第6章

无限脉冲响应IIR数字滤波器的设计

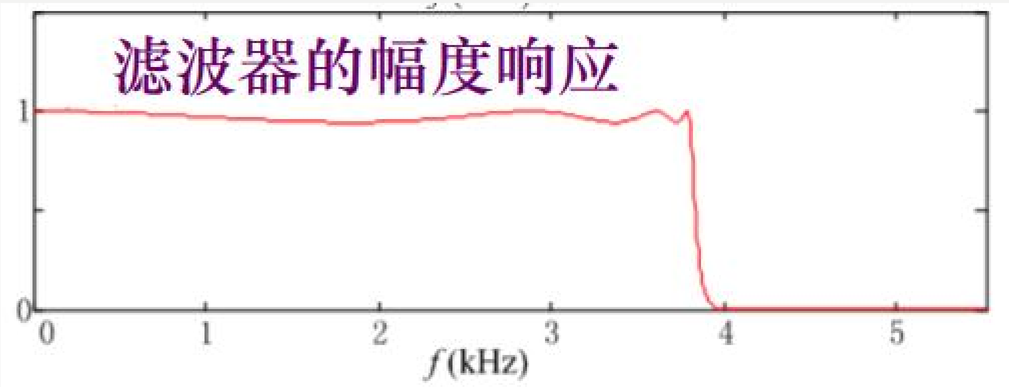
本章主要内容

- 数字滤波器的基本概念
- 模拟滤波器的设计
- 用脉冲响应不变法设计IIR数字低通滤波器
- 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

6.1 数字滤波器的基本概念

■ 数字滤波器(DF)的定义

数字滤波器是对数字信号（离散时间信号）进行数值运算处理的系统（可以是硬件电路或软件程序），通过预设的运算规则（如差分方程、系统函数），选择性地增强或衰减输入信号中特定频率成分，最终输出满足频率特性要求的数字信号。



1、数字滤波器的分类

按功能划分：低通滤波器

高通滤波器

带通滤波器

带阻滤波器

按单位脉冲响应长度划分：

FIR滤波器

IIR滤波器

场景举例：滤波器是“频率的守门人”

场景 1：手机通话降噪

通话时，环境噪声多是低频（如风声、汽车引擎声），而人声主要是中频（300Hz~3kHz）。手机里的带通滤波器就像“只允许中频人声通过的门”，把低频噪声拦在外面，让对方听清你的声音。

场景 2：收音机选台

每个电台的信号都在特定的“频率带”里（如 FM 98.5MHz），收音机里的带通滤波器就像“只对 98.5MHz 频段开放的门”，其他频段的信号（如 97.4MHz、100.3MHz）都进不来，你就能听到清晰的 98.5MHz 电台。

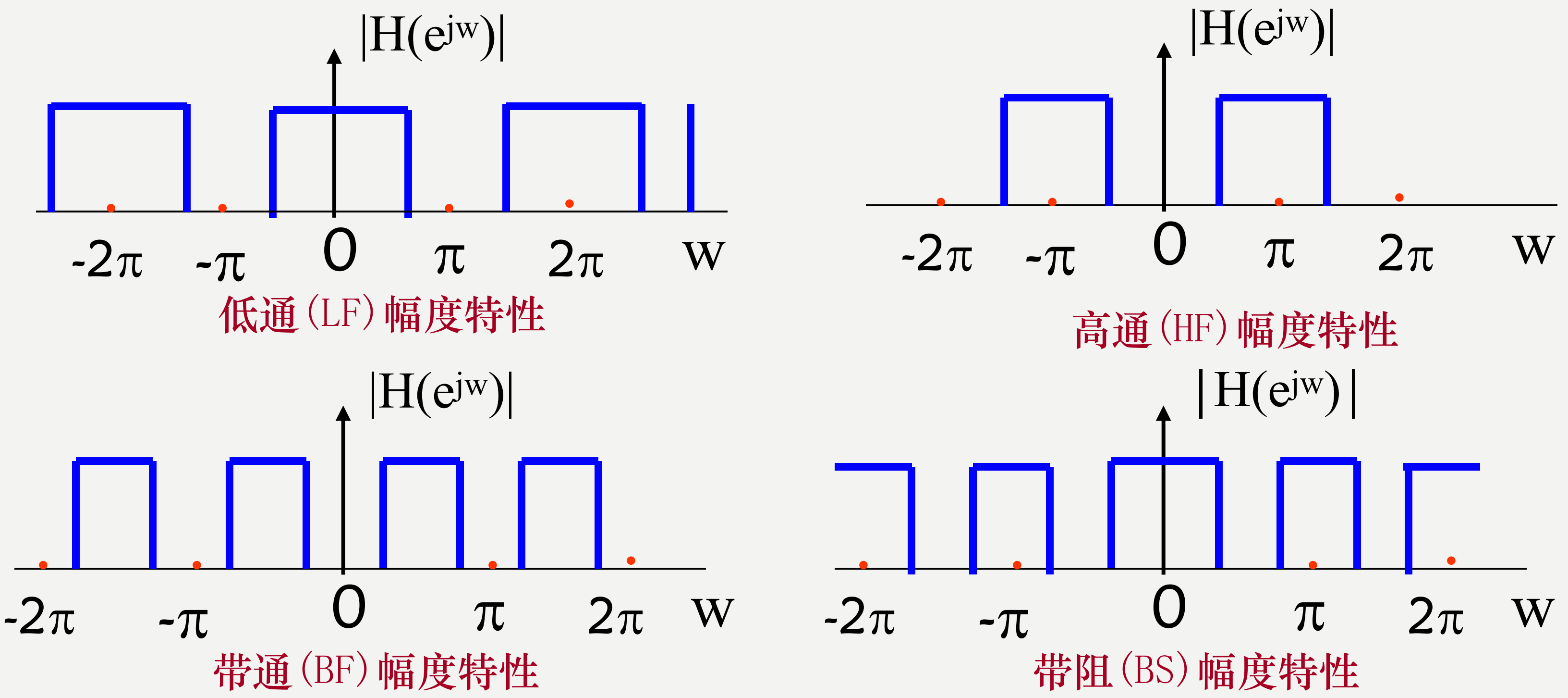
场景 3：电网谐波治理

电网里的 50Hz 是有用的基波，但会混入 3 次（150Hz）、5 次（250Hz）谐波（无用的高频干扰）。带阻滤波器就像“专门挡住 150Hz、250Hz 的门”，只让 50Hz 基波通过，保证电网稳定。

