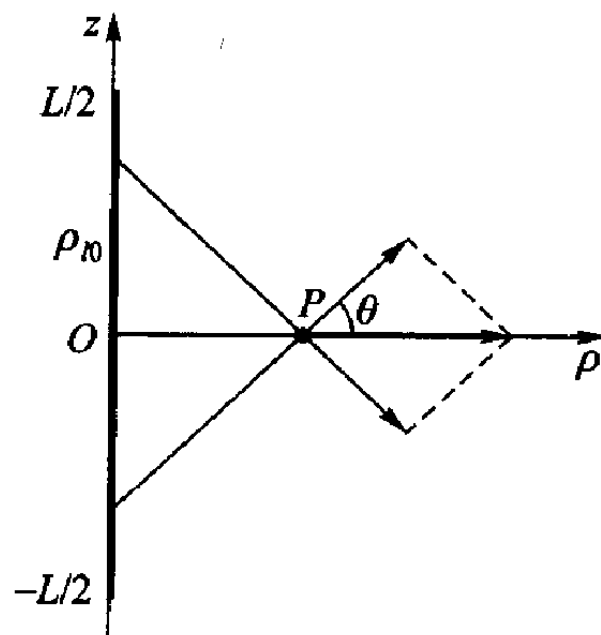


3.1 长度为 L 的细导线带有均匀电荷, 其电荷线密度为 ρ_{l0} 。(1) 计算线电荷平分面上任意一点的电位 φ ; (2) 利用直接积分法计算线电荷平分面上任意一点的电场 \mathbf{E} , 并用 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 核对。

解 (1) 建立如图题 3.1 所示的坐标系。根据电位的积分表达式, 线电荷平分面上任意一点 P 的电位为

$$\begin{aligned}\varphi(\rho, 0, 0) &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{l0} dz'}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \\&= \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln(z' + \sqrt{\rho^2 + z'^2}) \Big|_{-L/2}^{L/2} \\&= \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (L/2)^2} + L/2}{\sqrt{\rho^2 + (L/2)^2} - L/2} \\&= \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (L/2)^2} + L/2}{\rho}\end{aligned}$$



图题 3.1

(2) 根据对称性, 可得两个对称线电荷元 $\rho_{l0} dz'$ 在点 P 的电场为

$$\begin{aligned}d\mathbf{E} &= e_\rho dE_\rho = e_\rho \frac{\rho_{l0} dz'}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z'^2}} \cos \theta \\&= e_\rho \frac{\rho_{l0} \rho dz'}{2\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z'^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

故长为 L 的线电荷在点 P 的电场为

$$\begin{aligned}
E &= \int dE = e_\rho \int_0^{L/2} \frac{\rho_0 \rho dz'}{2\pi\epsilon_0(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \\
&= e_\rho \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0\rho} \left(\frac{z'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}} \right) \Big|_0^{L/2} \\
&= e_\rho \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0\rho} \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + (L/2)^2}}
\end{aligned}$$

由 $E = -\nabla\varphi$ 求 E , 有

$$\begin{aligned}
E &= -\nabla\varphi = -\frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \nabla \left[\ln \frac{L/2 + \sqrt{\rho^2 + (L/2)^2}}{\rho} \right] \\
&= -e_\rho \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{d\rho} [\ln(L/2 + \sqrt{\rho^2 + (L/2)^2}) - \ln\rho] \\
&= -e_\rho \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\rho}{[L/2 + \sqrt{\rho^2 + (L/2)^2}] \sqrt{\rho^2 + (L/2)^2}} - \frac{1}{\rho} \right\} \\
&= e_\rho \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0\rho} \frac{L}{\sqrt{\rho^2 + (L/2)^2}}
\end{aligned}$$

可见得到的结果相同。

3.2 一个点电荷 $q_1 = q$ 位于点 $P_1(-a, 0, 0)$, 另一点电荷 $q_2 = -2q$ 位于点 $P_2(a, 0, 0)$, 求空间的零电位面。

解 两个点电荷 $+q$ 和 $-2q$ 在空间产生的电位

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

令 $\varphi(x, y, z) = 0$, 则有

$$\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

即

$$4[(x+a)^2 + y^2 + z^2] = (x-a)^2 + y^2 + z^2$$

故得

$$\left(x + \frac{5}{3}a\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2$$

此即零电位面方程, 这是一个以点 $\left(-\frac{5}{3}a, 0, 0\right)$ 为球心、以 $\frac{4}{3}a$ 为半径的球面。

3.3 电场中有一半径为 a 的圆柱体, 已知柱内外的电位函数分别为

$$\begin{cases} \varphi(\rho) = 0 & \rho \leq a \\ \varphi(\rho) = A\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\cos\phi & \rho \geq a \end{cases}$$

(1) 求圆柱内、外的电场强度;

(2) 这个圆柱是什么材料制成的? 表面有电荷分布吗? 试求之。

解 (1) 由 $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, 可得到

$$\rho < a \text{ 时, } \mathbf{E} = -\nabla\varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \rho > a \text{ 时, } \mathbf{E} &= -\nabla\varphi = -\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho}\left[A\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\cos\phi\right] - \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\rho\partial\phi}\left[A\left(\rho - \frac{a^2}{\rho}\right)\cos\phi\right] \\ &= -\mathbf{e}_\rho A\left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\phi + \mathbf{e}_\phi A\left(1 - \frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\phi \end{aligned}$$

(2) 该圆柱体为等位体, 所以是由导体制成的, 其表面有电荷分布, 电荷面密度为

$$\rho_s = \varepsilon_0 \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{E} \big|_{\rho=a} = \varepsilon_0 \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{E} \big|_{\rho=a} = -2\varepsilon_0 A \cos\phi$$

3.4 已知 $y > 0$ 的空间中没有电荷, 下列几个函数中哪些是可能的电位的解?

(1) $e^{-y} \cosh x$;

(2) $e^{-y} \cos x$;

(3) $e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x$

(4) $\sin x \sin y \sin z$ 。

解 在电荷体密度 $\rho = 0$ 的空间, 电位函数应满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\varphi = 0$ 。

$$(1) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-y} \cosh x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-y} \cosh x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-y} \cosh x) = 2e^{-y} \cosh x \neq 0$$

故此函数不是 $y > 0$ 空间中的电位的解;

$$\begin{aligned} (2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-y} \cos x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-y} \cos x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-y} \cos x) &= -e^{-y} \cos x + e^{-y} \cos x \\ &= 0 \end{aligned}$$

故此函数是 $y > 0$ 空间中可能的电位的解

$$\begin{aligned} (3) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x) \\ = -4e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x + 2e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x \neq 0 \end{aligned}$$

故此函数不是 $y > 0$ 空间中的电位的解;

$$(4) \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin x \sin y \sin z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin x \sin y \sin z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sin x \sin y \sin z)$$

$$= -3 \sin x \sin y \sin z \neq 0$$

故此函数不是 $y > 0$ 空间中的电位的解。

3.5 一半径为 R_0 的介质球, 介电常数为 $\epsilon_r \epsilon_0$, 其内均匀分布自由电荷 ρ ,

试证明该介质球中心点的电势为 $\frac{2\epsilon_r + 1}{2\epsilon_r} \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} \right) R_0^2$

证 根据高斯定律 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, 得

$$r < R_0 \text{ 时} \quad 4\pi r^2 D = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

$$\text{即} \quad D_1 = \frac{\rho r}{3}, \quad E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon_r \epsilon_0}$$

$$r > R_0 \text{ 时,} \quad 4\pi r^2 D_2 = \frac{4\pi R_0^3}{3} \rho$$

$$\text{故} \quad D_2 = \frac{\rho R_0^3}{3r^2}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0} = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

则得中心点的电势为

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_0^{R_0} E_1 dr + \int_{R_0}^{\infty} E_2 dr = \int_0^{R_0} \frac{\rho r}{3\epsilon_r \epsilon_0} dr + \int_{R_0}^{\infty} \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{\rho R_0^2}{6\epsilon_r \epsilon_0} + \frac{\rho R_0^2}{3\epsilon_0} = \frac{2\epsilon_r + 1}{3\epsilon_r} \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} \right) R_0^2 \end{aligned}$$

3.6 电场中一半径为 a 、介电常数为 ϵ 的介质球, 已知球内、外的电位函数分别为

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} a^3 E_0 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad r \geq a$$

$$\varphi_2 = -\frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_0 r \cos \theta \quad r \leq a$$

验证球表面的边界条件, 并计算球表面的束缚电荷密度。

解 在球表面上

$$\varphi_1(a, \theta) = -E_0 a \cos \theta + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} a E_0 \cos \theta$$

$$= -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 a \cos \theta$$

$$\varphi_2(a, \theta) = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 a \cos \theta$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = -E_0 \cos \theta - \frac{2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta$$

$$= -\frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta$$

故有

$$\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta), \quad \varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = \varepsilon \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a}$$

可见 φ_1 和 φ_2 满足球表面上的边界条件。

介质球表面的束缚电荷密度为

$$\begin{aligned} \rho_{PS} &= \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{P}_2 \Big|_{r=a} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_2 \\ &= -(\varepsilon - \varepsilon_0) \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta \end{aligned}$$

3.7 无限大导体平板分别置于 $x=0$ 和 $x=d$ 处, 板间充满电荷, 其体电荷

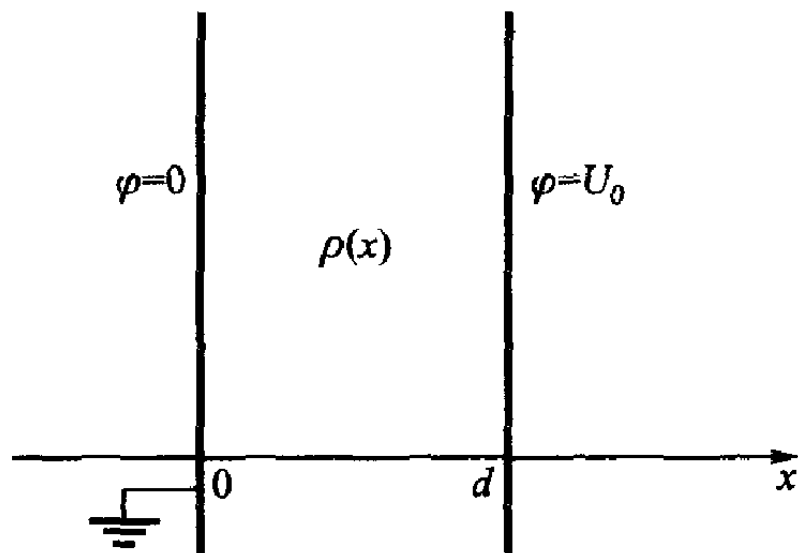
密度为 $\rho = \frac{\rho_0 x}{d}$, 极板的电位分别为 0 和 U_0 , 如图题 3.7 所示, 求两极板之间的电位和电场强度。

解 两导体板之间的电位满足泊松

方程 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, 故得

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\rho_0 x}{d}$$

解此方程, 得



图题 3.7

$$\varphi = -\frac{\rho_0 x^2}{6\varepsilon_0 d} + Ax + B$$

在 $x=0$ 处, $\varphi=0$, 故 $B=0$

$$\text{在 } x=d \text{ 处, } \varphi=U_0, \text{ 故 } U_0 = -\frac{\rho_0 d^3}{6\varepsilon_0 d} + Ad$$

