4.3 习题解答

4.1 证明：在无源的真空是，以下矢量函数满足波动方程 $\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$，其中 $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$，$E_0$ 为常数。

（1） $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)$； （2） $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)$；

（3） $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\cos\left(\omega t+\frac{\omega}{c}z\right)$

证 （1） $\nabla^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\ \nabla^2\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)=\boldsymbol{e}_xE_0\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)$

$$=-\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\omega}{c}\right)^2E_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)=-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)$$

故

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\omega}{c}\right)^2E_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)-\frac{1}{c^2}\left[-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)\right]$$

$$=0$$

即矢量函数 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)$ 满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$。

（2） $\nabla^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\ \nabla^2\left[\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)\right]=\boldsymbol{e}_xE_0\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)\right]$

$$=-\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\omega}{c}\right)^2E_0\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)\right]=-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\left[\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)\right]$$

故

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\omega}{c}\right)^2E_0\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)-\frac{1}{c^2}\left[-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)\right]$$

$$=0$$

即矢量函数 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xE_0\sin\left(\frac{\omega}{c}z\right)\cos(\omega t)$ 满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0$.

（3） $\nabla^2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\ \nabla^2\cos\left(\omega t+\frac{\omega}{c}z\right)=\boldsymbol{e}_yE_0\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}\cos\left(\omega t+\frac{\omega}{c}z\right)$

$$=-\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\omega}{c}\right)^2E_0\cos\left(\omega t+\frac{\omega}{c}z\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_yE_0\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos\left(\omega t+\frac{\omega}{c}z\right)=-\boldsymbol{e}_x\omega^2E_0\cos\left(\omega t+\frac{\omega}{c}z\right)$$

故

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_0\cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c}z\right) - \frac{1}{c^2}\left[-\boldsymbol{e}_y\omega^2 E_0\cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c}z\right)\right]$$

$$= 0$$

即矢量函数 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y E_0\cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c}z\right)$ 满足波动方程 $\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$。

4.2 在无损耗的线性、各向同性媒质中，电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \omega^2\mu\varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

已知矢量函数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，其中 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是常矢量。试证明 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 满足波动方程的条件是 $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$，这里 $k = |\boldsymbol{k}|$.

证　在直角坐标系中

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z$$

设

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_x k_x + \boldsymbol{e}_y k_y + \boldsymbol{e}_z k_z$$

则

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{e}_x k_x + \boldsymbol{e}_y k_y + \boldsymbol{e}_z k_z)\cdot(\boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z) = k_x x + k_y y + k_z z$$

故

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{E}_0\ \nabla^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)} \\
&= \boldsymbol{E}_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)} \\
&= (-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2)\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)} \\
&= -k^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})
\end{aligned}$$

代入方程 $\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \omega^2\mu\varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$，得

$$-k^2 \boldsymbol{E} + \omega^2\mu\varepsilon \boldsymbol{E} = 0$$

故

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$$

4.3 已知无源的空气中的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times 10^9 t - kz)\quad \mathrm{A/m}$$

利用波动方程求常数 k 的值。

解　在无源的空气中的磁场强度满足波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

而

$$\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_y \nabla^2[0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times 10^9 t - kz)]$$

$$= \boldsymbol{e}_y[-(10\pi)^2 - k^2]0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times 10^9 t - kz)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_y 0.1\sin(10\pi x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos(6\pi\times 10^9 t - kz)$$

$$= -\boldsymbol{e}_y(6\pi\times 10^9)^2 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times 10^9 t - kz)$$

代入方程 $\nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0$，得

$$\boldsymbol{e}_y\{[-(10\pi)^2 - k^2] + \mu_0\varepsilon_0(6\pi\times 10^9)^2\}0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times 10^9 t - kz) = 0$$

于是有

$$[-(10\pi)^2 - k^2] + \mu_0\varepsilon_0(6\pi\times 10^9)^2 = 0$$

故得到

$$k = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0(6\pi\times 10^9)^2 - (10\pi)^2} = 10\sqrt{3}\pi$$

4.4　证明：在无源的真空中，矢量函数 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$ 满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$，但不满足麦克斯韦方程组。

