



第三章

离散傅里叶变换(DFT)

Discrete Fourier Transform



本章主要内容

- 有限长序列傅里叶分析
- 离散傅里叶变换的定义
- 离散傅里叶变换的基本性质
- 频率域采样
- DFT的应用举例



序：有限长序列傅里叶分析



有限长序列傅里叶分析

傅里叶变换从理论上解决了如何从时域映射到频域

连续非周期信号

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$x(t)$ 函数难以获取

连续周期信号

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

离散非周期信号

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

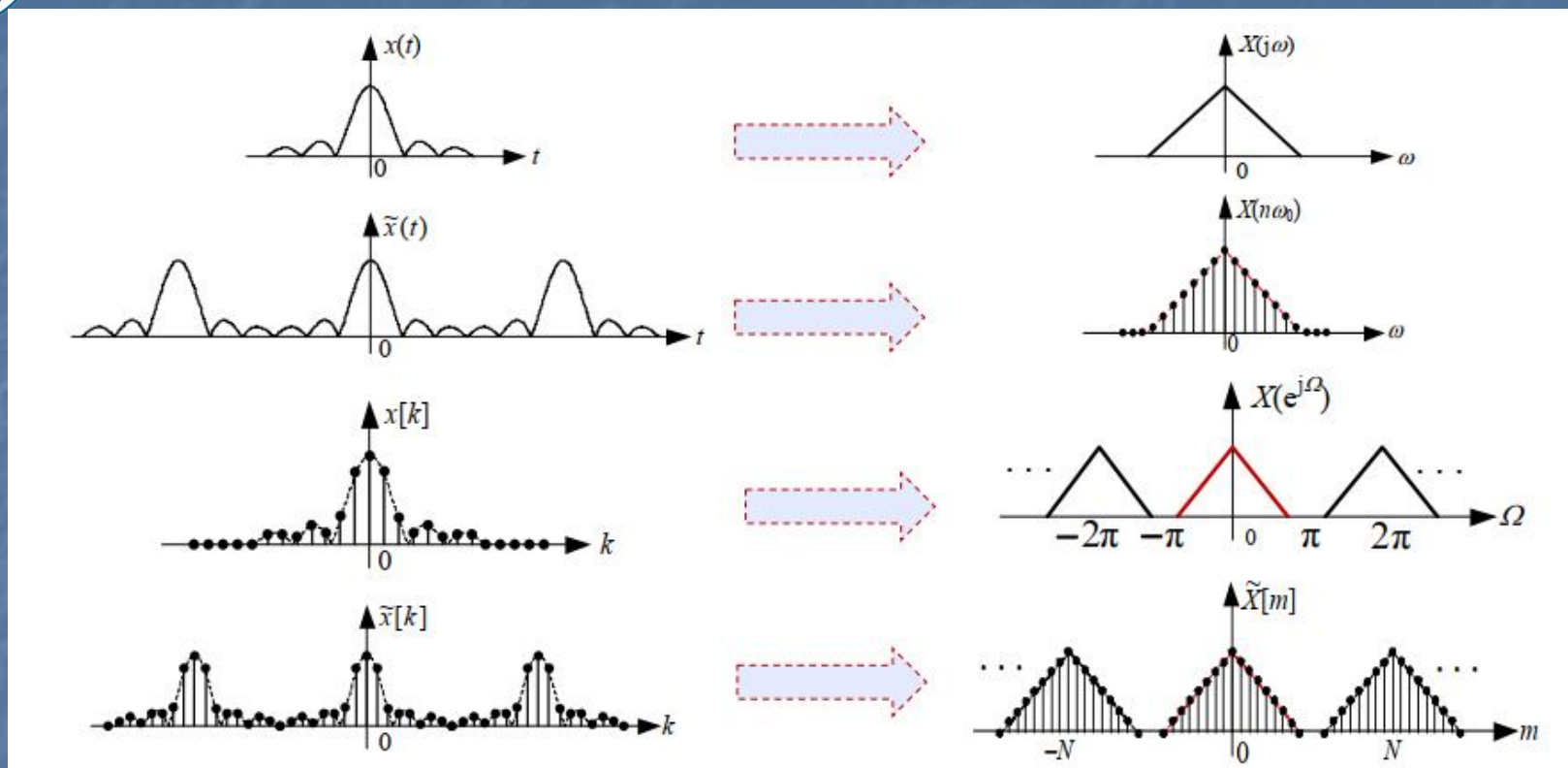
频谱为 ω 连续函数，没有数字化

离散周期信号

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$



有限长序列傅里叶分析



时域离散 \longleftrightarrow 频域周期化

时域周期化 \longleftrightarrow 频域离散

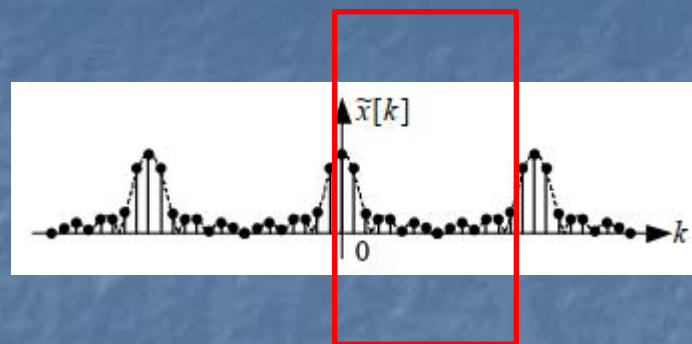
DFS 的工程痛点：计算机无法处理“无限长的周期序列”——它只能存储和计算“有限长序列”。



有限长序列傅里叶分析

DFS:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$



$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$\tilde{X}(k)$$

$$X(k)$$

主值序列的变换

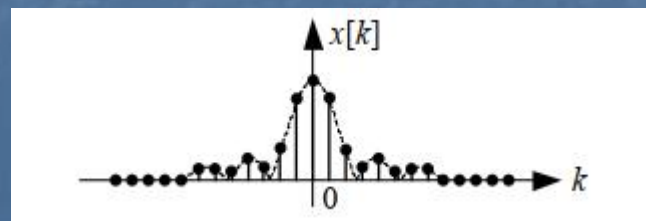
$$0 \leq k \leq N-1$$

DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$0 \leq k \leq N-1$$

一句话总结：DFS 与 N 点 DFT 是“包含与截取”关系。





3.1 离散傅里叶变换的定义



3.1.1 DFT定义（有限长序列傅里叶分析）

对长度为M的 $x(n)$,其N点DFT为:

正变换:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (3.1.1)$$

反变换:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad (3.1.2)$$

其中

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$



唯一性证明

$$\begin{aligned}\text{IDFT}[X(k)] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk} \right] W_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)}\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1, & m = n + MN \\ 0, & m \neq n + MN \end{cases}$$

所以

$$\text{IDFT}[X(k)] = x(n)$$



DFT 定义背后的“工程考量”

1. “有限长”设计：适配计算机的存储和计算能力

计算机的内存是有限的，无法存储无限长的周期序列，而 DFT 只处理长度为 N 的主值序列，存储量和计算量都可控，计算量为 N^2 ，FFT 优化到 $N \log N$ 。

2. “周期隐含”设计：保留 DFS 的频域特性

DFT 虽然只取一个周期，但它隐含了“时域和频域都是周期的”这一特性。

3. “旋转因子复用”：降低算法复杂度

如 FFT 算法通过复用旋转因子。



例 求 $x(n)=R_4(n)$ 的4点和8点DFT

解： 设变换区间 $N=4$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^3 x(n) W_4^{kn} = \sum_{n=0}^3 1 e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{2}k}} = \begin{cases} 4, k=0 \\ 0, k=1, 2, 3 \end{cases} \end{aligned}$$

设变换区间 $N=8$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^7 x(n) W_4^{kn} = \sum_{n=0}^3 1 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} \\ &= \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{2}k}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{8}k}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)} e^{-j\frac{3\pi}{8}k}, k=0, 1, \dots, 7 \end{aligned}$$



3.1.2 DFT、傅里叶变换、Z变换的相互关系

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega}) = FT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

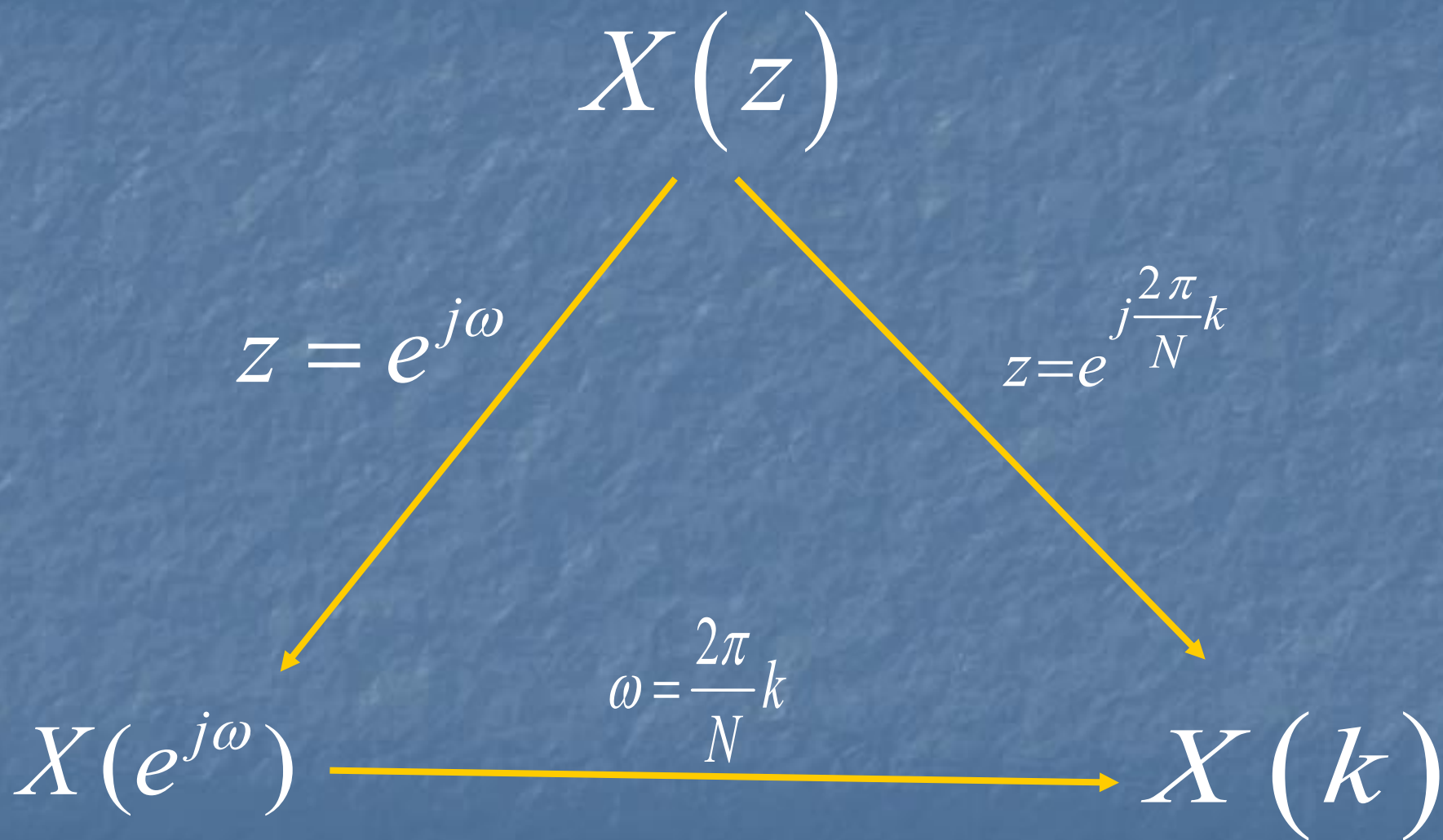
$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

