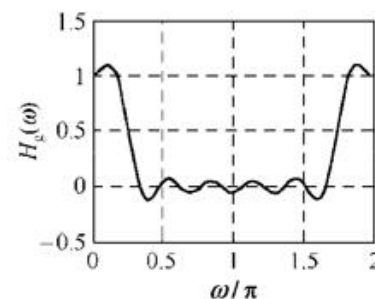
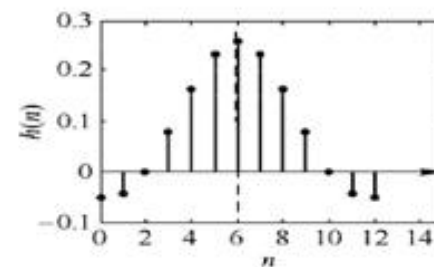
将时域约束条件 $h(n)=h(N-n-1)$ 和 $\theta(\omega)=-\omega\tau$ 代入式 (7.1.1) 和 (7.1.2), 得到:

$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\
 &= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} \left[ h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)} \right] \\
 &= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} \left[ h(n)e^{-j\omega n} + h(n)e^{-j\omega(N-n-1)} \right] \\
 &= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[ e^{-j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + e^{j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \right] \right\} \\
 &= e^{-j\omega\tau} \left\{ h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\text{最终得到: } H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$$

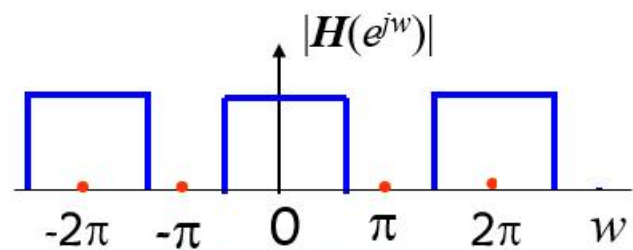
$$\tau = \frac{N-1}{2}, \quad M = \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil$$

$N$  为奇数 ( $N=13$ )

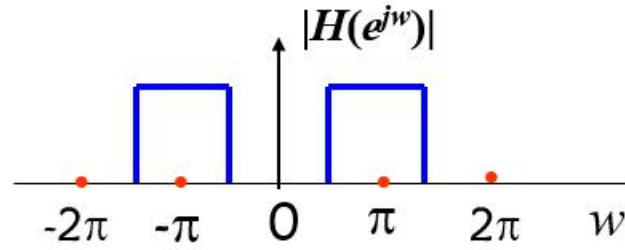


按照上式, 由于式中 $\cos\omega n$ 项对 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 皆为偶对称, 因此幅度特性的特点是对 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 是偶对称的。可实现四种选频滤波。

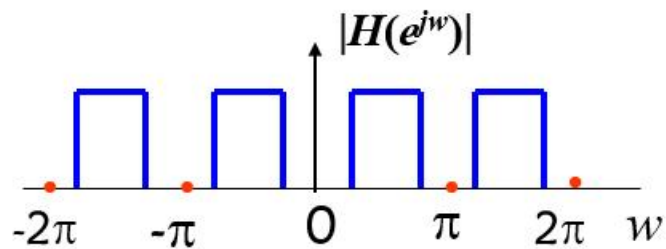
理想数字滤波器:



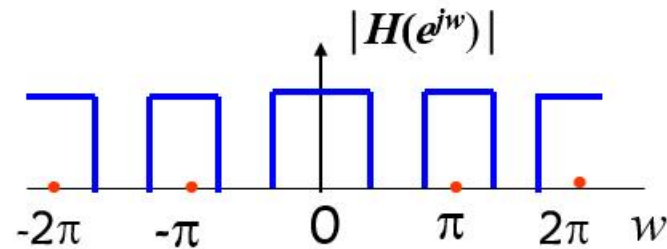
低通(LF)幅度特性



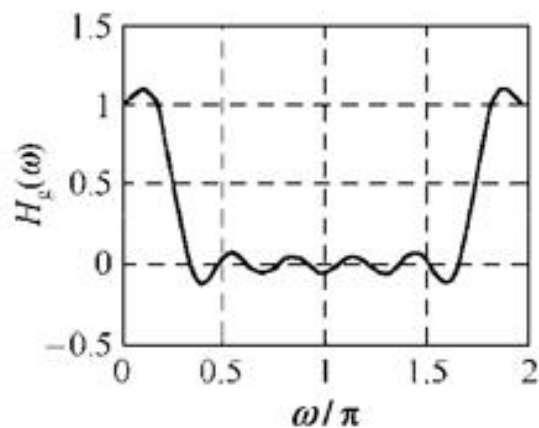
高通(HF)幅度特性



带通(BF)幅度特性



带阻(BS)幅度特性



对 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 是偶对称的

可实现四种选频滤波

2)  $h(n)=h(N-n-1), N=\text{偶数}$ 

推导情况和前面 $N=\text{奇数}$ 相似，不同点是由于 $N=\text{偶数}$ ， $H_g(\omega)$ 中没有单独项。

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^{M} 2h(n)\cos(\omega(n-\tau))$$

$$\text{最终得到: } H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M} 2h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$$

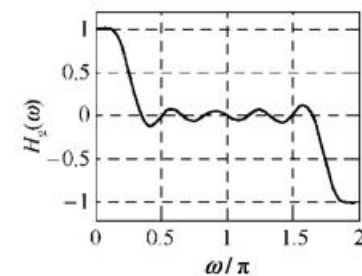
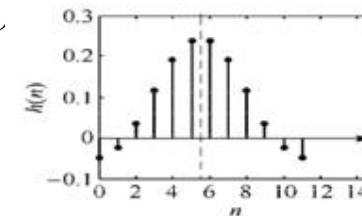
式中， $\tau = (N-1)/2 = N/2 - 1/2$ 。因为 $N$ 是偶数，所以当 $\omega = \pi$ 时

$$\cos[\omega(n-\tau)] = \cos\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right)\right] = 0$$

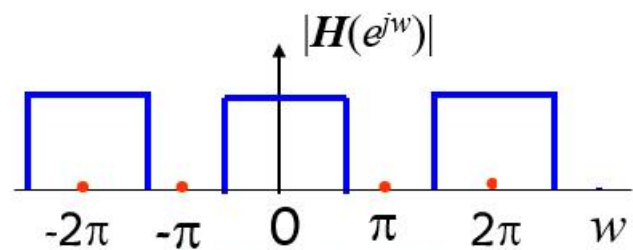
$\cos[\omega(n-\tau)]$  关于过零点奇对称，关于 $\omega=0$ 和 $2\pi$ 偶对称。

$H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 奇对称，关于 $\omega=0$ 和 $2\pi$ 偶对称。因此该情况不能实现高通和带阻滤波器。

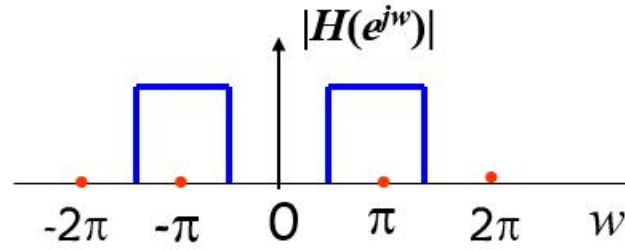
$N$ 为偶数 ( $N=12$ )



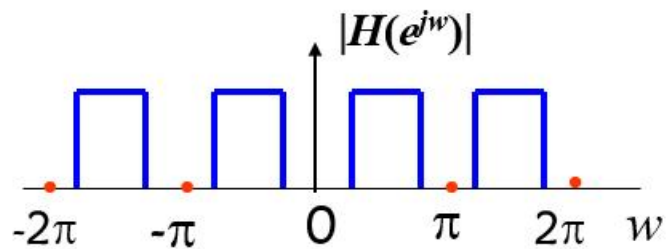
理想数字滤波器:



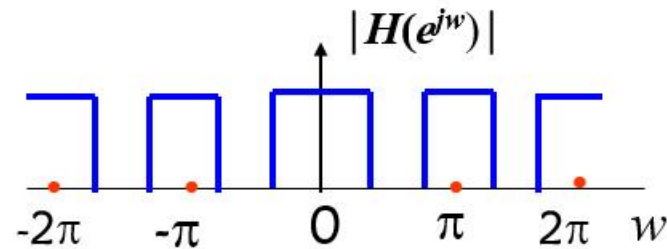
低通(LF)幅度特性



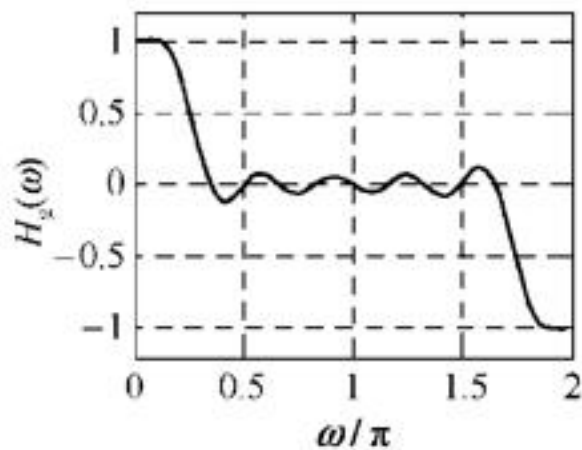
高通(HF)幅度特性



带通(BF)幅度特性



带阻(BS)幅度特性



关于 $\omega=\pi$ 奇对称, 关于 $\omega=0$ 和 $2\pi$ 偶对称

不能实现高通和带阻滤波器

3)  $h(n)=-h(N-n-1), N=\text{奇数}$ 由  $h(n)=-h(N-n-1)$ , 得:  $n=\frac{N-1}{2}$  时

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right)=-h\left(\frac{N-1}{2}\right), \text{ 则:}$$

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$$

$$\text{推导过程: } H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

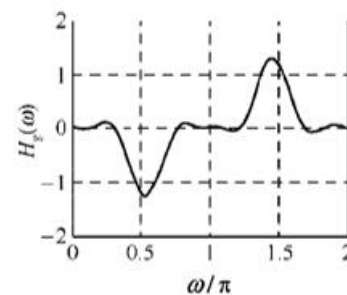
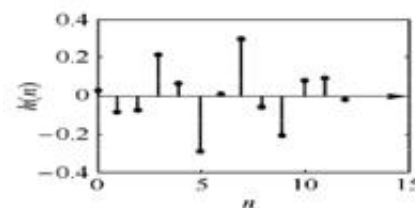
$$= \sum_{n=0}^{M-1} [h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)}]$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} [h(n)e^{-j\omega n} - h(n)e^{-j\omega(N-n-1)}]$$

$$= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[ e^{-j\omega \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} - e^{j\omega \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \right]$$

$$= -je^{-j\omega \tau} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

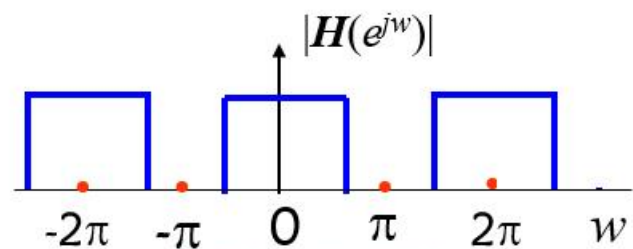
$$= e^{-j(\pi/2 + \omega\tau)} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

 $N$  为奇数 ( $N=13$ )

