

第4章 时变电磁场



本章内容

4.1 波动方程

4.2 电磁场的位函数

4.3 电磁能量守恒定律

4.4 唯一性定理

4.5 时谐电磁场



4.1 波动方程

■ 问题的提出

- 麦克斯韦方程 —— 一阶矢量微分方程组，描述电场与磁场间的相互作用关系。
- 波动方程 —— 二阶矢量微分方程，揭示电磁场的波动性。
- 麦克斯韦方程组 \Longrightarrow 波动方程。

■ 无源区的波动方程

在无源空间中，设媒质是线性、各向同性且无损耗的均匀媒质，则有

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

电磁波动方程



 推证

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\quad} \quad \nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

↓

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

↓

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

同理可得

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$



4.2 电磁场的位函数

讨论内容

- 位函数的定义
- 位函数的性质
- 位函数的规范条件
- 位函数的微分方程



■ 引入位函数的意义

引入位函数来描述时变电磁场，使一些问题的分析得到简化。

■ 位函数的定义

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi$$



■ 位函数的不确定性

满足下列变换关系的两组位函数 (\vec{A}, φ) 和 (\vec{A}', φ') 能描述同一个电磁场问题。

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \\ \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases} \quad \psi \text{ 为任意可微函数}$$

即

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \psi) = \nabla \times \vec{A} \\ -\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla(\varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \nabla \psi) = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

也就是说，对一给定的电磁场可用不同的位函数来描述。

不同位函数之间的上述变换称为规范变换。

原因：未规定 \vec{A} 的散度。



■ 位函数的规范条件

造成位函数的不确定性的原因就是没有规定 \vec{A} 的散度。利用位函数的不确定性，可通过规定 \vec{A} 的散度使位函数满足的方程得以简化。

在电磁理论中，通常采用洛伦兹条件，即

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

除了利用洛伦兹条件外，另一种常用的是库仑条件，即

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$



位函数的微分方程

$$\nabla^2 \vec{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad \nabla^2 \varphi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

达朗贝尔方程：就是在洛伦兹条件下，矢量位 \mathbf{A} 和标量位 φ 所满足的微分方程。

说明

- 应用洛伦兹条件的特点：① 位函数满足的方程在形式上是对称的，且比较简单，易求解；② 解的物理意义非常清楚，明确地反映出电磁场具有有限的传递速度；③ 矢量位只决定于 J ，标量位只决定于 ρ ，这对求解方程特别有利。只需解出 A ，无需解出 φ 就可得到待求的电场和磁场。
- 电磁位函数只是简化时变电磁场分析求解的一种辅助函数，应用不同的规范条件，矢量位 A 和标量位 φ 的解也不相同，但最终得到的电磁场矢量是相同的。



4.3 电磁能量守恒定律

讨论内容

- 电磁能量及守恒关系
- 坡印廷定理
- 坡印廷矢量



■ 电磁能量及守恒关系

电场能量密度: $w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$

磁场能量密度: $w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

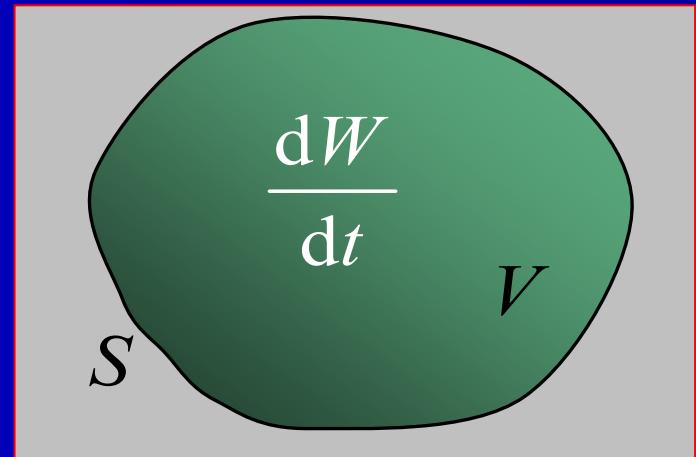
电磁能量密度: $w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$

空间区域 V 中的电磁能量: $W = \int_V w dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV$

- 特点: 当场随时间变化时, 空间各点的电磁场能量密度也要随时间改变, 从而引起电磁能量流动。

- 电磁能量守恒关系:

进入体积 V 的能量 = 体积 V 内增加的能量 + 体积 V 内损耗的能量



■ 坡印廷定理

表征电磁能量守恒关系的定理

微分形式: $-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) + \vec{E} \cdot \vec{J}$

积分形式: $-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$

其中: $\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dV$ —— 单位时间内体积 V 中所增加的电磁能量。

$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$ —— 单位时间内电场对体积 V 中的电流所做的功;