1、数字滤波器的分类

按功能划分：

理想数字滤波器：



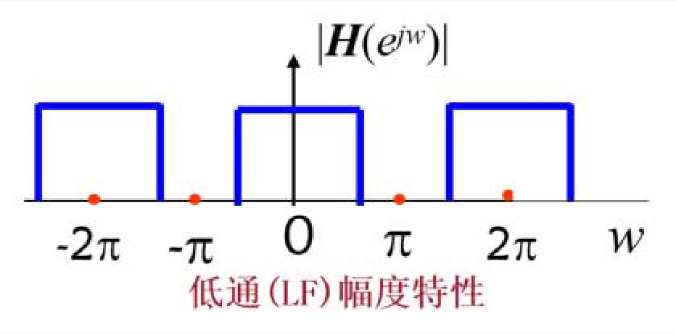
特点：低通滤波器的通频带中心位于2π的整数倍处，

高通滤波器的通频带中心位于π的奇数倍处。

物理上不可实现，只有通带和阻带，分别为常数1和0，没有过渡带。

1、数字滤波器的分类

（1）低通滤波器（Low-Pass Filter, LPF）



<u>定义</u>：允许低于某一“截止频率f_c”的信号通过，衰减高于f_c的信号。

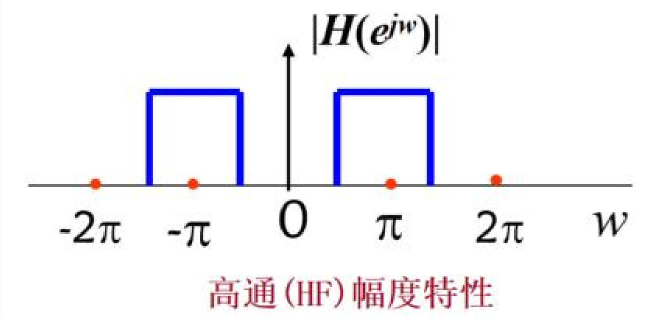
<u>类比</u>：“低频通行证”—— 只放低频信号进门，高频信号一律拦截。

<u>工程案例</u>：数字图像的“模糊处理”（如美颜相机的磨皮效果）。

图像的高频成分对应“细节、边缘”（如痘印、皱纹），低频成分对应“整体轮廓”。低通滤波器滤除高频细节，保留低频轮廓，实现图像模糊 / 磨皮。

1、数字滤波器的分类

（2）高通滤波器（（High-Pass Filter, HPF））



<u>定义</u>：允许高于某一“截止频率f_c” 的信号通过，衰减低于f_c的信号。

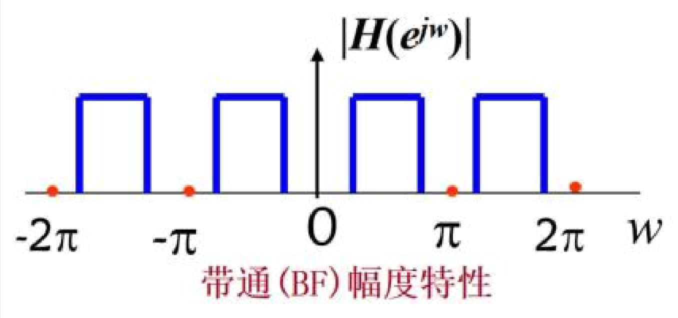
<u>类比</u>： “高频通行证”—— 只放高频信号进门，低频信号一律拦截。

<u>工程案例</u>：数字图像的“边缘增强”（如素描滤镜）。

图像的低频成分是“模糊的背景”，高频成分是“清晰的边缘”。高通滤波器滤除低频背景，保留高频边缘，让图像呈现素描般的线条感。

1、数字滤波器的分类

(3）带通滤波器（Band-Pass Filter, BPF）



定义：允许某一 “频率带” 内的信号通过，衰减带外信号。

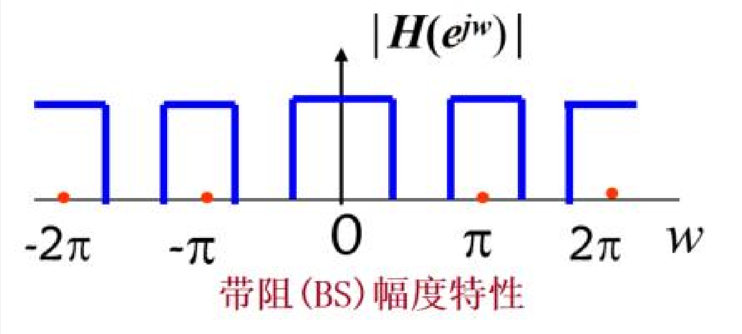
类比：“频段专属门”—— 只对某一区间的频率开放，区间外的都不让进。

工程案例：语音助手的 “唤醒词检测”（如 “小爱同学”“Siri”）。

唤醒词的频率集中在特定频段（如 1kHz~3kHz），带通滤波器只允许这个频段的声音通过，过滤掉其他频段的环境噪声，确保唤醒词被准确识别。

1、数字滤波器的分类

（4）带阻滤波器（Band-Reject Filter, BRF，也叫陷波滤波器）



定义：衰减某一“频率带”内的信号，允许带外信号通过。若频率带极窄，也叫“notch filter（陷波器）。

类比：“频段拦截门”—— 专门挡住某一区间的频率，区间外的可以通行。

工程案例：乐器录音的“啸叫抑制”。

麦克风和音箱距离过近时，会产生特定频率的啸叫（如 1200Hz），带阻滤波器像“针对 1200Hz 的隔音门”，把这个频率的啸叫滤除，保留乐器的正常声音。

1、数字滤波器的分类

按单位脉冲响应长度划分：

■ 无限长单位脉冲响应(IIR)数字滤波器

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

N阶IIR滤波器函数

■ 有限长单位脉冲响应(FIR)数字滤波器：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

N－1阶FIR滤波器函数

2、数字滤波器的技术要求

(1) 数字滤波器的频率响应函数$H(e^{jw})$

$$H(e^{j\omega})=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$$

$|H(e^{jw})|$—系统的幅频特性：表示信号通过该滤波器后各频率成分的幅度衰减情况。

$\theta(\omega)$—系统的相频特性：反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况。

选频滤波器一般只考虑幅频特性，对相频特性不作要求。对输出波形有要求时，则需考虑相频特性的技术指标。

2、数字滤波器的技术要求

幅频特性：信号的“音量”怎么变

幅度特性的核心是“不同频率成分的幅度被放大 / 衰减的比例”，决定了“信号各频段的强度是否符合需求”，是最直观的技术要求。

工程案例：音频均衡器（EQ）的幅度特性设计

场景：听音乐时觉得 “低音太弱，高音刺耳”，需要用 EQ 调整。

对低频（60Hz~200Hz）：幅度增益设为 + 3dB（放大低音，让鼓声更浑厚）；

对高频（8kHz~16kHz）：幅度增益设为 - 2dB（衰减高音，避免刺耳）；

2、数字滤波器的技术要求

相频特性：信号的“时间”怎么变

相频特性的核心是“不同频率成分的相位延迟”，决定了“信号各频段的到达时间是否同步”

工程案例：语音信号的相位影响

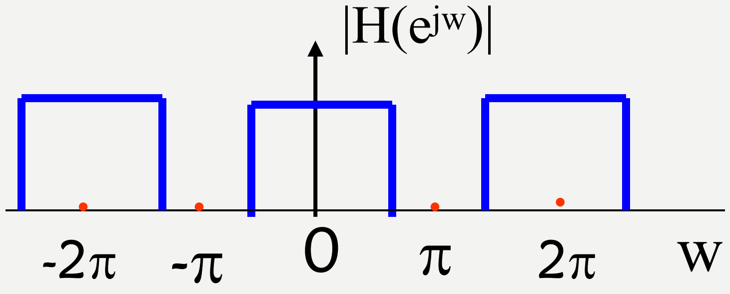
场景：语音信号中，元音（如 “a” “o”）是低频成分，辅音（如 “s” “sh”）是高频成分。

低频元音和高频辅音的延迟时间相同（如都延迟 10ms），语音听起来 “自然清晰”，不会出现 “元音和辅音错位”；

非线性相位（如未优化的 IIR 滤波器）：低频元音延迟 20ms，高频辅音仅延迟 5ms，会导致 “听感模糊”（如 “sā” 听起来像 “ā s”），严重时甚至无法识别语义。

