习题解答

1.1 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3$$

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_x 5 - \boldsymbol{e}_z 2$$

求：(1) $\boldsymbol{e}_A$；(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(4) θ_{AB}；(5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量；(6) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；(7) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 和 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；(8) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

解 (1) $\boldsymbol{e}_A = \dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \dfrac{\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \boldsymbol{e}_x \dfrac{1}{\sqrt{14}} + \boldsymbol{e}_y \dfrac{2}{\sqrt{14}} - \boldsymbol{e}_z \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3) - (-\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z)|$

$= |\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 6 - \boldsymbol{e}_z 4| = \sqrt{53}$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3)\cdot(-\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z) = -11$

(4) 由 $\cos\theta_{AB} = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{14}\times\sqrt{17}} = -\dfrac{11}{\sqrt{238}}$，得

$$\theta_{AB} = \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{238}}\right) = 135.5^\circ$$

(5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量

$$A_B = |\boldsymbol{A}|\cos\theta_{AB} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}$$

(6) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_x 4 - \boldsymbol{e}_y 13 - \boldsymbol{e}_z 10$

(7) 由于 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x 8 + \boldsymbol{e}_y 5 + \boldsymbol{e}_z 20$

$$\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_x 10 - \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z 4$$

所以 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y2-\boldsymbol{e}_z3)\cdot(\boldsymbol{e}_x8+\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z20)=-42$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-\boldsymbol{e}_x10-\boldsymbol{e}_y1-\boldsymbol{e}_z4)\cdot(\boldsymbol{e}_x5-\boldsymbol{e}_z2)=-42$$

(8) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -10 & -1 & -4\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y40+\boldsymbol{e}_z5$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x55-\boldsymbol{e}_y44-\boldsymbol{e}_z11$$

1.2 三角形的三个顶点为 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$ 和 $P_3(6,2,5)$。

(1) 判断 $\triangle P_1P_2P_3$ 是否为一直角三角形;

(2) 求三角形的面积。

解 (1) 三个顶点 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$ 和 $P_3(6,2,5)$ 的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z2,\ \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_x4+\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z3,\ \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{e}_x6+\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z5$$

则 $\boldsymbol{R}_{12}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{R}_{23}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z8$

$$\boldsymbol{R}_{31}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z7$$

由此可见

$$\boldsymbol{R}_{12}\cdot\boldsymbol{R}_{23}=(\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_z)\cdot(\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z8)=0$$

故 $\triangle P_1P_2P_3$ 为一直角三角形。

(2) 三角形的面积

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{R}_{12}\times\boldsymbol{R}_{23}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{R}_{12}|\times|\boldsymbol{R}_{23}|=\frac{1}{2}\sqrt{17}\times\sqrt{69}=17.13$$

1.3 求 $P'(-3,1,4)$ 点到 $P(2,-2,3)$ 点的距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 的方向。

解 $\boldsymbol{r}_{P'}=-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z4,\quad \boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z3$

则 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{P'P}=\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_{P'}=\boldsymbol{e}_x5-\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z$

且 $\boldsymbol{R}_{P'P}$与 x、y、z 轴的夹角分别为

$$\phi_x=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)=32.31^\circ$$

$$\phi_y=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}\right)=120.47^\circ$$

$$\phi_z=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{35}}\right)=99.73^\circ$$

1.4 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z6$，求它们之间的夹角和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量。

解
$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}=\sqrt{29}$$
$$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{4^2+5^2+6^2}=\sqrt{77}$$
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4)\cdot(\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z6)=-31$$

故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为
$$\theta_{AB}=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|}\right)=\arccos\left(\frac{-31}{\sqrt{29}\times\sqrt{77}}\right)=131^\circ$$

$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量为
$$A_B=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{-31}{\sqrt{77}}=-3.532$$

1.5 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y4+\boldsymbol{e}_z$，求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 上的分量。

解
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 2 & 3 & -4\\ -6 & -4 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_x13+\boldsymbol{e}_y22+\boldsymbol{e}_z10$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-\boldsymbol{e}_x13+\boldsymbol{e}_y22+\boldsymbol{e}_z10)\cdot(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=-25$$
$$|\boldsymbol{C}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$$

所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上的分量为
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_C=\frac{(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|}=-\frac{25}{\sqrt{3}}=-14.43$$

1.6 证明：如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。

证 由 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，则有 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$，即
$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$

