5-3 已知$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)=\dfrac{s}{(s+4)^2}$，$\mathrm{Re}[s]>-4$，利用拉普拉斯变换的性质求下列各式的拉普拉斯变换

（3） $f_3(t)=f(2t-2)$　　（4） $f_4(t)=\mathrm{e}^{-t}\cdot f(t)$　　（5） $f_5(t)=f'(t)$

（8） $f_8(t)=\mathrm{e}^{-t}\cdot f(2t-2)$

解：（3）方法一（先进行尺度变换，再进行时移处理）：由于 $f(2t)\leftrightarrow\dfrac{1}{2}F\left(\dfrac{s}{2}\right)$，故

$$f_3(t)=f(2t-2)=f\left[2(t-1)\right]\leftrightarrow\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{-s}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}+4\right)^2}\cdot\mathrm{e}^{-s}$$

方法二（先进行时移处理，再进行尺度变换）：由于 $f(t-2)\leftrightarrow F(s)\cdot\mathrm{e}^{-2s}$，故由尺度变换公式（只将自变量$t$变为$2t$）得：

$$f_3(t)=f(2t-2)\leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\left[F(s)\cdot\mathrm{e}^{-2s}\right]\Big|_{s=\frac{s}{2}}=\frac{1}{2}F\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{-s}$$

（4）根据复频移特性可得：

$$f_4(t)=\mathrm{e}^{-t}\cdot f(t)\leftrightarrow F(s)\big|_{s=s+1}=\frac{s}{(s+4)^2}\Bigg|_{s=s+1}=\frac{s+1}{(s+5)^2}$$

（5）由时域微分特性可得：$f_5(t)=f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f\left(0^-\right)$，由于其收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-4$，故 $f(t)$为因果信号，$f(0^-)=0$。所以

$$f_5(t)=f'(t)\leftrightarrow sF(s)=\frac{s^2}{(s+4)^2}$$

（8）由前面计算可知 $f(2t-2)\leftrightarrow\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}+4\right)^2}\cdot\mathrm{e}^{-s}$，根据复频移性质可得：

$$f_8(t)=\mathrm{e}^{-t}\cdot f(2t-2)\leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{s}{2}}{\left(\frac{s}{2}+4\right)^2}\cdot\mathrm{e}^{-s}\Bigg|_{s=s+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{s+1}{2}}{\left(\frac{s+1}{2}+4\right)^2}\cdot\mathrm{e}^{-(s+1)}$$

5-4 已知 $f(t)$ 为因果信号，且 $f(t) \leftrightarrow F(s)$，求下列信号的拉普拉斯变换：

(1) $\mathrm{e}^{-2t} f(3t)$ (2) $t \cdot f(3t-1)$

解：（1）根据尺度变换特性可得：$f(3t) \leftrightarrow \dfrac{1}{3}F\left(\dfrac{s}{3}\right)$，根据频移特性得：

$$\mathrm{e}^{-2t} \cdot f(3t) \leftrightarrow \frac{1}{3}F\left(\frac{s+2}{3}\right)$$

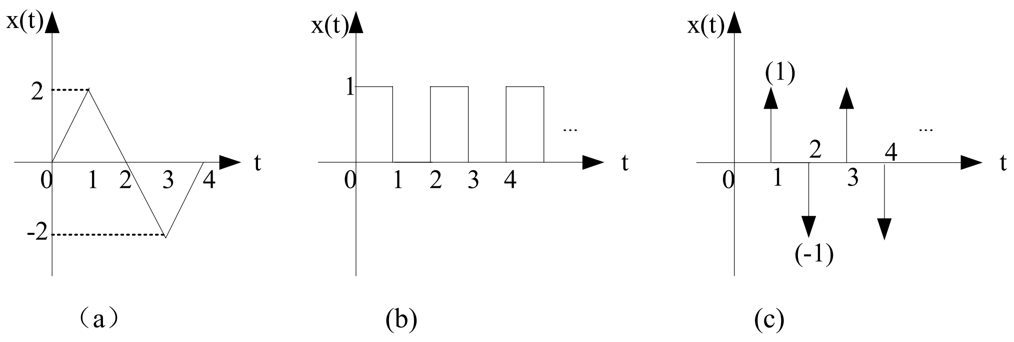
（2）由于 $tf(3t-1) = t \cdot f\left[3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)\right]$，故由尺度变时及移换特性可得：

$$f\left(3t\right) \leftrightarrow \frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right),\quad f\left[3\left(t-\frac{1}{3}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}s}$$

再由复频域微分特性得

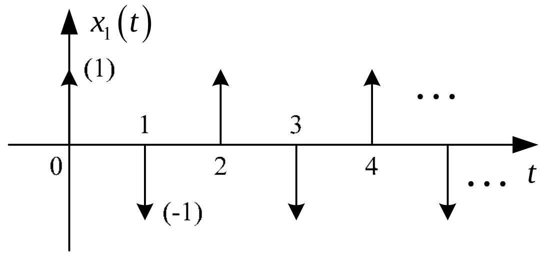
$$\begin{aligned} t \cdot f\left[3\left(t-\frac{1}{3}\right)\right] &\leftrightarrow -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}s}\right] \\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[F\left(\frac{s}{3}\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}s} - \frac{1}{3}\cdot F\left(\frac{s}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}s} \\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[F\left(\frac{s}{3}\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}s} + \frac{1}{9}\cdot F\left(\frac{s}{3}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}s} \end{aligned}$$

5-5 利用 $\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$ 和时域微分，积分性质，以及时移性质求题图 5-6 所示信号的单边拉普拉斯变换。