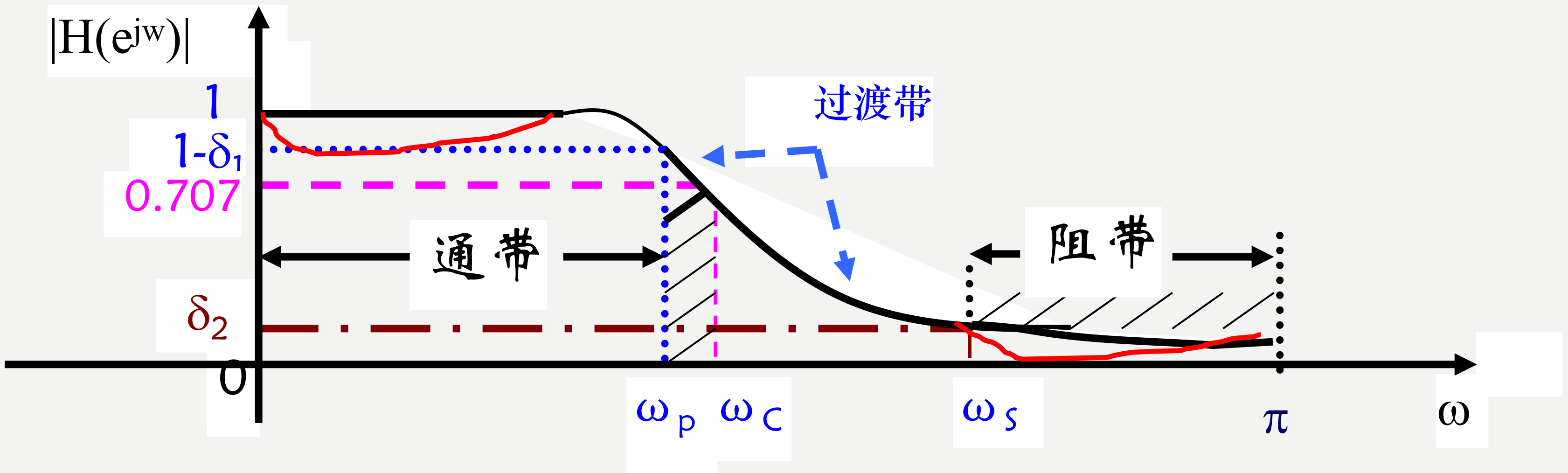
2、数字滤波器的技术要求

理想数字滤波器：



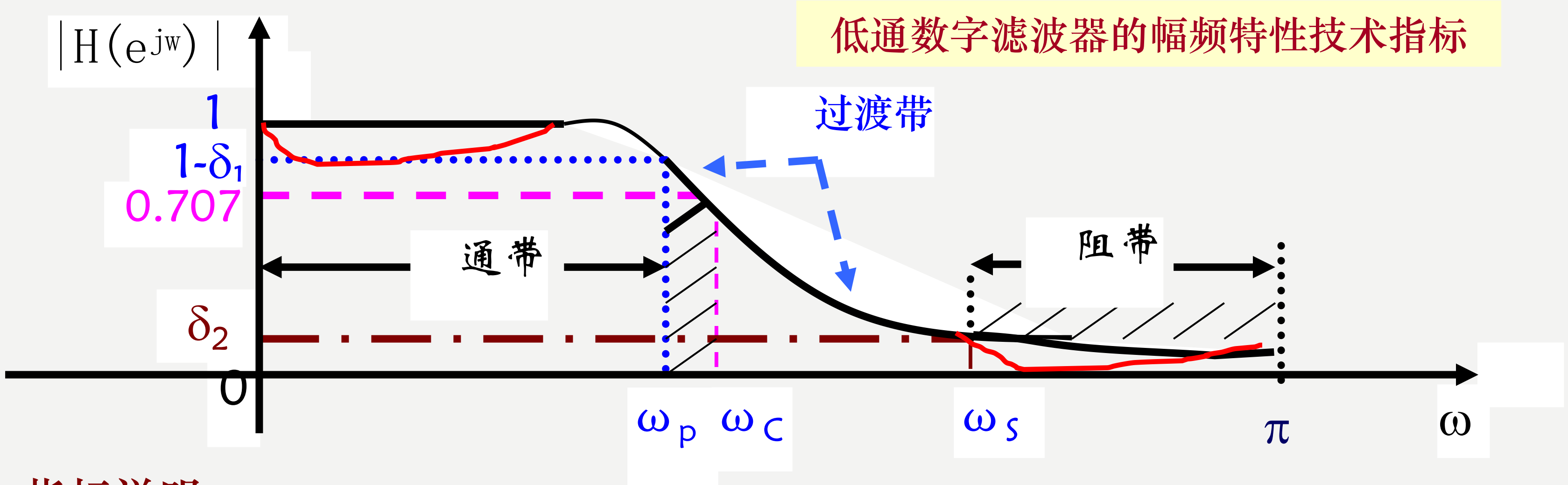
低通（LF）幅度特性

实际数字滤波器：



有通带和阻带，还有过渡带，不可能一直为常数1和0，有波动。

(2) 数字滤波器的幅频特性$|H(e^{jw})|$的指标



指标说明：

ω_p：通带边界频率，通带频率范围：$0 \leqslant \omega \leqslant \omega_p$；

ω_S：阻带截止频率，阻带频率范围：$\omega_s \leqslant \omega \leqslant \pi$；　$\omega_p < \omega < \omega_s$：

过渡带；

δ_1：通带波动范围；δ_2：阻带波动范围；

α_p：通带最大衰减　$\alpha_p = -10\lg\left|H(e^{j\omega_p})\right|^2 = -20\lg(1-\delta_1)\ dB$

α_S：阻带最小衰减　$\alpha_s = -10\lg\left|H(e^{j\omega_s})\right|^2 = -20\lg(\delta_2)\ dB$

当幅度衰减到$\sqrt{2}/2$倍时，所对应频率$\omega = \omega_c$，此时$\alpha_p = 3dB$，称ω_c为3dB截止频率。

“两个频率定边界（通带、阻带的范围），两个衰减定规则（通带多宽松、阻带多严格），3dB 截止频率定通带的临界衰减点”

为什么要有多个指标？（两个频率、两个衰减、截止频率和衰减）

“反例” 说明单一指标的缺陷：

（1）“截止频率 3kHz”：

不知道 3kHz 处衰减多少（是 1dB 还是 10dB？），无法判断是否满足需求；

（2）“阻带衰减 40dB”：

不知道从哪个频率开始达到 40dB（是 5kHz 还是 10kHz？），无法确定滤波效果；

必须组合使用：“在 3kHz 内衰减≤1dB，5kHz 外衰减≥40dB”，才能完整描述滤波器的“筛选能力”。（1dB 对应幅度变为原来的约 1.12 倍；40dB 对应幅度变为原来的约 0.01 倍）

3. 数字滤波器设计目标

LTI系统

$$H(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

由前面给定的数字滤波器指标，确定 M, N, a_i, b_j ，从而得到数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

$a_0=1, a_1=2, a_2=3$，M=2

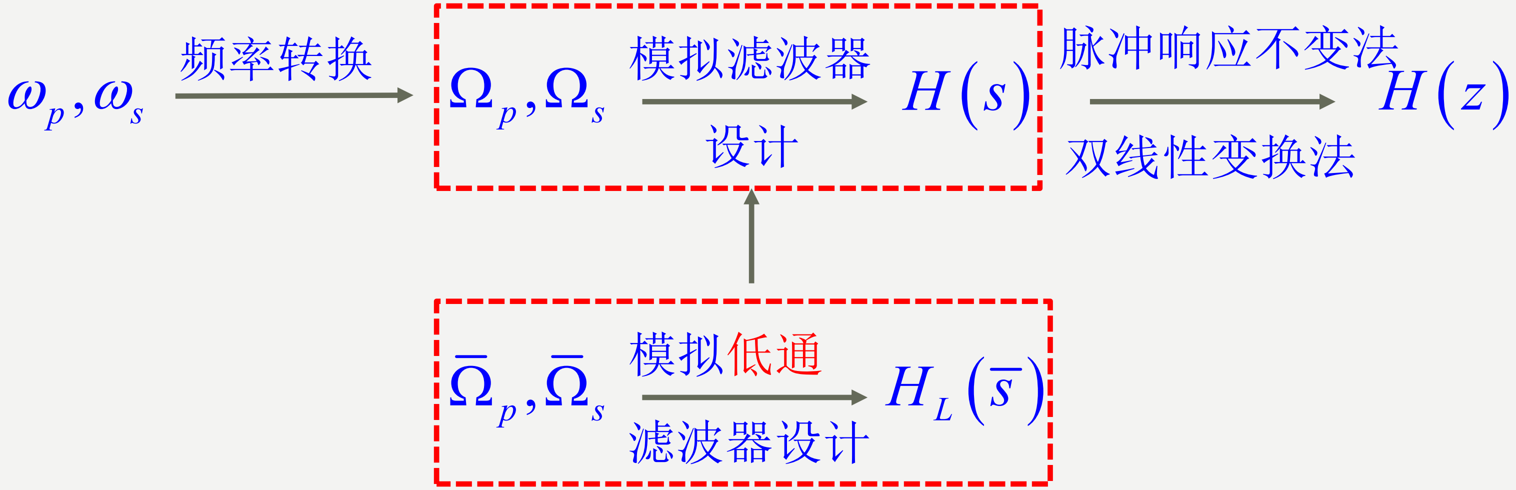
如：$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{1+1.5z^{-1}}$$