由于 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，于是得到
$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$

故
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

1.7 如果给定一个未知矢量与一个已知矢量的标量积和矢量积，那么便可以确定该未知矢量。设 $\boldsymbol{A}$ 为一已知矢量，$p=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ 而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，$p$ 和 $\boldsymbol{P}$ 已知，试求 $\boldsymbol{X}$。

解 由 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=p\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$$

故得
$$\boldsymbol{X}=\frac{p\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$

1.8 在圆柱坐标系中，一点的位置由 $\left(4,\frac{2\pi}{3},3\right)$ 定出，求该点在：(1) 直角坐标系中的坐标；(2) 球坐标系中的坐标。

解 (1) 在直角坐标系中

$$x=4\cos(2\pi/3)=-2,\ y=4\sin(2\pi/3)=2\sqrt{3},\ z=3$$

故该点的直角坐标为 $(-2,2\sqrt{3},3)$。

(2) 在球坐标系中

$$r=\sqrt{4^2+3^2}=5,\ \theta=\arctan(4/3)=53.1^\circ,\ \phi=2\pi/3\ \mathrm{rad}=120^\circ$$

故该点的球坐标为 $(5,53.1^\circ,120^\circ)$。

1.9 用球坐标表示的场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}$。

(1) 求在直角坐标系中 $(-3,4,-5)$ 点处的 $|\boldsymbol{E}|$ 和 E_x；

(2) 求在直角坐标系中 $(-3,4,-5)$ 点处 $\boldsymbol{E}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z$ 构成的夹角。

解 (1) 在直角坐标系中 $(-3,4,-5)$ 点处，$r=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$，故

$$|\boldsymbol{E}|=\left|\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}\right|=\frac{1}{2}$$

又在直角坐标系中 $(-3,4,-5)$ 点处，$\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y4-\boldsymbol{e}_z5$，所以

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}=\frac{25}{r^3}\boldsymbol{r}=\frac{-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y4-\boldsymbol{e}_z5}{10\sqrt{2}}$$

故

$$E_x=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{E}=\frac{-3}{10\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{20}$$

(2)
$$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$$

在直角坐标系中 $(-3,4,-5)$ 点处

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y4-\boldsymbol{e}_z5}{10\sqrt{2}}\cdot(\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z)=-\frac{19}{10\sqrt{2}}$$

故 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 构成的夹角为

$$\theta_{EB}=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{B}|}\right)=\arccos\left(-\frac{19/(10\sqrt{2})}{3/2}\right)=153.6^\circ$$

1.10 球坐标系中的两个点 (r_1,θ_1,ϕ_1) 和 (r_2,θ_2,ϕ_2) 定出两个位置矢量 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$。证明 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 间夹角的余弦为

$$\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)$$

证　由

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{e}_x r_1\sin\theta_1\cos\phi_1+\boldsymbol{e}_y r_1\sin\theta_1\sin\phi_1+\boldsymbol{e}_z r_1\cos\theta_1$$

$$\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{e}_x r_2\sin\theta_2\cos\phi_2+\boldsymbol{e}_y r_2\sin\theta_2\sin\phi_2+\boldsymbol{e}_z r_2\cos\theta_2$$

得到

$$\begin{aligned}\cos\gamma&=\frac{\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_2}{|\boldsymbol{R}_1|\,|\boldsymbol{R}_2|}\\&=\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2+\sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\\&=\sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\\&=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\end{aligned}$$

1.11 求标量函数 $\Psi=x^2yz$ 的梯度及 Ψ 在一个指定方向的方向导数，此方向由单位矢量 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\frac{3}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_y\frac{4}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_z\frac{5}{\sqrt{50}}$ 定出；求 $(2,3,1)$ 点的方向导数值。

解

$$\begin{aligned}\nabla\Psi&=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz)+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)\\&=\boldsymbol{e}_x 2xyz+\boldsymbol{e}_y x^2z+\boldsymbol{e}_z x^2y\end{aligned}$$

故沿方向 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\frac{3}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_y\frac{4}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_z\frac{5}{\sqrt{50}}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial\Psi}{\partial l}=\nabla\Psi\cdot\boldsymbol{e}_l=\frac{6xyz}{\sqrt{50}}+\frac{4x^2z}{\sqrt{50}}+\frac{5x^2y}{\sqrt{50}}$$