证　$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_x E_0 \nabla^2\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) = \boldsymbol{e}_x E_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$$

$$= -\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_x E_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) = -\boldsymbol{e}_x\omega^2 E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$$

所以

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = -\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) - \frac{1}{c^2}\left[-\boldsymbol{e}_x\omega^2 E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)\right]$$

$$= 0$$

即矢量函数 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_0\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$ 满足波动方程 $\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$。

另一方面

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = E_0 \frac{\partial}{\partial x}\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) = E_0 \frac{\omega}{c}\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) \neq 0$$

而在无源的真空中 $\boldsymbol{E}$ 应满足的麦克斯韦方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

故矢量函数 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)$ 不满足麦克斯韦方程组。

以上结果表明，波动方程的解不一定满足麦克斯韦方程。

4.5 证明：在有电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的均匀无损耗媒质中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 满足的波动方程为

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right), \quad \nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \boldsymbol{J}$$

证　在有电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的均匀无损耗媒质中，麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4}$$

对式(1)两边取旋度,得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E})$$

而

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H}$$

故

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{H}) - \nabla^2 \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{5}$$

将式(2)和式(3)代入式(5),得

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \boldsymbol{J}$$

这就是 $\boldsymbol{H}$ 的波动方程，是二阶非齐次方程。

同样,对式(2)两边取旋度,得

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H})$$

即

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{H}) \tag{6}$$

将式(1)和式(4)代入式(6),得

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho$$

此即 $\boldsymbol{E}$ 满足的波动方程。

4.6 在应用电磁位时，如果不采用洛仑兹条件，而采用库仑规范 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$,导出 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 所满足的微分方程。

解 将电磁矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的关系式

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

和电磁标量位 φ 的关系式

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

代入麦克斯韦第一方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

得

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$$

利用矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

得

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} = \mu \boldsymbol{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) \tag{1}$$

又由

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

得

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

即

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2}$$

按库仑条件,令 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$,将其代入式(1)和式(2),得

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\mu\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\,\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{3}$$

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{4}$$

式(3)和式(4)就是采用库仑条件时，电磁位函数 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 所满足的微分方程。

4.7 证明：在无源空间($\rho=0,\boldsymbol{J}=0$)中，可以引入矢量位 $\boldsymbol{A}_m$ 和标量位 φ_m，定义为

$$\boldsymbol{D} = -\nabla \times \boldsymbol{A}_m$$

$$\boldsymbol{H} = -\nabla\varphi_m - \frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t}$$

并推导 $\boldsymbol{A}_m$ 和 φ_m 的微分方程。

证　无源空间的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{4}$$

据矢量恒等式 $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} = 0$ 和式(4),知 $\boldsymbol{D}$ 可表示为一个矢量的旋度，故令

$$\boldsymbol{D} = -\nabla \times \boldsymbol{A}_m \tag{5}$$

将式(5)代入式(1),得

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{A}_m)$$

即

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{H} + \frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t}\right) = 0 \tag{6}$$

根据矢量恒等式 $\nabla \times \nabla\varphi = 0$ 和式(6),知 $\boldsymbol{H} + \frac{\partial\boldsymbol{A}_m}{\partial t}$ 可表示为一个标量的梯度,故令

$$\boldsymbol{H}+\frac{\partial \boldsymbol{A}_m}{\partial t}=-\nabla\varphi_m$$

即

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\varphi_m-\frac{\partial \boldsymbol{A}_m}{\partial t} \tag{7}$$

将式(5)和式(7)代入式(2),得

$$-\frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}_m=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi_m-\frac{\partial \boldsymbol{A}_m}{\partial t}\right) \tag{8}$$

而

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}_m=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m)-\nabla^2\boldsymbol{A}_m$$

故式(8)变为

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m)-\nabla^2\boldsymbol{A}_m=-\mu\varepsilon\nabla\left(\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right)-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_m}{\partial t^2} \tag{9}$$

又将式(7)代入式(3),得

$$\nabla\cdot\left(-\nabla\varphi_m-\frac{\partial \boldsymbol{A}_m}{\partial t}\right)=0$$

即

$$\nabla^2\varphi_m+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m)=0 \tag{10}$$

令

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_m=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}$$