$b_0=1, b_1=1.5$，N=1

4. 数字滤波器设计方法

■ IIR滤波器设计方法：

- 将数字滤波器的设计转化为模拟滤波器的设计（因为模拟滤波器成熟）；
- 设计满足技术指标的模拟滤波器；
- 将模拟滤波器转化为数字滤波器；



6.2　模拟滤波器的设计

常用模拟原型滤波器及特点:

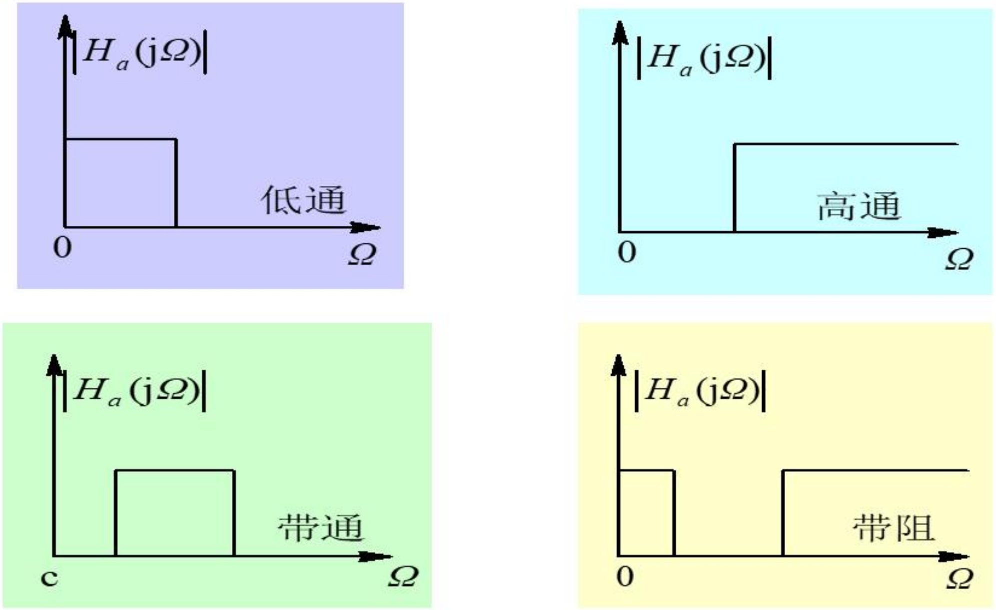
（1）巴特沃斯（Butterworth）滤波器： 滤波器具有单调下降的幅频特性；

（2）切比雪夫（Chebyshev）滤波器：幅频特性在通带或阻带有波动，可提高选择性；

（3）贝塞尔（Bessel）滤波器：通带内较好的线性相位；

（4）椭圆（Ellipse）滤波器：选择性相对于前三种是最好的，但通带、阻带等纹波 。

各种理想模拟滤波器的幅度特性

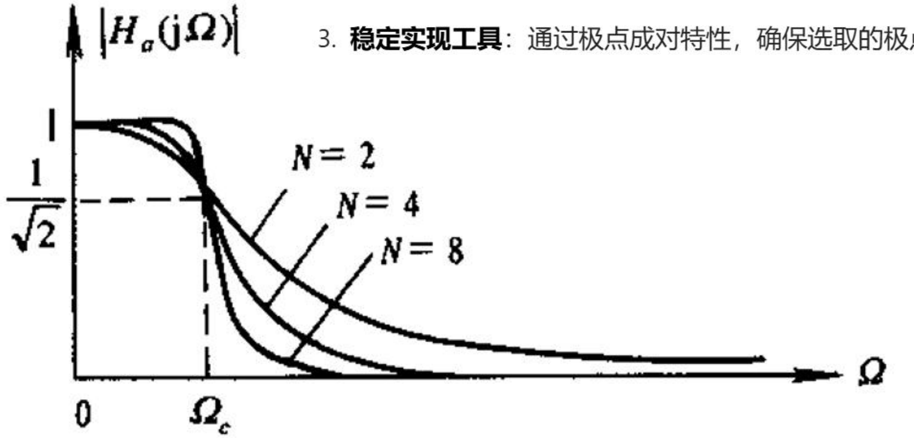


6.2.2 巴特沃斯（Butterworth，BW）低通滤波器的设计

巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数$|H_a(j\Omega)|^2$用下式表示：

$$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+(\dfrac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$$

1. **数学简化工具**：把复数模的计算变成实数多项式，降低设计难度；
2. **工程适配工具**：直接对应 “功率衰减” 指标（dB），和实际测量需求一致；
3. **稳定实现工具**：通过极点成对特性，确保选取的极点构成稳定系统。



两个待定参数：

N: 滤波器阶数。

Ωc:是3dB截止频率。

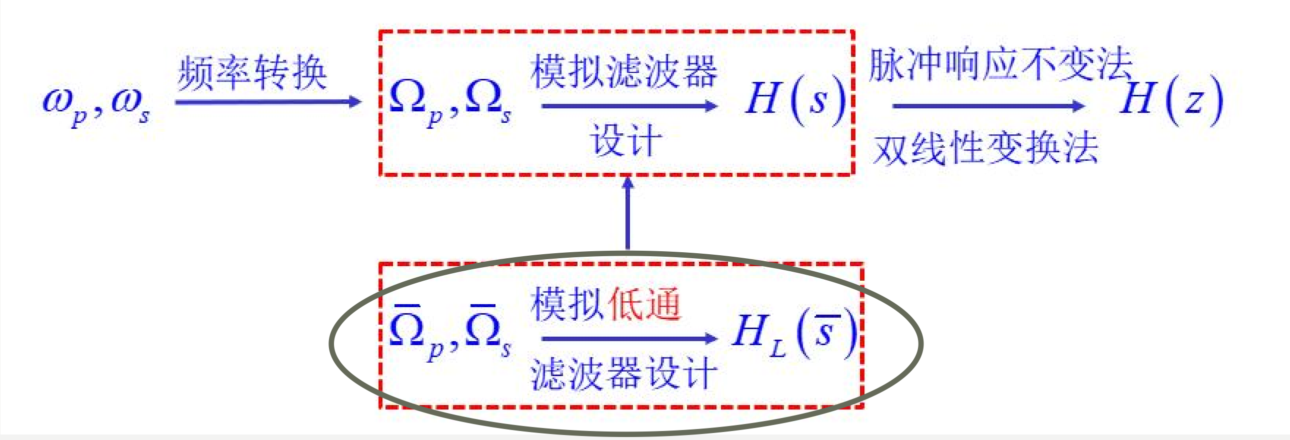
直接用$|H_a(j\Omega)|$设计，需要处理 “平方根” 和 “复数的实部、虚部分解”，计算繁琐；而**幅度平方函数**则是：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)\cdot H_a^*(j\Omega)$$

上图巴特沃斯低通滤波器是一个模板，改变两个参数，有很多单调下降的曲线。

$\Omega>\Omega_c$，幅度迅速下降，N越大，幅度下降越快，过渡带越窄。

BW低通滤波器的设计步骤：



（1） 根据给出的技术指标α_P、α_S、Ω_p、Ω_S，求滤波器阶数N

（2） 计算模拟滤波器的3dB截止频率Ω_c

（3） 计算模拟滤波器的系统函数极点

（4） 计算模拟滤波器的系统函数H(s)

巴特沃斯滤波器的设计步骤：

(1) 根据给出的技术指标α_p、α_s、Ω_p、Ω_s，求滤波器阶数N

$$\begin{cases} \left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \dfrac{1}{1+(\dfrac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}} \\ \alpha_p = -10\lg\left|H_a(j\Omega_p)\right|^2 \\ \alpha_s = -10\lg\left|H_a(j\Omega_s)\right|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 1+(\dfrac{\Omega_p}{\Omega_c})^{2N} = 10^{\alpha_p/10} \\ 1+(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_c})^{2N} = 10^{\alpha_s/10} \end{array} \Rightarrow$$

$$(\frac{\Omega_s}{\Omega_p})^N = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}$$

设：$\lambda_{sp} = \Omega_s/\Omega_p, k_{sp} = \sqrt{\dfrac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}$