点 $(2,3,1)$ 处沿 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数值为

$$\frac{\partial\Psi}{\partial l}=\frac{36}{\sqrt{50}}+\frac{16}{\sqrt{50}}+\frac{60}{\sqrt{50}}=\frac{112}{\sqrt{50}}$$

1.12 已知标量函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y-6z$。(1) 求 ∇u；(2) 在哪些点上 ∇u 等于 0？

解 (1) $\nabla u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}=\boldsymbol{e}_x(2x+3)+\boldsymbol{e}_y(4y-2)+\boldsymbol{e}_z(6z-6)$

(2) 由 $\nabla u=\boldsymbol{e}_x(2x+3)+\boldsymbol{e}_y(4y-2)+\boldsymbol{e}_z(6z-6)=0$，得

$$x=-3/2,\ y=1/2,\ z=1$$

1.13 方程 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 给出一椭球族。求椭球表面上任意点的单位法

向矢量。

解　由于
$$\nabla u = e_x \frac{2x}{a^2} + e_y \frac{2y}{b^2} + e_z \frac{2z}{c^2}$$

$$|\nabla u| = 2\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$

故椭球表面上任意点的单位法向矢量为

$$e_n = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \left(e_x \frac{x}{a^2} + e_y \frac{y}{b^2} + e_z \frac{z}{c^2}\right) \Big/ \sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$

1.14　利用直角坐标系，证明

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$$

证　在直角坐标系中

$$\begin{aligned} u\nabla v + v\nabla u &= u\left(e_x \frac{\partial v}{\partial x} + e_y \frac{\partial v}{\partial y} + e_z \frac{\partial v}{\partial z}\right) + v\left(e_x \frac{\partial u}{\partial x} + e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_z \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &= e_x\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}\right) + e_y\left(u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) + e_z\left(u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &= e_x \frac{\partial(uv)}{\partial x} + e_y \frac{\partial(uv)}{\partial y} + e_z \frac{\partial(uv)}{\partial z} \\ &= \nabla(uv) \end{aligned}$$

1.15　一个球面 S 的半径为 5，球心在原点上，计算：$\oint_S (e_r 3\sin\theta) \cdot dS$ 的值。

解
$$\begin{aligned} \oint_S (e_r 3\sin\theta) \cdot dS &= \oint_S (e_r 3\sin\theta) \cdot e_r dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 3\sin\theta \times 5^2 \sin\theta d\theta d\phi = 75\pi^2 \end{aligned}$$

1.16　已知矢量 $E = e_x(x^2 + axz) + e_y(xy^2 + by) + e_z(z - z^2 + czx - 2xyz)$，试确定常数 a、b、c，使 E 为无源场。

解　由 $\nabla \cdot E = (2x + az) + (2xy + b) + (1 - 2z + cx - 2xy) = 0$，得

$$a = 2,\ b = -1,\ c = -2$$

1.17　在由 $\rho = 5$、$z = 0$ 和 $z = 4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $A = e_\rho \rho^2 + e_z 2z$ 验证散度定理。

证　在圆柱坐标系中

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \rho^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 3\rho + 2$$

所以 $$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^5(3\rho+2)\rho\mathrm{d}\rho=1\,200\pi$$

又 $$\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_{上}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_{下}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_{柱面}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^5\boldsymbol{A}\big|_{z=4}\cdot\boldsymbol{e}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi+\int_0^{2\pi}\int_0^5\boldsymbol{A}\big|_{z=0}\cdot(-\boldsymbol{e}_z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi+$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4\boldsymbol{A}\big|_{\rho=5}\cdot\boldsymbol{e}_\rho5\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^5 2\times4\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi+\int_0^{2\pi}\int_0^4 5^2\times5\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi=1\,200\pi$$

故有

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=1\,200\pi=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.18 （1）求矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x^2+\boldsymbol{e}_y x^2y^2+\boldsymbol{e}_z 24x^2y^2z^3$ 的散度；（2）求 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分；（3）求 $\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的积分，验证散度定理。

解 （1） $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\dfrac{\partial(x^2)}{\partial x}+\dfrac{\partial(x^2y^2)}{\partial y}+\dfrac{\partial(24x^2y^2z^3)}{\partial z}=2x+2x^2y+72x^2y^2z^2$

（2） $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分为

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(2x+2x^2y+72x^2y^2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{24}$$

（3） $\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的积分

$$\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}x^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}x^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z+$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}24x^2y^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}24x^2y^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{24}$$