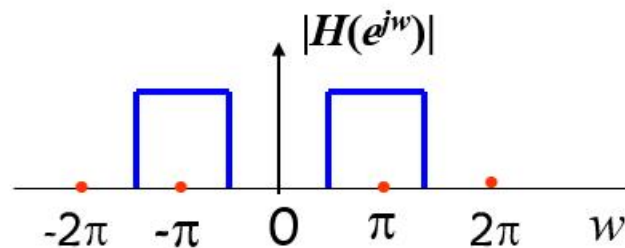
$N$  是奇数,  $\tau=(N-1)/2$  是整数。所以, 当  $\omega=0, \pi, 2\pi$  时,  $\sin[\omega(n-\tau)]=0$ , 而且  $\sin[\omega(n-\tau)]$  关于过零点奇对称。

因此  $H_g(\omega)$  关于  $\omega=0, \pi, 2\pi$  三点奇对称。因此该情况只能实现带通滤波器。

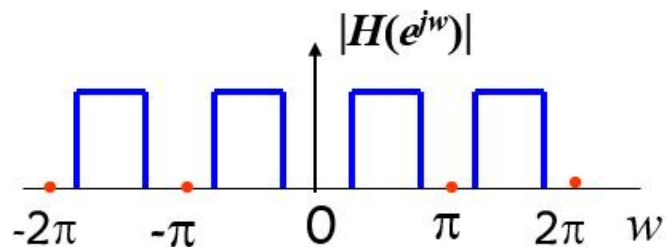
理想数字滤波器:



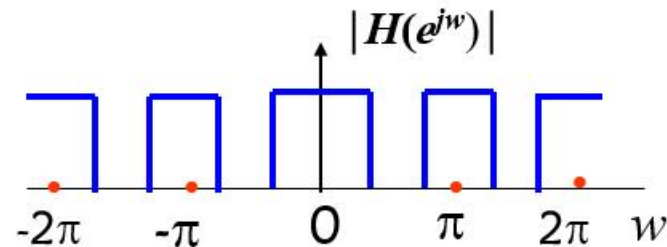
低通(LF)幅度特性



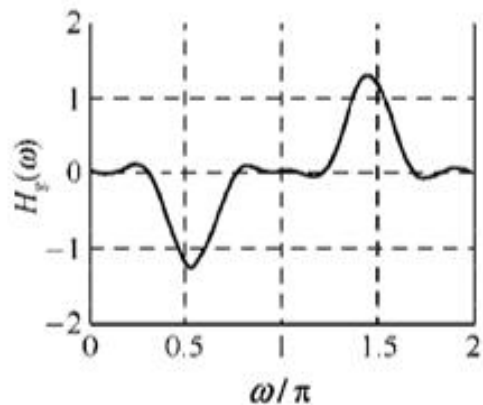
高通(HF)幅度特性



带通(BF)幅度特性



带阻(BS)幅度特性



关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点奇对称

只能实现带通滤波器

4)  $h(n)=-h(N-n-1), N=\text{偶数}$

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

式中,  $N$ 是偶数,  $\tau=(N-1)/2=N/2-1/2$ 。

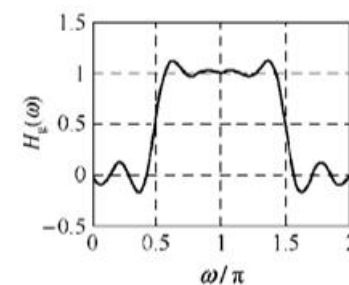
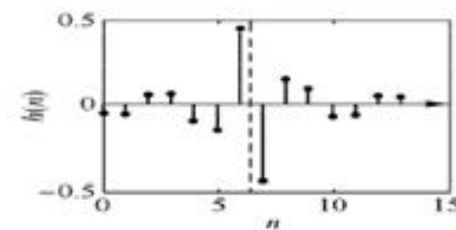
当 $\omega=0, 2\pi$ 时,  $\sin[\omega(n-\tau)]=0$ 。零点奇对称。