得

$$A = \frac{U_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}$$

故

$$\varphi = -\frac{\rho_0 x^2}{6\varepsilon_0 d} + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)x$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi = -e_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e_x \left[\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 d} - \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right) \right]$$

3.8 证明: 同轴线单位长度的静电储能 $W_e = \frac{q_l^2}{2C}$ 。式中 q_l 为单位长度上的电荷量, C 为单位长度上的电容。

证 由高斯定律可求得同轴线内、外导体间的电场强度为

$$E(\rho) = \frac{q_l}{2\pi\varepsilon\rho}$$

内外导体间的电压为

$$U = \int_a^b E d\rho = \int_a^b \frac{q_l}{2\pi\varepsilon\rho} d\rho = \frac{q_l}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{b}{a}$$

则同轴线单位长度的电容为

$$C = \frac{q_l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$$

则得同轴线单位长度的静电储能为

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int_a^b \varepsilon \left(\frac{q_l}{2\pi\varepsilon\rho} \right)^2 2\pi\rho d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \frac{q_l^2}{2\pi\varepsilon} \ln(b/a) = \frac{1}{2} \frac{q_l^2}{C}$$

3.9 有一半径为 a 、带电量 q 的导体球, 其球心位于介电常数分别为 ε_1 和

ϵ_2 的两种介质的分界面上, 该分界面为无限大平面。试求: (1) 导体球的电容; (2) 总的静电能量。

解 (1) 由于电场沿径向分布, 根据边界条件, 在两种介质的分界面上 $E_{1t} = E_{2t}$, 故有 $E_1 = E_2 = E$ 。由于 $D_1 = \epsilon_1 E_1$ 、 $D_2 = \epsilon_2 E_2$, 所以 $D_1 \neq D_2$ 。由高斯定律, 得

$$D_1 S_1 + D_2 S_2 = q$$

即

$$2\pi r^2 \epsilon_1 E + 2\pi r^2 \epsilon_2 E = q$$

所以

$$E = \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

导体球的电位

$$\varphi(a) = \int_a^\infty E dr = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a}$$

故导体球的电容

$$C = \frac{q}{\varphi(a)} = 2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a$$

(2) 总的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2} q \varphi(a) = \frac{q^2}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)a}$$

3.10 两平行的金属板, 板间距离为 d , 竖直地插入介电常数为 ϵ 的液体中, 两板间加电压 U_0 , 试证明液面升高

$$h = \frac{1}{2\rho g} (\epsilon - \epsilon_0) \left(\frac{U_0}{d} \right)^2$$

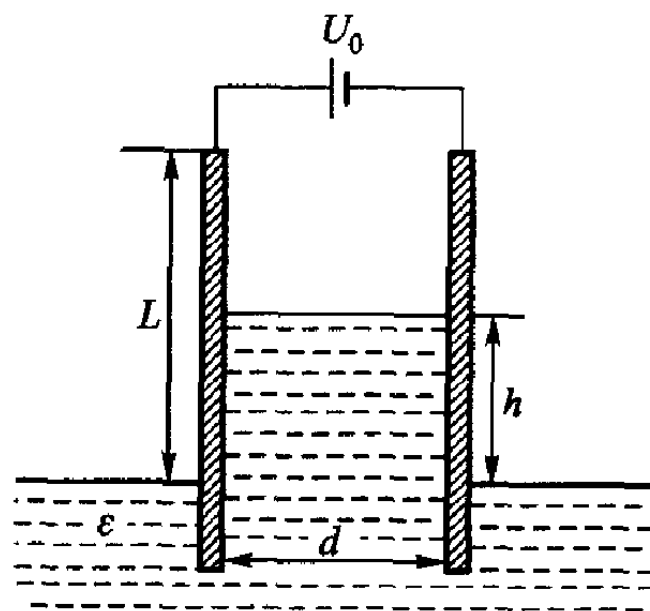
式中, ρ 为液体的质量密度, g 为重力加速度。

证 设液面上金属板的高度为 L , 宽度为 a , 如图题 3.10 所示。

当金属板之间的液面升高为 h 时, 其电容为

$$C = \frac{\epsilon a h}{d} + \frac{\epsilon_0 a (L - h)}{d}$$

金属板间的静电能量为



图题 3.10

$$W_e = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{aU_0^2}{2d}[h\varepsilon + (L-h)\varepsilon_0]$$

液体受到竖直向上的静电力为

$$F_e = \frac{\partial W_e}{\partial h} = \frac{aU_0^2}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

而液体所受重力

$$F_g = mg = ah d \rho g$$

F_e 与 F_g 相平衡, 即

$$\frac{aU^2}{2d}(\varepsilon - \varepsilon_0) = ah d g \rho$$

故得到液面上升的高度

$$h = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)U_0^2}{2d^2\rho g} = \frac{1}{2\rho g}(\varepsilon - \varepsilon_0)\left(\frac{U_0}{d}\right)^2$$

3.11 同轴电缆的内导体半径为 a , 外导体内半径为 c ; 内、外导体之间填充两层损耗介质, 其介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 , 电导率分布为 σ_1 和 σ_2 , 两层介质的分界面为同轴圆柱面, 分界面半径为 b 。当外加电压为 U_0 时, 试求: (1) 介质中的电流密度和电场强度分布; (2) 同轴电缆单位长度的电容及漏电阻。

解 (1) 设同轴电缆中单位长度的径向电流为 I , 则由 $\int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$, 得电流密度

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_\rho \frac{I}{2\pi\rho} \quad (a < \rho < c)$$

介质中的电场

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}}{\sigma_1} = \mathbf{e}_\rho \frac{I}{2\pi\rho\sigma_1} \quad (a < \rho < b)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}}{\sigma_2} = \mathbf{e}_\rho \frac{I}{2\pi\rho\sigma_2} \quad (b < \rho < c)$$

而

$$U_0 = \int_a^b \mathbf{E}_1 \cdot d\boldsymbol{\rho} + \int_b^c \mathbf{E}_2 \cdot d\boldsymbol{\rho} = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{I}{2\pi\sigma_2} \ln \frac{c}{b}$$

故

$$I = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2 U_0}{\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)}$$

则得到两种介质中的电流密度和电场强度分别为

$$J = e_\rho \frac{\sigma_1\sigma_2 U_0}{\rho[\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]} \quad (a < \rho < c)$$

$$E_1 = e_\rho \frac{\sigma_2 U_0}{\rho[\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]} \quad (a < \rho < b)$$

$$E_2 = e_\rho \frac{\sigma_1 U_0}{\rho[\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]} \quad (b < \rho < c)$$

(2) 同轴电缆单位长度的漏电阻为

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)}{2\pi\sigma_1\sigma_2}$$

由静电比拟, 可得同轴电缆单位长度的电容为

$$C = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_2 \ln(b/a) + \epsilon_1 \ln(c/b)}$$

3.12 在电导率为 σ 的无限大均匀电介质内, 有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的理想导体小球, 两球之间的距离为 $d (d \gg R_1, d \gg R_2)$, 试求两个小导体球面间的电阻。

解 此题可采用静电比拟的方法求解。假设位于介电常数为 ϵ 的介质中的两个小球分别带电荷 q 和 $-q$, 由于两球间的距离 $d \gg R_1, d \gg R_2$, 两小球表面的电位为

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d - R_2} \right)$$

$$\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d - R_1} \right)$$

所以两小导体球面间的电容为

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d - R_1} - \frac{1}{d - R_2}}$$

由静电比拟, 得到两小导体球面间的电导为

$$G = \frac{I}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\sigma}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d - R_1} - \frac{1}{d - R_2}}$$

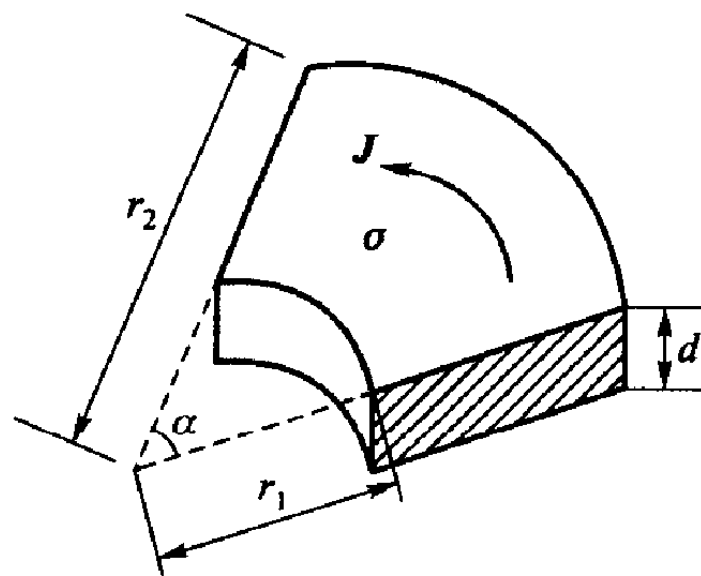
故两个小导体球面间的电阻为

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d - R_1} - \frac{1}{d - R_2} \right)$$

3.13 在一块厚度为 d 的导电板上，由两个半径分别为 r_1 和 r_2 的圆弧和夹角为 α 的两半径割出的一块扇形体，如图题

3.13 所示。试求：（1）沿厚度方向的电阻；（2）两圆弧面之间的电阻；（3）沿 α 方向的两电极间的电阻。设导电板的电导率为 σ 。

解 （1）设沿厚度方向的两电极的电压为 U_1 ，则有



图题 3.13

$$E_1 = \frac{U_1}{d}$$

$$J_1 = \sigma E_1 = \frac{\sigma U_1}{d}$$

$$I_1 = J_1 S_1 = \frac{\sigma U_1}{d} \cdot \frac{\alpha}{2} (r_2^2 - r_1^2)$$

故得到沿厚度方向的电阻为

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{2d}{\alpha\sigma(r_2^2 - r_1^2)}$$

（2）设内外两圆弧面电极之间的电流为 I_2 ，则

$$J_2 = \frac{I_2}{S_2} = \frac{I_2}{\alpha r d}$$

$$E_2 = \frac{J_2}{\sigma} = \frac{I_2}{\sigma \alpha r d}$$

$$U_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_2 dr = \frac{I_2}{\sigma \alpha d} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故得到两圆弧面之间的电阻为

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1}{\sigma \alpha d} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

(3) 设沿 α 方向的两电极的电压为 U_3 , 则有

$$U_3 = \int_0^\alpha E_3 r d\phi$$

由于 E_3 与 ϕ 无关, 故得

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_\phi \frac{U_3}{\alpha r}$$

$$\mathbf{J}_3 = \sigma \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_\phi \frac{\sigma U_3}{\alpha r}$$

$$I_3 = \int_{S_3} \mathbf{J}_3 \cdot \mathbf{e}_\phi dS = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma dU_3}{\alpha r} dr = \frac{\sigma dU_3}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故得到沿 α 方向的电阻为

$$R_3 = \frac{U_3}{I_3} = \frac{\alpha}{\sigma d \ln(r_2/r_1)}$$

3.14 有用圆柱坐标系表示的电流分布 $\mathbf{J} = \mathbf{e}_z J_0 (\rho \leq a)$, 试求矢量磁位 \mathbf{A} 和磁感应强度 \mathbf{B} 。