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}}$$

用上式求出的N可能有小数部分，应取大于等于N的最小整数。

(2) 求3dB截止频率Ω_c

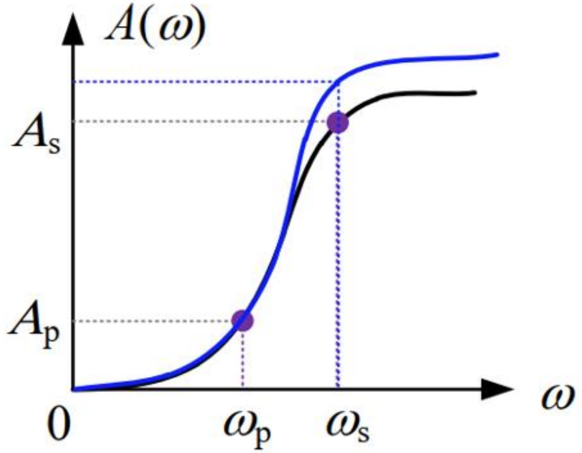
$$\begin{cases} |H_a(j\Omega)|^2 = \dfrac{1}{1+(\dfrac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}} \\ \alpha_p = -10\lg|H_a(j\Omega_p)|^2 \\ \alpha_s = -10\lg|H_a(j\Omega_s)|^2 \end{cases}$$

$$1+(\frac{\Omega_p}{\Omega_c})^{2N} = 10^{a_{p/10}}$$

$$1+(\frac{\Omega_s}{\Omega_c})^{2N} = 10^{a_{s/10}}$$

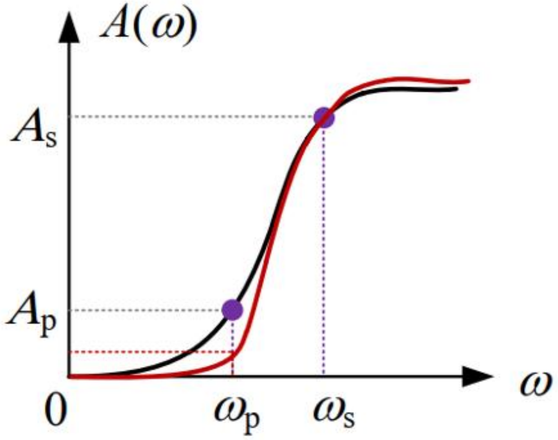
$$\Omega_c = \Omega_p(10^{0.1a_p}-1)^{-\frac{1}{2N}}$$

阻带指标有富裕度



$$\Omega_c = \Omega_s(10^{0.1a_s}-1)^{-\frac{1}{2N}}$$

通带指标有富裕度



(3) 计算模拟滤波器的系统函数极点：公式计算或查表:

前面(1)、(2)确定了 $$\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}}$$

（3-1）公式计算：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega)\cdot H_a^*(j\Omega) = H_a(j\Omega)\cdot H_a(-j\Omega) = H_a(s)\cdot H_a(-s)|_{S=j\Omega}$$

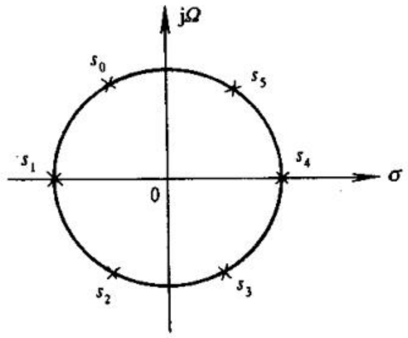
$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1+(\frac{s}{j\Omega_c})^{2N}}$$

有2N个极点：

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}}(j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N})}$$

其中，k=0,1,…,(2N-1)

2N个极点等间隔分布在半径为Ω_c的圆上（称巴特沃斯圆），间隔是π/Nrad

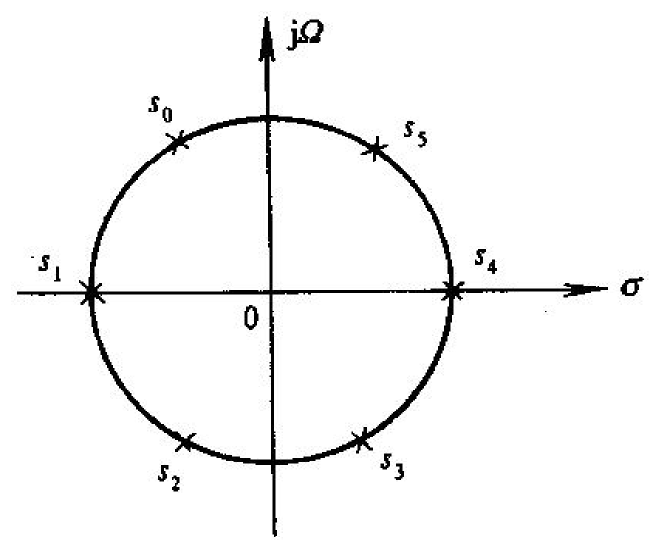


（4-1）确定系统函数$H_a(s)$：系统$H_a(s)$应是因果稳定的系统，因此，极点应位于S 左半平面内。

左半平面N个极点构成$H_a(s)$传输函数，右半平面N个极点构成$H_a(-s)$传输函数。

$H_a(s)$表示为：

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)}$$



(3-2) 查表直接得到**归一化**极点和系统函数:

表6.2.1　巴特沃斯归一化低通滤波器参数

阶数 N \ 极点位置	$P_{0,N-1}$	$P_{1,N-2}$	$P_{2,N-3}$	$P_{3,N-4}$	P_4
1	−1.0000				
2	−0.7071±j0.7071				
3	−0.5000±j0.8660	−1.0000			
4	−0.3827±j0.9239	−0.9239±j0.3827			
5	−0.3090±j0.9511	−0.8090±j0.5878	−1.0000		
6	−0.2588±j0.9659	−0.7071±j0.7071	−0.9659±j0.2588		
7	−0.2225±j0.9749	−0.6235±j0.7818	−0.9010±j0.4339	−1.0000	
8	0.1951±j0.9808	0.5556±j0.8315	−0.8315±j0.5556	−0.9808±j0.1951	
9	−0.1736±j0.9848	−0.5000±j0.8660	−0.7660±j0.6428	−0.9397±j0.3420	−1.0000

表示两极点P_1、P_{N-2}

6.2 模拟滤波器的设计

分母多项式 / 系数阶数 N	$B(p)=p^N+b_{N-1}p^{N-1}+b_{N-2}p^{N-2}+\cdots+b_1p+b_0$								
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5817	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588

6.2 模拟滤波器的设计

分母因式 阶数 N	$B(p)=B_1(p)B_2(p)B_3(p)B_4(p)B_5(p)$ $B(p)$
1	$(p+1)$
2	$(p^2+1.4142p+1)$
3	$(p^2+p+1)(p+1)$
4	$(p^2+0.7654p+1)(p^2+1.8478p+1)$
5	$(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)(p+1)$
6	$(p^2+0.5176p+1)(p^2+1.4142p+1)(p^2+1.9319p+1)$
7	$(p^2+0.4450p+1)(p^2+1.2470p+1)(p^2+1.8019p+1)(p+1)$
8	$(p^2+0.3902p+1)(p^2+1.1111p+1)(p^2+1.6629p+1)(p^2+1.9616p+1)$
9	$(p^2+0.3473p+1)(p^2+p+1)(p^2+1.5321p+1)(p^2+1.8794p+1)(p+1)$

归一化：由于各滤波器的幅频特性不同，为使设计统一，将所有的频率归一化。采用对3dB截止频率Ωc归一化，归一化后的$H_a(s)$表示为 ：

$$\boxed{H_a(s)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}\left(\frac{s}{\Omega_c}-\frac{s_k}{\Omega_c}\right)}}\qquad \frac{s}{\Omega_c}=\frac{j\Omega}{\Omega_c}$$

令 $\lambda=\frac{\Omega}{\Omega_c}$ ，λ称为归一化频率： $\frac{s}{\Omega_c}=\frac{j\Omega}{\Omega_c}=j\lambda$

令 $p=\eta+j\lambda=\frac{s}{\Omega_c}$ ，p称为归一化复变量，归一化巴特沃斯的传输函数为：

$$\boxed{H_a(p)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p-p_k)}}$$

归一化极点： $p_k=\frac{s_k}{\Omega_c}=e^{j\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N}\right)},k=0,1,\ldots,N-1$