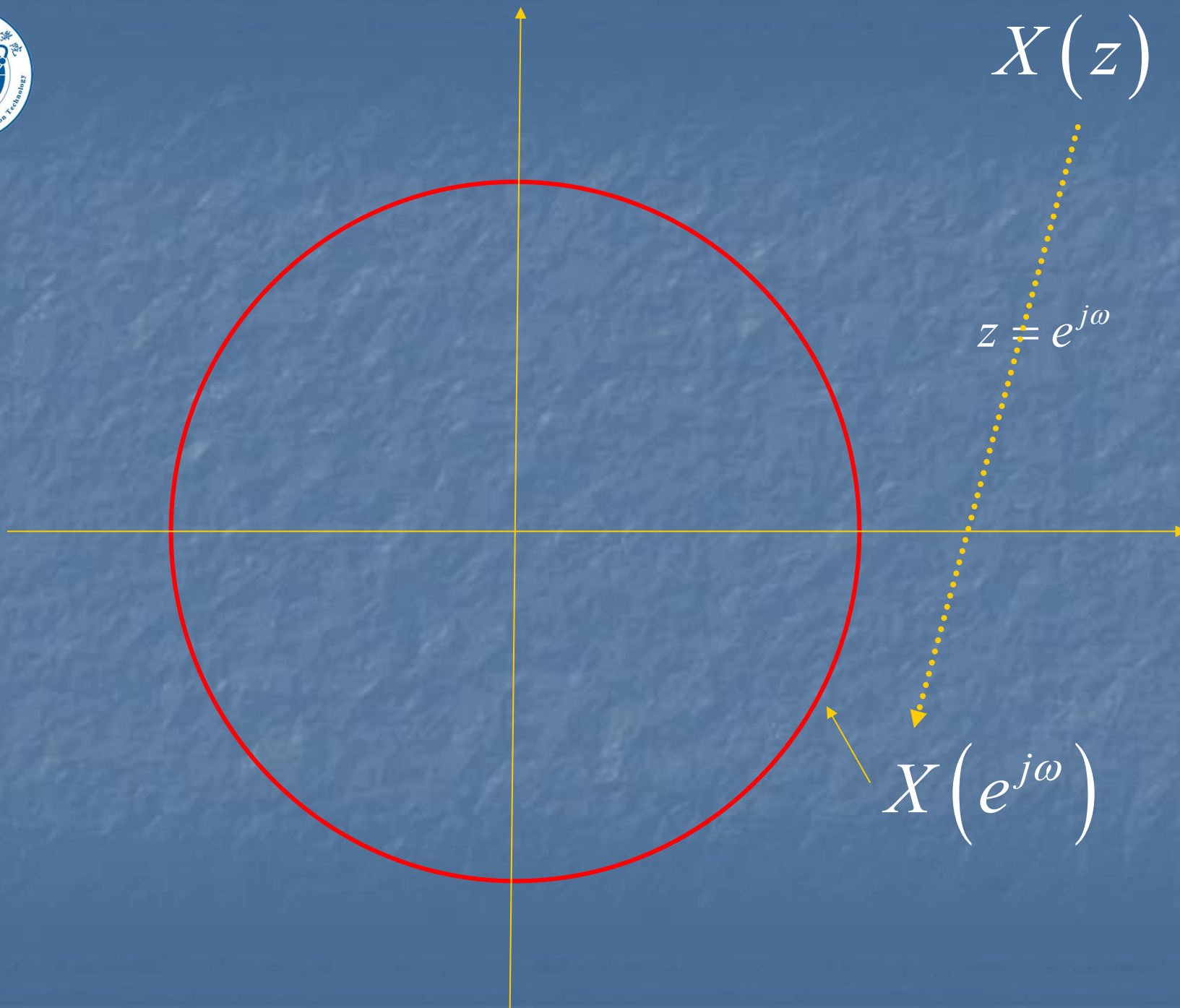
$$\omega = \frac{2\pi}{N}k$$

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$



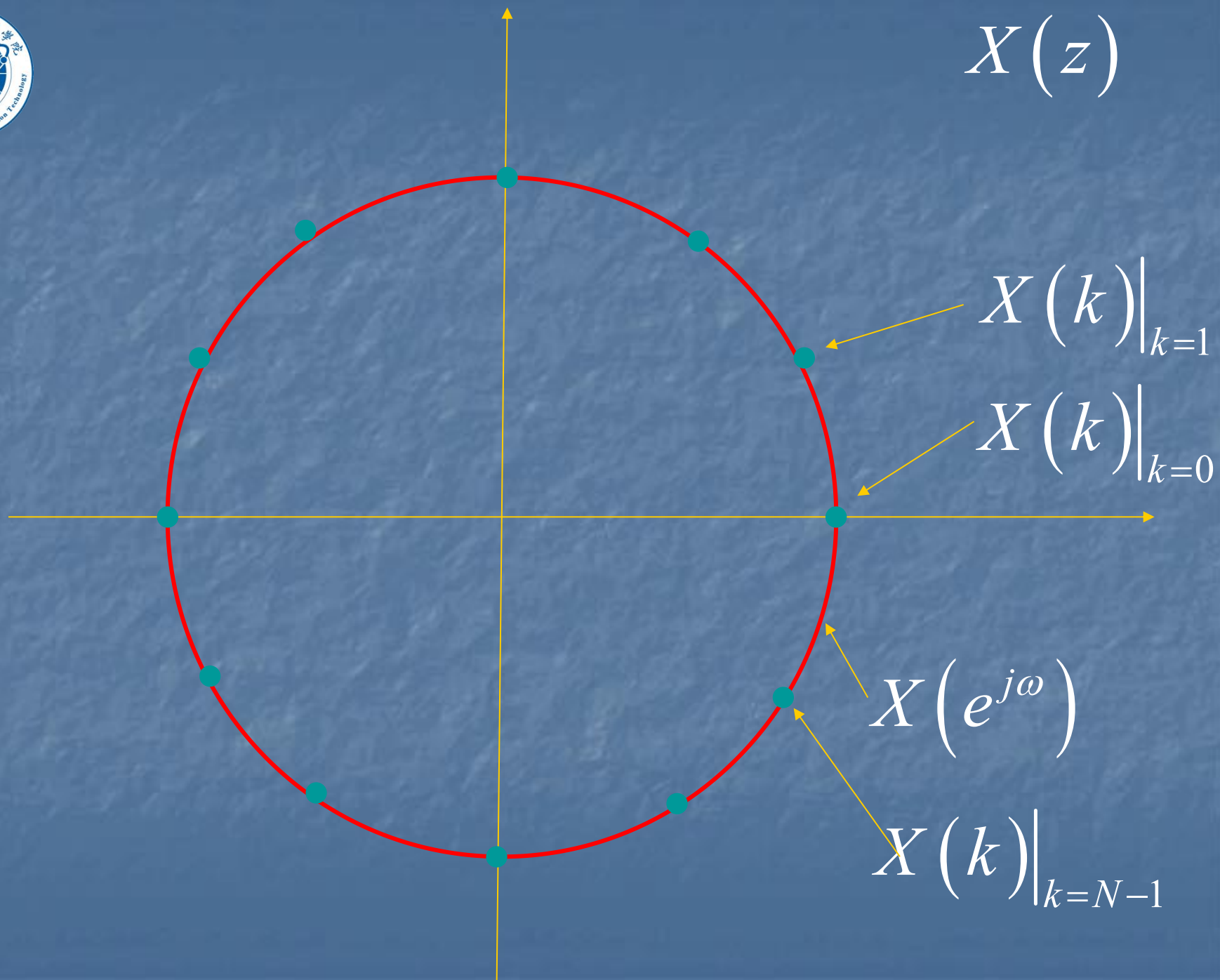
3.1.2 DFT、傅里叶变换、Z变换的相互关系





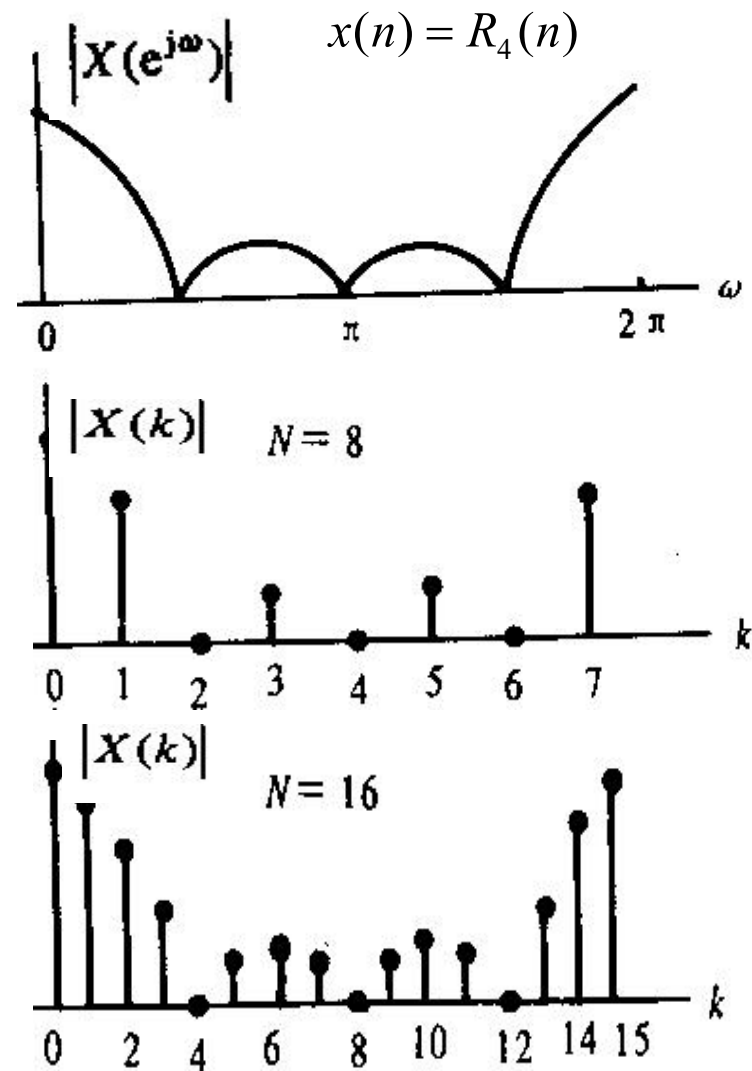


$$X(z)$$



DFT的物理意义:

- (1) $x(n)$ 的 N 点 DFT 是 $x(n)$ 的 Z 变换在单位圆上 N 点等间隔采样。
- (2) $X(k)$ 是 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 N 点等间隔采样, 采样间隔为 $2\pi/N$ 。
- (3) 变换区间长度 N 不同, 变换结果不同, N 确定后, $X(k)$ 与 $x(n)$ 是一一对应的。
- (4) 当 N 足够大时, $|X(k)|$ 的包络可逼近 $|X(e^{j\omega})|$ 曲线;
- (5) $|X(k)|$ 表示 $\omega_k = 2\pi k/N$ 频点的幅度谱线。





3.1.3 DFT的隐含周期性

本质是对 DFS 周期性的“继承与隐含”

(1) DFT的周期性

由于 W_N^k 的周期性, $X(k)$ 隐含周期性, 且周期均为 N 。

对于任意整数 m , 总有:

$$W_N^k = W_N^{(k+mN)} = W_N^k \cdot W_N^{mN}$$

$$W_N^{mN} = e^{-j\frac{2\pi}{N}mN} = 1$$



$X(k)$ 满足

$$\begin{aligned} X(k + mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k) \end{aligned}$$



(2) 有限长序列 $x(n)$ 和周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的关系

先决条件：周期为 N 的周期序列可以看做长度为 N 的有限长序列的周期延拓

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN) = x((n))_N$$

周期序列 $\tilde{x}(n)$ 是有限长序列 $x(n)$ 的周期延拓。

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

有限长序列 $x(n)$ 是周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列。



其中： $((n))_N$ 表示 n 对 N 求余

如果 $n = MN + n_1, 0 \leq n_1 \leq N - 1$

则 $((n))_N = n_1$

例如 $N=6$, $\tilde{x}(n) = x((n))_6$, 则有

$$\tilde{x}(9) = x((n))_6 = x((1 \times 6 + 3))_6 = x(3)$$

$$\tilde{x}(12) = x((n))_6 = x((2 \times 6 + 0))_6 = x(0)$$



(3) DFS与DFT之间的关系

如果 $x(n)$ 的长度为 M , 且 $\tilde{x}(n) = x((n))_N$, $N \geq M$, 则可写出 $\tilde{x}(n)$ 的DFS表示式:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$X(k)$ 为 $\tilde{X}(k)$ 的主值序列



例 已知 $x(n)=\{1, 1, 2, 1\}$, 试计算 $x(n)$ 的4点DFT。

解:
$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j2\pi kn/4}, k = 0, 1, 2, 3$$

$$X(0) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 5$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n} = 1 - j - 2 + j = -1$$

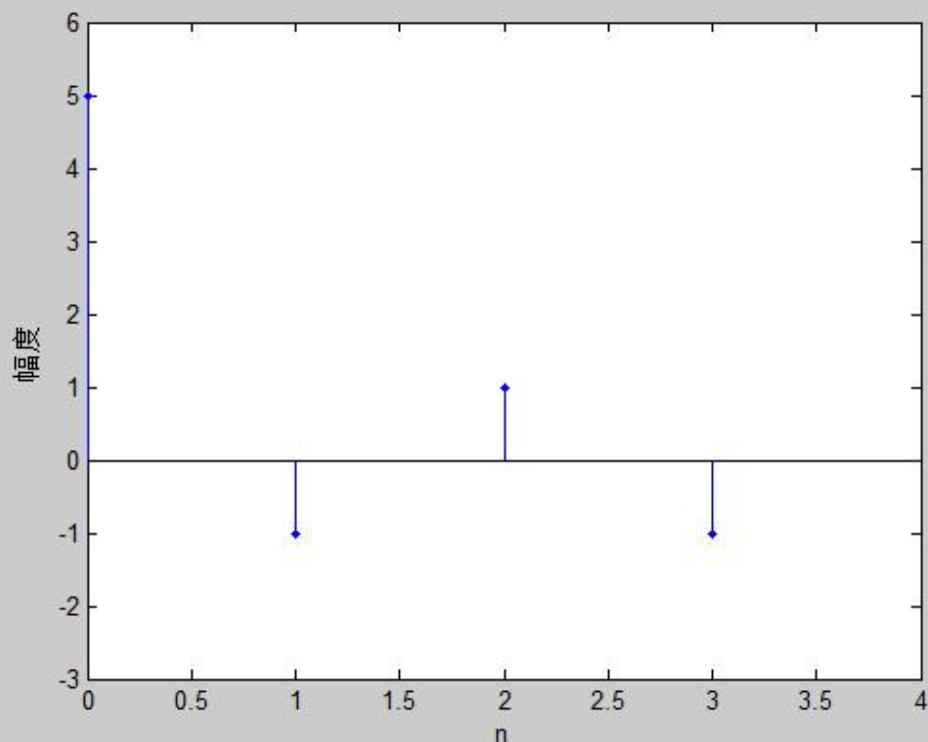
$$X(2) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n \cdot 2} = 1 - 1 + 2 - 1 = 1$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^3 x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}n \cdot 3} = 1 + j - 2 - j = -1$$



DFT的MATLAB程序: $X_k = \text{fft}(x_n, N)$

```
xn=[1 1 2 1];  
Xk4=fft(xn, 4);  
M=length(Xk4)-1;  
n=0:1:M;  
subplot(1,1,1);  
stem(n, Xk4, 'b');  
xlabel('n'); ylabel('幅度'); axis([0, 4, -3, 6]);
```





DFT的基本性质

1、线性性质

DFT 的线性性质本质和 DTFT、Z 变换一致，核心是“叠加原理”