在导电媒质中, 即为体积 V 内总的损耗功率。

$-\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$ —— 通过曲面 S 进入体积 V 的电磁功率。

物理意义: 单位时间内, 通过曲面 S 进入体积 V 的电磁能量等于体积 V 中所增加的电磁场能量与损耗的能量之和。



■ 坡印廷矢量（电磁能流密度矢量）

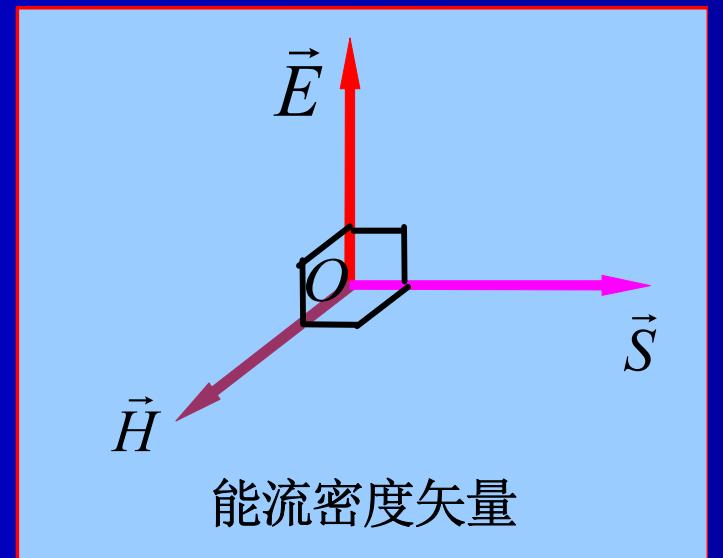
描述时变电磁场中电磁能量传输的一个重要物理量

- 定义: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ (W/m^2)

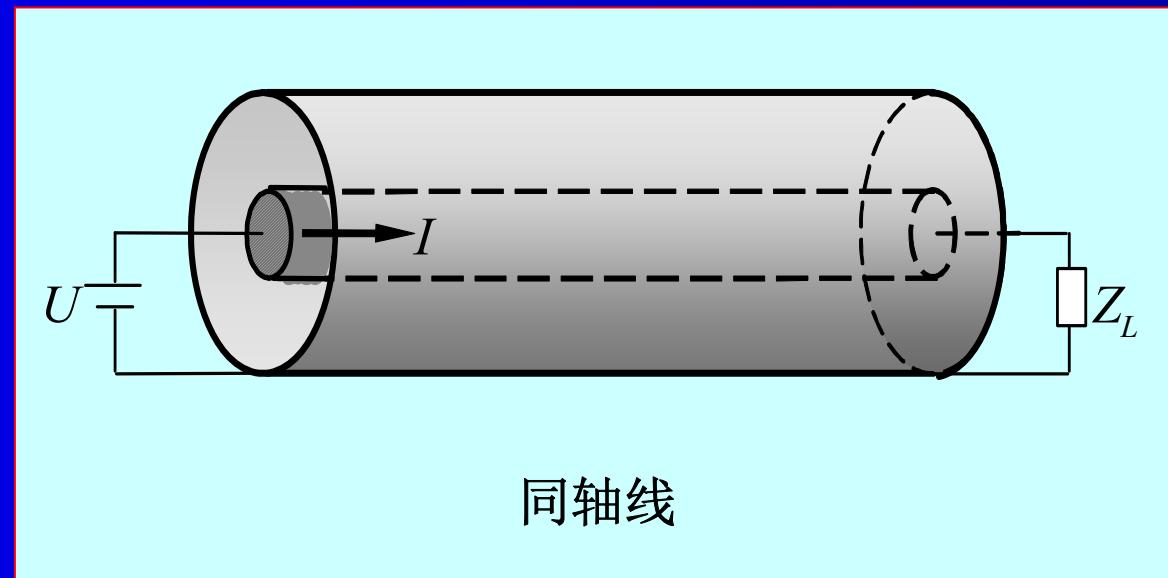
- 物理意义:

\vec{S} 的方向 —— 电磁能量传输的方向

\vec{S} 的大小 —— 通过垂直于能量传输方向的单位面积的电磁功率



例4.3.1 同轴线的内导体半径为 a 、外导体的内半径为 b , 其间填充均匀的理想介质。设内外导体间的电压为 U , 导体中流过的电流为 I 。(1) 在导体为理想导体的情况下, 计算同轴线中传输的功率; (2) 当导体的电导率 σ 为有限值时, 计算通过内导体表面进入每单位长度内导体的功率。



解：（1）在内外导体为理想导体的情况下，电场和磁场只存在于内外导体之间的理想介质中，内外导体表面的电场无切向分量，只有电场的径向分量。利用高斯定理和安培环路定理，容易求得内外导体之间的电场和磁场分别为