将它代入式(9)和式(10),即得 $\boldsymbol{A}_m$ 和 φ_m 的微分方程

$$\nabla^2\boldsymbol{A}_m-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}_m}{\partial t^2}=0$$

$$\nabla^2\varphi_m-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial t^2}=0$$

4.8 给定标量位 $\varphi=x-ct$ 及矢量位 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x\left(\frac{x}{c}-t\right)$,式中 $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$。(1) 证明:$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}$;(2) 求 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$;(3) 证明上述结果满足自由空间的麦克斯韦方程。

解　(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{c} - t\right) = \frac{1}{c} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x - ct) = -c = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

故

$$-\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \left(-\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}\right) = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

则

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

(2) $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_y \frac{\partial A_x}{\partial z} - \boldsymbol{e}_z \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = 0$$

而

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{c} - t\right) = -\boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x}(x - ct) + \boldsymbol{e}_x = 0$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = 0$$

(3) 这是无源自由空间的零场　自然满足麦克斯韦方程。

4.9　自由空间中的电磁场为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{e}_x 1\,000\cos(\omega t - kz) \quad \text{V/m}$$

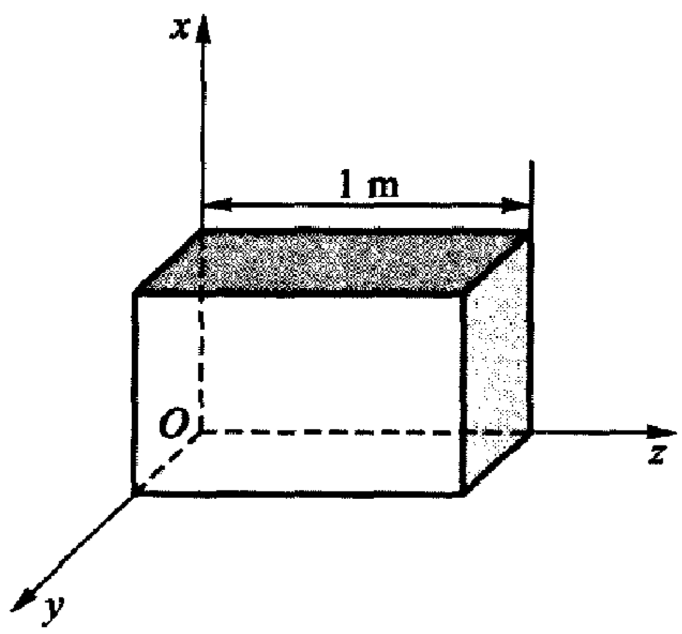
$$\boldsymbol{H}(z,t) = \boldsymbol{e}_y 2.65\cos(\omega t - kz) \quad \text{A/m}$$

式中，$k = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 0.42$ rad/m。试求：

(1) 瞬时坡印廷矢量；

(2) 平均坡印廷矢量；

(3) 任一时刻流入图题 4.9 所示的平行六面体（长 1 m、横截面积为 0.25 m²）中的净功率。



图题 4.9

解　(1) 瞬时坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_z 2\,650\cos^2(\omega t - kz) \quad \text{W/m}^2$$

(2) 平均坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}_{av} = \boldsymbol{e}_z \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} 2\,650\cos^2(\omega t - kz)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_z 1\,325 \text{ W/m}^2$$

（3）任一时刻流入图题 4.9 所示的平行六面体中的净功率为

$$P = -\oint_S \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S = -[\boldsymbol{S} \cdot (-\boldsymbol{e}_z)|_{z=0} + \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}_z|_{z=1}] \times 0.25$$

$$= 2\ 650 \times 0.25[\cos^2(\omega t) - \cos^2(\omega t - 0.42)]$$

$$= -270.2\sin(2\omega t - 0.42)\ \mathrm{W}$$

4.10 已知某电磁场的复矢量为

$$\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{e}_x \mathrm{j}E_0 \sin(k_0 z) \quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{e}_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos(k_0 z) \quad \mathrm{A/m}$$

式中，$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$，$c$ 为真空中的光速，λ_0 是波长。试求：（1）$z = 0$、$\frac{\lambda_0}{8}$、$\frac{\lambda_0}{4}$ 各点处的瞬时坡印廷矢量；（2）以上各点处的平均坡印廷矢量。