已知 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个有限长序列，长度分别为 N_1 和 N_2 ，取 $N = \max[N_1, N_2]$

$$\begin{aligned} Y(k) &= \text{DFT} [ax_1(n) + bx_2(n)] \\ &= aX_1(k) + bX_2(k) \end{aligned}$$

$$0 \leq k \leq N-1$$



1、线性性质

约束 1: 必须统一 “DFT 点数 N ” (序列长度需适配 N)

DTFT、Z 变换对序列长度无强制要求，但 DFT 的线性性质必须满足 “所有序列的 DFT 点数一致”

工程意义：实际处理多信号叠加时（如混音、多传感器数据融合），必须先统一采样长度（补零），再用 DFT 做频谱分析 —— 这是 DFT 线性性质在工程中应用的 “前置操作”，之前讲 DTFT、Z 变换时无需考虑。

约束 2: 叠加后的序列仍满足 “隐含周期性”

DFT 的线性性质叠加的是 “有限长主值序列”，但这些序列背后隐含着 “周期延拓” 的特性 —— 因此，叠加后的序列的周期延拓等于两个叠加前序列的周期延拓组合

工程价值：为 “循环卷积的线性叠加” 奠定基础 —— 在数字滤波中，若输入是多个信号的叠加（如语音 + 噪声），则滤波输出（输入与滤波器的循环卷积），等于每个信号单独滤波后的输出叠加。



2. 时域循环移位定理

设 $x(n)$ 长度为 N , 其循环移位为

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

则 $Y(k) = DFT[y(n)] = W_N^{-km} X(k)$

$$0 \leq k \leq N-1$$

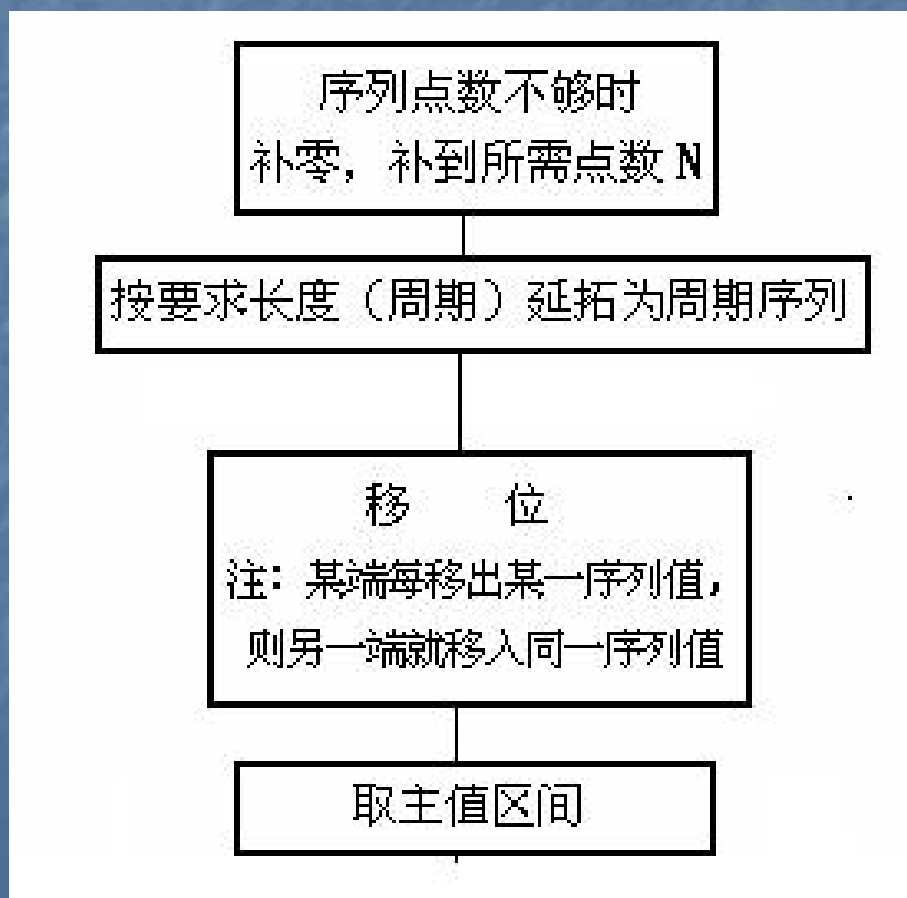
其中 $X(k) = DFT[x(n)]$

$$0 \leq k \leq N-1$$



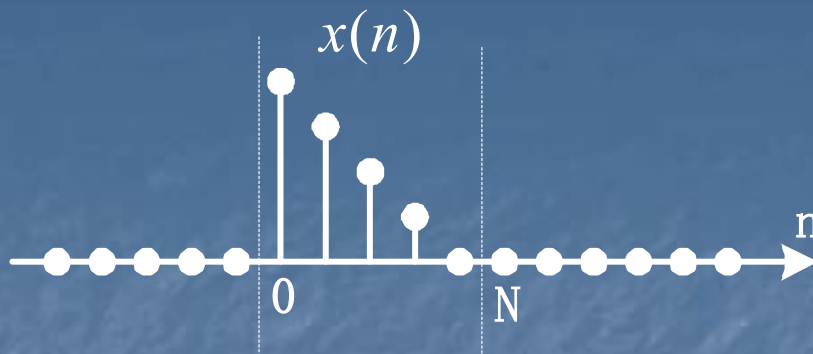
有限长序列圆周移位（循环移位）的实现步骤

$$y(n) = x\left((n+m)\right)_N R_N(n)$$





例

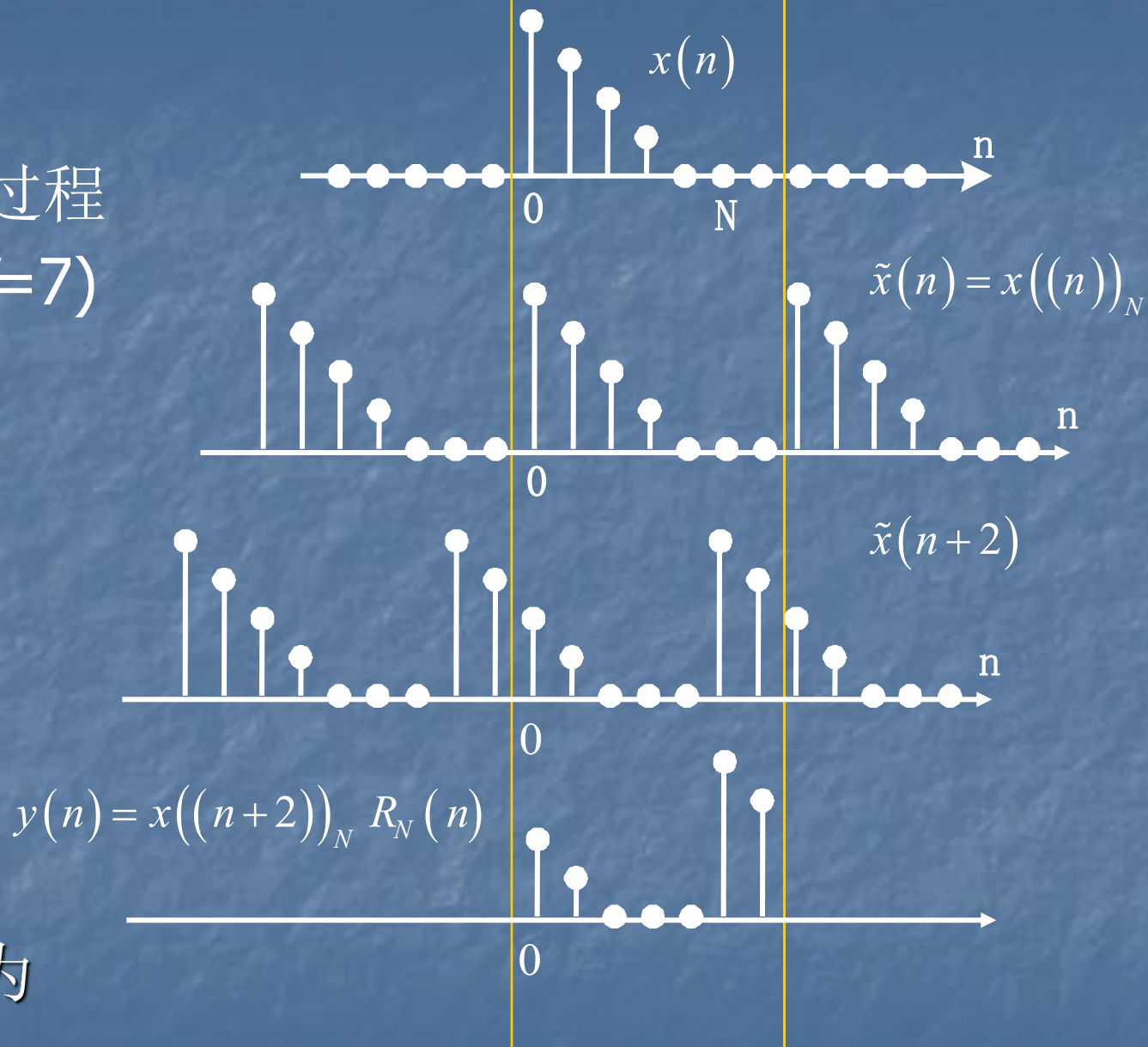


循环移位过程示意图
($N=5$)

主值区仍为 $0 \leq n \leq N-1$



例 循环移位过程 示意图($N=7$)



主值区仍为
 $0 \leq n \leq N-1$



证明: $Y(k) = \text{DFT}[y(n)]$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{kn} \end{aligned}$$

令 $n+m = n'$ 或 $n = n' - m$, 则有

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{k(n'-m)} \\ &= W_N^{-km} \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{kn'} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} Y(k) &= W_N^{-km} \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{kn'} \\ &= W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x((n'))_N W_N^{kn'} \\ &= W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_N^{kn'} \\ &= W_N^{-km} X(k) \end{aligned}$$

时域循环移位，在频域表现为“所有频率分量的相位都增加一个线性相位，幅度保持不变。”



3. 频域循环移位定理

如果

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)], 0 \leq k \leq N-1$$

$$Y(k) = X((k+l))_N R_N(k)$$

则

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = W_N^{nl} x(n)$$

这是“调制”的理论基础——时域乘以旋转因子，将信号频谱搬到新的频率位置。



3.2.3 循环卷积定理

本质是“多个循环移位序列的加权叠加”

1. 两个有限长序列的循环卷积

如果序列 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的长度分别为 N 和 M ,则 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的 L 点循环卷积定义为:

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L \right] R_L(n)$$

L 为循环卷积区间长度, $L \geq \max[N, M]$

$$y_c(n) = h(n) \circledast x(n) = h(n) \circledcirc x(n)$$



循环卷积的矩阵形式:

$$y_c(n) = h(n) \otimes x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L R_L(n)$$

$x(n)$ 的 L 点“循环卷积矩阵”

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ \vdots \\ y_c(L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \dots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \dots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \dots & x(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \dots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix}$$

正序

倒序

注意: 如果 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的长度不足 L , 则需要在末尾补零。

L 点”循环卷积矩阵”的特点:

- (1) 第1行是序列 $\{x(0), x(1), \dots, x(L-1)\}$ 的循环倒相序列;
- (2) 第1行以后的各行均是前一行向右循环移1位形成的;
- (3) 矩阵的各主对角线上的序列值均相等。



例： $h(n)=\{5,4,3,2,1\}$, $x(n)=\{1,2,3\}$, 求 $N=7$ 点的循环卷积。

解： (1) 将 $h(n)$ 补零加长至 $N=7$ 为 $h(n)=\{5,4,3,2,1,0,0\}$,
(2) 将 $x(n)$ 补零加长至 $N=7$ 得到: $x(n)=\{1,2,3,0,0,0,0\}$,
写出 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 7 点循环卷积矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(4) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 26 \\ 20 \\ 14 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$



2、循环卷积——定理（时域）

如果 $x(n) = x_1(n) \textcircled{N} x_2(n)$
 $= x_2(n) \textcircled{N} x_1(n)$

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n) \end{aligned}$$

则 $X(k) = DFT(x(n))_N = X_1(k) \cdot X_2(k)$



证明: $\text{DFT}[x_1(n) \otimes x_2(n)] = X_1(k) \cdot X_2(k)$

按照定义, 有

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x_1(n) \otimes x_2(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} x_2((n-m))_N W_N^{kn} \end{aligned}$$



令 $n-m=n'$ ，则有

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n'=-m}^{N-1-m} x_2((n'))_N W_N^{k(n'+m)} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \sum_{n'=-m}^{N-1-m} x_2((n'))_N W_N^{kn'} \\ &= X_1(k) X_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$



2、循环卷积——定理（频域）

如果: $x(n) = x_1(n)x_2(n)$

$$\left. \begin{array}{l} X_1(k) = DFT[x_1(n)]_N \\ X_2(k) = DFT[x_2(n)]_N \end{array} \right\} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

则: $X(k) = DFT[x(n)]_N = \frac{1}{N} X_1(k) \textcircled{N} X_2(k)$

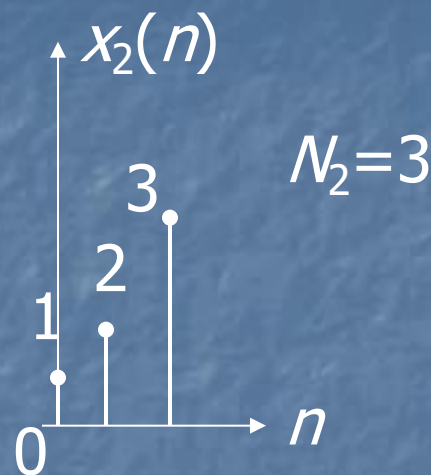
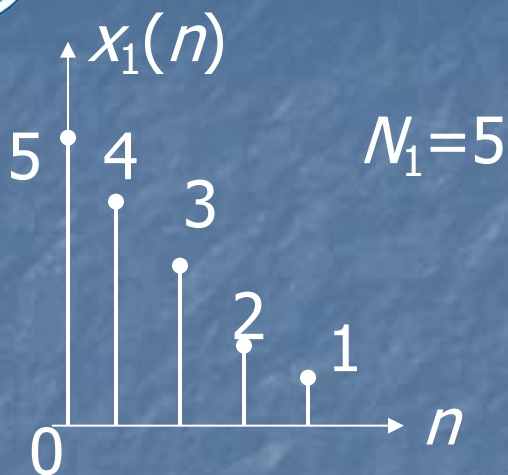
$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N R_N(k)$$