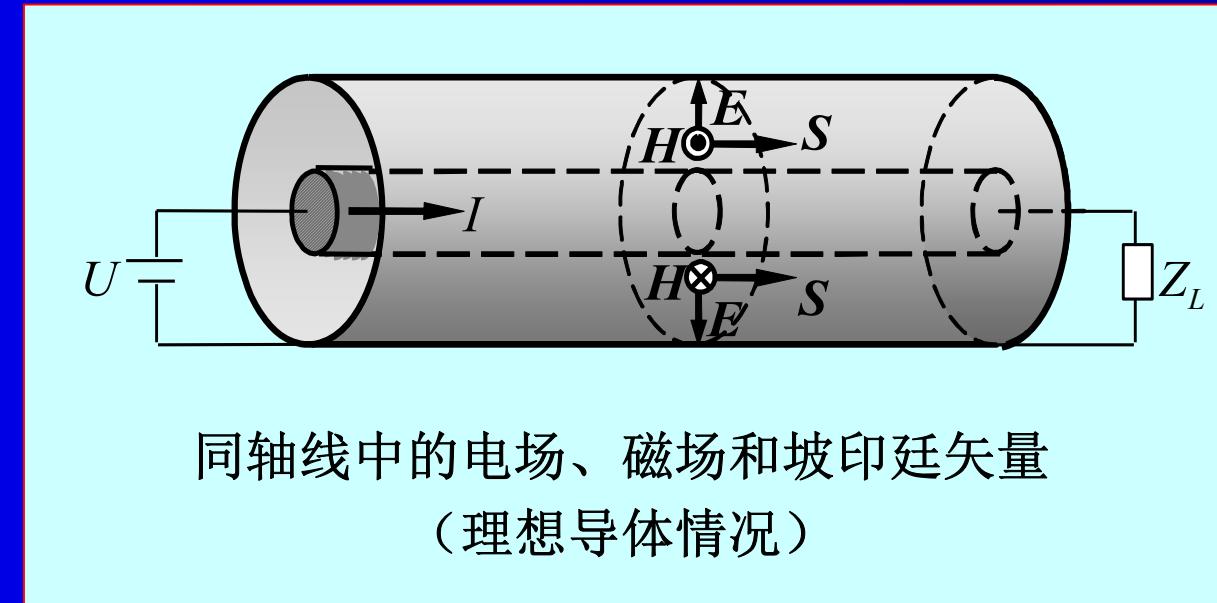
$$\vec{E} = \vec{e}_\rho \frac{U}{\rho \ln(b/a)}, \quad \vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho} \quad (a < \rho < b)$$

内外导体之间任意横截面上的坡印廷矢量

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = [\vec{e}_\rho \frac{U}{\rho \ln(b/a)}] \times (\vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho}) = \vec{e}_z \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)}$$



电磁能量在内外导体之间的介质中沿轴方向流动，即由电源流向负载，如图所示。



穿过任意横截面的功率为

$$P = \int_S \vec{S} \cdot \vec{e}_z dS = \int_a^b \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)} 2\pi\rho d\rho = UI$$



(2) 当导体的电导率 σ 为有限值时, 导体内部存在沿电流方向的电场

$$\vec{E}_{\text{内}} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{e}_z \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

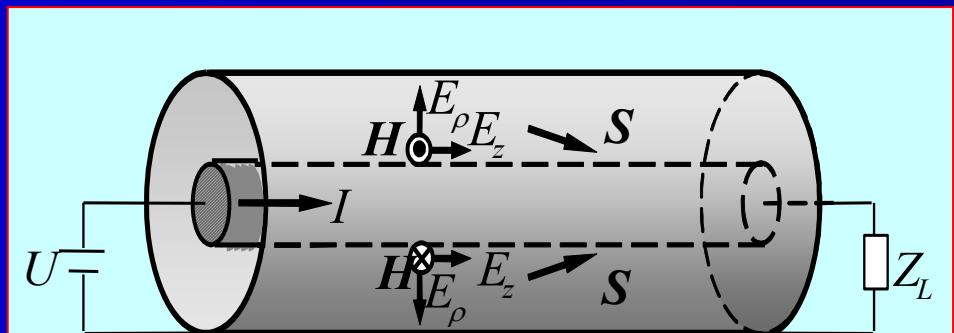
根据边界条件, 在内导体表面上电场的切向分量连续, 即 $\vec{E}_{\text{外}z} = \vec{E}_{\text{内}z}$
因此, 在内导体表面外侧的电场为

$$\vec{E}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} = \vec{e}_\rho \frac{U}{a \ln(b/a)} + \vec{e}_z \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

磁场则仍为 $\vec{H}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} = \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi a}$