解 （1）$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的瞬时矢量为

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}E_0 \sin(k_0 z) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = -\boldsymbol{e}_x E_0 \sin(k_0 z) \sin(\omega t) \quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(z,t) = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos(k_0 z) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \boldsymbol{e}_y \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \cos(k_0 z) \cos(\omega t) \quad \mathrm{A/m}$$

则瞬时坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}(z,t) = \boldsymbol{E}(z,t) \times \boldsymbol{H}(z,t) = -\boldsymbol{e}_z \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos(k_0 z) \sin(k_0 z) \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$

故

$$\boldsymbol{S}(0,t) = 0\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\boldsymbol{S}(\lambda_0/8,t) = -\boldsymbol{e}_z \frac{E^2}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sin(2\omega t) \quad \mathrm{W/m^2}$$

$$\boldsymbol{S}(\lambda_0/4,t) = 0 \quad \mathrm{W/m^2}$$

（2）$\boldsymbol{S}_{av}(z) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(z) \times \boldsymbol{H}^*(z)] = 0 \quad \mathrm{W/m^2}$

4.11 在横截面为 $a \times b$ 的矩形金属波导中，电磁场的复矢量为

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{e}_y \mathrm{j}\omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H} = \left[\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \boldsymbol{e}_z H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \quad \mathrm{A/m}$$

式中，H_0、ω、μ 和 β 都是实常数。试求：(1) 瞬时坡印廷矢量；(2) 平均坡印廷矢量。

解 (1) $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的瞬时矢量为

$$\boldsymbol{E}(x,z,t) = \mathrm{Re}\left[-\boldsymbol{e}_y \mathrm{j}\omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$= \boldsymbol{e}_y \omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta z) \quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(x,z,t) = \mathrm{Re}\left\{\left[\boldsymbol{e}_x \mathrm{j}\beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \boldsymbol{e}_z H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

$$= -\boldsymbol{e}_x \beta \frac{a}{\pi} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - \beta z) + \boldsymbol{e}_z H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - \beta z)$$

故瞬时坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}(x,z,t) = \boldsymbol{e}_z \omega\mu\beta \left(\frac{a}{\pi} H_0\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t - \beta z) +$$

$$\boldsymbol{e}_x \frac{a\omega\mu}{4\pi} H_0^2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin(2\omega t - 2\beta z) \quad \mathrm{W/m^2}$$

（2）平均坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}(x,z) = \frac{1}{2} \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(x,z) \times \boldsymbol{H}^*(x,z)] = \boldsymbol{e}_z \frac{\omega\mu\beta}{2} \left(\frac{a}{\pi} H_0\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad \mathrm{W/m^2}$$

4.12 在球坐标系中，已知电磁场的瞬时值

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_\theta \frac{E_0}{r} \sin\theta \sin(\omega t - k_0 r) \quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{e}_\phi \frac{E_0}{\eta_0 r} \sin\theta \sin(\omega t - k_0 r) \quad \mathrm{A/m}$$

式中，E_0 为常数，$\eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$，$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$。试计算通过以坐标原点为球心、$r_0$ 为半径的球面 S 的总功率。

解 将 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 表示为复数形式，有

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\theta) = \boldsymbol{e}_\theta \frac{E_0}{r} \sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r} \quad \mathrm{V/m}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\theta) = \boldsymbol{e}_\phi \frac{E_0}{\eta_0 r} \sin\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r} \quad \mathrm{A/m}$$

于是得到平均坡印廷矢量

$$S_{av}(r,\theta)=\frac{1}{2}\text{Re}(E\times H^*)=e_r\frac{1}{2\eta_0}\left(\frac{E_0}{r}\right)^2\sin^2\theta \quad \text{W/m}^2$$

通过以原点为球心、r_0 为半径的球面 S 的总功率

$$P_{av}=\oint_S S_{av}\cdot dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\eta_0}\left(\frac{E_0}{r_0}\right)^2\sin\theta\cdot r_0^2\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{E_0^2}{90}\quad \text{W/m}^2$$

4.13 已知无源的真空中电磁波的电场

$$E=e_xE_m\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}z\right)\quad \text{V/m}$$