或 $X(k) = \frac{1}{N} X_2(k) \textcircled{N} X_1(k)$

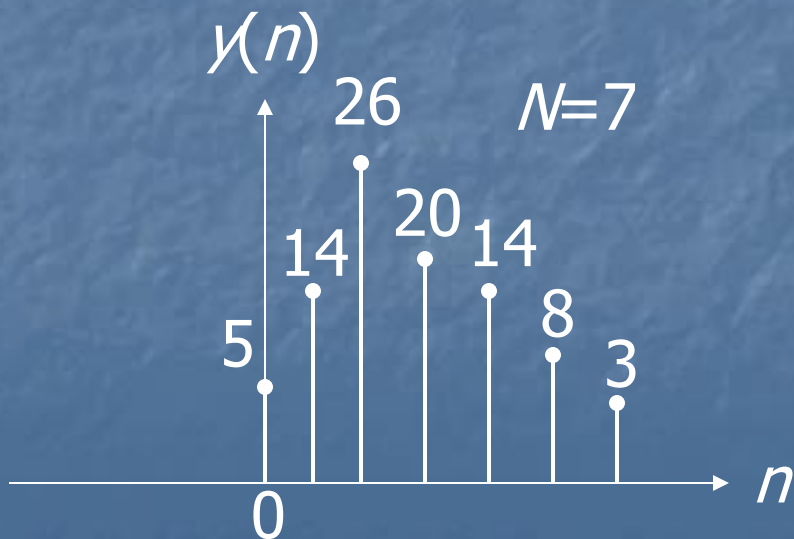
$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l))_N R_N(k)$$



例 线性卷积与循环卷积步骤比较



线性卷积：结果的示意图

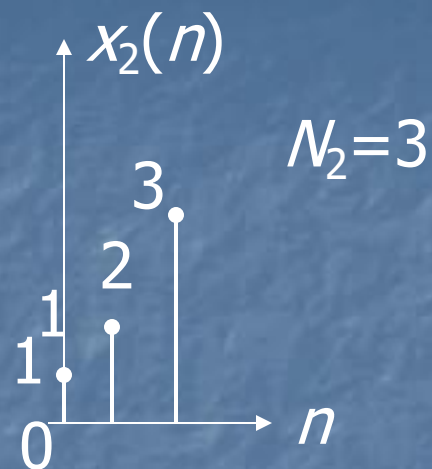
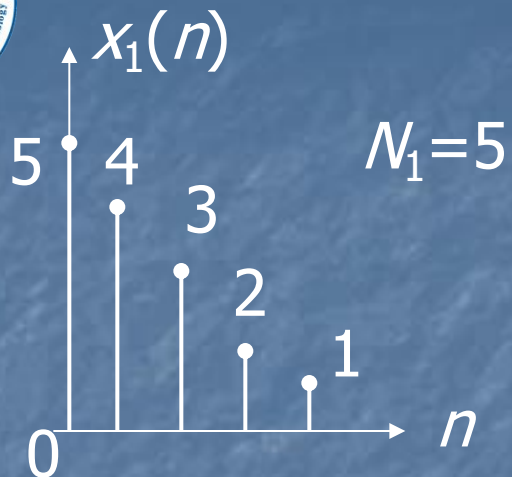


					5	4	3	2	1
				×	1	2	3		
					15	12	9	6	3
		10	8	6	4	2			
5	4	3	2	1					
5	14	26	20	14	8	3			

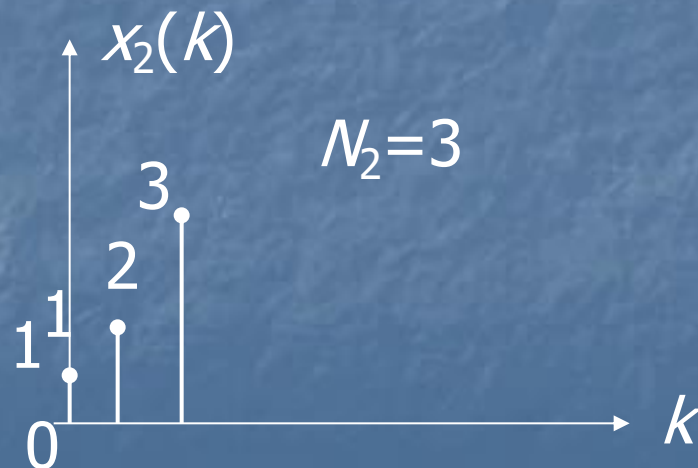
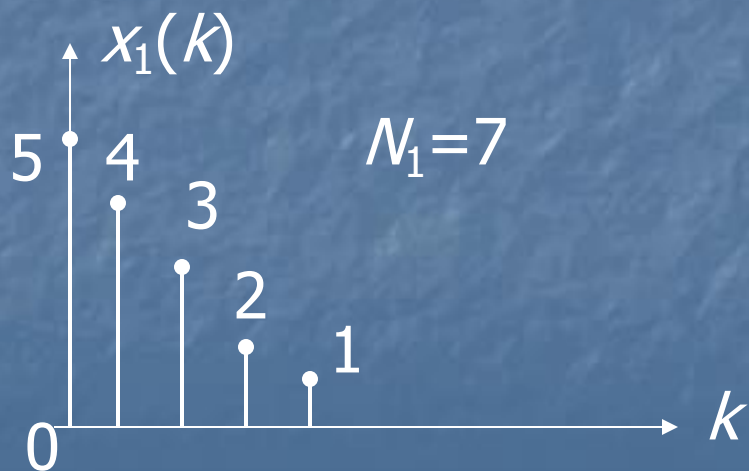
不进位乘法



循环卷积：示意图



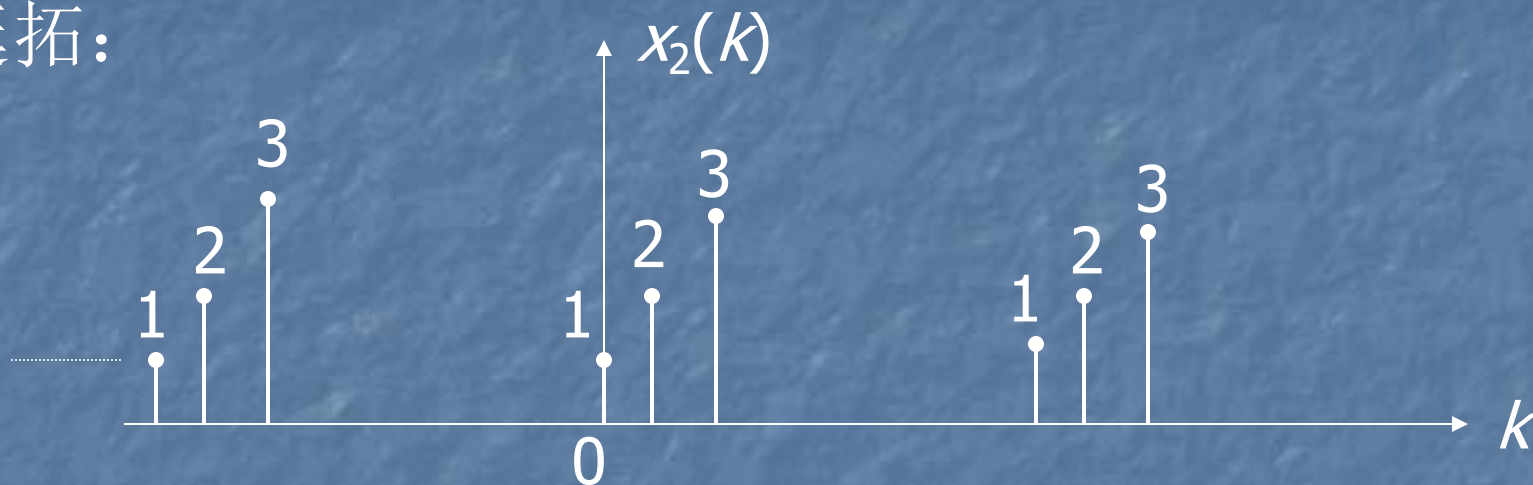
(1) 循环卷积：($N=7$)补零加长



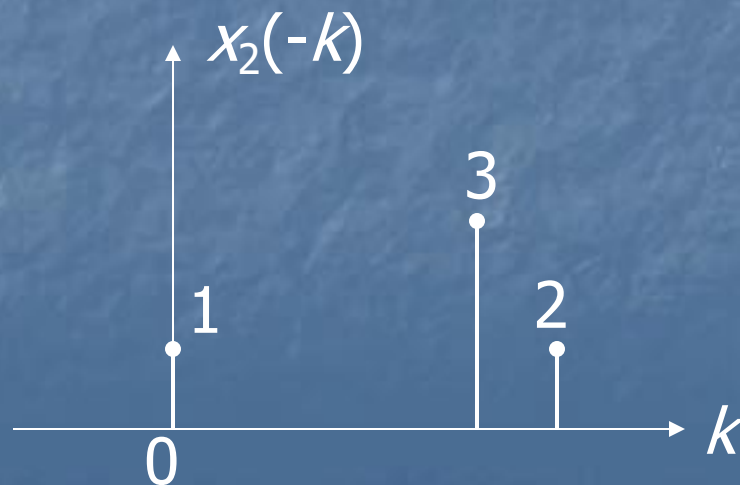


$$y_c(n) = h(n) \otimes x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m) x((n-m))_L R_L(n)$$

(2) 循环卷积需进行周期延拓，而线卷积无需周期延拓：

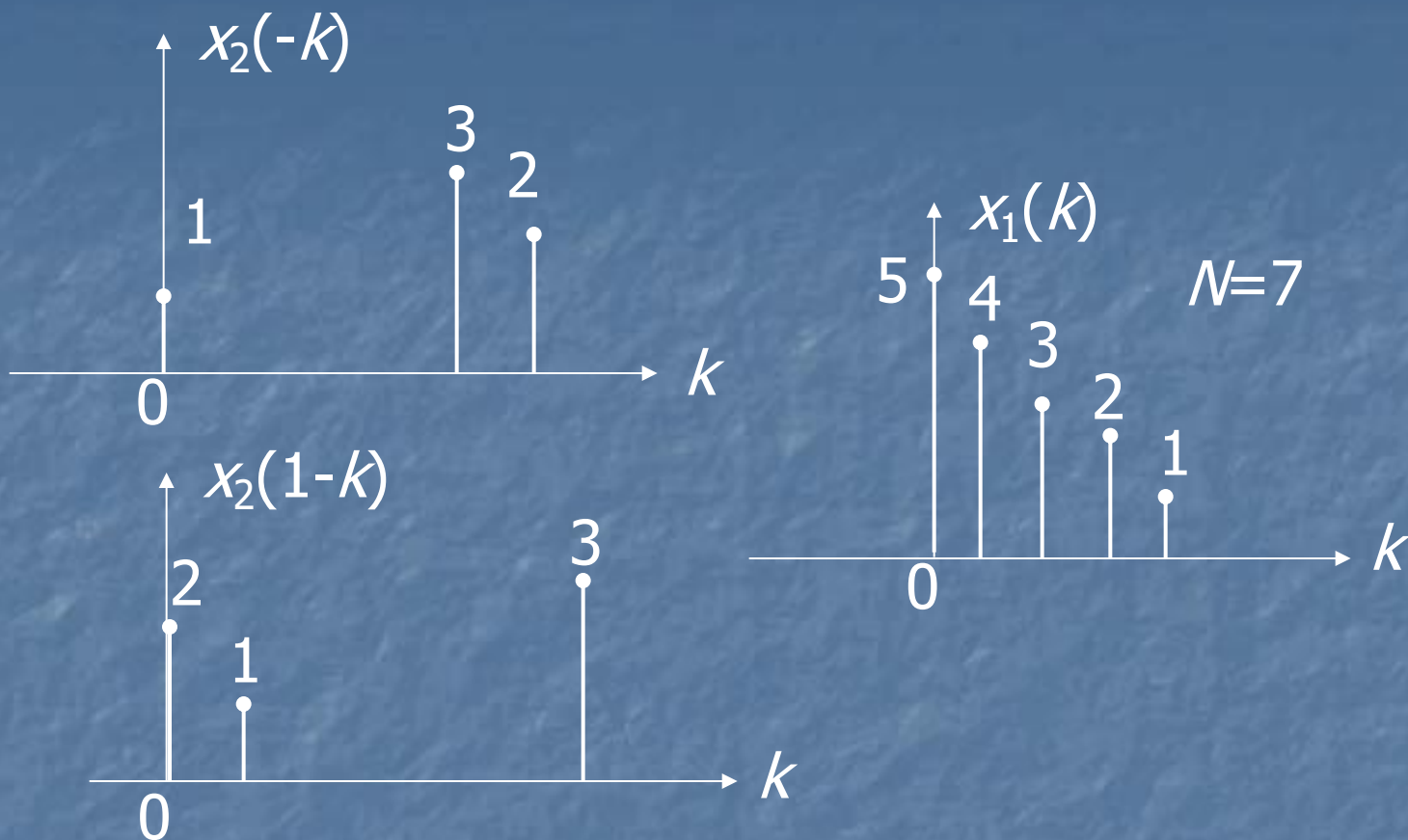


圆卷积的反折(并取主值区间):