(4-2)将$H_a(p)$**去归一化**，得到实际的滤波器传输函数$H_a(s)$

$$\boxed{H_a(p)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p-p_k)}}$$

归一化极点：

$p_k=s_k/\Omega c=e^{j\pi(\frac{1}{2}+(2k+1)/2N)}$，$k=0,1,\ldots,N-1$。

写成多项式比：$$H_a(p)=\frac{1}{b_0+b_1p+b_2p^2+\ldots+b_{N-1}p^{N-1}+p^N}$$

将 $p=\dfrac{s}{\Omega_c}$ 代入$H_a(p)$中得：$H_a(s)=H_a(p)\big|_{p=s/\Omega c}$。

6.2 模拟滤波器的设计

例： 已知通带边界频率f_p=5kHz，通带最大衰减α_p=2dB，阻带截止频率f_s=12kHz，阻带最小衰减α_s=30dB，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器。

$$\frac{A_2}{A_1}=10^{\frac{dB}{20}}$$

解： 设计模拟滤波器的指标为

$\Omega_p=2\pi f_p=\pi\cdot 10^4$ (rad/s)， a_p=2dB

$\Omega_s=2\pi f_s=2.4\pi\times 10^4$ (rad/s)， a_s=30dB

（1）确定滤波器的阶数N

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{a_s/10}-1}{10^{a_p/10}-1}}=41.3223 \qquad \lambda_{sp}=\frac{2\pi f_s}{2\pi f_p}=2.4$$

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}=\frac{\lg 41.3223}{\lg 2.4}=4.25$$

取N=5

(2)　求3dB截止频率Ω_c

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{0.1a_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 2\pi \cdot 5.2755 krad/s$$

(3-1)　求极点$s_k = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N})}$

(4-1)　求$H_a(s)$

代入系统函数公式　$H_a(s) = \dfrac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s - s_k)}$

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^5}{s^5 + b_4\Omega_c s^4 + b_3\Omega^2{}_c s^3 + b_2\Omega^3{}_c s^2 + b1\Omega^4{}_c s + b0\Omega^5{}_c}$$

b_0=1.0000、b_1=3.2361、b_2=5.2361、b_3=5.2361、b_4=3.2361

6.2 模拟滤波器的设计

(3-2) 查表求极点

最简便的方法：由N=5，直接查表6.2.1得到：

- 极点形式：-0.3090±j0.9511； -0.8090±j0.5878; -1.0000
- 分母多项式的形式：

$$H_a(p)=\frac{1}{p^5+b_4p^4+b_3p^3+b_2p^2+b_1p+b_0}$$

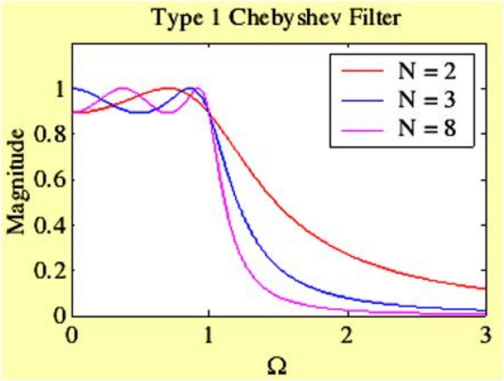
- 分母因式分解的形式：

$$H_a(p)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{4}(p-p_k)}=\frac{1}{(p^2+0.618p+1)(p^2+1.618p+1)(p+1)}$$

(4-2) 求$H_a(s)$ 将p=s/Ωc代入$H_a(p)$中得到$H_a(s)$

(2) 切比雪夫(Chebyshev, CB) I型滤波器

$$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$



N：滤波器的阶数

ε：表示通带波纹大小，ε越大，波纹越大

Ω_c：通带截止频率

$C_N(x)$ ：N 阶Chebyshev多项式

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}x) & |x| \le 1 \quad （余弦函数） \\ ch(Nch^{-1}x) & |x| > 1 \quad （双曲余弦函数） \end{cases}$$

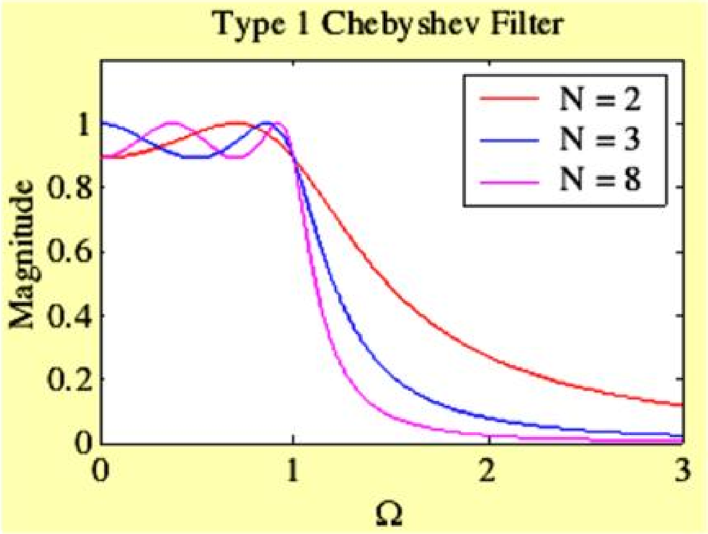
CBI型特点：

（1）当 $\Omega<\Omega_c$ ，$|H_a(j\Omega)|^2$在1和 $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$ 通带内等波纹起伏

（2）当 $\Omega>\Omega_c$ ，$|H_a(j\Omega)|^2$ 单调变化

（3）$|H_a(j\Omega)|^2$ 在 $\Omega=0$ 时：

- N 为奇数 $\left|H_a(j0)\right|^2=1$
- N 为偶数 $\left|H_a(j0)\right|^2=1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$



CBI低通滤波器的设计步骤：

(1) 由通带截止频率Ω_p，3dB截止频率Ω_c

$$\Omega_c=\Omega_p$$

(2) 由通带衰减 α_p，确定ε

$$\varepsilon=\sqrt{10^{0.1\alpha_p}-1}$$

(3) 由通带、阻带指标确定N

$$N=\frac{\operatorname{arch}\left[\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{0.1\alpha_s}-1}\right]}{\operatorname{arch}(\Omega_s/\Omega_p)}$$

(4) 由前面三个参数求极点

$$s_i=\sigma_i+j\Omega_i\qquad\begin{cases}\sigma_i=-\Omega_p ch\xi\sin\dfrac{2i-1}{2N}\\ \Omega_i=\Omega_p ch\xi\cos\dfrac{2i-1}{2N}\end{cases}$$

(5) 由极点求系统函数

$$H_a(s)=G_a(p)\big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{\Omega_p^N}{\varepsilon\cdot 2^{N-1}\prod_{i=1}^{N}(s-s_i)}$$

巴特沃斯 vs 切比雪夫” 的 3 个核心差异

对比维度	巴特沃斯低通滤波器	切比雪夫 I 型低通滤波器（通带波纹，阻带单调）
通带特性	通带幅频特性绝对平坦（无波纹）	通带允许小波纹（如 0.1dB、1dB，可预设）
过渡带特性	过渡带平缓（阶数相同时，过渡带宽）	过渡带极陡峭（阶数相同时，过渡带比巴特沃斯窄 50% 以上）
阶数需求	满足相同指标时，阶数更高（如阻带衰减 40dB，需 8 阶）	满足相同指标时，阶数更低（如阻带衰减 40dB，仅需 4 阶）
工程核心优势	适合 “通带平坦度优先” 场景（如音频 EQ）	适合 “过渡带陡峭 + 低成本” 场景（如通信信号滤波）