故有 $$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V=\frac{1}{24}=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.19 计算矢量 $\boldsymbol{r}$ 对一个球心在原点、半径为 a 的球表面的积分，并求 $\nabla\cdot\boldsymbol{r}$ 对球体积的积分。

解
$$\oint_S \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{r}\cdot \boldsymbol{e}_r \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi} a a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$
$$= 4\pi a^3$$

又在球坐标系中，$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 r) = 3$，所以

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} 3r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$
$$= 4\pi a^3$$

1.20 在球坐标系中，已知矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r a + \boldsymbol{e}_\theta b + \boldsymbol{e}_\phi c$，其中 a、b 和 c 均为常数。(1) 问矢量 $\boldsymbol{A}$ 是否为常矢量？(2) 求 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{A}$。

解 (1)
$$A = |\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
即矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r a + \boldsymbol{e}_\theta b + \boldsymbol{e}_\phi c$ 的模为常数。

将矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r a + \boldsymbol{e}_\theta b + \boldsymbol{e}_\phi c$ 用直角坐标表示，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{e}_r a + \boldsymbol{e}_\theta b + \boldsymbol{e}_\phi c \\ &= \boldsymbol{e}_x(a\sin\theta\cos\phi + b\cos\theta\cos\phi - c\sin\phi) + \\ &\quad \boldsymbol{e}_y(a\sin\theta\sin\phi + b\cos\theta\sin\phi + c\cos\phi) + \boldsymbol{e}_z(a\cos\theta - b\sin\theta)\end{aligned}$$

由此可见，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向随 θ 和 ϕ 变化，故矢量 $\boldsymbol{A}$ 不是常矢量。

由上述结果可知，一个常矢量 $\boldsymbol{C}$ 在球坐标系中不能表示为 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_r a + \boldsymbol{e}_\theta b + \boldsymbol{e}_\phi c$。

(2) 在球坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta b) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial c}{\partial\phi} = \frac{2a}{r} + \frac{b\cos\theta}{r\sin\theta}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_r\frac{c\cos\theta}{r\sin\theta} - \boldsymbol{e}_\theta\frac{c}{r} + \boldsymbol{e}_\phi\frac{b}{r^2}$$

1.21 求矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y x^2 + \boldsymbol{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴相重合。再求 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 对此回路所包围的曲面积分，验证斯托克斯定理。

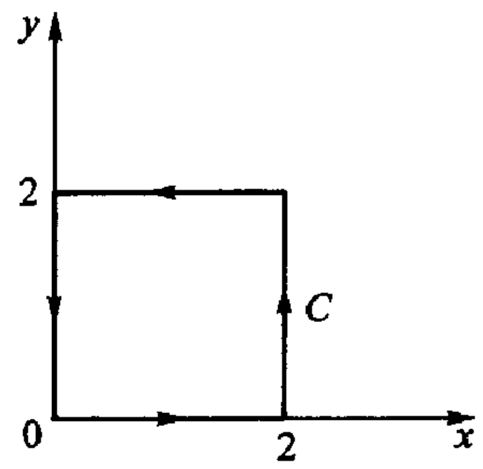
解 如图题 1.21 所示，可得

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^2 \boldsymbol{A}\big|_{y=0}\cdot\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x + \int_0^2 \boldsymbol{A}\big|_{x=2}\cdot\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y +$$

$$\int_0^2 \boldsymbol{A}\big|_{y=2}\cdot(-\boldsymbol{e}_x)\mathrm{d}x + \int_0^2 \boldsymbol{A}\big|_{x=0}\cdot(-\boldsymbol{e}_y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 x\mathrm{d}x + \int_0^2 2^2\mathrm{d}y - \int_0^2 x\mathrm{d}x - \int_0^2 0\mathrm{d}y$$

$$= 8$$



图题 1.21

又

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & x^2 & y^2 z \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x 2yz + \boldsymbol{e}_z 2x$$

所以

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_0^2\int_0^2(\boldsymbol{e}_x 2yz + \boldsymbol{e}_z 2x)\cdot\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2\int_0^2 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 8$$

故有

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = 8 = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

1.22 求矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y xy^2$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的线积分,再计算 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 对此圆面积的积分。

解
$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C x\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi}(-a^2\cos\phi\sin\phi + a^4\cos^2\phi\sin^2\phi)\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{\pi a^4}{4}$$