(3) 平移



(4) 相乘

$$x_1(k)x_2(-k)=5 \times 1=5$$

$$x_1(k)x_2(1-k)=5*2+4*1=14$$

$$x_1(k)x_2(2-k)=5*3+4*2+3*1=26$$

$$x_1(k)x_2(3-k)=4*3+3*2+2*1=20$$

$$x_1(k)x_2(4-k)=3*3+2*2+1*1=14$$

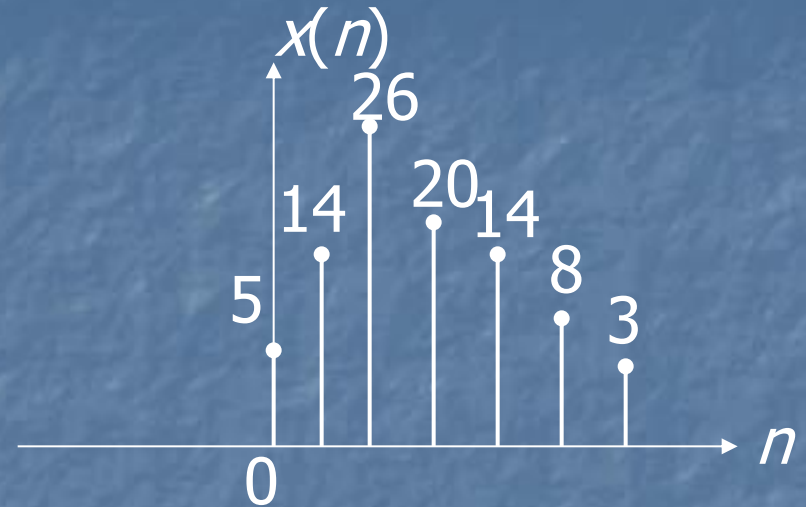
$$x_1(k)x_2(5-k)=2*3+1*2=8$$

$$x_1(k)x_2(6-k)=1*3=3$$



(5)相加

得到循环卷积的示意图



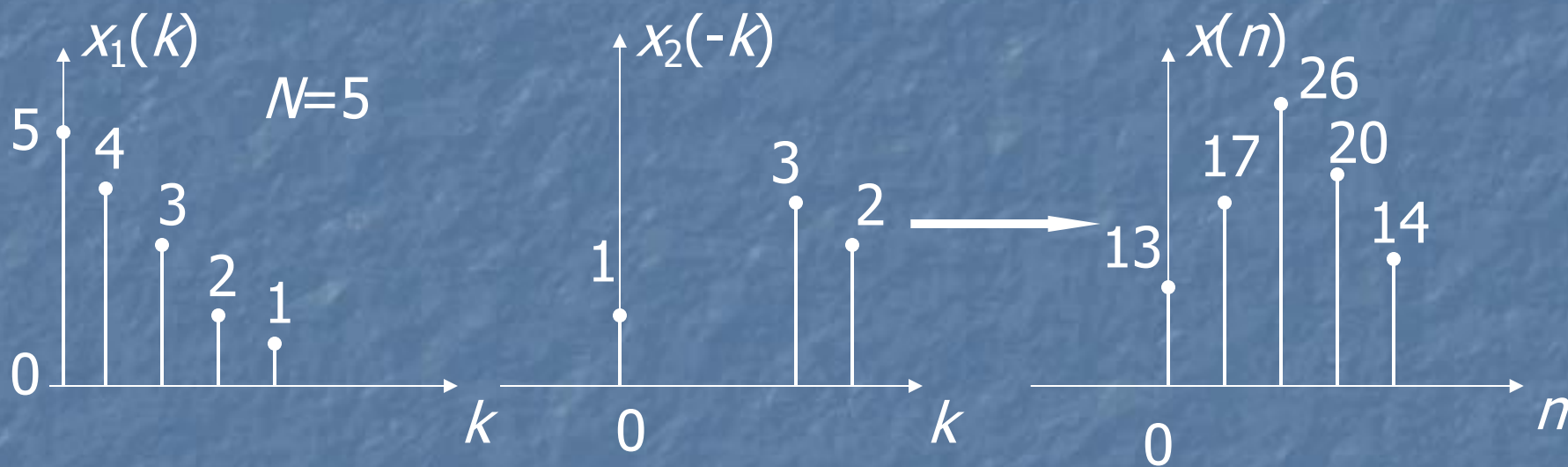
至此可看出线性卷积与循环卷积的关系

当 $N \geq [N_1(5) + N_2(3) - 1] = 7$ 时，线性卷积与循环卷积相同

线性卷积的长度是固定的（由两个序列长度决定），循环卷积的点数是人为设定的；当“循环卷积的点数 \geq 线性卷积的长度”时，两者的非零部分完全相等。



例 若循环卷积取长度为 $N=5$ ，求循环卷积



求得循环卷积

$$x_1(k) x_2(-k) = 5*1 + 2*3 + 1*2 = 13 \quad x_1(k) x_2(3-k) = 4*3 + 3*2 + 2*1 = 20$$

$$x_1(k) x_2(1-k) = 5*2 + 4*1 + 1*3 = 17 \quad x_1(k) x_2(4-k) = 3*3 + 2*2 + 1*1 = 14$$

$$x_1(k) x_2(2-k) = 5*3 + 4*2 + 3*1 = 26 \quad \text{看出圆卷积与线卷积不同}$$



例 用图表求解循环卷积

$x_1(n)=\{5,4,3,2,1\}$, $x_2(n)=\{1,2,3\}$, 同上求 $N=5$ 点的循环卷积。

解：

(1) $x_1(n)$ 无需补零加长 $x_1(k)=\{5,4,3,2,1\}$,

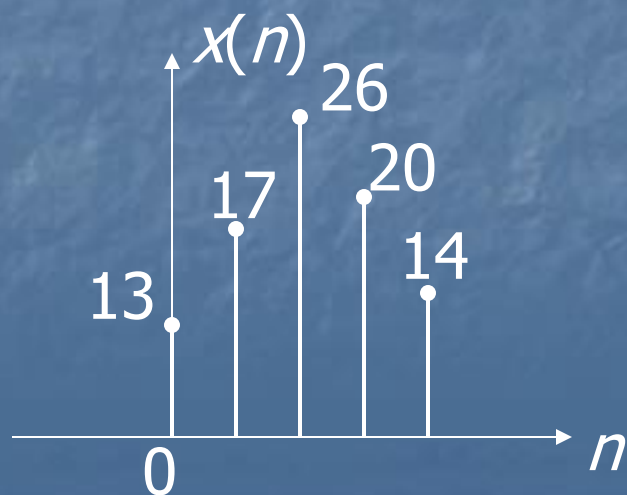
(2) 将 $x_2(n)$ 补零加长至 $N=5$, 并周期延拓,

(3) 反折得到: $x_2(-k)=\{1,0,0,3,2\}$,

(4) 作图表



5	4	3	2	1	结果
1	0	0	3	2	13
2	1	0	0	3	17
3	2	1	0	0	26
0	3	2	1	0	20
0	0	3	2	1	14





循环卷积与线性卷积的性质对比

圆 周 卷 积	线 性 卷 积
1 是针对 DFT 引出的一种表示方法	1 信号通过线性系统时, 信号输出等于输入与系统单位冲激响应的卷积
2 两序列长度必须相等 不等时按要求补足零值点	2 两序列长度可相等, 也可不等 如: $x_1(n)$ 为 N_1 点, $x_2(n)$ 为 N_2 点
3 卷积结果长度与两信号长度相等 皆为 N	3 卷积结果长度 $N = N_1 + N_2 - 1$



工程应用

本质就是“在满足补零条件后，用‘循环卷积’等价替代‘线性卷积’，再通过‘频域乘积’（DFT + 相乘 + IDFT）大幅降低计算量”，最终高效求解线性系统的响应（如滤波、信号传输后的输出）。

工程中我们真正需要的是线性卷积，但线性卷积的计算量太大，无法满足实时需求

滤波器处理输入信号，求系统响应：

1. **补零延拓**：将 $x[n]$ 和 $h[n]$ 补零至 $N \geq L_x + L_h - 1$ （ N 通常取2的整数次幂，如32、64、1024...，方便FFT计算）；
2. **FFT变换**：对补零后的 $x_{\text{pad}}[n]$ 和 $h_{\text{pad}}[n]$ 分别做 N 点FFT，得到频域结果 $X[k]$ 和 $H[k]$ ；
3. **频域乘积**：计算 $Y[k] = X[k] \cdot H[k]$ （逐点相乘，每个频率点的幅度相乘、相位相加）；
4. **IFFT逆变换**：对 $Y[k]$ 做 N 点IFFT（逆FFT），得到时域结果 $y[n]$ ——这个 $y[n]$ 就是线性卷积的结果，即系统的输出响应。



工程案例——耳机实时降噪

实时数字滤波（音频、图像、通信）

所有实时滤波（如耳机降噪、图像平滑、通信信号均衡）都依赖循环卷积 + FFT。

耳机的降噪滤波器 $h[n]$ 是预设计好的（用于抵消环境噪声），输入信号 $x[n]$ 是麦克风采集的“人声 + 环境噪声”：

- 若用线性卷积，实时性差，会出现“人声延迟”；
- 用循环卷积 + FFT：补零至 $N = 8192$ （采样率 48kHz，单次处理 20ms 音频， $L_x = 960$ ， $L_h = 512$ ），FFT 计算量仅需 $8192 \times 13 \approx 1 \times 10^5$ 次乘法，可实现“降噪无延迟”，人声自然。



3.2.4 复共轭序列的DFT

设 $x(n) \Leftrightarrow X(k) = \text{DFT}[x(n)]$

则 $\text{DFT}[x^*(n)] = X^*(N-k)$

$$0 \leq k \leq N-1$$

且 $X(N) = X(0)$

另有 $\text{DFT}[x^*(N-n)] = X^*(k)$



证明：根据DFT的唯一性

$$\begin{aligned}\text{DFT}\left[x^*(n)\right] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{-(N-k)n} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* \\ &= X^*(N-k)\end{aligned}$$



3.2.5 DFT的共轭对称性

DFT的对称性是关于N/2点的对称性

1. 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列
有限长共轭对称序列

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N - n), 0 \leq n \leq N - 1$$

有限长共轭反对称序列

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N - n), 0 \leq n \leq N - 1$$



当N为偶数时，将上式中的 n 换成 $N/2-n$ ，可得：

$$x_{ep}\left(\frac{N}{2}-n\right)=x_{ep}^*\left(\frac{N}{2}+n\right) \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2}-1$$

$$x_{op}\left(\frac{N}{2}-n\right)=-x_{op}^*\left(\frac{N}{2}+n\right)$$

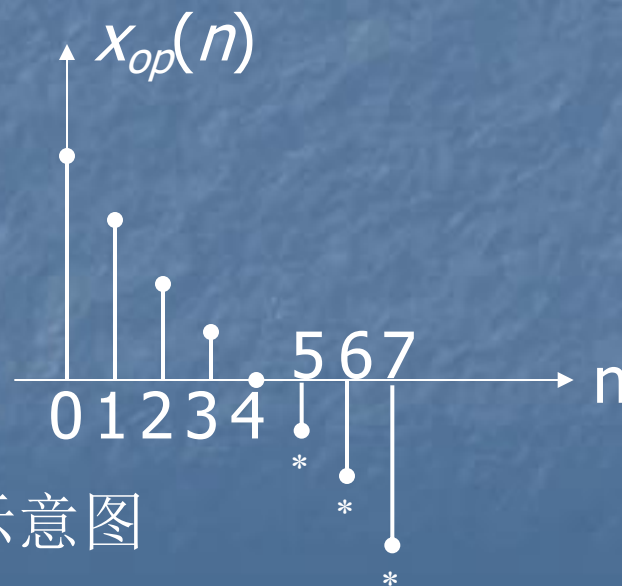
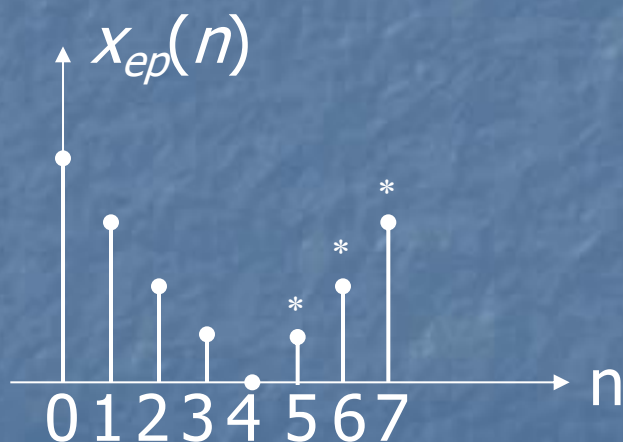


图 共轭对称与共轭反对称序列示意图

*表示对应点为序列取共轭后的值



任意有限长序列，可分解为：

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$
$$0 \leq n \leq N-1 \quad (3.2.14)$$

将上式 $n \rightarrow N-n$ ，并取共轭，得

$$x^*(N-n) = x_{ep}^*(N-n) + x_{op}^*(N-n)$$
$$= x_{ep}(n) - x_{op}(n) \quad (3.2.15)$$

可得

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)] \quad (3.2.16a)$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)] \quad (3.2.16b)$$



2. DFT的共轭对称

(1) 如果 $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$ (3.2.17)

其中

$$x_r(n) = \text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$jx_i(n) = j \text{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$