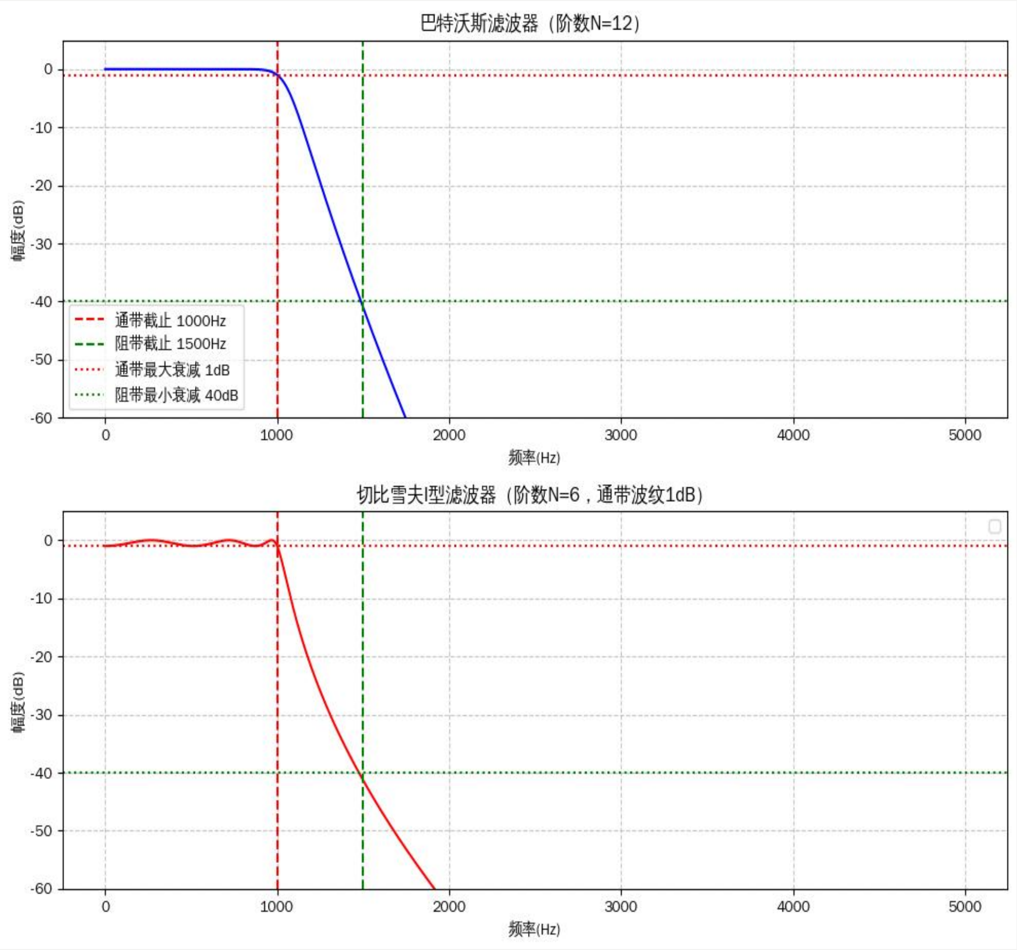
若需求是 “通带截止 1kHz（A_p=1dB），阻带截止 1.5kHz（A_s=40dB）”：

巴特沃斯：需 8 阶（延迟单元多，硬件成本高）

切比雪夫 I 型：仅需 4 阶（延迟单元少，成本低一半）

巴特沃斯 vs 切比雪夫” 代码实现

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal

# 1. 设定滤波器指标
Fs = 10000  # 采样率10kHz
Fp = 1000   # 通带截止频率1kHz
Fs_stop = 1500  # 阻带截止频率1.5kHz
Ap = 1      # 通带最大衰减1dB
As = 40     # 阻带最小衰减40dB

# 归一化频率（转换为Nyquist频率的比例，Nyquist频率=Fs/2）
wp = Fp / (Fs/2)    # 通带归一化频率
ws = Fs_stop / (Fs/2)  # 阻带归一化频率

# 2. 设计巴特沃斯滤波器
# 计算阶数和3dB截止频率
N_b, Wn_b = signal.buttord(wp, ws, Ap, As)
# 设计滤波器（分子系数b，分母系数a）
b_b, a_b = signal.butter(N_b, Wn_b, 'low')

# 3. 设计切比雪夫I型滤波器（通带波纹）
# 计算阶数和通带截止频率
N_c, Wn_c = signal.cheb1ord(wp, ws, Ap, As)
# 设计滤波器（参数：阶数，通带波纹，截止频率）
b_c, a_c = signal.cheby1(N_c, Ap, Wn_c, 'low')