内导体表面外侧的坡印廷矢量为

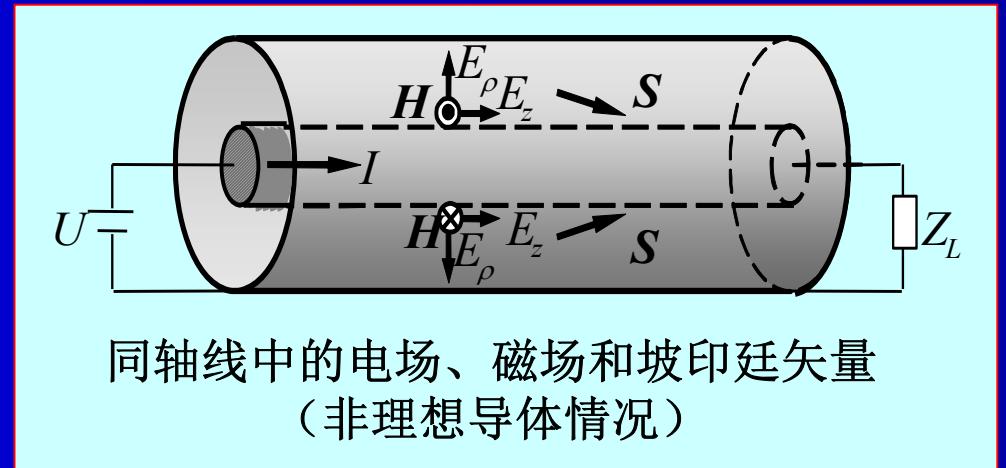
$$\vec{S}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} = (\vec{E}_{\text{外}} \times \vec{H}_{\text{外}}) \Big|_{\rho=a} = -\vec{e}_\rho \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} + \vec{e}_z \frac{UI}{2\pi a^2 \ln(b/a)}$$



同轴线中的电场、磁场和坡印廷矢量
(非理想导体情况)



由此可见，内导体表面外侧的坡印廷矢量既有轴向分量，也有径向分量，如图所示。进入每单位长度内导体的功率为



$$P = \int_S \vec{S}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} \cdot (-\vec{e}_\rho) dS = \int_0^1 \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} 2\pi a dz = \frac{I^2}{\pi a^2 \sigma} = RI^2$$

式中 $R = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$ 是单位长度内导体的电阻。由此可见，进入内导体中功率等于这段导体的焦耳损耗功率。

以上分析表明电磁能量是由电磁场传输的，导体仅起着定向引导电磁能流的作用。当导体的电导率为有限值时，进入导体中的功率全部被导体所吸收，成为导体中的焦耳热损耗功率。



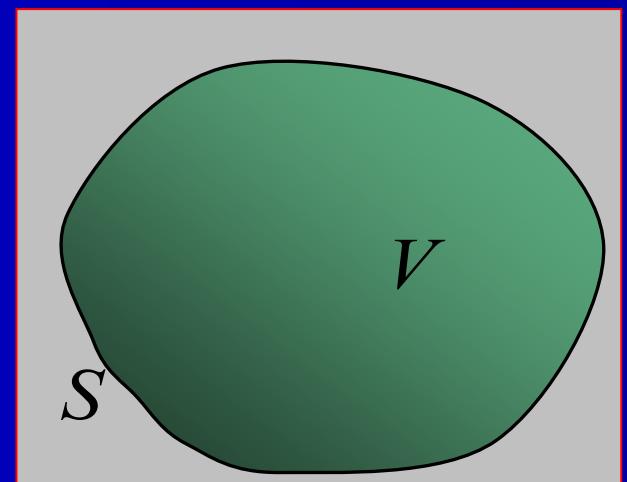
4.4 惟一性定理

● 惟一性问题

在分析有界区域的时变电磁场问题时，常常需要在给定的初始条件和边界条件下，求解麦克斯韦方程。那么，在什么定解条件下，有界区域中的麦克斯韦方程的解才是惟一的呢？这就是麦克斯韦方程的解的惟一问题。

● 惟一性定理的表述

在以闭曲面 S 为边界的有界区域 V 内，如果给定 $t=0$ 时刻的电场强度和磁场强度的初始值，并且在 $t \geq 0$ 时，给定边界 S 上的电场强度的切向分量或磁场强度的切向分量，那么，在 $t > 0$ 时，区域 V 内的电磁场由麦克斯韦方程惟一地确定。



4.5 时谐电磁场

- 时谐电磁场的复数表示
- 复矢量的麦克斯韦方程
- 复电容率和复磁导率
- 亥姆霍兹方程
- 时谐场的位函数
- 平均能流密度矢量



4.5.1 时谐电磁场的复数表示

■ 时谐电磁场的概念

如果场源以一定的角频率随时间呈时谐（正弦或余弦）变化，则所产生的电磁场也以同样的角频率随时间呈时谐变化。这种以一定角频率作时谐变化的电磁场，称为时谐电磁场或正弦电磁场。