由DFT的线性性质可得

$$DFT(x_r(n)) = \frac{1}{2} DFT[x(n) + x^*(n)]$$

$$= \frac{1}{2} [X(k) + X^*(N-k)] = X_{ep}(k)$$

$$DFT(jx_i(n)) = \frac{1}{2} DFT[x(n) - x^*(n)]$$

$$= \frac{1}{2} [X(k) - X^*(N-k)] = X_{op}(k)$$

$$X(k) = DFT(x(n)) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$



(2) 如果 $x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$

$$0 \leq n \leq N-1 \quad (3.2.14)$$

其中

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)]$$

$x(n)$ 的共轭对称分量

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(N-n)]$$

$x(n)$ 的共轭反对称分量



$$\begin{aligned} DFT[x_{ep}(n)] &= \frac{1}{2} DFT[x(n) + x^*(N-n)] \\ &= \frac{1}{2} [X(k) + X^*(k)] = \text{Re}[X(k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DFT[x_{op}(n)] &= \frac{1}{2} DFT[x(n) - x^*(N-n)] \\ &= \frac{1}{2} [X(k) - X^*(k)] = j \text{Im}[X(k)] \end{aligned}$$



因此

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X_R(k) + jX_I(k) \quad (3.2.22)$$

其中

$$X_R(k) = \text{Re}[X(k)] = \text{DFT}[x_{ep}(n)]$$

$$jX_I(k) = j\text{Im}[X(k)] = \text{DFT}[x_{op}(n)]$$



总结: DFT共轭对称性

(1)

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

(2)

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$$X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$$



有限长实序列的共轭对称性

(1) $X(k)$ 是共轭对称的

$$\begin{aligned} X(k) &= X^*(N-k) \\ 0 \leq k &\leq N-1 \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

(2) 如果 $x(n) = x(N-n) \rightarrow$ 时域实偶
则 $X(k)$ 是实偶对称, 即

$$X(k) = X(N-k) \quad (3.2.24)$$



证明: $x(n)$ 实序列 $x(n) = x_r(n)$



$$X(k) = X_{ep}(k)$$

实序列

$$x(n) \text{ 偶对称} \quad x(n) = x(N-n) = x^*(N-n)$$

$$x(n) = x^*(N-n) \longleftrightarrow x_{ep}(n)$$

$$x(n) = x_{ep}(n)$$



$$X(k) = X_R(k)$$

$$X(k) = X_{ep}(k) \text{ 结合 } X(k) = X_R(k) \longleftrightarrow$$

$$X(k) = X^*(N-k) = X(N-k)$$



(3) 如果 $x(n) = -x(N-n) \rightarrow$ 时域实奇

则 $X(k) = -X(N-k)$

利用以上性质，可在DFT的计算中提高运算效率，减少运算量。



3.3 频率域采样



频域采样定理与时域采样定理是“对偶”关系

时域采样定理的核心：采样率需 ≥ 2 倍最高频率，避免时域混叠

频域是否也需要“采样定理”？

对连续频谱采样时，需要采多少个点？

采样间隔需要满足什么条件，才能从频谱采样值恢复原始时域信号？



频域采样的本质：对 DTFT 的离散采样。



频域采样对时域的影响：周期延拓 $x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x(n)$

$x_N(n)$ 是原序列 $x(n)$ 以 N 为周期延拓后的主值序列。

无失真恢复的条件：信号长度 $M \leq$ 采样点数 N



频域采样定理

如果 $x(n)$ 的长度为 M ，则只有当频域采样点数 $N \geq M$ 时，才有

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x(n)$$

可由频域采样 $X(k)$ 恢复原序列 $x(n)$ ，
否则将产生时域混叠现象。



推导过程:

$X(k)$ 表示在区间 $[0, 2\pi]$ 上对 $x(n)$ 的傅立叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的 N 点等间隔采样。

用有限长序列 $x_N(n)$ 表示其逆变换:

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] \quad 0 \leq n \leq N-1$$



$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) &= x_N((n))_N = IDFS[\tilde{X}(k)] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}\end{aligned}$$

将 $X(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{kn}$ 带入上式

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) W_N^{km} \right] W_N^{-kn} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n + iN)\end{aligned}$$

$$\text{式中 } \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} = \begin{cases} 1 & m = n + iN \\ 0 & m \end{cases}$$



$$\begin{aligned}x_N(n) &= \tilde{x}(n) R_N(n) \\&= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) R_N(n)\end{aligned}$$

$x_N(n)$ 是原序列 $x(n)$ 以 N 为周期延拓后的主值序列。

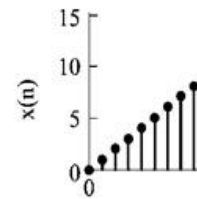
如果 $x(n)$ 的长度为 M ，则只有当频域采样点数 $N \geq M$ 时，才有

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x(n)$$

可由频域采样 $X(k)$ 恢复原序列 $x(n)$ ，
否则将产生时域混叠现象。



例:长度为26的三角形序列



```
M=26;N=32;n=0:M;
xa=0:M/2;
c=ceil(M/2)-1;
xb=c:-1:0;
xn=[xa,xb];
M0=length(xn)-1;
n0=0:1:M0;
subplot(2,3,1);
stem(n0,xn,'.');
```

```
Xk=fft(xn,512);%512FT
M1=length(Xk)-1;
n1=0:1:M1;
subplot(2,3,4);
stem(n1,Xk,'.');
```

```
X32k=fft(xn,32);%32FT
M2=length(X32k)-1;
n2=0:1:M2;
subplot(2,3,5);
stem(n2,X32k,'.');
```

```
x32n=ifft(X32k);%反变化x(n)
M3=length(x32n)-1;
n3=0:1:M3;
subplot(2,3,2);
stem(n3,x32n,'.');
```

```
X16k=X32k(1:2:N);%16FT
M4=length(X16k)-1;
n4=0:1:M4;
subplot(2,3,6);
stem(n4,X16k,'.');
```

```
x16n=ifft(X16k);%反变化x(n)
M5=length(x16n)-1;
n5=0:1:M5;
subplot(2,3,3);
stem(n5,x16n,'.');
```



总结：对长度为 M 的有限长序列，若想通过 DFT（频域采样）和 IDFT “无失真恢复原始序列”，则 DFT 的点数 N 必须 $\geq M$ ；若 $(N < M)$ ，则无法完整恢复原始序列（会因时域混叠丢失信息）。

但需要补充一个关键细节：“DFT 点数 $N \geq M$ ”是“无失真恢复”的核心条件，而非“做 DFT 的强制条件”。依然可以对 M 点序列做 $(N < M)$ 的 DFT（工程中可通过“截断序列”实现）

工程中做 DFT 的核心目的，往往是“分析信号频谱”或“后续通过 IDFT 恢复信号”（如通信解调、信号存储与传输），因此，工程中默认遵循“ $(N \geq M)$ ”的原则，不是因为 DFT “不能做 $(N < M)$ ”，而是因为“ $(N < M)$ 的 DFT 结果无法满足工程对‘信息完整性’和‘分析准确性’的需求”。



工程应用 分析一段简单的正弦信号

假设我们要分析一段**1kHz** 的正弦信号，具体参数如下：

采样率(**$f_s = 8\text{kHz}$**)（根据时域采样定理，采样率 ≥ 2 倍信号频率，**8kHz** 足够）

要求：谱分辨率 $\geq 100\text{Hz}$ （即能区分开频率差 $\geq 100\text{Hz}$ 的两个信号，避免把**1kHz** 和 **1.1kHz** 的信号混为一谈。

信号长度**M**：我们采集 **20ms** 的正弦信号。

步骤 1：按“目标分辨率”算 DFT 点数的最小值

$$N \geq \frac{f_s}{\Delta f_{\text{目标}}} = \frac{8000}{100} = 80 \text{ 点}$$

步骤 2：按“信号长度”算 DFT 点数的最小值
（频域采样定理）

$$M = f_s \times \text{时间} = 8000 \text{ 点/秒} \times 0.02 \text{ 秒} = 160 \text{ 点}$$

$$N \geq M = 160 \text{ 点}$$

步骤 3：确定最终的 DFT 点数（兼顾分辨率和无失真）

$$N = 256$$



用 $X(k)$ 恢复 $X(Z)$

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x(n)$$

式中 $x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$

得 $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n}$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



式中 $W_N^{-kN} = 1$, 因此

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

令
$$\varphi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

则
$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(z) \quad (3.3.6)$$

式(3.3.6)称为用 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 的内插公式。

$\varphi_k(z)$ 称为内插函数。



傅立叶变换的内插函数和内插公式

$$\varphi_k(\omega) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j(\omega - 2\pi k/N)}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(\omega)$$

进一步简化得

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} e^{-j\omega \left(\frac{N-1}{2} \right)}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right)$$



3.4 DFT的应用举例



DFT的快速算法FFT的出现，使DFT在数字通信、语言信号处理、图像处理、功率谱估计、仿真、系统分析、雷达理论、光学、医学、地震以及数值分析等各个领域都得到广泛应用。

两个大方面应用：一是计算线性卷积；二是用DFT对信号进行谱分析



3.4.1 用DFT计算线性卷积

循环卷积和线性卷积可以相等；
时域卷积对应频域乘积。

1. 用DFT计算循环卷积思路

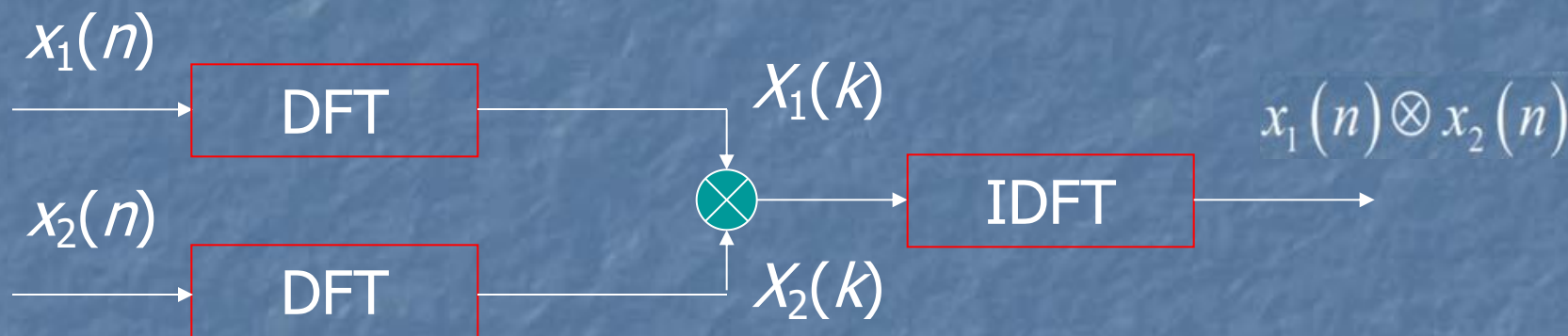


图3.4.1 用DFT计算循环卷积

做DFT或IDFT时, $N \geq \max[N_1, N_2]$



2. 实际用DFT计算线性卷积

如果 $L \geq N+M-1$ ，可用DFT求线性卷积。

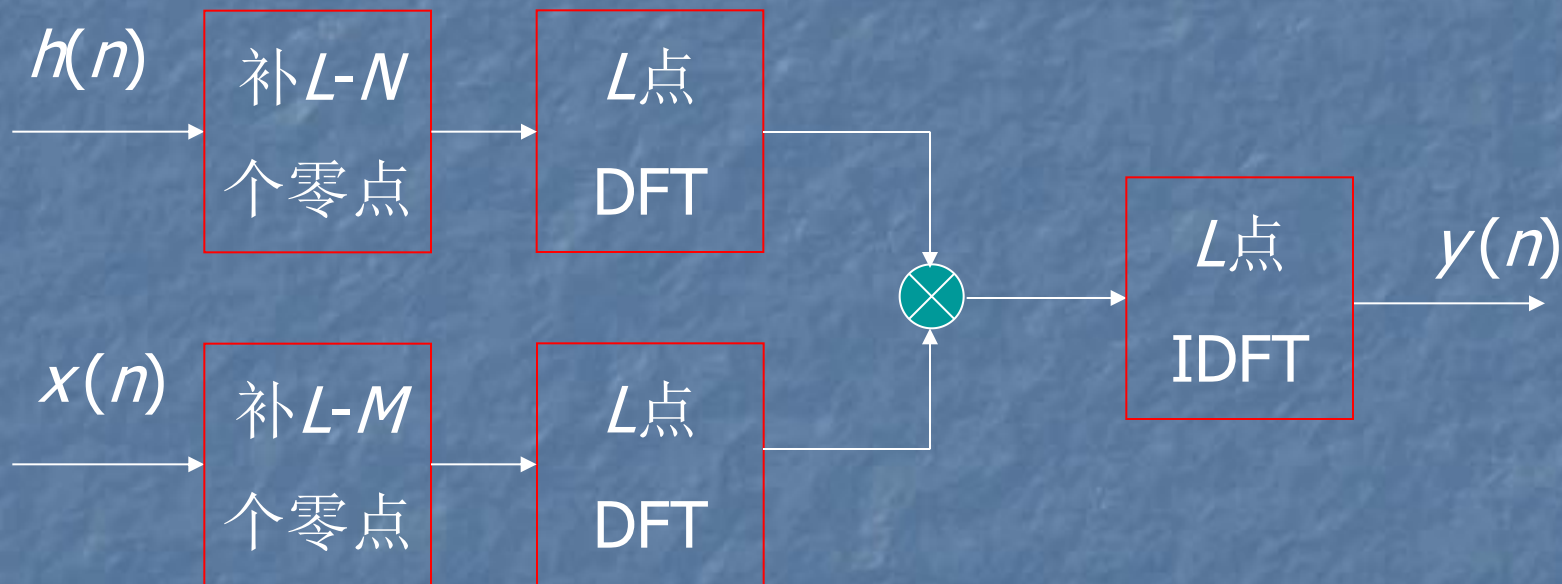
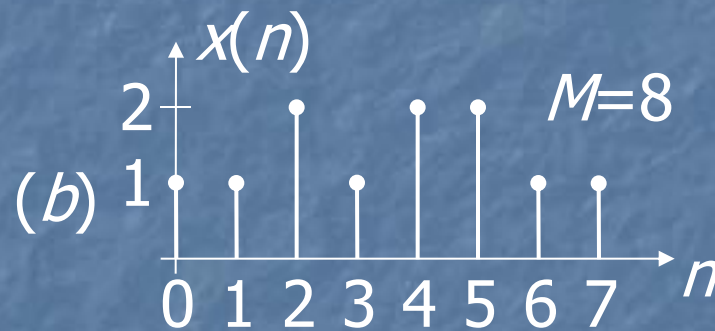
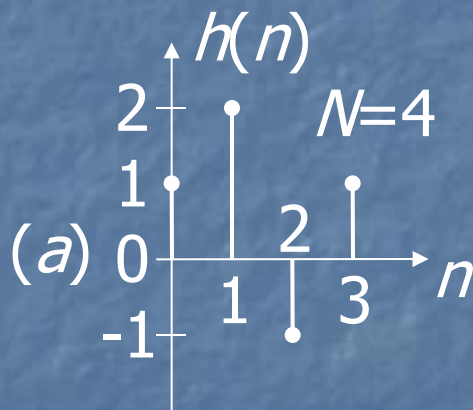