解 由于电流只有 \mathbf{e}_z 分量, 且仅为圆柱坐标 ρ 的函数, 故 \mathbf{A} 也只有 \mathbf{e}_z 分量, 且仅为 ρ 的函数, 即

$$\nabla^2 A_{z1}(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 J_0 \rho \quad (\rho \leq a)$$

$$\nabla^2 A_{z2}(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (\rho \geq a)$$

由此可解得

$$A_{z1}(\rho) = -\frac{1}{9} \mu_0 J_0 \rho^3 + C_1 \ln \rho + D_1$$

$$A_{z2}(\rho) = C_2 \ln \rho + D_2$$

式中, C_1 、 D_1 、 C_2 、 D_2 可由 A_{z1} 和 A_{z2} 满足的边界条件确定:

① $\rho \rightarrow 0$ 时, $A_{z1}(\rho)$ 为有限值, 若令此有限值为零, 则得 $C_1 = 0$ 、 $D_1 = 0$ 。

② $\rho = a$ 时, $A_{z1}(a) = A_{z2}(a)$, $\left. \frac{\partial A_{z1}}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} = \left. \frac{\partial A_{z2}}{\partial \rho} \right|_{\rho=a}$

即

$$-\frac{1}{9} \mu_0 J_0 a^3 = C_2 \ln a + D_2$$

$$-\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^2 = C_2 \frac{1}{a}$$

由此可解得

$$C_2 = -\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3, D_2 = -\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3 \left(\frac{1}{3} - \ln a \right)$$

故

$$A_{z1}(\rho) = -\frac{1}{9}\mu_0 J_0 \rho^3 \quad (\rho \leq a)$$

$$A_{z2}(\rho) = -\frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3 \ln \rho - \frac{1}{3}\mu_0 J_0 a^3 \left(\frac{1}{3} - \ln a \right) \quad (\rho \geq a)$$

空间的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1(\rho) = \nabla \times \mathbf{A}_1(\rho) = \mathbf{e}_\phi \frac{1}{3}\mu_0 J_0 \rho^2 \quad (\rho < a)$$

$$\mathbf{B}_2(\rho) = \nabla \times \mathbf{A}_2(\rho) = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 J_0 a^3}{3\rho} \quad (\rho > a)$$

3.15 无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面，如图题 3.15 所示。试求：(1) 两种磁介质中的磁感应强度 \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_2 ；(2) 磁化电流分布。

解 (1) 由安培环路定律，可得

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho}$$

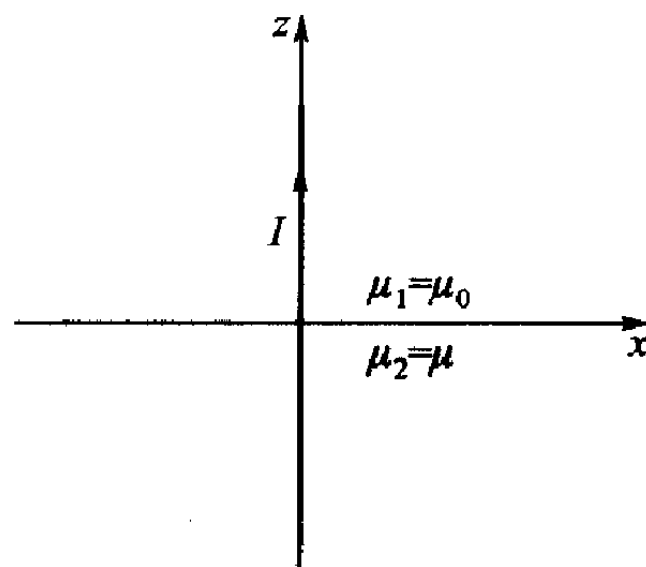
故得

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu I}{2\pi\rho}$$

(2) 磁介质的磁化强度

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_2 - \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{(\mu - \mu_0) I}{2\pi\mu_0\rho}$$



图题 3.15

则磁化电流体密度

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_m &= \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho M_\phi) \\ &= \mathbf{e}_z \frac{(\mu - \mu_0) I}{2 \pi \mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \cdot \frac{1}{\rho} \right) = 0 \end{aligned}$$

由 $\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu I}{2 \pi \rho}$ 看出, 在 $\rho = 0$ 处, \mathbf{B}_2 具有奇异性, 所以在磁介质中 $\rho = 0$ 处存在磁化线电流 I_m 。以 z 轴为中心, ρ 为半径做一个圆形回路 C , 由安培环路定律, 有

$$I + I_m = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu I}{\mu_0}$$

故得到

$$I_m = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) I$$

在磁介质的表面上, 磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_z \big|_{z=0} = \mathbf{e}_\rho \frac{(\mu - \mu_0) I}{2 \pi \mu_0 \rho}$$

3.16 已知一个平面电流回路在真空中产生的磁场强度为 \mathbf{H}_0 , 若此平面电流回路位于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种均匀磁介质的分界平面上, 试求两种磁介质中的磁场强度 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 。

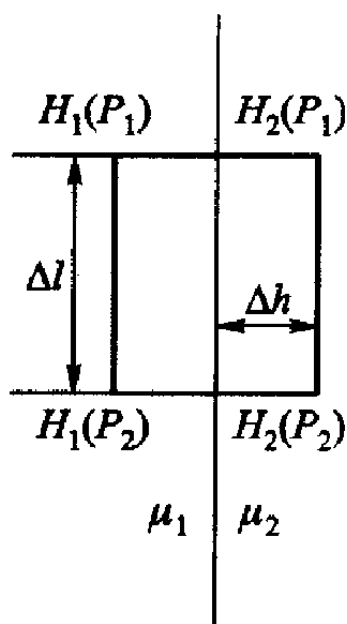
解 因为是平面电流回路, 当其位于两种均匀磁介质的分界平面上时, 分界面上的磁场只有法向分量, 根据边界条件, 故有 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}$ 。

在磁介质分界面两侧, 做一个尺寸为 $2\Delta h \times \Delta l$ 的小矩形回路, 如图题 3.16 所示。根据安培环路定律, 得

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= H_1(P_1) \Delta h + H_2(P_1) \Delta h \\ &\quad - H_1(P_2) \Delta h - H_2(P_2) \Delta h = I \quad (1) \end{aligned}$$

式中的 I 是与小矩形回路交链的电流。

若平面电流回路两侧为真空, 则有



图题 3.16

$$\oint_C \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} = 2H_0(P_1)\Delta h - 2H_0(P_2)\Delta h = I \quad (2)$$

由于 P_1 和 P_2 是分界面上的任意两点, 由式 (1) 和 (2) 可得到

$$\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = 2\mathbf{H}_0$$

即

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_1} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_2} = 2\mathbf{H}_0$$

于是

$$\mathbf{B} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\mathbf{H}_0$$

故

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{B}}{\mu_1} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\mathbf{H}_0$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{\mathbf{B}}{\mu_2} = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\mathbf{H}_0$$

3.17 证明: 在不同磁介质分界面上, 矢量磁位 \mathbf{A} 的切向分量是连续的。

证 由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 得

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

在磁介质分界面上任取一点 P , 围绕该点做一个跨越分界面的狭长矩形回路 C , 其长为 Δl 、宽为 Δh , 且令 $\Delta h \rightarrow 0$, 如图题 3.17 所示, 故得

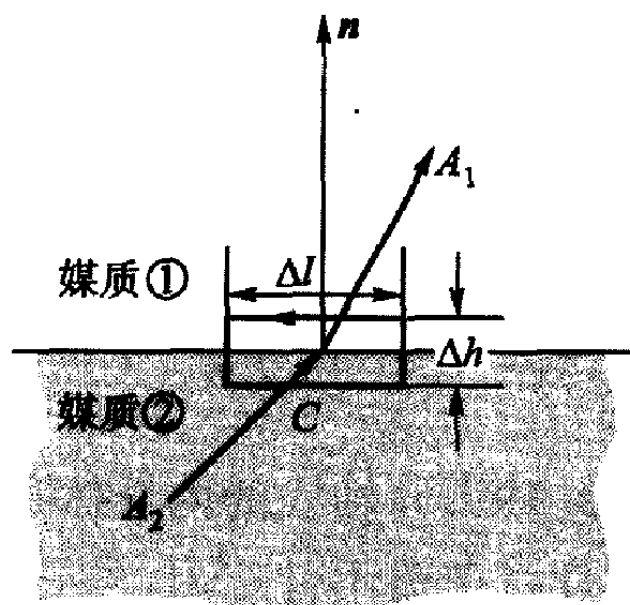
$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{A}_1 \cdot \Delta \mathbf{l} - \mathbf{A}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

由于 \mathbf{B} 为有限值, 上式右端等于零, 所以

$$\mathbf{A}_1 \cdot \Delta \mathbf{l} - \mathbf{A}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} = 0$$

因 $\Delta \mathbf{l}$ 平行于分界面, 故有

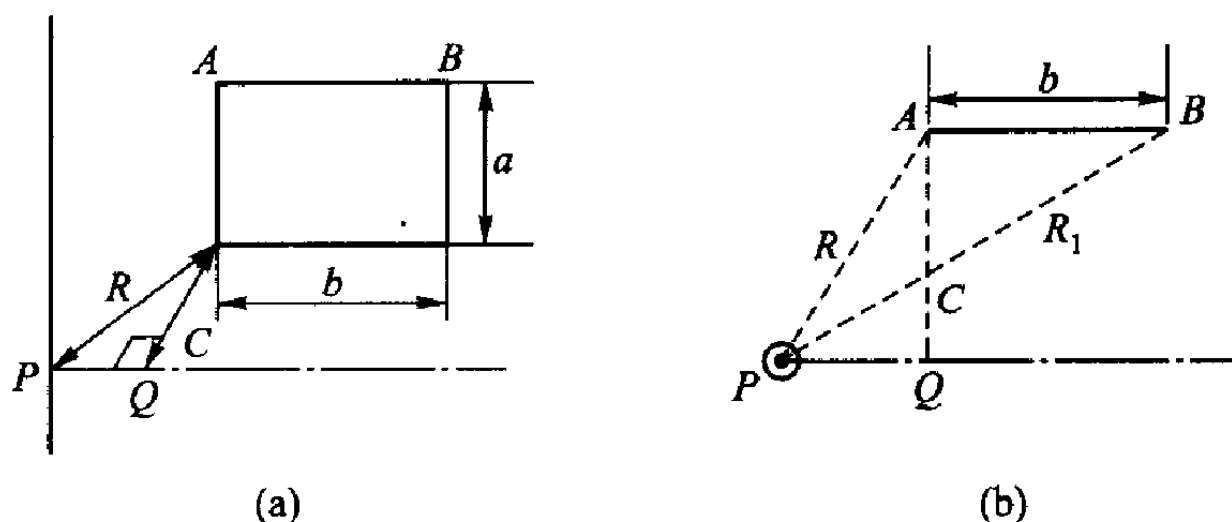
$$A_{1t} = A_{2t}$$



图题 3.17

3.18 长直导线附近有一矩形回路, 此回路与导线不共面, 如图题 3.18 所示。证明: 直导线与矩形回路间的互感为

$$M = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{R}{[2b(R^2 - C^2)^{1/2} + b^2 + R^2]^{1/2}}$$



图题 3.18

证 设长直导线中的电流为 I , 则其产生的磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

由图题 3.18 可知, 与矩形回路交链的磁通为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \int_R^{R_1} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R}$$

