5-1 求下列信号的双边拉普拉斯变换，并注明其收敛域。

(1) $\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{u}(-t)$　　(2) $\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)+\mathrm{e}^{2t}\mathrm{u}(-t)$　　(3) $\mathrm{e}^{-|t|}$

解：（1）$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{u}(-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{-(s+2)}\mathrm{e}^{-(s+2)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

由于 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，则

$$\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{-s}\left(1-\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{-st}\right)=\frac{1}{-s}\left(1-\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\right)=\frac{1}{-s}\left[1-\lim_{t\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-\sigma t}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)\right]$$

只有当 $\sigma<0$，时 $\lim_{t\to-\infty}\mathrm{e}^{-\sigma t}\to 0$，故 $\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{-\infty}^{0}$ 的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]<0$，$\frac{1}{-s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{s}$；

同理可得 $\frac{1}{-(s+2)}\mathrm{e}^{-(s+2)t}\Big|_{-\infty}^{0}$ 的收敛域为 $\mathrm{Re}[s]<-2$，$\frac{1}{-(s+2)}\mathrm{e}^{-(s+2)t}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{s+2}$。

其收敛域的公共部分为 $\mathrm{Re}[s]<-2$，可得 $\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{u}(-t)$ 的双边拉普拉斯变换为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{u}(-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2},\quad \mathrm{Re}[s]<-2$$

（2）$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)+\mathrm{e}^{2t}\mathrm{u}(-t)\right]\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{-(s+1)}\mathrm{e}^{-(s+1)t}\Big|_{0}^{\infty}+\frac{1}{-(s-2)}\mathrm{e}^{-(s-2)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

由于 $\frac{1}{-(s+1)}\mathrm{e}^{-(s+1)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{1}{s+1}$，$\mathrm{Re}[s]>-1$；$\frac{1}{-(s-2)}\mathrm{e}^{-(s-2)t}\Big|_{-\infty}^{0}=-\frac{1}{s-2}$，$\mathrm{Re}[s]<2$，

其收敛域的公共部分为 $-1<\mathrm{Re}[s]<2$，在此收敛域内可得 $\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)+\mathrm{e}^{2t}\mathrm{u}(-t)$ 的双边拉普拉斯变换为：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)+\mathrm{e}^{2t}\mathrm{u}(-t)\right]\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-2},\quad -1<\mathrm{Re}[s]<2$$

（3）$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|t|}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

其中 $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s-1}$，$\mathrm{Re}[s]<1$；$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s+1}$，$\mathrm{Re}[s]>-1$，故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-|t|}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1},\quad -1<\mathrm{Re}[s]<1$$

5-2 求下列函数的单边拉普拉斯变换：

（1）$f(t)=1-\mathrm{e}^{-\alpha t}$　　（2）$f(t)=\sin t+2\cos t$　　（4）$f(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$

（8） $f(t)=2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-7t}$ （10） $f(t)=\cos^2(\Omega t)$

解：（1） $F(s)=\int_{0^-}^{\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t-\int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}$，其收敛域为：当 $\alpha>0$ 时，$\mathrm{Re}[s]>0$；当 $\alpha<0$ 时，$\mathrm{Re}[s]>-\alpha$

（2）根据欧拉公式得 $f(t)=\sin t+2\cos t=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\right)+\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\right)$。其中

$$\frac{1}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\leftrightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{s-\mathrm{j}},\quad \mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[\mathrm{j}]=0$$

同理可得：$\frac{-1}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\leftrightarrow\frac{-1}{2\mathrm{j}}\cdot\frac{1}{s+\mathrm{j}}$，$\mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[-\mathrm{j}]=0$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\leftrightarrow\frac{1}{s-\mathrm{j}},\quad \mathrm{Re}[s]>0;\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\leftrightarrow\frac{1}{s+\mathrm{j}},\quad \mathrm{Re}[s]>0$$

故：

$$f(t)=\sin t+2\cos t\leftrightarrow\frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}}-\frac{1}{s+\mathrm{j}}\right)+\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}}+\frac{1}{s+\mathrm{j}}\right)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{2s}{s^2+1},\quad \mathrm{Re}[s]>0$$

（4）根据欧拉公式得 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{(2\mathrm{j}-1)t}-\mathrm{e}^{-(2\mathrm{j}+1)t}\right)$。其中

$$\mathrm{e}^{(2\mathrm{j}-1)t}\leftrightarrow\frac{1}{s-(2\mathrm{j}-1)},\quad \mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[2\mathrm{j}-1]=1$$

$$\mathrm{e}^{-(2\mathrm{j}+1)t}\leftrightarrow\frac{1}{s+(2\mathrm{j}+1)},\quad \mathrm{Re}[s]>\mathrm{Re}[-2\mathrm{j}-1]=1$$

故

$$f(t)=\mathrm{e}^{-t}\sin(2t)\leftrightarrow\frac{1}{2\mathrm{j}}\cdot\left[\frac{1}{s-(2\mathrm{j}-1)}-\frac{1}{s+(2\mathrm{j}+1)}\right]=\frac{2}{(s+1)^2+4},\quad \mathrm{Re}[s]>1$$

（8）由定义可得：

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_{0^-}^{\infty}\left[2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-7t}\right]\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0^-}^{\infty}2\delta(t)\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t-\int_{0^-}^{\infty}3\mathrm{e}^{-7t}\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

$=2-\frac{3}{s+7}$（注意：积分下限为 0^-，$\delta(t)$ 函数在积分区间内）

$\mathrm{Re}[s]>-7$

（10）由 $2\cos^2 x=1+\cos(2x)$ 得：$f(t)=\cos^2(\Omega t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos(2\Omega t)\right]$，由欧拉公

式可得： $f(t)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2\Omega t\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega t}}{2}\right)$，其中

$$\int_{0^-}^{\infty}1\cdot\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s}，\ \mathrm{Re}\left[s\right]>0$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega t}\leftrightarrow\frac{1}{s-\mathrm{j}2\Omega}，\ \mathrm{Re}\left[s\right]>\mathrm{Re}\left[\mathrm{j}2\Omega\right]=0$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega t}\leftrightarrow\frac{1}{s+\mathrm{j}2\Omega}，\ \mathrm{Re}\left[s\right]>\mathrm{Re}\left[-\mathrm{j}2\Omega\right]=0$$

故

$$f(t)=1+\cos\left(2\Omega t\right)\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{j}2\Omega}+\frac{1}{s+\mathrm{j}2\Omega}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+\left(2\Omega\right)^2}\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[s\right]>0$$