证明：$S_{av}=e_zw_{av}c$，其中 w_{av} 是电磁场能量密度的时间平均值，$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ 为电磁波在真空中的传播速度。

证　电场复矢量为

$$E=e_xE_m e^{-j\frac{\omega}{c}z}$$

由 $\nabla\times E=-j\omega\mu_0H$，得磁场强度复矢量

$$H=\frac{j}{\omega\mu_0}\nabla\times E=\frac{j}{\omega\mu_0}e_z\times e_x\frac{\partial}{\partial z}(E_m e^{-j\frac{\omega}{c}z})=e_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m e^{-j\frac{\omega}{c}z}$$

所以

$$S_{av}=\frac{1}{2}\text{Re}[E\times H^*]=e_z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_m^2$$

另一方面

$$w_{av}=\frac{1}{2}\text{Re}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}E\cdot E^*+\frac{\mu_0}{2}H\cdot H^*\right]=\frac{\varepsilon_0}{2}E_m^2$$

由于 $\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}=\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=\varepsilon_0c$，故有

$$S_{av}=e_z\frac{\varepsilon_0}{2}E_m^2c=e_zw_{av}c$$

4.14 设电场强度和磁场强度分别为

$$E=E_0\cos(\omega t+\psi_e)$$

$$H=H_0\cos(\omega t+\psi_m)$$

证明其坡印廷矢量的平均值为

$$S_{av}=\frac{1}{2}E_0\times H_0\cos(\psi_e-\psi_m)$$

证　坡印廷矢量的瞬时值为

$$S=E\times H=E_0\cos(\omega t+\psi_e)\times H_0\cos(\omega t+\psi_m)$$

$$=\frac{1}{2}E_0\times H_0[\cos(\omega t+\psi_e+\omega t+\psi_m)]+\cos(\omega t+\psi_e-\omega t-\psi_m)$$

$$=\frac{1}{2}E_0\times H_0[\cos(2\omega t+\psi_e+\psi_m)+\cos(\psi_e-\psi_m)]$$

故平均坡印廷矢量为

$$S_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T S\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}E_0\times H_0[\cos(2\omega t+\psi_e+\psi_m)+\cos(\psi_e-\psi_m)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}E_0\times H_0\cos(\psi_e-\psi_m)$$

4.15　在半径为 a、电导率为 σ 的无限长直圆柱导线中，沿轴向通以均匀分布的恒定电流 I,且导线表面上有均匀分布的电荷面密度 ρ_S。

(1) 导线表面外侧的坡印廷矢量 S;

(2) 证明：由导线表面进入其内部的功率等于导线内的焦耳热损耗功率。

解：(1) 当导线的电导率 σ 为有限值时，导线内部存在沿电流方向的电场

$$E_i=\frac{J}{\sigma}=e_z\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

根据边界条件，在导线表面上电场的切向分量连续，即 $E_{iz}=E_{oz}$。因此，在导线表面外侧的电场的切向分量为

$$E_{oz}\big|_{\rho=a}=\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

又利用高斯定律，容易求得导线表面外侧的电场的法向分量为

$$E_{o\rho}\big|_{\rho=a}=\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}$$

故导线表面外侧的电场为

$$E_o\big|_{\rho=a}=e_\rho\frac{\rho_S}{\varepsilon_0}+e_z\frac{I}{\pi a^2\sigma}$$

利用安培环路定律，可求得导线表面外侧的磁场为

$$H_o\big|_{\rho=a}=e_\phi\frac{I}{2\pi a}$$

故导线表面外侧的坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_{o|\rho=a} = (\boldsymbol{E}_o \times \boldsymbol{H}_o)\big|_{\rho=a} = -\boldsymbol{e}_\rho \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} + \boldsymbol{e}_z \frac{\rho_S I}{2\pi\varepsilon_0 a} \quad \mathrm{W/m^2}$$

（2）由内导体表面每单位长度进入其内部的功率

$$P = -\int_S \boldsymbol{S}_o\big|_{\rho=a} \cdot \boldsymbol{e}_\rho \mathrm{d}S = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} \times 2\pi a = \frac{I^2}{\pi a^2 \sigma} = RI^2$$