当 $\omega=\pi$ 时,  $\sin[\omega(n-\tau)]=(-1)^{n-N/2}$ ,为峰值点。峰值偶对称。

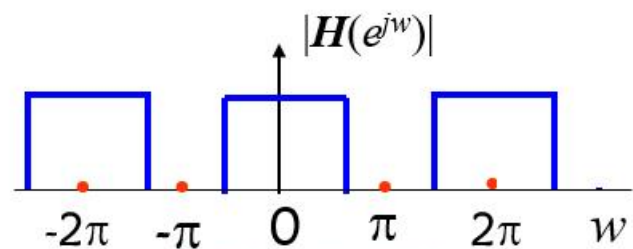
因此 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, 2\pi$ 奇对称, 关于 $\omega=\pi$ 偶对称

所以该情况下不能实现低通和带阻滤波器。

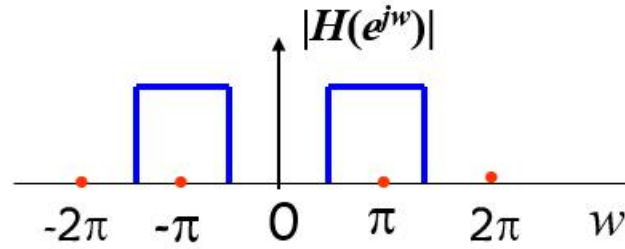
$N$  为偶数 ( $N=14$ )



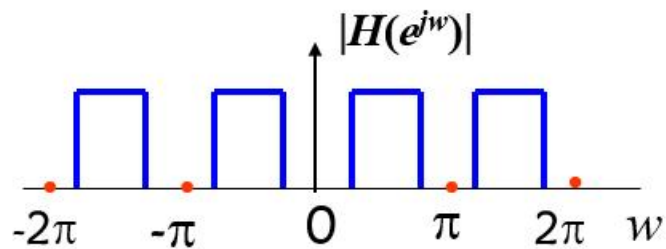
理想数字滤波器:



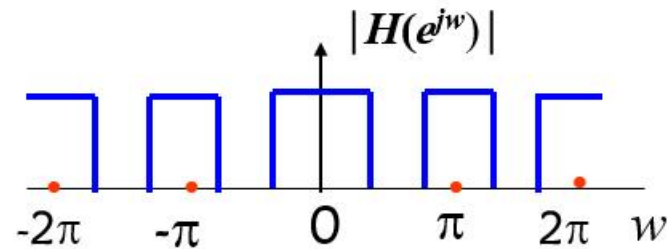
低通(LF)幅度特性



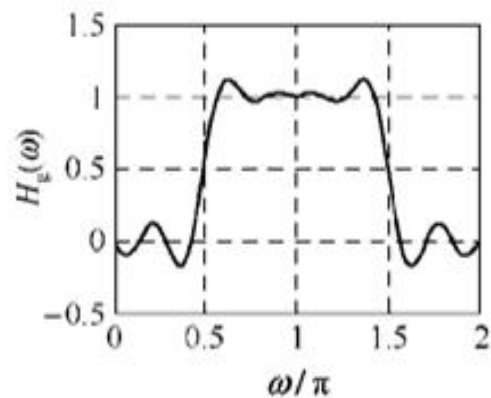
高通(HF)幅度特性



带通(BF)幅度特性



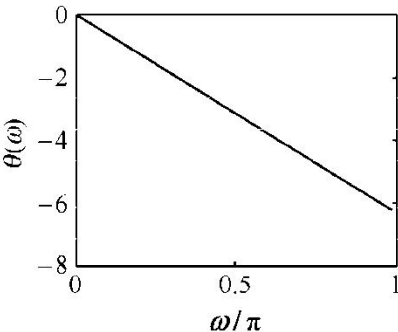
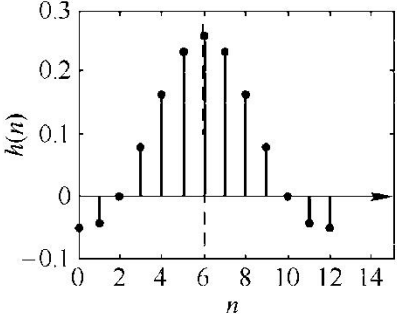
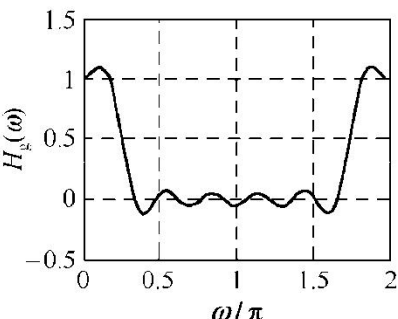
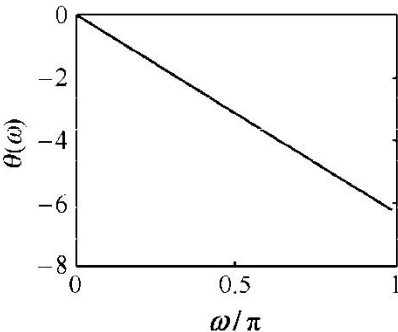
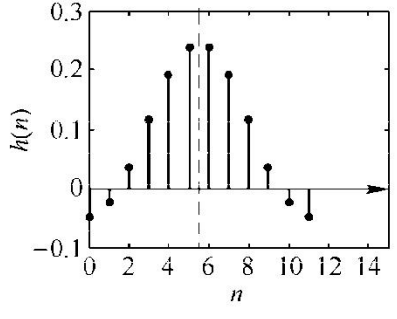
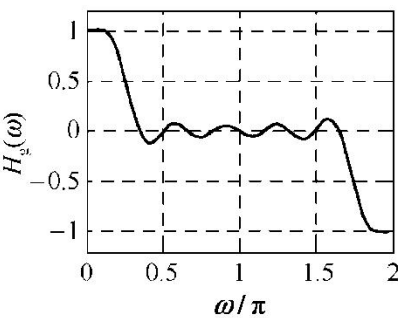
带阻(BS)幅度特性



关于 $\omega=0, 2\pi$ 奇对称, 关于 $\omega=\pi$ 偶对称

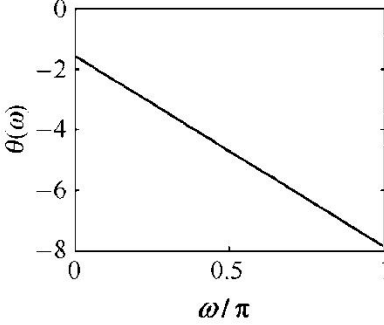
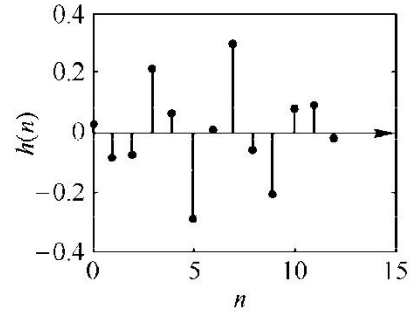
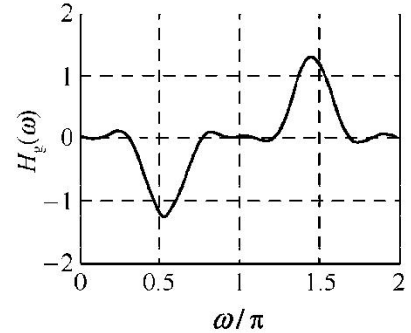
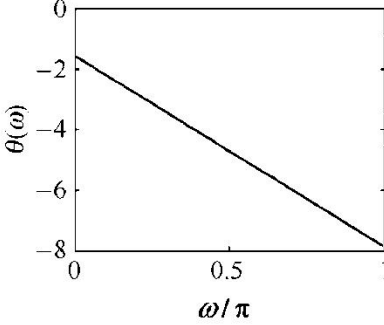
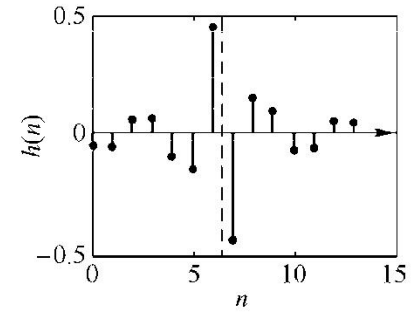
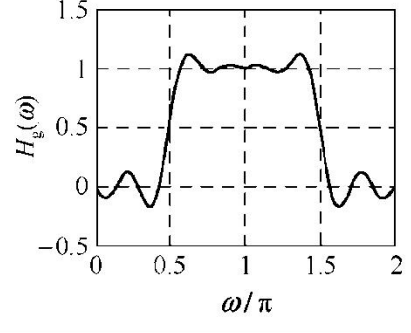
不能实现低通和带阻滤波器