- 研究时谐电磁场具有重要意义
- 在工程上，应用最多的就是时谐电磁场。广播、电视和通信的载波等都是时谐电磁场。
- 任意的时变场在一定的条件下可通过傅里叶分析方法展开为不同频率的时谐场的叠加。



■ 时谐电磁场的复数表示

时谐电磁场可用复数方法来表示，使得大多数时谐电磁场问题的分析得以简化。

设 $A(\vec{r}, t)$ 是一个以角频率 ω 随时间 t 作正弦变化的场量，它可以是电场和磁场的任意一个分量，也可以是电荷或电流等变量，它与时间的关系可以表示成

瞬时值形式
$$A(\vec{r}, t) = A_0 \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$

实数表示法或
瞬时表示法

式中的 A_0 为振幅、 $\phi(\vec{r})$ 为与坐标有关的相位因子。

利用三角公式
$$A(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ A_0 e^{j[\omega t + \phi(\vec{r})]} \right\} = \operatorname{Re} [\dot{A}(\vec{r}) e^{j\omega t}]$$

其中

复数形式
$$\dot{A}(\vec{r}) = A_0 e^{j\phi(\vec{r})}$$

复数表示法

空间相位因子

时间因子



照此法，矢量场的各分量 E_i (i 表示 x 、 y 或 z) 可表示成

〔瞬时矢量〕 $\rightarrow E_i(\vec{r}, t) = \text{Re}[\dot{E}_i(\vec{r})e^{j\omega t}] = \text{Re}\left\{E_{im}e^{j[\omega t + \phi_i(\vec{r})]}\right\}$

各分量合成以后，电场强度为

〔复矢量〕 $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\dot{\vec{E}}_m(\vec{r})e^{j\omega t}]$

$$\dot{\vec{E}}_m(\vec{r}) = \vec{e}_x \dot{E}_{xm}(\vec{r})e^{j\phi_x(\vec{r})} + \vec{e}_y \dot{E}_{ym}(\vec{r})e^{j\phi_y(\vec{r})} + \vec{e}_z \dot{E}_{zm}(\vec{r})e^{j\phi_z(\vec{r})}$$

- 有关复数表示的进一步说明
 - 复数式只是数学表示方式，不代表真实的场。
 - 真实场是复数式的实部，即瞬时表达式。
 - 由于时间因子是默认的，有时它不用写出来，只用与坐标有关的部分就可表示复矢量。



例4.5.1 将下列场矢量的瞬时值形式写为复数形式

$$(1) \quad \vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E_{xm} \cos(\omega t - kz + \phi_x) + \vec{e}_y E_{ym} \sin(\omega t - kz + \phi_y)$$

$$(2) \quad \vec{H}(x, z, t) = \vec{e}_x H_m k \left(\frac{a}{\pi} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin(kz - \omega t)$$

$$+ \vec{e}_z H_m \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos(kz - \omega t)$$

解： (1) 由于

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \vec{e}_x E_{xm} \cos(\omega t - kz + \phi_x) + \vec{e}_y E_{ym} \cos(\omega t - kz + \phi_y - \frac{\pi}{2}) \\ &= \operatorname{Re} [\vec{e}_x E_{xm} e^{j(\omega t - kz + \phi_x)} + \vec{e}_y E_{ym} e^{j(\omega t - kz + \phi_y - \pi/2)}] \end{aligned}$$

所以 $\dot{\vec{E}}_m(z) = \vec{e}_x E_{xm} e^{j(-kz + \phi_x)} + \vec{e}_y E_{ym} e^{j(-kz + \phi_y - \pi/2)}$

$$= (\vec{e}_x E_{xm} e^{j\phi_x} - \vec{e}_y j E_{ym} e^{j\phi_y}) e^{-jkz}$$



(2) 因为 $\cos(kz - \omega t) = \cos(\omega t - kz)$

$$\sin(kz - \omega t) = \cos(kz - \omega t - \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2})$$

所以 $\vec{H}(x, z, t) = \vec{e}_x H_m k \left(\frac{a}{\pi} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin(kz - \omega t) +$

$$\vec{e}_z H_m \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos(kz - \omega t)$$

$$= \vec{e}_x H_m k \left(\frac{a}{\pi} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}) +$$

$$\vec{e}_z H_m \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos(\omega t - kz)$$

故 $\dot{\vec{H}}_m(x, z) = \vec{e}_x H_m k \left(\frac{a}{\pi} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{-jkz + j\pi/2} + \vec{e}_z H_m \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) e^{-jkz}$