式中

$$R_1 = [C^2 + (b + \sqrt{R^2 - C^2})^2]^{1/2} = [R^2 + b^2 + 2b\sqrt{R^2 - C^2}]^{1/2}$$

故直导线与矩形回路间的互感为

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{R_1}{R} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{[R^2 + b^2 + 2b\sqrt{R^2 - C^2}]^{1/2}}{R} \\ &= -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{R}{[2b(R^2 - C^2)^{1/2} + b^2 + R^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

3.19 同轴线的内导体是半径为 a 的圆柱, 外导体是半径为 b 的薄圆柱面, 其厚度可忽略不计。内、外导体间填充有磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 两种不同的磁介质, 如图题 3.19 所示。设同轴线中通过的电流为 I , 试求:

- (1) 同轴线中单位长度所储存的磁场能量;
- (2) 单位长度的自感。

解 同轴线的内外导体之间的磁场沿 ϕ 方向, 在两种磁介质的分界面上, 磁场只有法向分量。根据边界条件可知, 两种磁介质中的磁感应强度 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 =$

$\mathbf{B} = e_\phi B$, 但磁场强度 $\mathbf{H}_1 \neq \mathbf{H}_2$ 。

(1) 利用安培环路定律, 当 $\rho < a$ 时, 有

$$2\pi\rho B_0 = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \pi \rho^2$$

所以

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \rho \quad (\rho < a)$$

在 $a < \rho < b$ 区域内, 有

$$\pi\rho(H_1 + H_2) = I$$

即

$$\pi\rho\left(\frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2}\right) = I$$

故

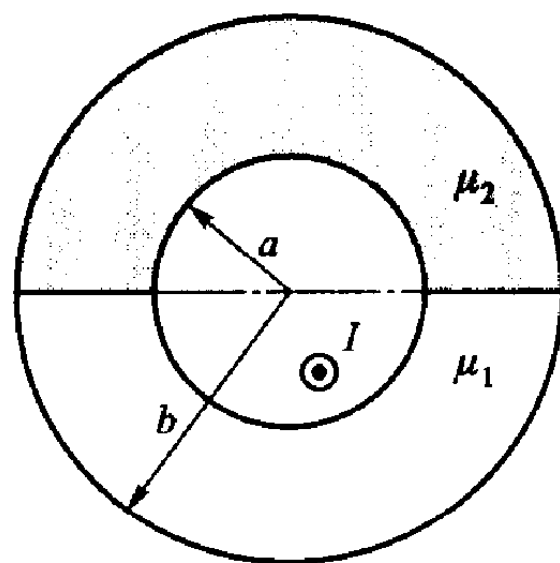
$$\mathbf{B} = e_\phi \frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)\rho} \quad (a < \rho < b)$$

同轴线中单位长度储存的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{B_0^2}{\mu_0} 2\pi\rho d\rho + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B^2}{\mu_1} \pi\rho d\rho + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{B^2}{\mu_2} \pi\rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi\rho d\rho + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \int_a^b \left[\frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)\rho} \right]^2 \pi\rho d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2 I^2}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

(2) 由 $W_m = \frac{1}{2} LI^2$, 得到单位长度的自感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a}$$



图题 3.19

3.20 如图题 3.20 所示的长螺旋管, 单位长度密绕 N 匝线圈, 通过电流 I , 铁心的磁导率为 μ 、截面积为 S , 求作用在它上面的磁场力。

解 由安培环路定律可得螺旋管内的磁场为

$$H = NI$$

设铁心在磁场力的作用下有一位移 dx , 则螺旋管内改变的磁场能量为

$$\begin{aligned} dW_m &= \frac{\mu}{2} H^2 S dx - \frac{\mu_0}{2} H^2 S dx \\ &= \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) N^2 I^2 S dx \end{aligned}$$

则作用在铁心上的磁场力为

$$F_x = \left. \frac{dW_m}{dx} \right|_{I=\text{常数}} = \frac{1}{2} (\mu - \mu_0) N^2 I^2 S$$

可见, 磁场力有将铁心拉进螺旋管的趋势。

3.21 一个点电荷 q 与无限大导体平面的距离为 d , 如果把它移到无穷远处, 需要做多少功?

解 利用镜像法求解。当点电荷 q 移动到距离导体平面为 x 的点 $P(x, 0, 0)$ 时, 其像电荷 $q' = -q$, 位于点 $(-x, 0, 0)$ 处, 如图题 3.21 所示。像电荷 $q' = -q$ 在点 P 处产生的电场为

$$\mathbf{E}'(x) = \mathbf{e}_x \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2}$$

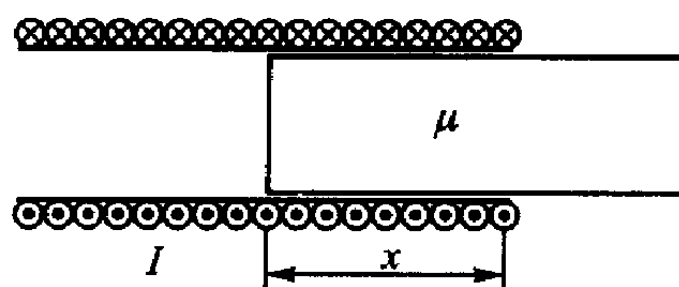
所以将点电荷 q 移到无穷远处时, 电场所做的功为

$$\begin{aligned} W_e &= \int_d^\infty q \mathbf{E}'(x) \cdot d\mathbf{r} = \int_d^\infty \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} dx \\ &= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d} \end{aligned}$$

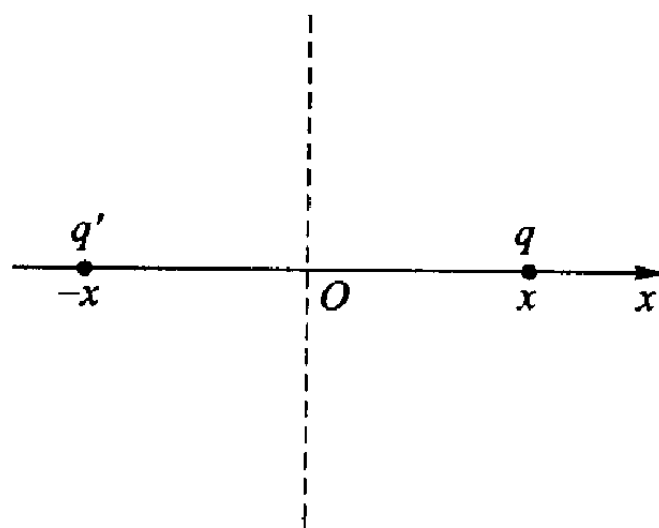
外力所做的功为

$$W_o = -W_e = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$

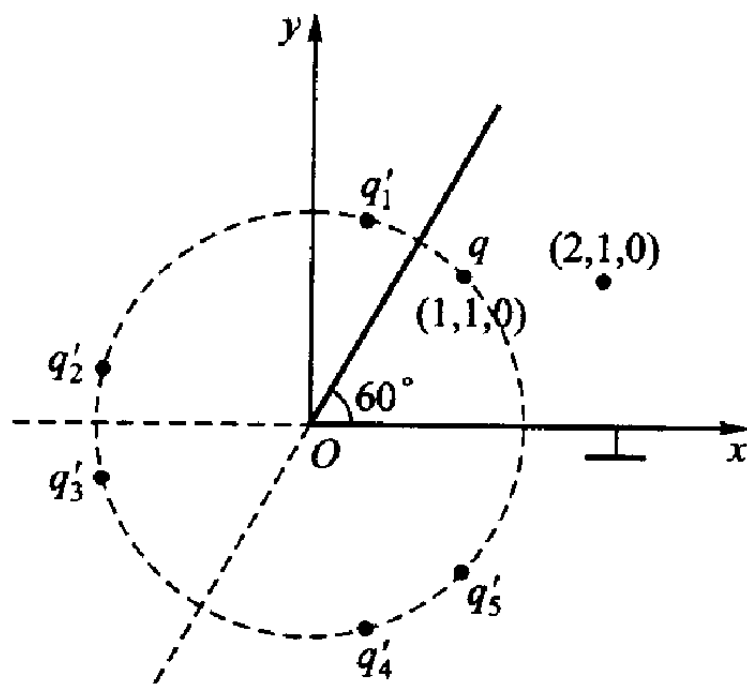
3.22 如图题 3.22 所示, 一个点电荷 q 放在 60° 的接地导体角域内的点 $(1, 1, 0)$ 处。试求: (1) 所有镜像电荷的位置和大



图题 3.20



图题 3.21



图题 3.22

小；(2) 点 $P(2,1,0)$ 处的电位。

解 (1) 这是一个多重镜像的问题，共有 $(2n-1) = 2 \times 3 - 1 = 5$ 个像电荷，分布在以点电荷 q 到角域顶点的距离（即 $\sqrt{2}$ ）为半径的圆周上，并且关于导体平面对称，如图题 3.22 所示。

$$q'_1 = -q, \quad \begin{cases} x'_1 = \sqrt{2} \cos 75^\circ = 0.366 \\ y'_1 = \sqrt{2} \sin 75^\circ = 1.366 \end{cases}$$

$$q'_2 = q, \quad \begin{cases} x'_2 = \sqrt{2} \cos 165^\circ = -1.366 \\ y'_2 = \sqrt{2} \sin 165^\circ = 0.366 \end{cases}$$

$$q'_3 = -q, \quad \begin{cases} x'_3 = \sqrt{2} \cos 195^\circ = -1.366 \\ y'_3 = \sqrt{2} \sin 195^\circ = -0.366 \end{cases}$$

$$q'_4 = q, \quad \begin{cases} x'_4 = \sqrt{2} \cos 285^\circ = 0.366 \\ y'_4 = \sqrt{2} \sin 285^\circ = -1.366 \end{cases}$$

$$q'_5 = -q, \quad \begin{cases} x'_5 = \sqrt{2} \cos 315^\circ = 1 \\ y'_5 = \sqrt{2} \sin 315^\circ = -1 \end{cases}$$

(2) 点 $P(2,1,0)$ 处的电位

$$\begin{aligned} \varphi(2,1,0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q'_1}{R_1} + \frac{q'_2}{R_2} + \frac{q'_3}{R_3} + \frac{q'_4}{R_4} + \frac{q'_5}{R_5} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (1 - 0.597 + 0.292 - 0.275 + 0.348 - 0.447) \\ &= \frac{0.321}{4\pi\epsilon_0} q = 2.89 \times 10^9 q \text{ V} \end{aligned}$$

3.23 一个电荷量为 q 、质量为 m 的小带电体，放置在无限大导体平面下方，与平面相距为 h 。欲使带电小球受到的静电力恰好与重力相平衡，电荷 q 的值应为多少？（设 $m = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$, $h = 0.02 \text{ m}$ ）。