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cdot\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}S$$

$$= \int_S y^2\mathrm{d}S = \int_0^a\int_0^{2\pi}\rho^2\sin^2\phi\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\pi a^4}{4}$$

1.23 证明:(1) $\nabla\cdot\boldsymbol{R}=3$;(2) $\nabla\times\boldsymbol{R}=0$;(3) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{A}$。其中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z$,$\boldsymbol{A}$ 为一常矢量。

证 (1)
$$\nabla\cdot\boldsymbol{R} = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

(2) $$\nabla\times\boldsymbol{R}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_xA_x+\boldsymbol{e}_yA_y+\boldsymbol{e}_zA_z$, 则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=A_xx+A_yy+A_zz$,故

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R})=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(A_xx+A_yy+A_zz)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(A_xx+A_yy+A_zz)+$$

$$\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(A_xx+A_yy+A_zz)=\boldsymbol{e}_xA_x+\boldsymbol{e}_yA_y+\boldsymbol{e}_zA_z$$

1.24 一径向矢量场用 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{e}_rf(r)$ 表示,如果 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$, 那么函数 $f(r)$ 会有什么特点呢?

解 在圆柱坐标系中，由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho f(\rho)]=0$$

可得到

$$f(\rho)=\frac{C}{\rho}$$

C 为任意常数。

在球坐标系中，由

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[r^2f(r)]=0$$

可得到

$$f(r)=\frac{C}{r^2}$$

1.25 给定矢量函数 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_xy+\boldsymbol{e}_yx$,试求从点 $P_1(2,1,-1)$ 到点 $P_2(8,2,-1)$的线积分 $\int_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$:(1) 沿抛物线 $x=2y^2$;(2) 沿连接该两点的直线。这个 $\boldsymbol{E}$ 是保守场吗?

解 (1) $\int_C\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_C E_x\mathrm{d}x+E_y\mathrm{d}y=\int_C y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$

$$=\int_1^2 y\mathrm{d}(2y^2)+2y^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 6y^2\mathrm{d}y$$

$$=14$$

（2）连接点 $P_1(2,1,-1)$ 到点 $P_2(8,2,-1)$ 的直线方程为

$$\frac{x-2}{y-1}=\frac{x-8}{y-2}\quad \text{即}\quad x=6y-4$$

故

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_C E_x\mathrm{d}x+E_y\mathrm{d}y=\int_C y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

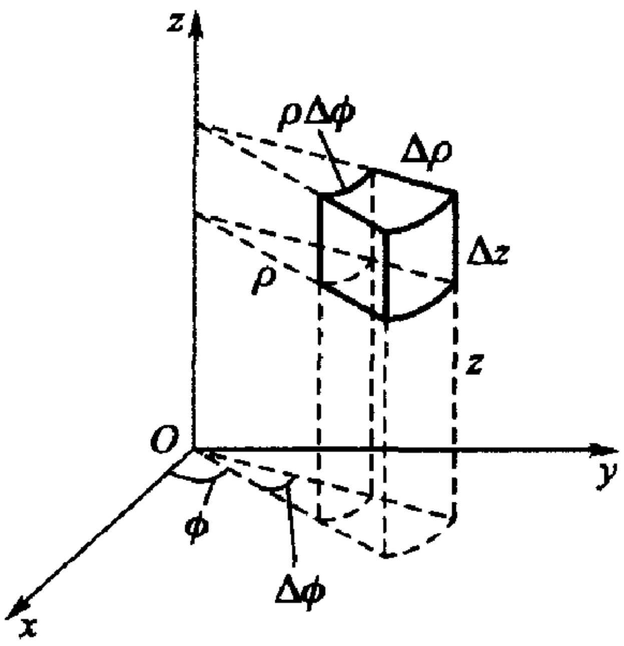
$$=\int_1^2 y\mathrm{d}(6y-4)+(6y-4)\mathrm{d}y=\int_1^2(12y-4)\mathrm{d}y$$

$$=14$$

由此可见积分与路径无关，故是保守场。

1.26 试采用与推导直角坐标系中 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$ 相似的方法推导圆柱坐标系中的公式 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho)+\frac{\partial A_\phi}{\rho\partial\phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$。

解 在圆柱坐标系中，取小体积元如图题 1.26 所示。矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿 $\boldsymbol{e}_\rho$ 方向穿出该六面体表面的通量为