例4.5.2 已知电场强度复矢量

$$\dot{\vec{E}}_m(z) = \vec{e}_x j E_{xm} \cos(k_z z)$$

其中 k_z 和 E_{xm} 为实常数。写出电场强度的瞬时矢量

解 $\vec{E}(z, t) = \operatorname{Re}[\vec{e}_x j E_{xm} \cos(k_z z) e^{j\omega t}]$

$$= \operatorname{Re}[\vec{e}_x E_{xm} \cos(k_z z) e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}]$$
$$= \vec{e}_x E_{xm} \cos(k_z z) \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$
$$= -\vec{e}_x E_{xm} \cos(k_z z) \sin(\omega t)$$



4.5.2 复矢量的麦克斯韦方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \end{array} \right. \xrightarrow{\quad \text{ } \quad} \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \\ \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

\$\frac{\partial}{\partial t} - j\omega\$

$$\frac{\partial \vec{F}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}[(\dot{\vec{F}}_m(\vec{r}) e^{j\omega t})] = \operatorname{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t} (\dot{\vec{F}}_m(\vec{r}) e^{j\omega t})\right] = \operatorname{Re}[j\omega \dot{\vec{F}}_m(\vec{r}) e^{j\omega t}]$$



例4.5.3: 已知正弦电磁场的电场瞬时值为 $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1(z, t) + \vec{E}_2(z, t)$

式中
$$\begin{cases} \vec{E}_1(z, t) = \vec{e}_x 0.03 \sin(10^8 \pi t - kz) \\ \vec{E}_2(z, t) = \vec{e}_x 0.04 \cos(10^8 \pi t - kz - \pi/3) \end{cases}$$

试求: (1) 电场的复矢量; (2) 磁场的复矢量和瞬时值。

解: (1) 因为

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \vec{e}_x 0.03 \sin(10^8 \pi t - kz) + \vec{e}_x 0.04 \cos(10^8 \pi t - kz - \pi/3) \\ &= \vec{e}_x 0.03 \cos(10^8 \pi t - kz - \frac{\pi}{2}) + \vec{e}_x 0.04 \cos(10^8 \pi t - kz - \pi/3) \\ &= \operatorname{Re}[\vec{e}_x 0.03 e^{j(10^8 \pi t - kz - \pi/2)}] + \operatorname{Re}[\vec{e}_x 0.04 e^{j(10^8 \pi t - kz - \pi/3)}] \\ &= \operatorname{Re}\left[\left(\vec{e}_x 0.03 e^{-j(kz + \pi/2)} + \vec{e}_x 0.04 e^{-j(kz + \pi/3)}\right) e^{j10^8 \pi t}\right] \end{aligned}$$

故电场的复矢量为 $\vec{E}(z) = \vec{e}_x [0.03 e^{-j\pi/2} + 0.04 e^{-j\pi/3}] e^{-jkz}$



(2) 由复数形式的麦克斯韦方程, 得到磁场的复矢量

$$\begin{aligned}\vec{H}(z) &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E}(z) = \vec{e}_y \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= \vec{e}_y \frac{k}{\omega\mu_0} [0.03e^{-j\frac{\pi}{2}} + 0.04e^{-j\frac{\pi}{3}}] e^{-jkz} \\ &= \vec{e}_y k [7.6 \times 10^{-5} e^{-j\frac{\pi}{2}} + 1.01 \times 10^{-4} e^{-j\frac{\pi}{3}}] e^{-jkz}\end{aligned}$$

磁场强度瞬时值

$$\vec{H}(z, t) = \operatorname{Re}[\vec{H}(z)e^{j\omega t}] = \vec{e}_y k [7.6 \times 10^{-5} \sin(10^8 \pi t - kz) +$$

$$1.01 \times 10^{-4} \cos(10^8 \pi t - kz - \frac{\pi}{3})]$$



4.5.3 复电容率和复磁导率

实际的介质都存在损耗:

- ✿ 导电媒质——当电导率有限时，存在欧姆损耗。
 - ✿ 电介质——受到极化时，存在电极化损耗。
 - ✿ 磁介质——受到磁化时，存在磁化损耗。
 - ✿ 损耗的大小与媒质性质、随时间变化的频率有关。一些媒质的损耗在低频时可以忽略，但在高频时就不能忽略。
- 导电媒质的等效介电常数

对于介电常数为 ϵ 、电导率为 σ 的导电媒质，有

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} = j\omega(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}) \vec{E} = j\omega \epsilon_c \vec{E}$$

其中 $\epsilon_c = \epsilon - j\sigma/\omega$ 、称为导电媒质的等效介电常数。



■ 电介质的复介电常数

对于存在电极化损耗的电介质，有 $\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon''$ ，称为复介电常数或复电容率。其虚部为大于零的数，表示电介质的电极化损耗。在高频情况下，实部和虚部都是频率的函数。