解 将小带电体视为点电荷 q ，导体平面上的感应电荷对 q 的静电力等于镜像电荷 q' 对 q 的作用力。根据镜像法可知，镜像电荷为 $q' = -q$ ，位于导体平面上方 h 处，则小带电体 q 受到的静电力为

$$f_e = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^2}$$

令 f_e 的大小与重力 mg 相等, 即

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2h)^2} = mg$$

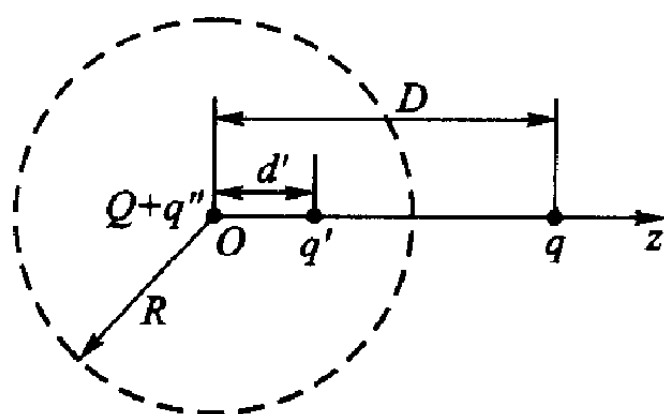
于是得到

$$q = 4h \sqrt{\pi\epsilon_0 mg} = 5.9 \times 10^{-8} \text{ C}$$

3.24 一个半径为 R 的导体球带有的电荷量为 Q , 在球体外距离球心 D 处有一个点电荷 q 。(1) 求点电荷 q 与导体球之间的静电力; (2) 证明: 当 q 与 Q 同号且

$$\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2 - R^2)^2} - \frac{R}{D}, \text{ 成立时, } F \text{ 表现为吸引力。}$$

解 (1) 用镜像法求解, 像电荷 q' 和 q'' 的大小和位置分别为



图题 3.24

$$q' = -\frac{R}{D}q, \quad d' = \frac{R^2}{D}$$

$$q'' = -q' = \frac{R}{D}q, \quad d'' = 0$$

如图题 3.24 所示。

导体球自身所带的电荷 Q 则用位于球心的点电荷 Q 等效, 故点电荷 q 受到的静电力为

$$\begin{aligned} F &= F_{q' \rightarrow q} + F_{q'' \rightarrow q} + F_{Q \rightarrow q} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(D-d')^2} + \frac{q(Q+q'')}{4\pi\epsilon_0 D^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q + (R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D(D - R^2/D)^2} \right] \end{aligned}$$

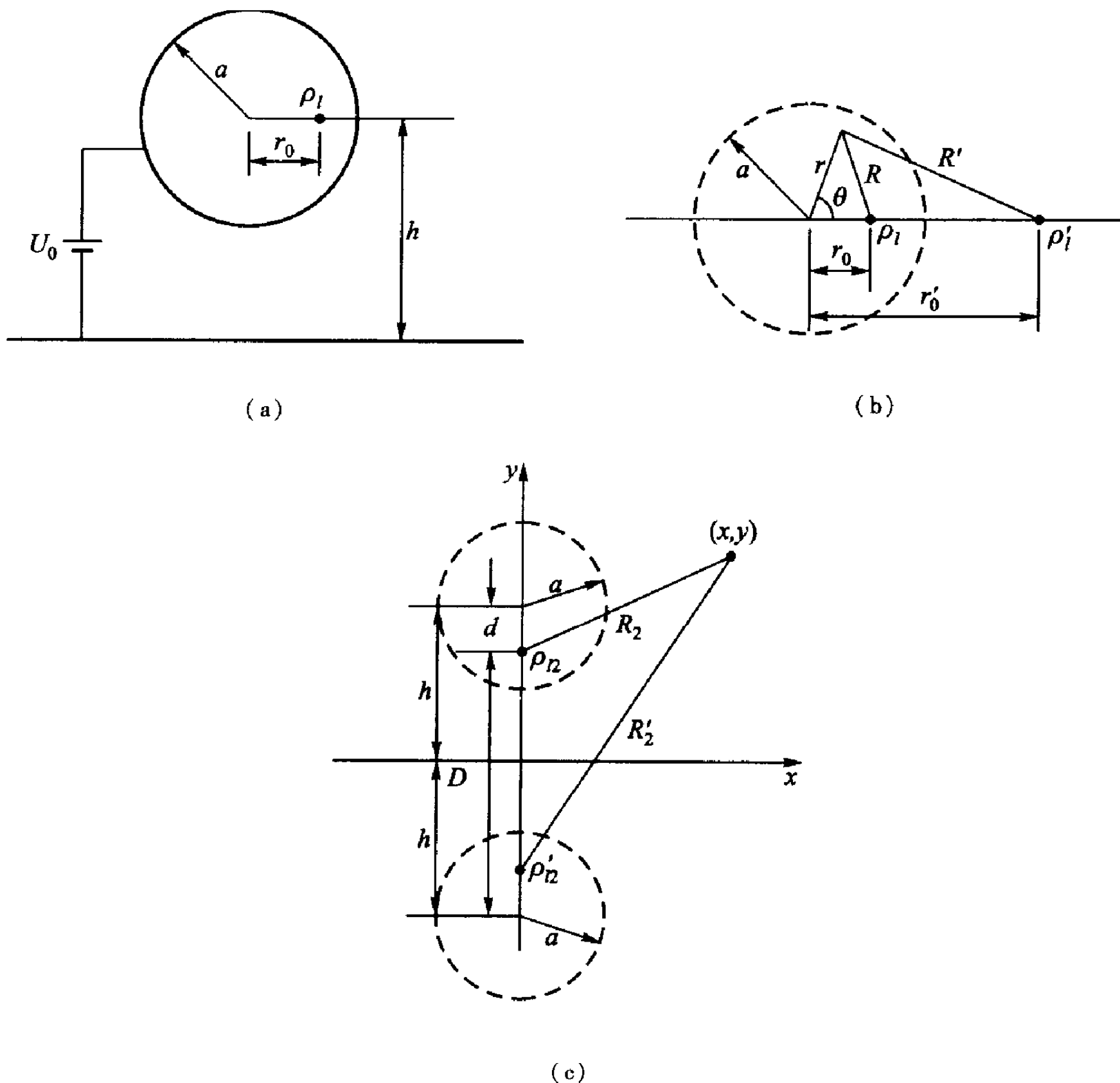
(2) 当 q 与 Q 同号, 且 F 表现为吸引力, 即 $F < 0$ 时, 则应有

$$\frac{Q + (R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D[D - R^2/D]^2} < 0$$

由此可得出

$$\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2 - R^2)^2} - \frac{R}{D}$$

3.25 一半径为 a 的无限长金属圆柱薄壳平行于地面，其轴线与地面相距为 h 。在圆柱薄壳内距轴线为 r_0 处，平行放置一根电荷线密度为 ρ_l 的长直细导线，其横截面如图题 3.25(a) 所示。设圆柱壳与地面间的电压为 U_0 。试求：金属圆柱薄壳内外的电位分布。



图题 3.25

解 线电荷 ρ_l 在金属圆柱薄壳内表面引起的感应电荷，用镜像电荷 ρ'_l 等效替代，如图题 3.25(b) 所示，图中 $\rho'_l = -\rho_l$ ，位于 $r'_0 = \frac{a^2}{r_0}$ 。圆柱薄壳内任一点的电位为

$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{R} + C$$

式中， $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}$

$$R' = \sqrt{r^2 + (a^2/r_0)^2 - 2ra^2/r_0 \cos \theta}$$

因 $r = a, \varphi_1 = U_0$, 故得

$$C = U_0 - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r_0}$$

则

$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'r_0}{Ra} + U_0$$

求圆柱薄壳外任一点的电位时, 地面对圆柱薄壳的影响可用镜像圆柱等效替代, 如图题 3.25(c) 所示, 图中

$$D = h + \sqrt{h^2 - a^2}$$

$$d = h - \sqrt{h^2 - a^2}$$

则圆柱薄壳外的电位为

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y) &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'_2}{R_2} \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x^2 + [y + (h - d)]^2}}{\sqrt{x^2 + [y - (h - d)]^2}} \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{x^2 + [y + \sqrt{h^2 - a^2}]^2}}{\sqrt{x^2 + [y - \sqrt{h^2 - a^2}]^2}} \end{aligned}$$

已知圆柱薄壳的电位为 U_0 , 即 $x=0, y=h-a$ 时, $\varphi_2 = U_0$, 故得

$$\rho_l = \frac{2\pi\epsilon_0 U_0}{\ln \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + (h - a)}{\sqrt{h^2 - a^2} - (h - a)}}$$

则

$$\varphi_2 = \frac{U_0}{\ln \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + (h - a)}{\sqrt{h^2 - a^2} - (h - a)}} \ln \frac{\sqrt{x^2 + (y + \sqrt{h^2 - a^2})^2}}{\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{h^2 - a^2})^2}}$$

3.26 如图题 3.26(a) 所示, 在 $z < 0$ 的下半空间是介电常数为 ϵ 的介质, 上半空间为空气, 距离介质平面 h 处有一点电荷 q , 试求: (1) $z > 0$ 和 $z < 0$ 的两

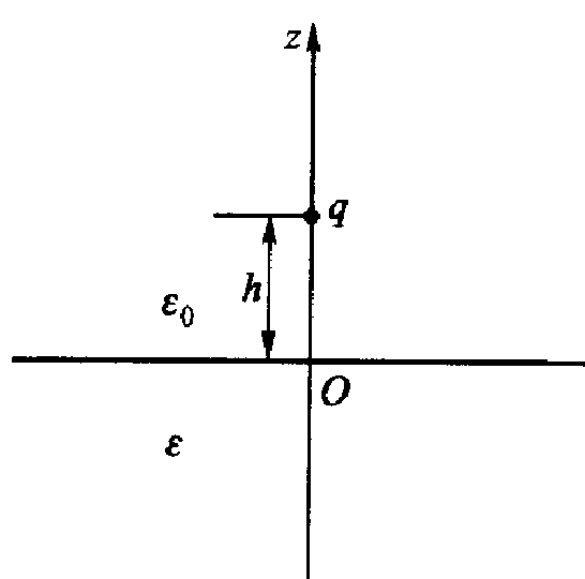
个半空间内的电位;(2) 介质表面上的极化电荷密度, 并证明表面上极化电荷总电量等于镜像电荷 q' 。

解 (1) 在点电荷 q 的电场力作用下, 介质分界面上出现极化电荷, 利用镜像电荷替代介质分界面上的极化电荷。根据镜像法可知, 镜像电荷分布为

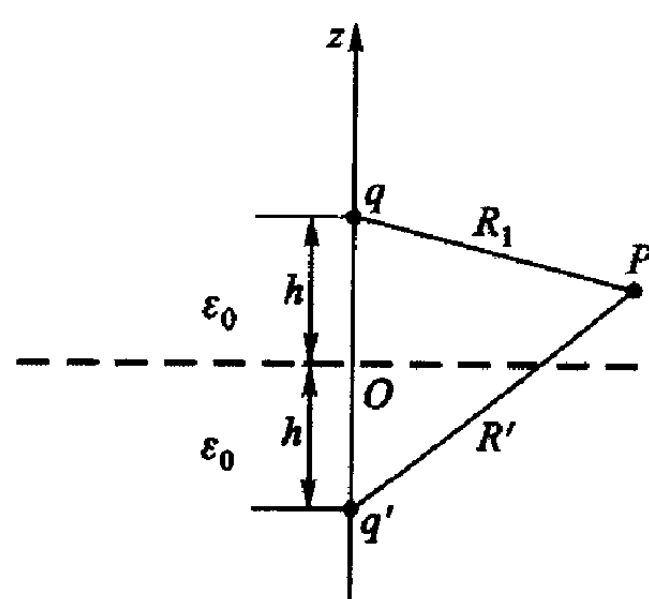
$$q' = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}q, \text{ 位于 } z = -h$$

$$q'' = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}q, \text{ 位于 } z = h$$