图题 1.26

$$\Psi_\rho=\int_\phi^{\phi+\Delta\phi}\int_z^{z+\Delta z}A_\rho\big|_{\rho+\Delta\rho}(\rho+\Delta\rho)\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi$$

$$\int_\phi^{\phi+\Delta\phi}\int_z^{z+\Delta z}A_\rho\big|_\rho\rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi$$

$$\approx[(\rho+\Delta\rho)A_\rho(\rho+\Delta\rho,\phi,z)-\rho A_\rho(\rho,\phi,z)]\Delta\phi\Delta z$$

$$\approx\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}\Delta V$$

同理

$$\Psi_\phi=\int_\rho^{\rho+\Delta\rho}\int_z^{z+\Delta z}A_\phi\big|_{\phi+\Delta\phi}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z-\int_\rho^{\rho+\Delta\rho}\int_z^{z+\Delta z}A_\phi\big|_\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$$

$$\approx[A_\phi(\rho,\phi+\Delta\phi,z)-A_\phi(\rho,\phi,z)]\Delta\rho\Delta z$$

$$\approx\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

$$=\frac{\partial A_\phi}{\rho\partial\phi}\Delta V$$

$$\Psi_z = \int_\rho^{\rho+\Delta\rho}\int_\phi^{\phi+\Delta\phi} A_z\Big|_{z+\Delta z}\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi - \int_\rho^{\rho+\Delta\rho}\int_\phi^{\phi+\Delta\phi} A_z\Big|_{z}\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi$$

$$\approx [A_z(\rho,\phi,z+\Delta z) - A_z(\rho,\phi,z)]\rho\Delta\rho\Delta\phi$$

$$\approx \frac{\partial A_z}{\partial z}\rho\Delta\rho\Delta\phi\Delta z$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta V$$

因此，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿出该六面体表面的通量为

$$\Psi = \Psi_\rho + \Psi_\phi + \Psi_z \approx \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial A_\phi}{\rho\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right]\Delta V$$

故得到圆柱坐标系中的散度表达式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Psi}{\Delta V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial A_\phi}{\rho\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1.27 现有三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r\sin\theta\cos\phi + \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\cos\phi - \boldsymbol{e}_\phi\sin\phi$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_\rho z^2\sin\phi + \boldsymbol{e}_\phi z^2\cos\phi + \boldsymbol{e}_z 2\rho z\sin\phi$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_x(3y^2 - 2x) + \boldsymbol{e}_y x^2 + \boldsymbol{e}_z 2z$$

(1) 试问哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示？哪些矢量可以由一个矢量函数的旋度表示？

(2) 求出这些矢量的源分布。

解 (1) 在球坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta\cos\phi) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta\cos\phi) +$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(-\sin\phi)$$

$$= \frac{2}{r}\sin\theta\cos\phi + \frac{\cos\phi}{r\sin\theta} - \frac{2\sin\theta\cos\phi}{r} - \frac{\cos\phi}{r\sin\theta}$$

$$= 0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$=0$$

故矢量 $\boldsymbol{A}$ 既可以由一个标量函数的梯度表示，也可以由一个矢量函数的旋度表示。

在圆柱坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial B_\phi}{\partial\phi}+\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho z^2\sin\phi)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}(z^2\cos\phi)+\frac{\partial}{\partial z}(2\rho z\sin\phi)$$

$$=\frac{z^2\sin\phi}{\rho}-\frac{z^2\sin\phi}{\rho}+2\rho\sin\phi$$

$$=2\rho\sin\phi$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_\rho & \rho B_\phi & B_z \end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2\sin\phi & \rho z^2\cos\phi & 2\rho z\sin\phi \end{vmatrix}=0$$

故矢量 $\boldsymbol{B}$ 可以由一个标量函数的梯度表示。

在直角坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{C}=\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(3y^2-2x)+\frac{\partial}{\partial y}(x^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)$$

$$=0$$

$$\nabla\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2-2x & x^2 & 2z \end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_z(2x-6y)$$

故矢量 $\boldsymbol{C}$ 可以由一个矢量函数的旋度表示。

(2) 这些矢量的源分布为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{A}=0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 2\rho \sin\phi, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{C} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_z(2x - 6y)$$

1.28 利用直角坐标系，证明

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = f\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla f$$