■ 同时存在极化损耗和欧姆损耗的介质

对于同时存在电极化损耗和欧姆损耗的电介质，复介电常数为

$$\epsilon_c = \epsilon' - j(\epsilon'' + \frac{\sigma}{\omega})$$

■ 磁介质的复磁导率

对于磁性介质，复磁导率数为 $\mu_c = \mu' - j\mu''$ ，其虚部为大于零的数，表示磁介质的磁化损耗。



■ 损耗角正切

工程上通常用损耗角正切来表示介质的损耗特性，其定义为复介电常数或复磁导率的虚部与实部之比，即有

$$\text{电介质 } \tan\delta_{\epsilon} = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}, \text{ 磁介质 } \tan\delta_{\mu} = \frac{\mu''}{\mu'}, \text{ 导电媒质 } \tan\delta_{\sigma} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

■ 导电媒质导电性能的相对性

导电媒质的导电性能具有相对性，在不同频率情况下，导电媒质具有不同的导电性能。

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1 \text{—— 弱导电媒质和良绝缘体}$$

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \approx 1 \text{—— 一般导电媒质}$$

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \text{—— 良导体}$$



4.5.4 亥姆霍兹方程

在时谐时情况下，将 $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$ 、 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$ ，即可得到复矢量的波动方程，称为亥姆霍兹方程。

瞬时矢量

复矢量

理想介质

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial^2 t} = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (k = \omega \sqrt{\mu\epsilon})$$

导电媒质

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial^2 t} = 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k_c^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k_c^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (k_c = \omega \sqrt{\mu\epsilon_c})$$



4.5.5 时谐场的位函数

在时谐情况下，矢量位和标量位以及它们满足的方程都可以表示成复数形式。

瞬时矢量

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \end{cases}$$

复矢量

$$\begin{cases} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} = -j\omega \vec{A} - \nabla \varphi \end{cases}$$

洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$



$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega \mu \epsilon \varphi$$

达朗贝尔方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{cases}$$



4.5.6 平均能量密度和平均能流密度矢量

- 电磁场能量密度和能流密度的表达式中都包含了场量的平方关系，这种关系式称为二次式。
- 时谐场中二次式的表示方法

二次式本身不能用复数形式表示，其中的场量必须是实数形式，不能将复数形式的场量直接代入。

设某正弦电磁场的电场强度和磁场强度分别为

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$



则能流密度为 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos^2 [\omega t + \phi(\vec{r})]$

如把电场强度和磁场强度用复数表示，即有

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{j\phi(\vec{r})}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{j\phi(\vec{r})}$$

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \operatorname{Re}(\vec{E} e^{j\omega t} \times \vec{H} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}\left\{\vec{E}_0 e^{j[\omega t + \phi(\vec{r})]} \times \vec{H}_0 e^{j[\omega t + \phi(\vec{r})]}\right\} \\ &= \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \operatorname{Re}\left\{e^{j2[\omega t + \phi(\vec{r})]}\right\} \\ &= \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos[2\omega t + 2\phi(\vec{r})] \end{aligned}$$

先取实部，再代入 $\vec{S} = \operatorname{Re}\left\{\vec{E}_0 e^{j[\omega t + \phi(\vec{r})]}\right\} \times \operatorname{Re}\left\{\vec{H}_0 e^{j[\omega t + \phi(\vec{r})]}\right\}$

$$= \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \cos^2 [\omega t + \phi(\vec{r})]$$





使用二次式时需要注意的问题

- ▶ 二次式只有实数的形式，没有复数形式。
- ▶ 场量是实数式时，直接代入二次式即可。
- ▶ 场量是复数式时，应先取实部再代入，即“先取实后相乘”。
- ▶ 如复数形式的场量中没有时间因子，取实前先补充时间因子。



- 二次式的时间平均值
- 在时谐电磁场中，常常要关心二次式在一个时间周期 T 中的平均值，即

平均电场能量密度 $w_{\text{eav}} = \frac{1}{T} \int_0^T w_{\text{e}} \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dt$

平均磁场能量密度 $w_{\text{mav}} = \frac{1}{T} \int_0^T w_{\text{m}} \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \, dt$

平均能流密度矢量 $\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{E} \times \vec{H}) \, dt$

- 在时谐电磁场中，二次式的时间平均值可以直接由复矢量计算，有

$$\vec{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*), \quad w_{\text{eav}} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{D}^*), \quad w_{\text{mav}} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\vec{H} \cdot \vec{B}^*)$$

例如某正弦电磁场的电场强度和磁场强度都用实数形式给出

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos[\omega t + \phi(\vec{r})], \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$

则平均能流密度矢量为

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{E} \times \vec{H}) dt = \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2[\omega t + \phi(\vec{r})] dt = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0$$