# 4. 计算幅频响应（频率范围0~Fs/2）
w_b, h_b = signal.freqz(b_b, a_b, worN=1024, fs=Fs)  # 巴特沃斯
w_c, h_c = signal.freqz(b_c, a_c, worN=1024, fs=Fs)  # 切比雪夫
```



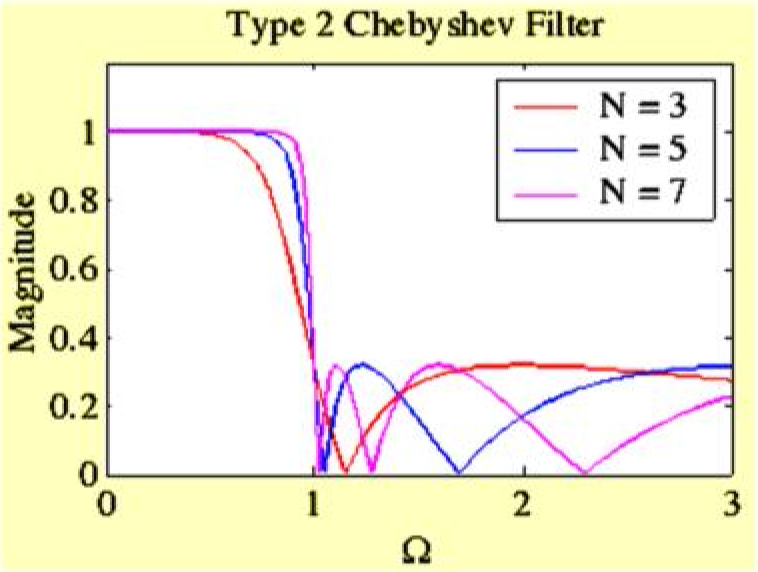
通带：巴特沃斯通带（0~1kHz）幅度几乎平坦（衰减≤1dB）；切比雪夫通带内有明显波纹（但波纹控制在 1dB 以内，符合指标）。

过渡带：巴特沃斯从 1kHz 到 1.5kHz 缓慢衰减到 – 40dB（过渡带宽≈500Hz）；切比雪夫过渡带更陡峭（约 1kHz 到 1.2kHz 就衰减到 – 40dB，过渡带宽≈200Hz）。

阻带：两者阻带衰减均≥40dB，满足指标。

(3)切贝雪夫(Chebyshev, CB)II型滤波器

$$|H_a(j\Omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^2\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$



N：滤波器的阶数

ε：表示阻带波纹大小，ε越大，波纹越大

Ω_c：阻带截止频率

通带内：单调特性
阻带内：等波纹起伏

CBII低通滤波器的设计步骤：

(1) 由阻带截止频率Ω_s， **3dB截止频率Ω_c**

$$\Omega_c = \Omega_s$$

(2) 由阻带衰减 α_p，确定ε

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_s} - 1}$$

(3) 由通带、阻带指标确定**N**

$$N = \frac{\mathrm{arch}\left[\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1}}\right]}{\mathrm{arch}(\Omega_s / \Omega_p)}$$

(4) 由前面三个参数求极点

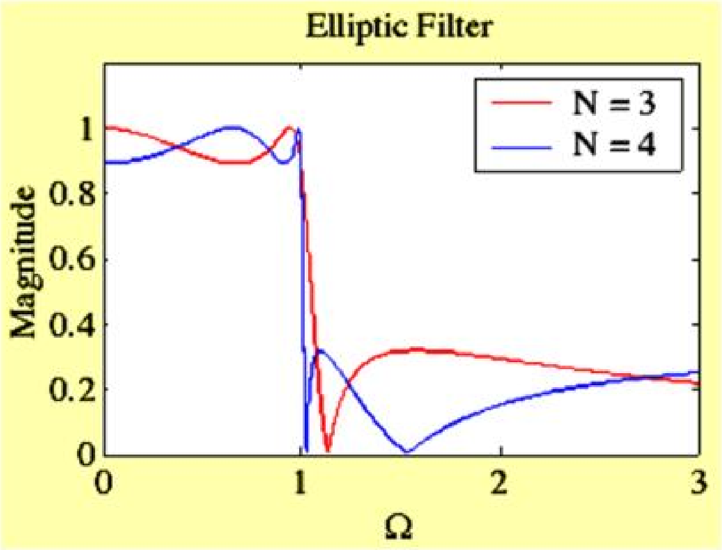
$$s_i = \sigma_i + j\Omega_i$$

(5) 由极点求系统函数

$$H_a(s) = G_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} = \frac{\Omega_p^N}{\varepsilon \cdot 2^{N-1}\prod_{i=1}^{N}(s - s_i)}$$

(4)椭圆(Elliptic)滤波器

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_n^2(\Omega)}$$



其中：

$$R_n(\Omega) = \begin{cases} \dfrac{\Omega(\Omega_1^2-\Omega^2)\cdots(\Omega_k^2-\Omega^2)}{(1-\Omega_1^2\Omega^2)\cdots(1-\Omega_k^2\Omega^2)} & k=\dfrac{n-1}{2} \\ \dfrac{(\Omega_1^2-\Omega^2)\cdots(\Omega_k^2-\Omega^2)}{(1-\Omega_1^2\Omega^2)\cdots(1-\Omega_k^2\Omega^2)} & k=\dfrac{n}{2} \end{cases}$$

（1）当 $\Omega<\Omega_c$ ，$|H_a(j\Omega)|^2$在1和 $1/1+\varepsilon^2$ 通带内等波纹起伏

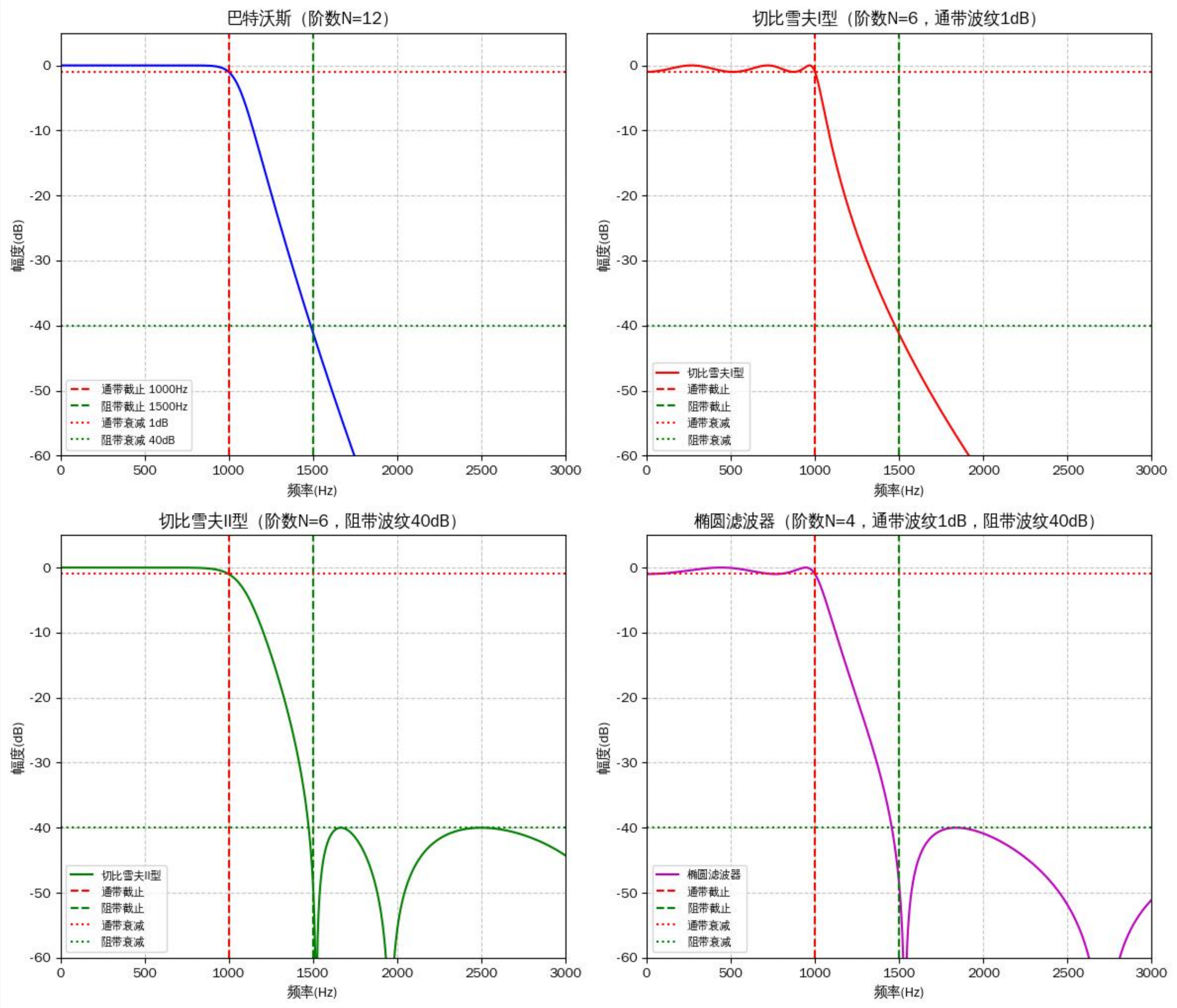
（2）当 $\Omega>\Omega_c$ ，$|H_a(j\Omega)|^2$在0和 $1/1+(\varepsilon/k_1)^2$阻带内等波纹起伏

（3）$|H_a(j\Omega)|^2$ 在 $\Omega=0$ 时：

- N 为奇数 $|H_a(j0)|^2=1$
- N 为偶数 $|H_a(j0)|^2=1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$

四种模板滤波器对比 代码实现

```python
# 1. 设定滤波器指标（与原图完全一致）
Fs = 10000  # 采样率10kHz
Fp = 1000   # 通带截止频率1kHz
Fs_stop = 1500  # 阻带截止频率1.5kHz
Ap = 1      # 通带最大衰减1dB
As = 40     # 阻带最小衰减40dB

# 归一化频率（转换为Nyquist频率的比例，Nyquist频率=Fs/2）
wp = Fp / (Fs/2)     # 通带归一化频率
ws = Fs_stop / (Fs/2)  # 阻带归一化频率

# 2. 设计四种滤波器
## 巴特沃斯
N_b, Wn_b = signal.buttord(wp, ws, Ap, As)
b_b, a_b = signal.butter(N_b, Wn_b, 'low')

## 切比雪夫I型（通带波纹）
N_c1, Wn_c1 = signal.cheb1ord(wp, ws, Ap, As)
b_c1, a_c1 = signal.cheby1(N_c1, Ap, Wn_c1, 'low')

## 切比雪夫II型（阻带波纹）
N_c2, Wn_c2 = signal.cheb2ord(wp, ws, Ap, As)  # 计算阶数
b_c2, a_c2 = signal.cheby2(N_c2, As, Wn_c2, 'low')  # 注意：切比雪夫II型参数是阻带衰减

## 椭圆滤波器（通带+阻带波纹）
N_e, Wn_e = signal.ellipord(wp, ws, Ap, As)
b_e, a_e = signal.ellip(N_e, Ap, As, Wn_e, 'low')

# 3. 计算幅频响应（频率范围0~Fs/2）
w_b, h_b = signal.freqz(b_b, a_b, worN=1024, fs=Fs)       # 巴特沃斯
w_c1, h_c1 = signal.freqz(b_c1, a_c1, worN=1024, fs=Fs)  # 切比雪夫I型
w_c2, h_c2 = signal.freqz(b_c2, a_c2, worN=1024, fs=Fs)  # 切比雪夫II型
w_e, h_e = signal.freqz(b_e, a_e, worN=1024, fs=Fs)       # 椭圆
```



通带：巴特沃斯、切比雪夫 II 型平坦；切比雪夫 I 型、椭圆有波纹（I 型通带波纹，椭圆通带 + 阻带都有波纹）。

过渡带：椭圆最陡峭（3 阶即可在 1~1.3kHz 完成衰减）→ 切比雪夫 I/II 型次之 → 巴特沃斯最平缓。

阻带：切比雪夫 II 型、椭圆有波纹（II 型阻带波纹，椭圆阻带也有波纹）；巴特沃斯、切比雪夫 I 型阻带单调衰减。

极致陡过渡带 + 允许双波纹 + 资源受限 → 椭圆滤波器。