证 在直角坐标系中

$$f\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla f = f\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \left(A_x\frac{\partial f}{\partial x} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \left(f\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(f\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(f\frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) = \nabla \cdot (f\boldsymbol{A})$$

1.29 证明

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}$$

证 根据∇算子的微分运算性质，有

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \nabla_A \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) + \nabla_H \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H})$$

式中，∇_A表示只对矢量$\boldsymbol{A}$做微分运算，∇_H表示只对矢量$\boldsymbol{H}$做微分运算。

由$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$，可得

$$\nabla_A \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla_A \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

同理

$$\nabla_H \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{A} \cdot (\nabla_H \times \boldsymbol{H}) = -\boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})$$

故有

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}$$

1.30 利用直角坐标系，证明

$$\nabla \times (f\boldsymbol{G}) = f\nabla \times \boldsymbol{G} + \nabla f \times \boldsymbol{G}$$

证 在直角坐标系中

$$f\nabla \times \boldsymbol{G} = f\left[\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$\nabla f \times \boldsymbol{G} = \left[\boldsymbol{e}_x\left(G_z\frac{\partial f}{\partial y} - G_y\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(G_x\frac{\partial f}{\partial z} - G_z\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(G_y\frac{\partial f}{\partial x} - G_x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]$$

所以

$$f\nabla \times \boldsymbol{G} + \nabla f \times \boldsymbol{G} = \boldsymbol{e}_x\left[\left(G_z\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial G_z}{\partial y}\right) - \left(G_y\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\right] +$$

$$\boldsymbol{e}_y\left[\left(G_x\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial G_x}{\partial z}\right) - \left(G_z\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)\right] +$$

$$
\boldsymbol{e}_z\left[\left(G_y\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial G_y}{\partial x}\right)-\left(G_x\frac{\partial f}{\partial y}+f\frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\right]
$$

$$
=\boldsymbol{e}_x\left[\frac{\partial(fG_z)}{\partial y}-\frac{\partial(fG_y)}{\partial z}\right]+\boldsymbol{e}_y\left[\frac{\partial(fG_x)}{\partial z}-\frac{\partial(fG_z)}{\partial x}\right]+
$$

$$
\boldsymbol{e}_z\left[\frac{\partial(fG_y)}{\partial x}-\frac{\partial(fG_x)}{\partial y}\right]
$$

$$
=\nabla\times(f\boldsymbol{G})
$$

1.31 利用散度定理及斯托克斯定理可以在更普遍的意义下证明 $\nabla\times(\nabla u)=0$ 及 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$，试证明之。

证 (1) 对于任意闭合曲线 C 为边界的任意曲面 S，由斯托克斯定理，有

$$
\int_S(\nabla\times\nabla u)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_C\frac{\partial u}{\partial l}\mathrm{d}l=\oint_C\mathrm{d}u=0
$$

由于曲面 S 是任意的，故有

$$
\nabla\times(\nabla u)=0
$$

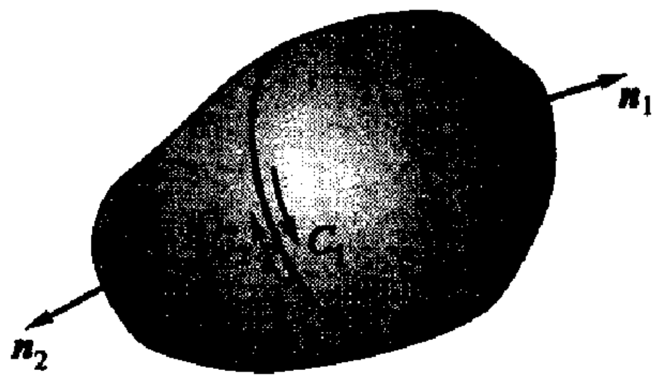
(2) 对于任意闭合曲面 S 为边界的体积 V，由散度定理，有

$$
\int_V\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S_1}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S_2}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}
$$

其中 S_1 和 S_2 如图题 1.31 所示。由斯托克斯定理，有

$$
\int_{S_1}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}
$$

$$
\int_{S_2}\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}
$$



图题 1.31

由图题 1.31 可知 C_1 和 C_2 是方向相反的同一回路，则有

$$
\oint_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\oint_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}
$$

所以得到

$$
\int_V\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}V=\oint_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}+\oint_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0
$$

由于体积 V 是任意的，故有

$$
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0
$$