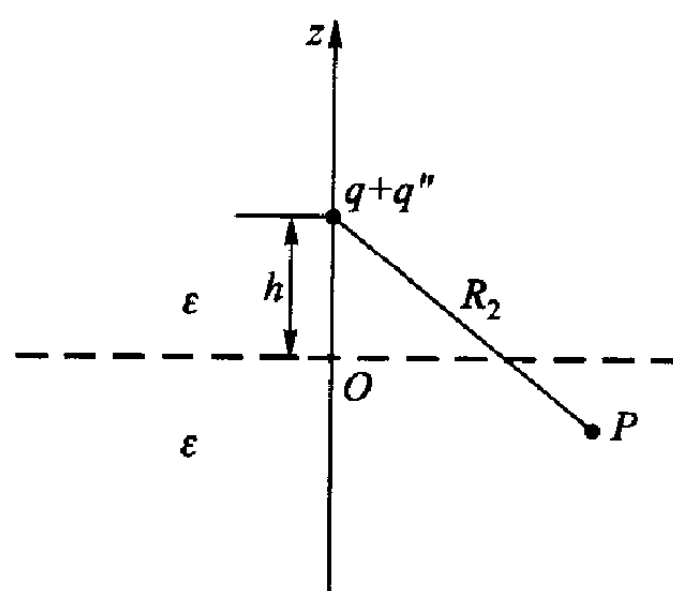
如图题 3.26(b)、(c) 所示。



(a)



(b)



(c)

图题 3.26

上半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q' 共同产生, 即

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R'} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - h)^2}} - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + h)^2}} \right\} \end{aligned}$$

下半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q'' 共同产生,即

$$\varphi_2 = \frac{q + q''}{4\pi\epsilon R_2} = \frac{q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_0)} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - h)^2}}$$

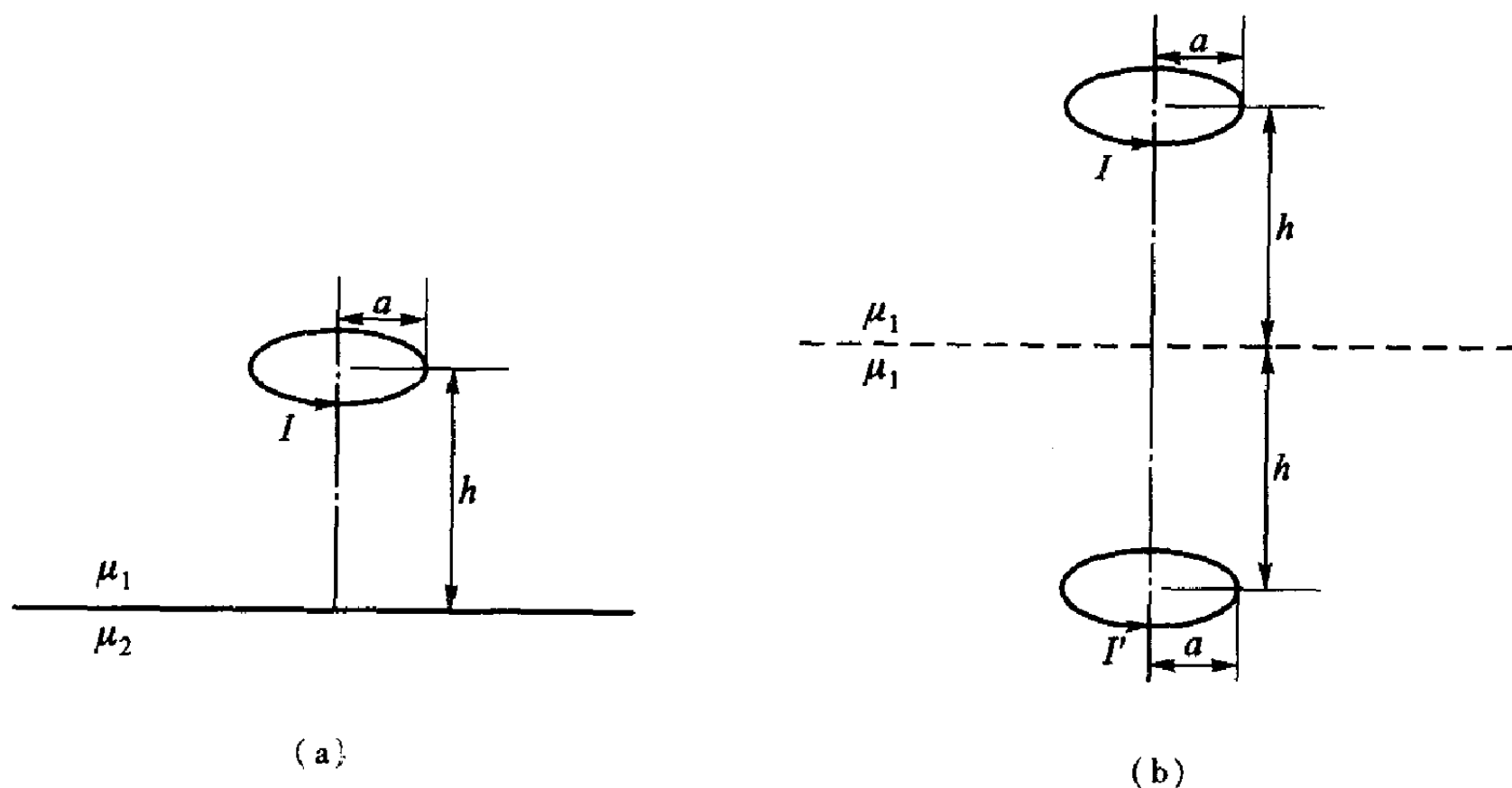
(2) 由于分界面上无自由电荷分布, 故极化电荷面密度为

$$\begin{aligned}\rho_{PS} &= \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) \big|_{z=0} = \epsilon_0 (E_{1z} - E_{2z}) \big|_{z=0} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \bigg|_{z=0} \\ &= - \frac{(\epsilon - \epsilon_0) h q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_0) (r^2 + h^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

介质表面的极化电荷总电量为

$$\begin{aligned}q_P &= \int_S \rho_{PS} dS = \int_0^\infty \rho_{PS} 2\pi r dr = - \frac{(\epsilon - \epsilon_0) h q}{\epsilon + \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr \\ &= - \frac{(\epsilon - \epsilon_0) q}{\epsilon + \epsilon_0} = q'\end{aligned}$$

3.27 磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面为无限大平面, 在磁介质 1 中, 有一个半径为 a 、载电流为 I 的细导线圆环, 与分界面平行且相距 h , 如图题 3.27(a) 所示。设 $h \gg a$, 求细导线圆环所受到的磁场力。



图题 3.27

解 细导线圆环受到分界面上磁化电流的作用力, 根据磁场镜像法, 磁化电流的作用可用一个半径为 a 、载电流为 I' 的镜像圆环等效替代, 如图题 3.27(b) 所示。镜像圆环中的电流为

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

由于 $h \gg a$, I' 在细导线圆环处产生的磁场为

$$B' = \frac{\mu_1 I' a^2}{2[a^2 + (2h)^2]^{3/2}}$$

与细导线圆环交链的磁通为

$$\psi' = B' \pi a^2 = \frac{\pi \mu_1 I' a^4}{2[a^2 + (2h)^2]^{3/2}}$$

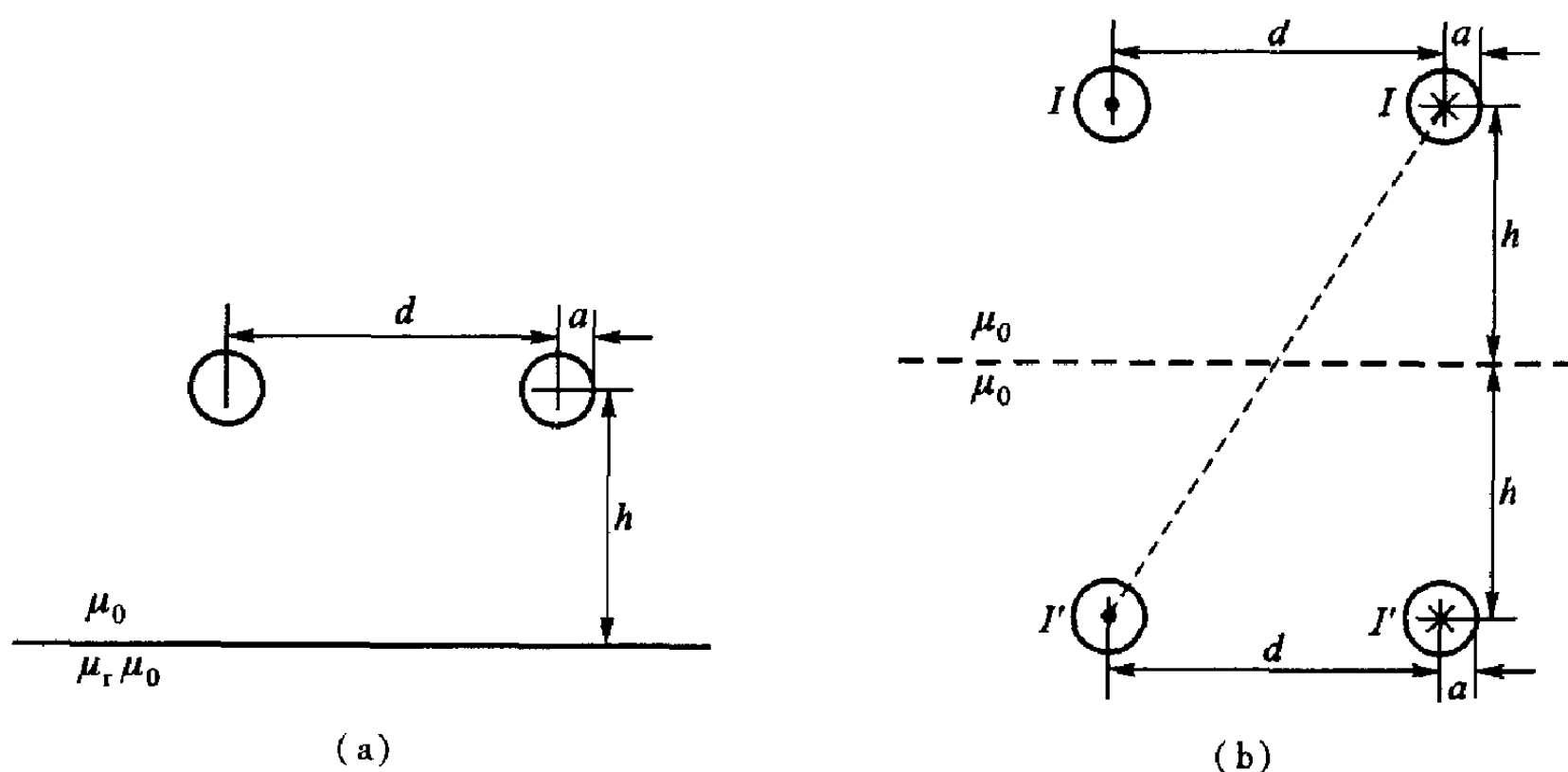
相互作用能为

$$W_m = I \psi' = \frac{\pi \mu_1 I I' a^4}{2[a^2 + (2h)^2]^{3/2}}$$

由虚位移法, 可得到细导线圆环受到的磁场力为

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial W_m}{\partial (2h)} = - \frac{\pi \mu_1 I I' a^4 h}{[a^2 + (2h)^2]^{5/2}} \\ &= - \frac{\mu_1 (\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2 + \mu_1} \frac{\pi I^2 a^4 h}{[a^2 + (2h)^2]^{5/2}} \end{aligned}$$