表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

第一类线性相位特性		$h(n) = h(N-1-n)$	
情况 1	$\theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ <p>(以 <math>N=5</math> 为例画图)</p> 	$N$ 为奇数 ( $N=13$ ) 	$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$ 
	$\theta(\omega)$ 	$N$ 为偶数 ( $N=12$ ) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$ 

全通

低通、带通

第二类线性相位特性		$h(n) = -h(N-1-n)$	
情况 3	$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ <p>(以 <math>N=5</math> 为例画图)</p> 	$N$ 为奇数 ( $N=13$ ) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 
	$\theta(\omega)$ 	$N$ 为偶数 ( $N=14$ ) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 

带通

高通、带通

## 线性相位 VS 非线性相位

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 1. 定义滤波器系数
h_sym = np.array([1, 2, 3, 2, 1]) # 偶对称FIR (1型, N=5奇数)
h_asym = np.array([1, 2, 3, 4, 5]) # 非对称FIR (无线性相位特性)

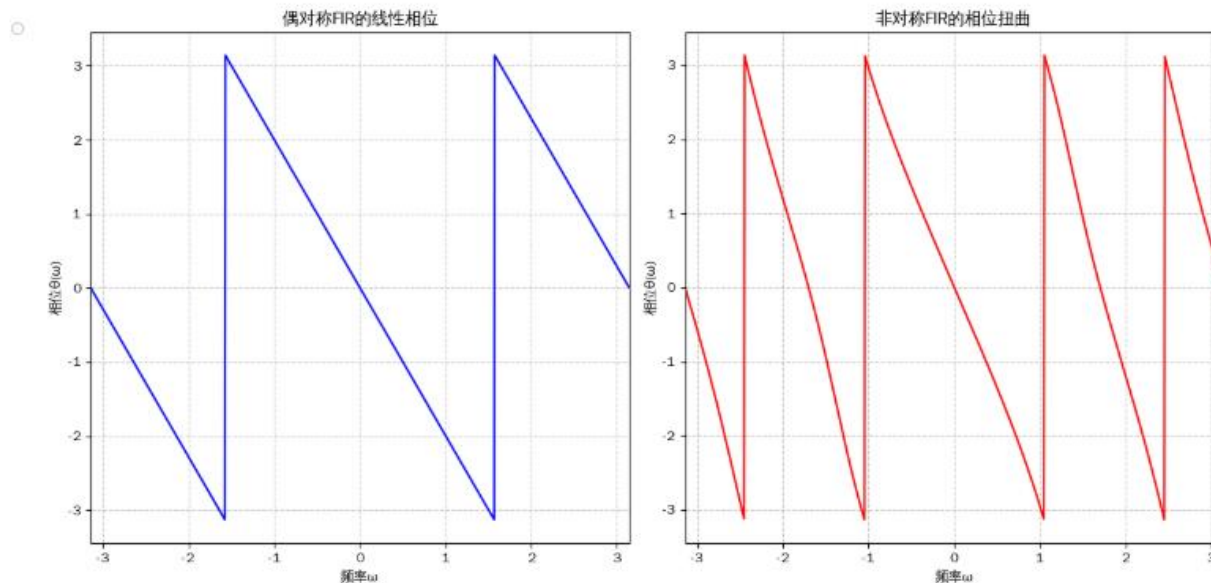
# 2. 计算频率响应 (使用足够多的点数提高分辨率)
N_fft = 1024 # FFT点数
w = np.linspace(0, np.pi, 1000)