图3.4.1 用DFT计算线性卷积框图



例 已知 $h(n)=[1, 2, -1, 1]$ ($N=4$) 和
 $x(n)=[1, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 1]$ ($M=8$), 计
算线性卷积和 $L=9, 11, 13$ 的循环卷积。

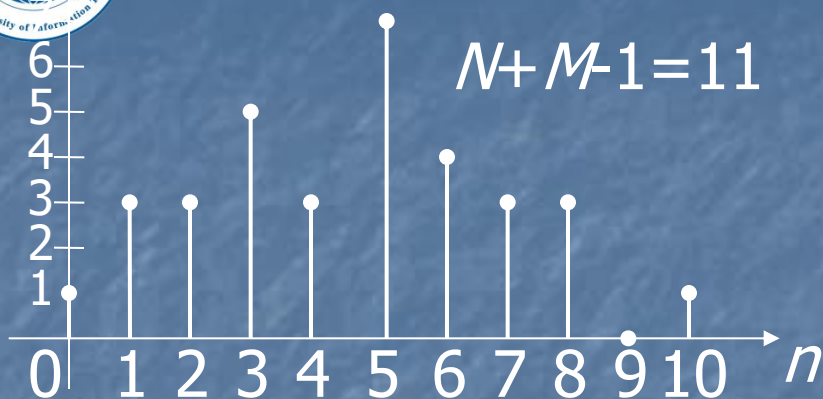




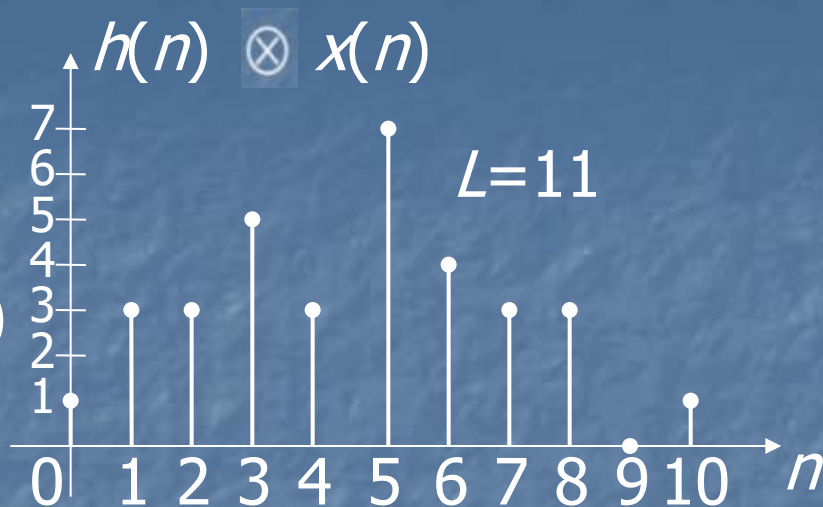
$$h(n) * x(n)$$

$$N+M-1=11$$

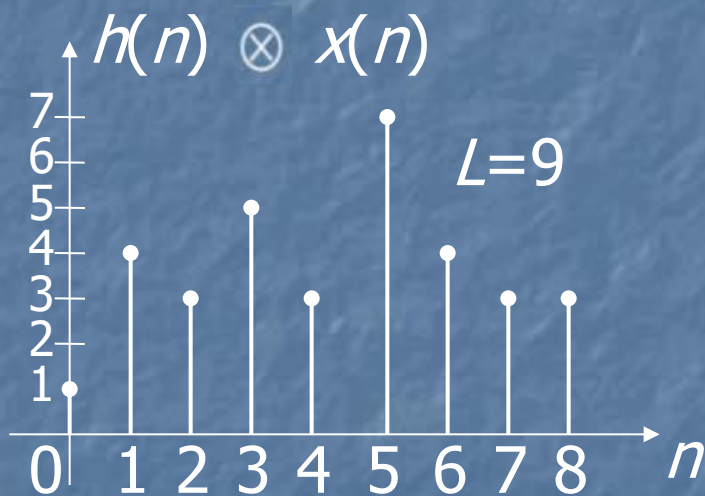
(c)



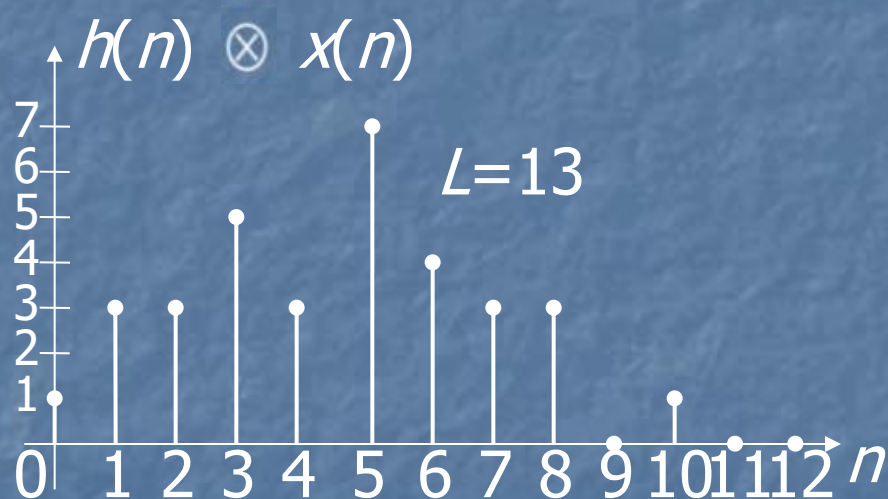
(e)



(d)



(f)



当 $L \geq 11$ 时, $h(n) * x(n)$ 波形与 $h(n) \quad x(n)$ 相同



用DFT计算线性卷积，可以大幅减少运算量。
但是只针对两个长度近似的序列。

直接利用DFT计算长序列与短序列的卷积，存在**缺点**：

- (1) 信号要全部输入后才能进行计算，延迟太多；
- (2) 内存要求较大；
- (3) 算法效率不高。

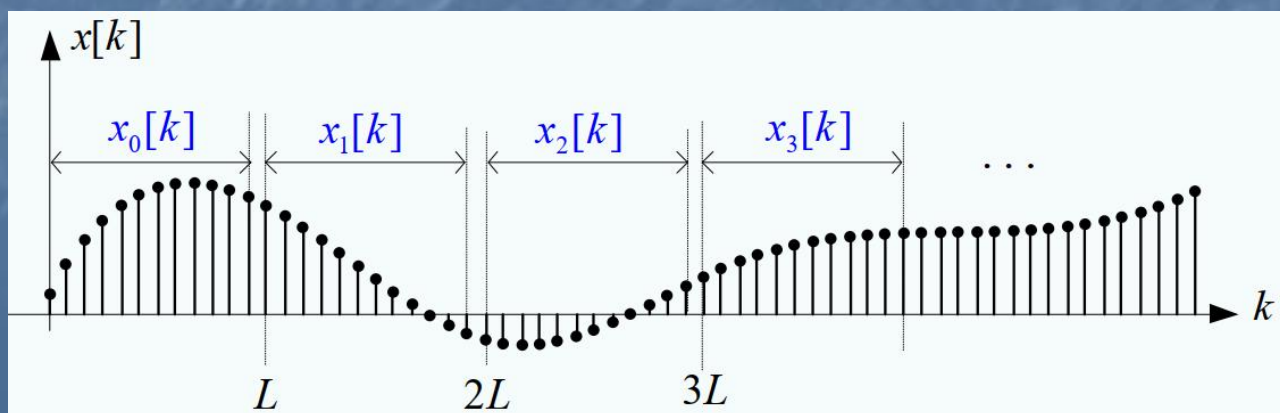


3. 重叠相加法

设 $h(n)$ 长度为 N , $x(n)$ 为无限长序列。将 $x(n)$ 分为长度为 M 的序列, 有

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n)$$

式中 $x_k(n) = x(n) \cdot R_M(n - kM)$





线性卷积可表示为:

$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) = h(n) * \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(n) * x_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

其中 $y_k(n) = h(n) * x_k(n)$

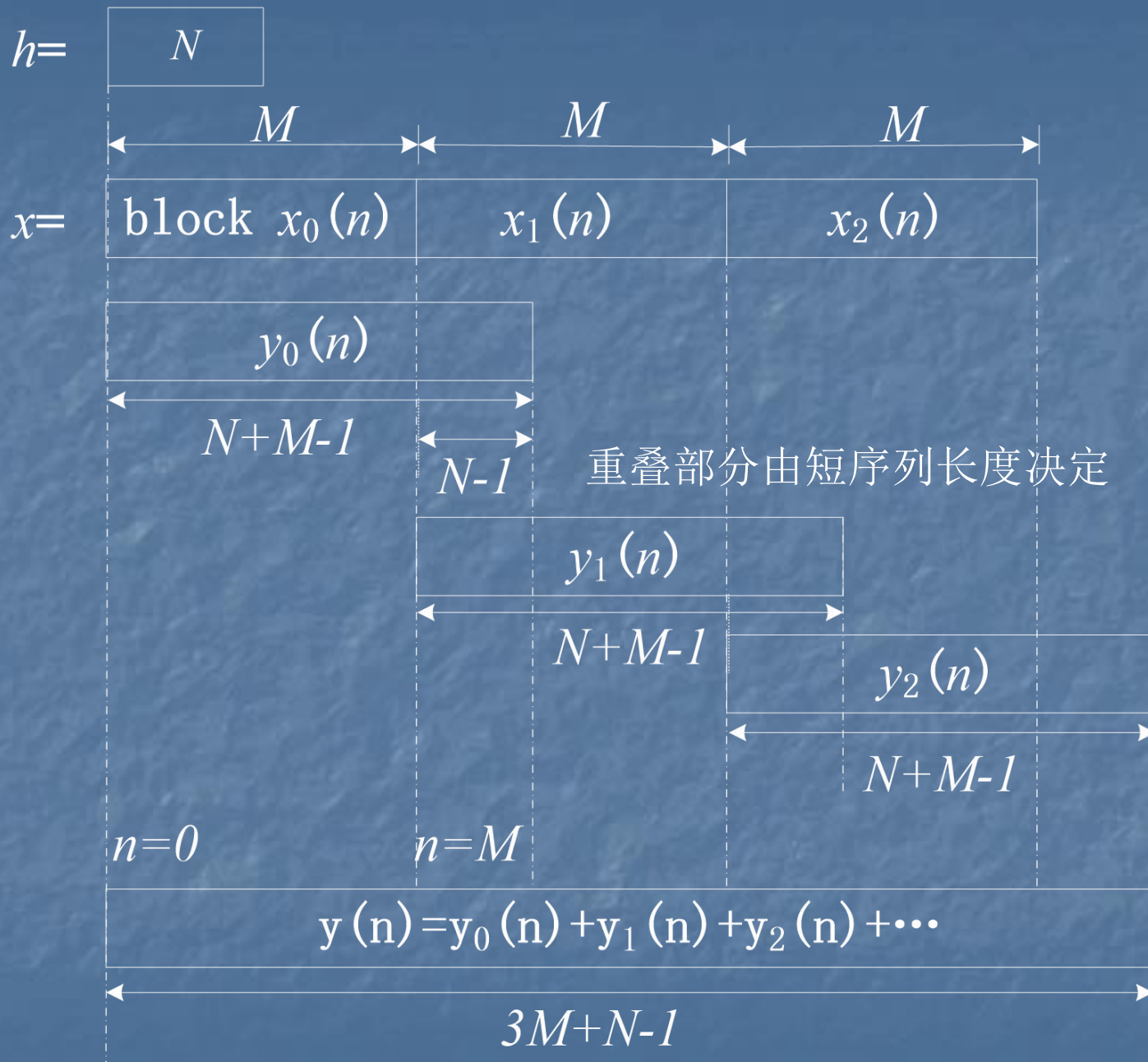


图3.4.3 重叠相加法卷积示意图



例3.4.2 已知 $x(n)$
 $=[1,1,1,1,3,3,3,3,1,1,1,2,2,2,2,1,1,1,1]$,
 $M=19$ 和 $h(n)=[1,-1,-1,1]$, $N=4$, 按8点截取 $x(n)$, 用重叠相加法计算 $y(n)$ 。

解：对于分段 $M=8$, 有



$$n = 1 \ -1 \ -1 \ 1$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = h * x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = h * x_1 = \begin{bmatrix} & & & & & & & & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = h * x_2 = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