题图 5-6

解：设 $x_1\left(t\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\left(t\right)$，则 $x_1\left(t\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left\{\delta\left(t-2n\right) - \delta\left[t-\left(2n+1\right)\right]\right\}$（周期 $T=2$），其图形如下图所示



其第一周期的表达式为 $x_a(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$。由于 $\mathscr{L}[\delta(t)]=1$，故 $x_a(t)\leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-s}$。

根据因果周期信号的拉式变换公式得：$x_1(t)\leftrightarrow\dfrac{1-\mathrm{e}^{-s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}$。再根据单边拉式变换的时域积分特性得：

$$x(t)=\int_{0^-}^{t}x_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\frac{X_1(s)}{s}=\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-2s}\right)}$$

5-6 已知某信号的拉普拉斯变换为：

$$F(s)=\frac{4}{s(s+2)^2}$$

（1）利用初值定理求 $f(0^+)$；（2）利用终值定理求 $f(\infty)$。

解：（1）$f(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)=\lim\limits_{s\to\infty}s\cdot\dfrac{4}{s(s+2)^2}=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{4}{(s+2)^2}=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{4s^{-2}}{1+4s^{-1}+4s^{-2}}=0$

（2）方法一：$F(s)=\dfrac{4}{s(s+2)^2}=\dfrac{K_{11}}{(s+2)^2}+\dfrac{K_{12}}{(s+2)}+\dfrac{K_2}{s}$

其中，$K_{11}=(s+2)^2\cdot\dfrac{4}{s(s+2)^2}\bigg|_{s=-2}=\dfrac{4}{s}\bigg|_{s=-2}=-2$

$$K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+2)^2\cdot\frac{4}{s(s+2)^2}\right]\bigg|_{s=-2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{4}{s}\right]\bigg|_{s=-2}=\frac{-4}{s^2}\bigg|_{s=-2}=-1$$

$$K_2=s\cdot\frac{4}{s(s+2)^2}\bigg|_{s=0}=\frac{4}{(s+2)^2}\bigg|_{s=0}=1$$

故 $F(s)=\dfrac{-2}{(s+2)^2}+\dfrac{-1}{(s+2)}+\dfrac{1}{s}$，求其拉式逆变换得：

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[F(s)\right]=\left[-2t\cdot\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-2t}+1\right]\mathrm{u}(t)$$

故 $f(\infty)=1$。

方法二：由于 $sF(s)=\dfrac{4}{(s+2)^2}$，其收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-2$，包含 $\mathrm{j}\omega$ 轴，故由终值定理

得：
$$f(+\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{4}{(s+2)^2}=1$$

5-8 计算下列函数的单边拉普拉斯逆变换：

（1）$F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+7s+12}$　　（2）$F(s)=\dfrac{2}{(s+1)^2}$

（3）$F(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s^2+1}$

解：（1）$F(s)=\dfrac{2s+5}{s^2+7s+12}=\dfrac{3}{s+4}+\dfrac{-1}{s+3}$，$\mathrm{Re}[s]>-3$。根据常用信号拉式变换对可得：

$$F(s)=\frac{3}{s+4}+\frac{-1}{s+3}\leftrightarrow f(t)=3\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{u}(t)-\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)$$

（2）利用部分分式可得 $F(s)=\dfrac{2}{(s+1)^2}=\dfrac{K_{11}}{(s+1)^2}+\dfrac{K_{12}}{s+1}$，其中

$$K_{11}=(s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1}=2$$

$$K_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+1)^2F(s)\right]\Big|_{s=-1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[2]\Big|_{s=-1}=0$$

故 $F(s)=\dfrac{2}{(s+1)^2}\leftrightarrow 2t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)$。

该题也可使用性质进行求解：由于 $\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+1}$，由复频域微分性质可得

$$t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)\leftrightarrow-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s+1}\right)=-\frac{-1}{(s+1)^2}=\frac{1}{(s+1)^2}$$

故 $F(s)=\dfrac{2}{(s+1)^2}\leftrightarrow 2t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)$

（3）$F(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s^2+1}=1+\dfrac{s}{s^2+1}$，由 $\cos(\omega_0 t)\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ 可得：

$$F(s)=1+\frac{s}{s^2+1}\leftrightarrow \delta(t)+\cos(t)\mathrm{u}(t)$$

5-10 求下列拉普拉斯变换的逆变换。

（1）$F(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-0.5s}}{s}$　　（3）$F(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-0.5s}}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}$

解：（1）由于 $F_1(s)=1-\mathrm{e}^{-0.5s}\leftrightarrow f_1(t)=\delta(t)-\delta(t-0.5)$（利用常用信号的变换对及时移特性），且 $f_1(0^-)=0$，故利用时域积分特性可得：

$$F(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-0.5s}}{s}\leftrightarrow f(t)=\int_{0^-}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau=\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-0.5)$$

另一种解法：$F(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-0.5s}}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\cdot\mathrm{e}^{-0.5s}\leftrightarrow f(t)=\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-0.5)$

（2）$F(s)=\frac{1-\mathrm{e}^{-0.5s}}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-0.5s}}{1-\mathrm{e}^{-2s}}$，设

$$F_1(s)=1-\mathrm{e}^{-0.5s}\leftrightarrow f_1(t)=\delta(t)-\delta(t-0.5)$$

再设 $F_2(s)=\frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-2s}}$，根据周期因果信号的拉式变换公式得：

$$F_2(s)=\frac{F_1(s)}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\leftrightarrow f_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\delta(t-2n)-\delta(t-2n-0.5)\right]$$

利用时域积分特性可得：

$$F(s)=\frac{F_2(s)}{s}\leftrightarrow f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathrm{u}(t-2n)-\mathrm{u}(t-2n-0.5)\right]$$

其图形如下图所示：