# 偶对称滤波器
H_sym = np.fft.fftshift(np.fft.fft(h_sym, N_fft))
freq = np.linspace(-np.pi, np.pi, N_fft) # 完整频率轴 (-π到π)
phase_sym = np.angle(H_sym)

# 非对称滤波器
H_asym = np.fft.fftshift(np.fft.fft(h_asym, N_fft))
phase_asym = np.angle(H_asym)

# 3. 绘图对比
plt.figure(figsize=(12, 6))

# 偶对称线性相位
plt.subplot(121)
plt.plot(freq, phase_sym, 'b')
plt.xlabel('频率ω')
plt.ylabel('相位θ(ω)')
plt.title('偶对称FIR的线性相位')
plt.grid(True, linestyle='--', alpha=0.7)
plt.xlim(-np.pi, np.pi)
```



## 4. 线性相位FIR滤波器零点分布特点

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n} \\
 &= \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \quad (7.1.21)
 \end{aligned}$$

如 $z=z_i$ 是 $H(z)$ 的零点，其倒数 $z_i^{-1}$ 也必然是其零点；又因为 $h(n)$ 是实序列， $H(z)$ 的零点必定共轭成对，因此  $z_i^*$ 和 $(z_i^{-1})^*$  也是其零点。

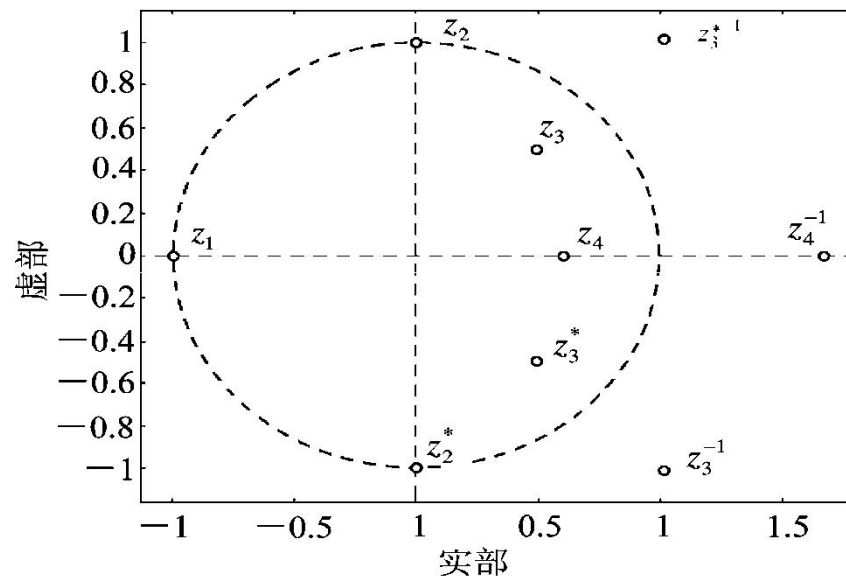


图7.1.1 线性相位FIR滤波器零点分布