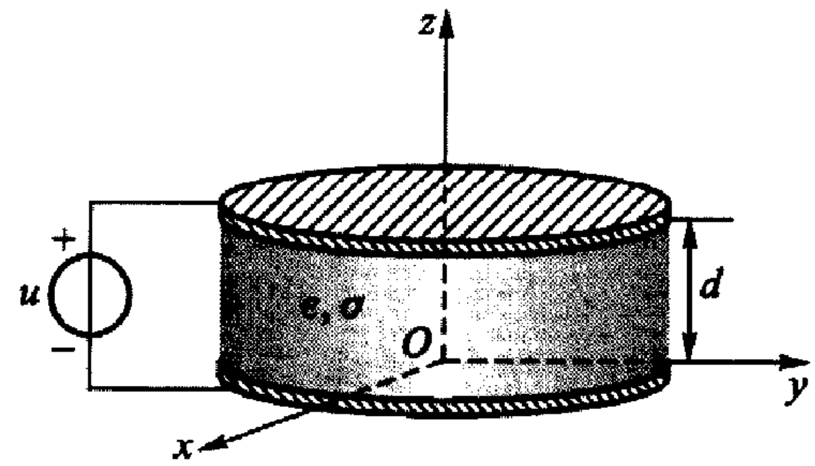
式中，$R = \dfrac{1}{\pi a^2 \sigma}$ 是内导体单位长度的电阻。由此可见，由导线表面进入其内部的功率等于导线内的焦耳热损耗功率。

4.16 由半径为 a 的两圆形导体平板构成一平行板电容器，间距为 d，两板间充满介电常数为 ε、电导率为 σ 的媒质，如图题 4.16 所示。设两板间外加缓变电压 $u = U_m \cos \omega t$，略去边缘效应，试求：

（1）电容器内的瞬时坡印廷矢量和平均坡印廷矢量；

（2）进入电容器的平均功率；

（3）电容器内损耗的瞬时功率和平均功率。



图题 4.16

解 （1）电容器中的电场

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_z \frac{u}{d} = \boldsymbol{e}_z \frac{U_m}{d} \cos \omega t$$

位移电流密度 $\boldsymbol{J}_d$ 和传导电流密度 $\boldsymbol{J}$ 分别为

$$\boldsymbol{J}_d = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = -\boldsymbol{e}_z \frac{\varepsilon \omega U_m}{d} \sin \omega t$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_z \frac{\sigma U_m}{d} \cos \omega t$$

由于轴对称性，两板间的磁场只有 $\boldsymbol{e}_\phi$ 分量，且在以 z 轴为中心、ρ 为半径的圆周 C 上处处相等，于是由

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

可得

$$2\pi\rho H_\phi = \pi\rho^2 \cdot \frac{\sigma U_m}{d} \cos \omega t - \pi\rho^2 \frac{\varepsilon \omega U_m}{d} \sin \omega t$$

所以

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_{\phi} \frac{U_{\mathrm{m}}\rho}{2d}(\sigma\cos \omega t - \varepsilon\omega\sin \omega t)$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{e}_{\rho} \frac{U_{\mathrm{m}}^2\rho}{2d^2}\left(\sigma\cos^2\omega t - \frac{\varepsilon\omega}{2}\sin 2\omega t\right)$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \boldsymbol{S}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (-\boldsymbol{e}_{\rho}) \frac{U_{\mathrm{m}}^2\rho}{2d^2}\left(\sigma\cos^2\omega t - \frac{\varepsilon\omega}{2}\sin 2\omega t\right)\mathrm{d}t = -\boldsymbol{e}_{\rho} \frac{\sigma U_{\mathrm{m}}^2\rho}{4d^2}$$

（2）损耗功率瞬时值 P 为

$$P = \int_V \sigma E^2 \mathrm{d}V = \int_V \frac{\sigma U_{\mathrm{m}}^2}{d^2}\cos^2\omega t\mathrm{d}V$$

$$= \frac{\sigma U_{\mathrm{m}}^2}{d^2}\cos^2\omega t \times \pi a^2 d = \frac{\pi\sigma a^2 U_{\mathrm{m}}^2}{d}\cos^2\omega t$$

平均损耗功率 P_{av} 为

$$P_{\mathrm{av}} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P\mathrm{d}t = \frac{\pi\sigma a^2 U_{\mathrm{m}}^2}{2d}$$