3.28 平行双线传输线的半径为 a , 相距为 d , 在传输线下方 h 处放置其相对磁导率为 μ_r 的铁磁性平板, 如图题 3.28(a) 所示。设 $a \ll h$ 且 $a \ll d$, 试求此平行双线传输线单位长度的外自感。



图题 3.28

解 用磁场镜像法求解, 无限大铁磁物质表面的磁化电流的作用可用一对平行的镜像传输线来替代, 如图题 3.28(b) 所示, 镜像电流为

$$I' = \frac{\mu_r \mu_0 - \mu_0}{\mu_r \mu_0 + \mu_0} I = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} I$$

电流 I 在平行传输线的单位长度上产生的外磁通为

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d-r} \right) dr \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d}{a}\end{aligned}$$

镜像电流 I' 在平行传输线的单位长度上产生的外磁通为

$$\psi'_1 = 2 \int_{2h}^D \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 (\mu_r - 1) I}{\pi (\mu_r + 1)} \ln \frac{D}{2h}$$

式中的 $D = \sqrt{(2h)^2 + d^2}$ 。

平行传输线的单位长度上总的外磁通为

$$\psi = \psi_1 + \psi'_1 = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{d}{a} + \frac{\mu_0 (\mu_r - 1) I}{\pi (\mu_r + 1)} \ln \frac{D}{2h}$$

则得外自感为

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} + \frac{\mu_0 (\mu_r - 1)}{\pi (\mu_r + 1)} \ln \frac{D}{2h}$$

3.29 如图题 3.29 所示的导体槽, 底面保持电位 U_0 , 其余两面电位为零, 求槽内的电位的解。

解 根据题意, 导体槽沿 z 方向为无限长, 电位 $\varphi(x, y)$ 满足二维拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

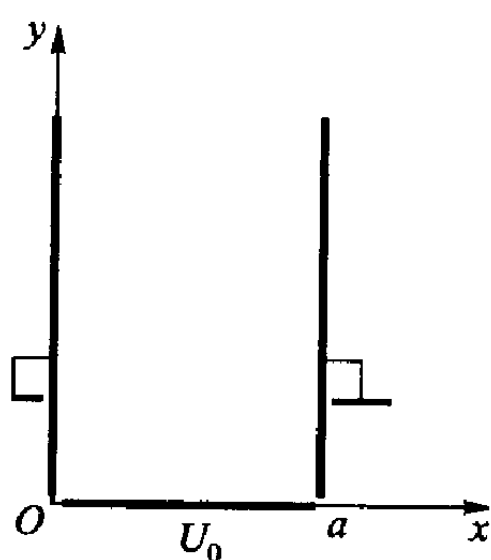
电位 $\varphi(x, y)$ 满足的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad \varphi(0, y) = \varphi(a, y) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi(x, y) \rightarrow 0 (y \rightarrow \infty)$$

$$\textcircled{3} \quad \varphi(x, 0) = U_0$$

根据条件①和②, 电位 $\varphi(x, y)$ 的通解应取为



图题 3.29

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi y/a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

由条件③,有

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

两边同乘以 $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, 并从 0 到 a 对 x 积分, 得到

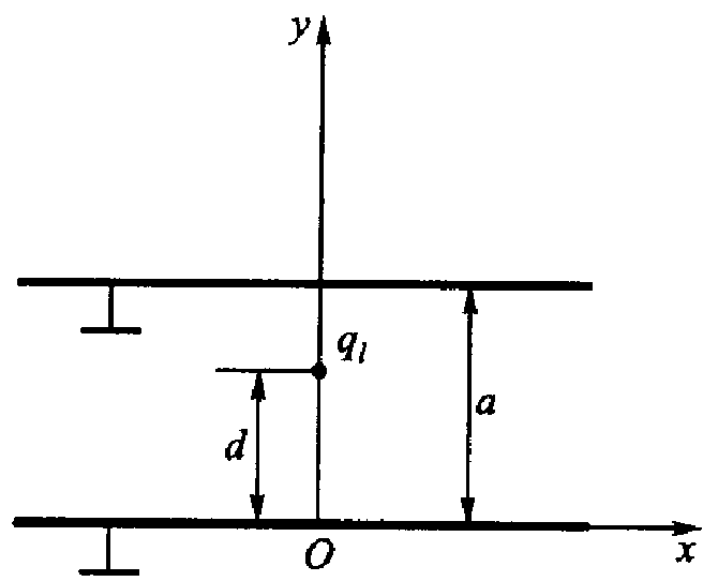
$$A_n = \frac{2U_0}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2U_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

故得到槽内的电位分布为

$$\varphi(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} e^{-n\pi y/a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

3.30 如图题 3.30 所示的两块平行无限大接地导体板, 两板之间有一与 z 轴平行的线电荷 q_l , 其位置为 $(0, d)$ 。求板间的电位分布。

解 由于在 $(0, d)$ 处有一与 z 轴平行的线电荷 q_l , 以 $x=0$ 为界将场空间分割为 $x>0$ 和 $x<0$ 两个区域, 这两个区域中的电位 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都满足拉普拉斯方程。而在 $x=0$ 的分界面上, 可利用 δ 函数将线电荷 q_l 表示成电荷面密度 $\rho_s(y) = q_l \delta(y - y_0)$ 。



图题 3.30

电位的边界条件为

$$\textcircled{1} \quad \varphi_1(x, 0) = \varphi_1(x, a) = 0$$

$$\varphi_2(x, 0) = \varphi_2(x, a) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \varphi_1(x, y) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$$

$$\varphi_2(x, y) \rightarrow 0 (x \rightarrow -\infty)$$

$$\textcircled{3} \quad \varphi_1(0, y) = \varphi_2(0, y)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0} = \frac{q_l}{\epsilon_0} \delta(y - d)$$

由条件①和②, 可取电位函数的通解为

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x > 0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x < 0)$$

由条件③, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \frac{q_l}{\varepsilon_0} \delta(y - d) \quad (2)$$

由式(1), 可得

$$A_n = B_n \quad (3)$$

将式(2)两边同乘以 $\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$, 并从 0 到 a 对 y 积分, 有

$$A_n + B_n = \frac{2q_l}{n\pi\varepsilon_0} \int_0^a \delta(y - d) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy = \frac{2q_l}{n\pi\varepsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \quad (4)$$

由式(3)和(4)解得

$$A_n = B_n = \frac{q_l}{n\pi\varepsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)$$

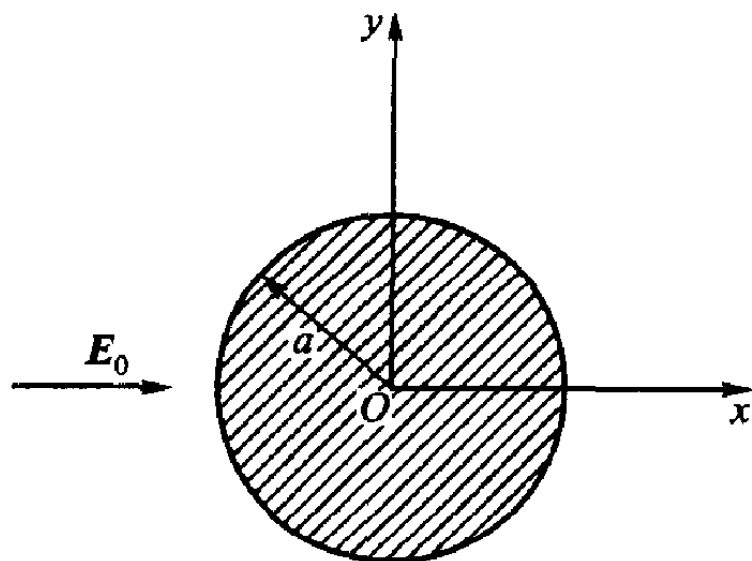
故
$$\varphi_1(x, y) = \frac{q_l}{\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) e^{-\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x > 0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{q_l}{\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) e^{\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x < 0)$$

3.31 如图题 3.31 所示, 在均匀电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x E_0$ 中垂直于电场方向放置一根半径为 a 的无限长导体圆柱。求导体圆柱外的电位和电场强度, 并求导体圆柱表面的感应电荷密度。

解 在外电场 \mathbf{E}_0 作用下, 导体表面产生感应电荷, 圆柱外的电位是外电场 \mathbf{E}_0 的电位 φ_0 与感应电荷的电位 φ_{in} 的叠加。

由于导体圆柱为无限长, 所以电位与变量 z 无关。在圆柱坐标系中, 外电场的电位为



图题 3.31

$$\varphi_0(\rho, \phi) = -E_0 x + C = -E_0 \rho \cos \phi + C$$

式中, 常数 C 的值由电位参考点确定。而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(\rho, \phi)$ 应与 $\varphi_0(\rho, \phi)$ 一样按 $\cos \phi$ 变化, 且在无限远处为零。由于导体是等位体, 所以 $\varphi(\rho, \phi)$ 满足的边界条件为

$$\textcircled{1} \varphi(a, \phi) = C$$

$$\textcircled{2} \varphi(\rho, \phi) \rightarrow -E_0 \rho \cos \phi + C (\rho \rightarrow \infty)$$

由此可设

$$\varphi(\rho, \phi) = -E_0 \rho \cos \phi + A_1 \rho^{-1} \cos \phi + C$$

由条件①, 有

$$-E_0 a \cos \phi + A_1 a^{-1} \cos \phi + C = C$$

于是得到

$$A_1 = a^2 E_0$$

故圆柱外的电位为

$$\varphi(\rho, \phi) = (-\rho + a^2 \rho^{-1}) E_0 \cos \phi + C$$

若选择导体圆柱表面为电位参考点, 即 $\varphi(a, \phi) = 0$, 则 $C = 0$ 。

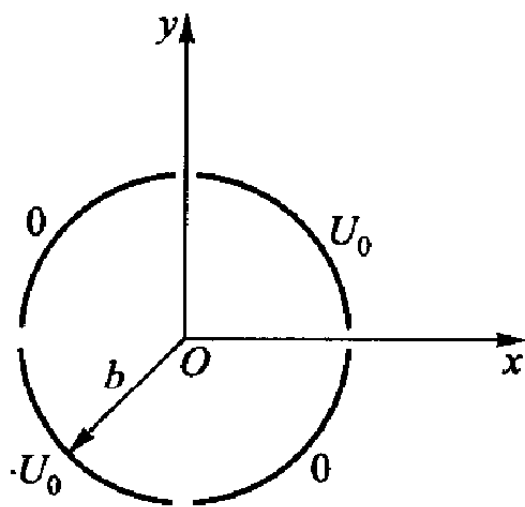
导体圆柱外的电场则为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \varphi(\rho, \phi) = -\mathbf{e}_\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \\ &= \mathbf{e}_\rho \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) E_0 \cos \phi + \mathbf{e}_\phi \left(-1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) E_0 \sin \phi \end{aligned}$$