如果电场和磁场都用复数形式给出，即有

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{j\phi(\vec{r})} \\ \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{j\phi(\vec{r})} \end{cases} \rightarrow \vec{S}_{av} = [\operatorname{Re}(\vec{E} e^{j\omega t}) \times \operatorname{Re}(\vec{H} e^{j\omega t})]_{av} = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 e^{j\phi(\vec{r})} e^{-j\phi(\vec{r})}] = \frac{1}{2} \vec{E}_0 \times \vec{H}_0$$

时间平均值与时间无关



■ 关于 $\vec{S}(\vec{r}, t)$ 和 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$ 的几点说明

- $\vec{S}(\vec{r}, t)$ 具有普遍意义，不仅适用于正弦电磁场，也适用于其他时变电磁场；而 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$ 只适用于时谐电磁场。
- 在 $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$ 中， $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 和 $\vec{H}(\vec{r}, t)$ 都是实数形式且是时间的函数，所以 $\vec{S}(\vec{r}, t)$ 也是时间的函数，反映的是能流密度在某一个瞬时的取值；而 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r}) = \text{Re}[\frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})]$ 中的 $\vec{E}(\vec{r})$ 和 $\vec{H}(\vec{r})$ 都是复矢量，与时间无关，所以 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$ 也与时间无关，反映的是能流密度在一个时间周期内的平均取值。
- 利用 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\vec{r}, t) dt$ ，可由 $\vec{S}(\vec{r}, t)$ 计算 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$ ，但不能直接由 $\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r})$ 计算 $\vec{S}(\vec{r}, t)$ ，也就是说 $\vec{S}(\vec{r}, t) \neq \text{Re}[\vec{S}_{\text{av}}(\vec{r}) e^{j\omega t}]$



例4.5.4 已知无源的自由空间中，电磁场的电场强度复矢量为 $\vec{E}(z) = \vec{e}_y E_0 e^{-jkz}$ ，其中 k 和 E_0 为常数。求：（1）磁场强度复矢量 \vec{H} ；（2）瞬时坡印廷矢量 \vec{S} ；（3）平均坡印廷矢量 \vec{S}_{av} 。

解：（1）由 $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$ 得

$$\begin{aligned}\vec{H}(z) &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E}(z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0} (\vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) \times (\vec{e}_y E_0 e^{-jkz}) \\ &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} (-\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial z} E_0 e^{-jkz}) = -\vec{e}_x \frac{kE_0}{\omega\mu_0} e^{-jkz}\end{aligned}$$

（2）电场和磁场的瞬时值为

$$\vec{E}(z, t) = \text{Re} [\vec{E}(z) e^{j\omega t}] = \vec{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\vec{H}(z, t) = \text{Re} [\vec{H}(z) e^{j\omega t}] = -\vec{e}_x \frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - kz)$$



瞬时坡印廷矢量为

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz) \times [-\vec{e}_x \frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - kz)] \\ &= \vec{e}_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \cos^2(\omega t - kz)\end{aligned}$$

(3) 平均坡印廷矢量为

$$\begin{aligned}\vec{S}_{av} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{e}_y E_0 e^{-jkz} \times (-\vec{e}_x \frac{kE_0}{2\omega\mu_0} e^{-jkz})^*] \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\vec{e}_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0}) = \vec{e}_z \frac{k}{\omega\mu_0} E_0^2\end{aligned}$$

或直接积分，得

$$\begin{aligned}\vec{S}_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S} dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \vec{S} dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\vec{e}_z \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \cos^2(\omega t - kz)] dt = \vec{e}_z \frac{k}{2\omega\mu_0} E_0^2\end{aligned}$$



例4.5.5 已知真空中电磁场的电场强度和磁场强度矢量分别为

$$\vec{E}(z,t) = \vec{e}_x E_0 \cos(\omega t - kz), \quad \vec{H}(z,t) = \vec{e}_y H_0 \cos(\omega t - kz)$$

其中 E_0 、 H_0 和 k 为常数。求：(1) w 和 w_{av} ；(2) S 和 S_{av} 。

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad w &= w_e + w_m = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) + \mu_0 H_0^2 \cos^2(\omega t - kz)] \end{aligned}$$

由于 $\vec{E} = \vec{e}_x E_0 e^{-jkz}$, $\vec{D}^* = \vec{e}_x \epsilon_0 E_0 e^{jkz}$, $\vec{H} = \vec{e}_y H_0 e^{-jkz}$, $\vec{B}^* = \vec{e}_y \mu_0 H_0 e^{jkz}$

$$\text{所以 } w_{av} = w_{eav} + w_{mav} = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{D}^* + \vec{B} \cdot \vec{H}^*) = \frac{1}{4} (\epsilon_0 E_0^2 + \mu_0 H_0^2)$$

$$(2) \quad \vec{S} = \vec{E}(z,t) \times \vec{H}(z,t) = \vec{e}_z E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kz)$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \vec{e}_z \frac{1}{2} E_0 H_0$$