（3）进入电容器的平均功率为

$$P'_{\mathrm{av}} = -\oint_S \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= -\left[\int_{S_{\text{上}}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} \cdot \boldsymbol{e}_z \mathrm{d}S + \int_{S_{\text{下}}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} \cdot (-\boldsymbol{e}_z)\mathrm{d}S + \int_{S_{\text{柱面}}} \boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} \cdot \boldsymbol{e}_r \mathrm{d}S\right]$$

$$= \frac{\sigma U_{\mathrm{m}}^2 a}{4d^2} \cdot 2\pi a d = \frac{\pi\sigma a^2 U_{\mathrm{m}}^2}{2d}$$

由此可见，有 $P'_{\mathrm{av}} = P_{\mathrm{av}}$.

4.17 已知真空中两个沿 z 方向传播的电磁波的电磁场分别为

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_x E_{1\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}, \quad \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{e}_y E_{2\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}$$

其中 ϕ 为常数，$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$。证明总的平均坡印廷矢量等于两个波的平均坡印廷矢量之和。

证　由 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$ 得磁场复矢量

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{E}_1 = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left(\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}_2 = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left(\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{E}_2 = -\boldsymbol{e}_x\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{2\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}$$

所以平均坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}_{1\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_xE_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\times\left(\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right)^*\right]$$

$$= \boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1\mathrm{m}}^2$$

$$\boldsymbol{S}_{2\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{e}_xE_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}\times\left(\boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}\right)^*\right]$$

$$= \boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{2\mathrm{m}}^2$$

合成波电场和磁场复矢量

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{e}_xE_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \boldsymbol{e}_yE_{2\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 = -\boldsymbol{e}_x\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{2\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)} + \boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

所以平均坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\boldsymbol{e}_xE_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \boldsymbol{e}_yE_{2\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)})\times\right.$$

$$\left.\left(-\boldsymbol{e}_x\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{2\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\phi)} + \boldsymbol{e}_y\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{1\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\right)^*\right]$$

$$= \boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(E_{1\mathrm{m}}^2 + E_{2\mathrm{m}}^2)$$

由此可见

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \boldsymbol{S}_{1\mathrm{av}} + \boldsymbol{S}_{2\mathrm{av}}$$

4.18 试证明电磁能量密度 $w = \frac{1}{2}\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\boldsymbol{H}|^2$ 和坡印廷矢量 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 在下列变换下都具有不变性：

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}\cos\phi + \eta\boldsymbol{H}\sin\phi,\quad \boldsymbol{H}_1 = -\frac{1}{\eta}\boldsymbol{E}\sin\phi + \boldsymbol{H}\cos\phi$$

其中 ϕ 为常数 ,$\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$。

证 (1) $\frac{1}{2}\varepsilon\,|\boldsymbol{E}_1|^2+\frac{1}{2}\mu\,|\boldsymbol{H}_1|^2=\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_1+\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_1$

$$=\frac{\varepsilon}{2}[E^2\cos^2\phi+\eta^2H^2\sin^2\phi+2\eta\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}\cos\phi\sin\phi]+$$

$$\frac{\mu}{2}\left[\frac{1}{\eta^2}E^2\sin^2\phi+H^2\cos^2\phi-2\frac{1}{\eta}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}\cos\phi\sin\phi\right]$$

由于 $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, 则 $\varepsilon\eta^2=\mu$ 及 $\mu/\eta^2=\varepsilon$, 故有

$$\frac{1}{2}\varepsilon\,|\boldsymbol{E}_1|^2+\frac{1}{2}\mu\,|\boldsymbol{H}_1|^2=\frac{1}{2}\varepsilon\,|\boldsymbol{E}|^2+\frac{1}{2}\mu\,|\boldsymbol{H}|^2$$

(2) $\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1=(\boldsymbol{E}\cos\phi+\eta\boldsymbol{H}\sin\phi)\times\left(-\frac{1}{\eta}\boldsymbol{E}\sin\phi+\boldsymbol{H}\cos\phi\right)$

$$=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\cos^2\phi+(\eta\boldsymbol{H})\times\left(-\frac{1}{\eta}\boldsymbol{E}\right)\sin^2\phi$$

$$=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$