导体圆柱表面的电荷面密度为

$$\rho_s = \mathbf{e}_\rho \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) \big|_{\rho=a} = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi$$

3.32 一个半径为 b 、无限长的薄导体圆柱面被分割成 4 个 $\frac{1}{4}$ 圆柱面, 彼此绝缘。其中, 第 2 象限和第 4 象限的 $\frac{1}{4}$ 圆柱面接地, 第 1 象限和第 3 象限的 $\frac{1}{4}$ 圆柱面分别保持电位 U_0 和 $-U_0$, 如图题 3.32 所示。试求圆柱面内的电位函数。



图题 3.32

解 由题意可知, 圆柱面内部的电位函数满足的边界条件为

① $\varphi(0, \phi)$ 为有限值;

$$\textcircled{2} \varphi(b, \phi) = \begin{cases} U_0 & 0 < \phi < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \phi < \pi \\ -U_0 & \pi < \phi < 3\pi/2 \\ 0 & 3\pi/2 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

由条件①可知, 圆柱面内部的电位函数的通解为

$$\varphi(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) \quad (\rho \leq b)$$

代入条件②, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) = \varphi(b, \phi)$$

由此得到

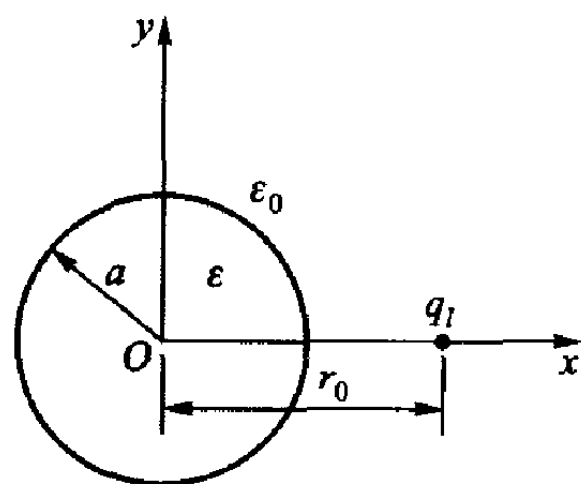
$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{b^n \pi} \int_0^{2\pi} \varphi(b, \phi) \sin n\phi d\phi \\ &= \frac{1}{b^n \pi} \left[\int_0^{\pi/2} U_0 \sin n\phi d\phi - \int_{\pi}^{3\pi/2} U_0 \sin n\phi d\phi \right] \\ &= \frac{U_0}{b^n n \pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{2U_0}{n \pi b^n}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{b^n \pi} \int_0^{2\pi} \varphi(b, \phi) \cos n\phi d\phi \\ &= \frac{1}{b^n \pi} \left[\int_0^{\pi/2} U_0 \cos n\phi d\phi - \int_{\pi}^{3\pi/2} U_0 \cos n\phi d\phi \right] \\ &= \frac{U_0}{b^n n \pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{2U_0}{n \pi b^n}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

故

$$\varphi(\rho, \phi) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{b} \right)^n \left[\sin n\phi + (-1)^{\frac{n+3}{2}} \cos n\phi \right] \quad (\rho \leq b)$$

3.33 如图题 3.33 所示,一根无限长介质圆柱的半径为 a 、介电常数为 ε ,在距离轴线 r_0 ($r_0 > a$) 处,有一与圆柱平行的线电荷 q_l ,计算空间各部分的电位。



图题 3.33

解 在线电荷 q_l 作用下,介质圆柱产生极化,介质圆柱内外的电位 $\varphi(\rho, \phi)$ 均为线电荷 q_l 的电位 $\varphi_l(\rho, \phi)$ 与极化电荷的电位 $\varphi_p(\rho, \phi)$ 的叠加,即 $\varphi(\rho, \phi) = \varphi_l(\rho, \phi) + \varphi_p(\rho, \phi)$ 。线电荷 q_l 的电位为

$$\begin{aligned}\varphi_l(\rho, \phi) &= -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln R \\ &= -\frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2\rho r_0 \cos \phi}\end{aligned}\quad (1)$$

而极化电荷的电位 $\varphi_p(\rho, \phi)$ 满足拉普拉斯方程,且是 ϕ 的偶函数。介质圆柱内外的电位 $\varphi_1(\rho, \phi)$ 和 $\varphi_2(\rho, \phi)$ 满足的边界条件分别为

- ① $\varphi_1(0, \phi)$ 为有限值;
- ② $\varphi_2(\rho, \phi) \rightarrow \varphi_l(\rho, \phi) \quad (\rho \rightarrow \infty)$
- ③ $r = a$ 时, $\varphi_1 = \varphi_2, \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$

由条件①和②可知, $\varphi_1(\rho, \phi)$ 和 $\varphi_2(\rho, \phi)$ 的通解为

$$\varphi_1(\rho, \phi) = \varphi_l(\rho, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^n \cos n\phi \quad (0 \leq \rho \leq a) \quad (2)$$

$$\varphi_2(\rho, \phi) = \varphi_l(\rho, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \rho^{-n} \cos n\phi \quad (a \leq \rho < \infty) \quad (3)$$

将式 (1) ~ (3) 代入条件③,可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \cos n\phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^{-n} \cos n\phi \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \varepsilon n a^{n-1} + B_n \varepsilon_0 n a^{-n-1}) \cos n\phi = (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{q_l}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\partial \ln R}{\partial r} \Big|_{\rho=a} \quad (5)$$

当 $\rho < r_0$ 时,将 $\ln R$ 展开为级数,有

$$\ln R = \ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^n \cos n\phi \quad (6)$$

代入式 (5), 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \varepsilon n a^{n-1} + B_n \varepsilon_0 n a^{-n-1}) \cos n\phi = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) q_l}{2 \pi \varepsilon_0 r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0} \right)^{n-1} \cos n\phi \quad (7)$$

由式(4)和(7),有

$$A_n a^n = B_n a^{-n}$$

$$A_n \varepsilon n a^{n-1} + B_n \varepsilon_0 n a^{-n-1} = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) q_l}{2 \pi \varepsilon_0 r_0} \left(\frac{a}{r_0} \right)^{n-1}$$

由此解得

$$A_n = - \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \frac{1}{n r_0^n}, \quad B_n = - \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \frac{a^{2n}}{n r_0^n}$$

故得到圆柱内、外的电位分别为

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho, \phi) = & - \frac{q_l}{2 \pi \varepsilon_0} \ln \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2 \rho r_0 \cos \phi} \\ & - \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^n \cos n\phi \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\rho, \phi) = & - \frac{q_l}{2 \pi \varepsilon_0} \ln \sqrt{\rho^2 + r_0^2 - 2 \rho r_0 \cos \phi} \\ & - \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 \rho} \right)^n \cos n\phi \end{aligned} \quad (9)$$

讨论: 利用式(6), 可将式(8)和(9)中的第二项分别写为

$$\begin{aligned} - \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r_0} \right)^n \cos n\phi &= \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} (\ln R - \ln r_0) \\ - \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 \rho} \right)^n \cos n\phi &= \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} (\ln R' - \ln \rho) \end{aligned}$$

式中, $R' = \sqrt{\rho^2 + (a^2/r_0)^2 - 2\rho(a^2/r_0)\cos\phi}$ 。因此, 可将 $\varphi_1(\rho, \phi)$ 和 $\varphi_2(\rho, \phi)$ 分别写为

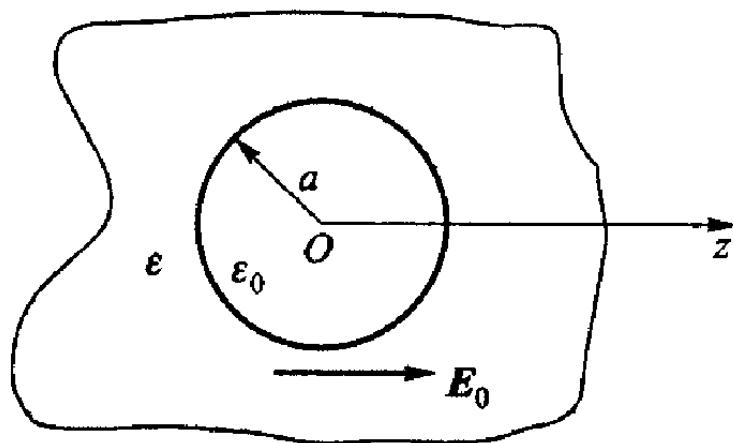
$$\varphi_1(\rho, \phi) = - \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{2 \varepsilon_0 q_l}{\varepsilon + \varepsilon_0} \ln R - \frac{q_l (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2 \pi \varepsilon_0 (\varepsilon + \varepsilon_0)} \ln r_0$$

$$\varphi_2(\rho, \phi) = - \frac{q_l}{2 \pi \varepsilon_0} \ln R - \frac{1}{2 \pi \varepsilon_0} \frac{-(\varepsilon - \varepsilon_0) q_l}{\varepsilon + \varepsilon_0} \ln R'$$

$$-\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{(\epsilon - \epsilon_0)q_l}{\epsilon + \epsilon_0} \ln \rho$$

由所得结果可知, 介质圆柱内的电位与位于 $(r_0, 0)$ 的线电荷 $\frac{2\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}q_l$ 的电位相同, 而介质圆柱外的电位相当于三根线电荷所产生, 它们分别为: 位于 $(r_0, 0)$ 的线电荷 q_l ; 位于 $\left(\frac{a^2}{r_0}, 0\right)$ 的线电荷 $-\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}q_l$; 位于 $r=0$ 的线电荷 $\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0}q_l$ 。

3.34 如图题 3.34 所示, 无限大的介质外加均匀电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$, 在介质中有一个半径为 a 的球形空腔。求空腔内、外的电场强度和空腔表面的极化电荷密度。



图题 3.34

解 在电场 \mathbf{E}_0 的作用下, 介质产生极化, 空腔表面形成极化电荷, 空腔内、外的电场 \mathbf{E} 为外加电场 \mathbf{E}_0 与极化电荷的电场 \mathbf{E}_p

的叠加。设空腔内、外的电位分别为 $\varphi_1(r, \theta)$ 和 $\varphi_2(r, \theta)$, 则边界条件为

$$\textcircled{1} \quad r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi_2(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta;$$

$$\textcircled{2} \quad r=0 \text{ 时, } \varphi_1(r, \theta) \text{ 为有限值};$$

$$\textcircled{3} \quad r=a \text{ 时, } \varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta), \quad \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

由条件①和②, 可设

$$\varphi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + A_1 r \cos \theta$$

$$\varphi_2(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta$$

代入条件③, 有

$$A_1 a = A_2 a^{-2}, \quad -\epsilon_0 E_0 + \epsilon_0 A_1 = -\epsilon E_0 - 2\epsilon a^{-3} A_2$$

由此解得

$$A_1 = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0, \quad A_2 = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} a^3 E_0$$

所以

$$\varphi_1(r, \theta) = -\frac{3\epsilon}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0 r \cos \theta$$

$$\varphi_2(r, \theta) = -\left[1 + \frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_0 r \cos \theta$$