案例展示

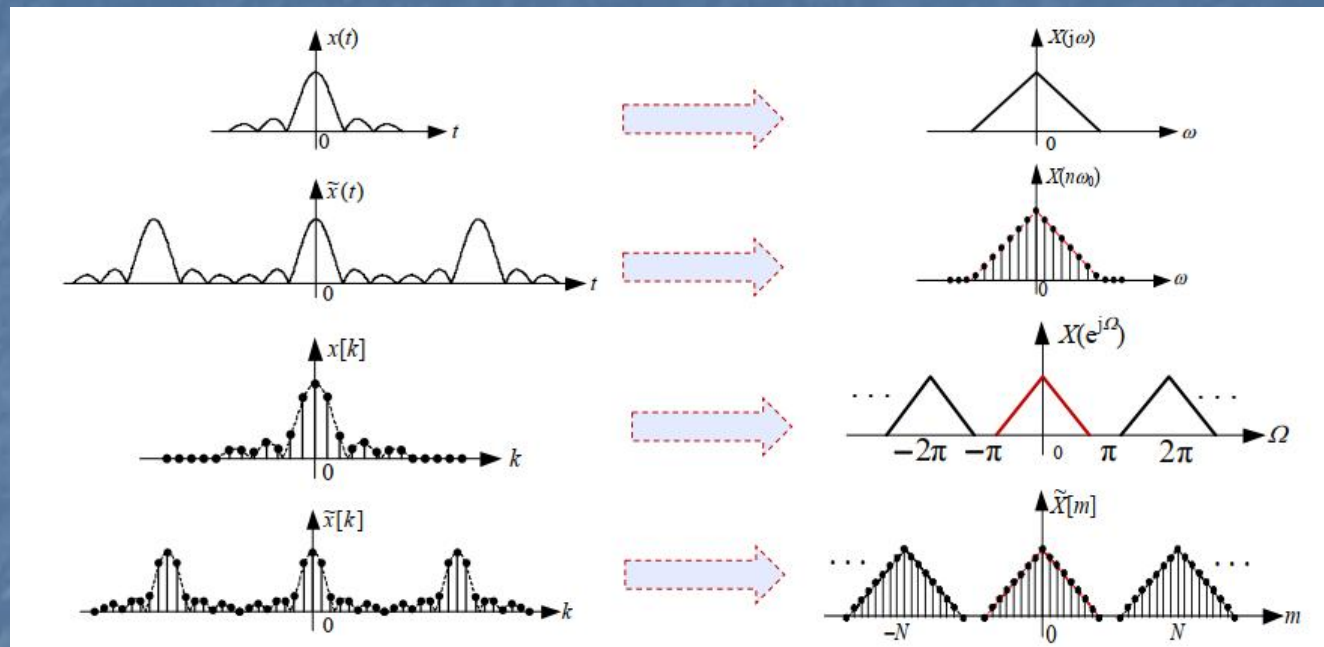
假设我们有一段长音频信号 $x[n]$ （比如 10 秒，采样率 8kHz，共 80000 点），和一个短的降噪滤波器 $h[n]$ （比如 512 点，用于过滤环境噪声）。

我们的最终目标是计算两者的线性卷积 $y[n] = x[n] * h[n]$ （滤波后的音频）——因为线性卷积才是“输入信号通过线性系统（滤波器）的真实输出”。

步骤	操作内容	角色：线性卷积 / DFT?
1. 拆分长序列为短帧	把 $x[n]$ 拆成 79 个短帧 $x_1[n], x_2[n], \dots, x_{79}[n]$ ，每帧 1024 点（最后一帧补零到 1024 点， $80000/1024=79$ 帧+最后一帧补零）	准备工作：为了用 DFT 处理，把“大卷积”拆成“小卷积”
2. 补零适配循环卷积	对每个短帧 $x_k[n]$ 补零到 $1024 + 512 - 1 = 1535$ 点；对滤波器 $h[n]$ 也补零到 1535 点	满足“循环卷积 = 线性卷积”的条件（关键！否则循环卷积不等于我们要的线性卷积）
3. DFT（FFT）变换	对每个补零后的短帧 $x_k[n]$ 做 1535 点 FFT，得到 $X_k[k]$ ；对滤波器 $h[n]$ 做 1535 点 FFT，得到 $H[k]$	DFT 的作用：把时域信号转到频域，方便做乘积（替代时域卷积的加法和乘法）
4. 频域逐点乘积	计算每个帧的频域乘积 $Y_k[k] = X_k[k] * H[k]$ （逐点相乘，每个频率点的幅度相乘、相位相加）	频域操作：对应时域的循环卷积（卷积定理的核心）
5. IDFT（逆 FFT）	对每个 $Y_k[k]$ 做 1535 点逆 FFT，得到每个短帧的时域卷积结果 $y_k[n]$ （此时 $y_k[n] = x_k[n] * h[n]$ ，即线性卷积）	DFT 的逆操作：把频域结果转回声域，得到每个短帧的线性卷积结果
6. 重叠相加合成完整结果	每个短帧的卷积结果 $y_k[n]$ 有 511 点和下一个帧重叠（因滤波器长度（短序列）512 点），把重叠部分相加，得到 $80000+512-1=80511$ 点的完整 $y[n]$	最终目标：得到长序列的线性卷积结果（滤波后的音频）

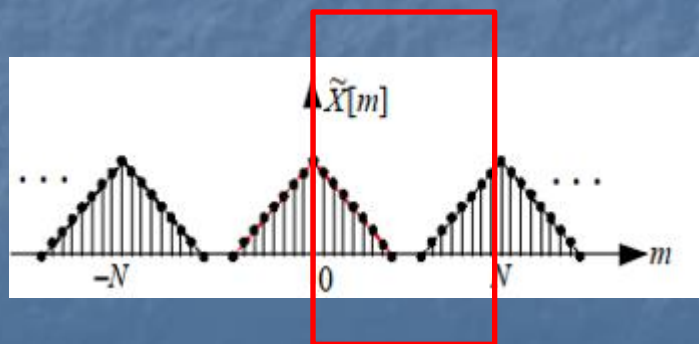


3.4.2 用DFT对信号进行谱分析



$x(t)$ 函数难以获取

频谱为 ω 连续函数，没有数字化



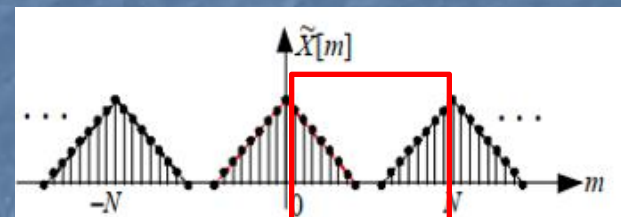
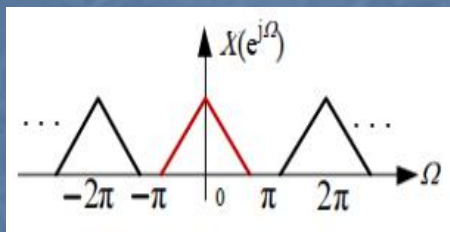
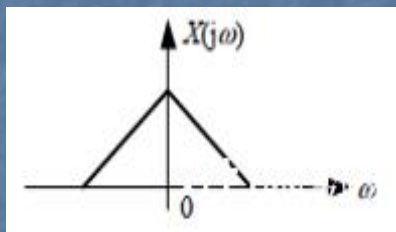
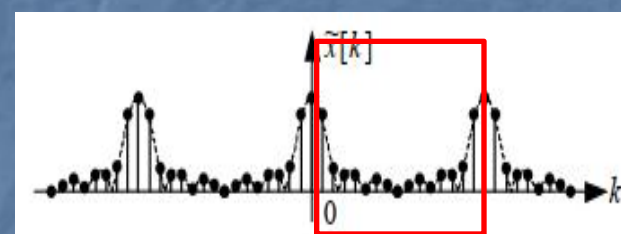
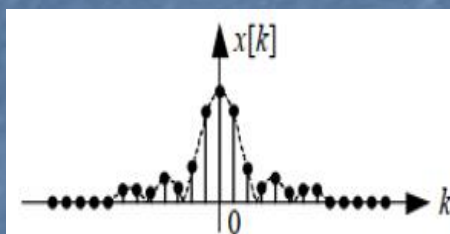
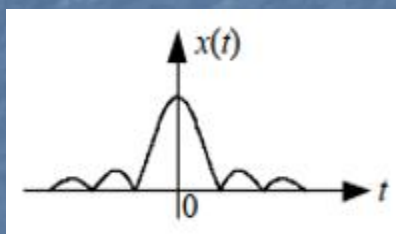
对DFS中的一个主值区间进行采样

即对序列 $x(n)$ 的傅里叶变换在一个周期内进行 N 点的采样。



3.4.2 用DFT对信号进行谱分析

$$x(t) \xrightarrow{\text{采样}} x_N(k) \xrightarrow{\text{DFT}} X(m)$$



以上为理想情况



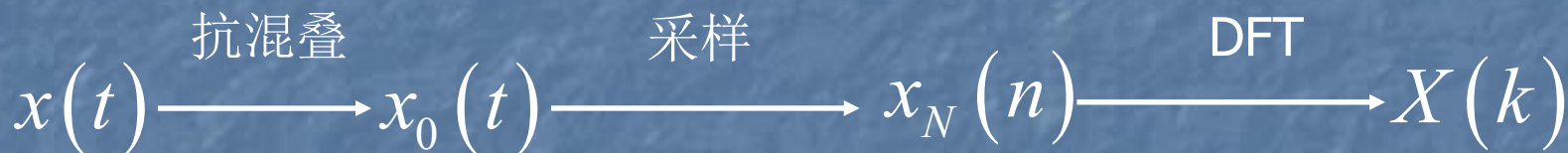
实际工程中的误差

- 混叠现象（频谱混叠）
- 截断效应（频谱泄露、谱间干扰）
- 栅栏效应

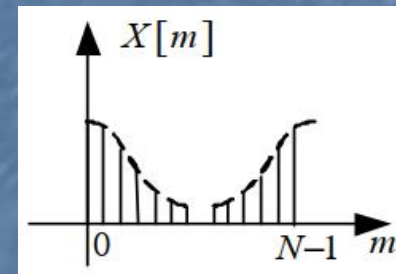
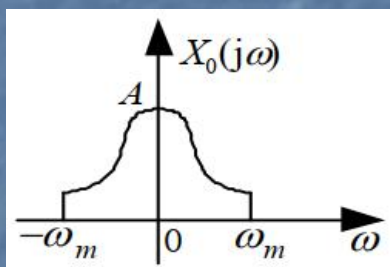
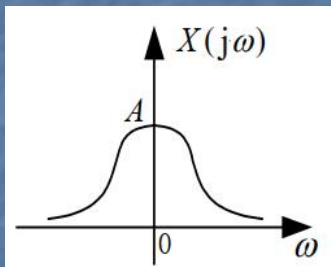
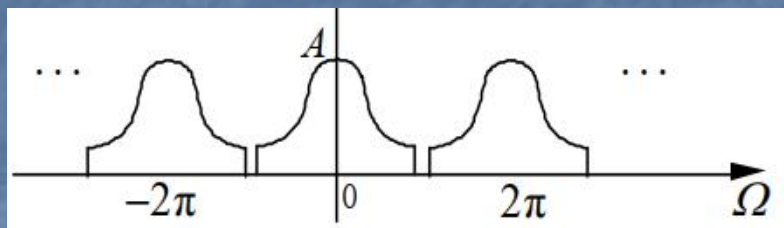


实际工程中的误差

■ 混叠现象（频谱混叠）



时间有限
频带无限



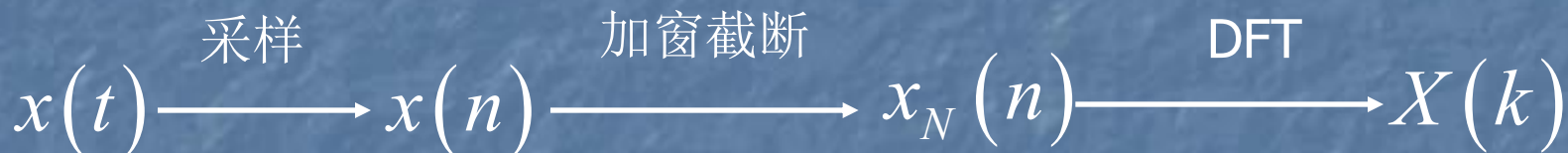
混叠现象即是频带无限，时域采样导致频谱周期延拓，频谱混叠到一起造成的

方案：抗混叠滤波、减小采样间隔 T_s

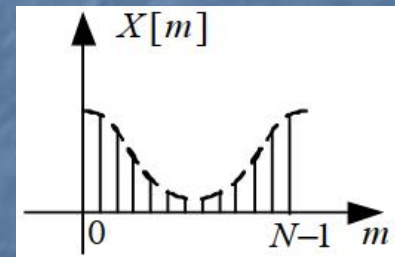
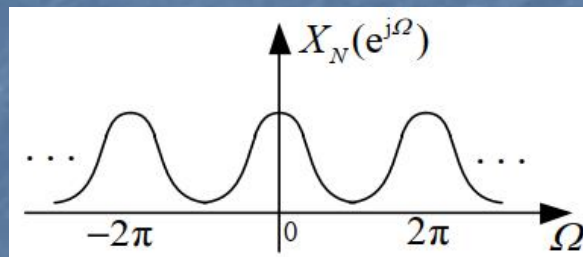
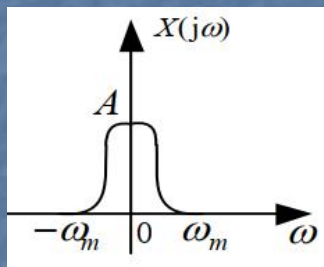
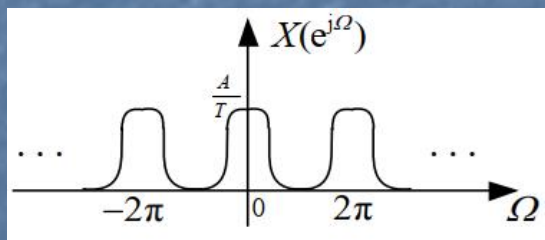


实际工程中的误差

■ 泄露现象（截断效应）



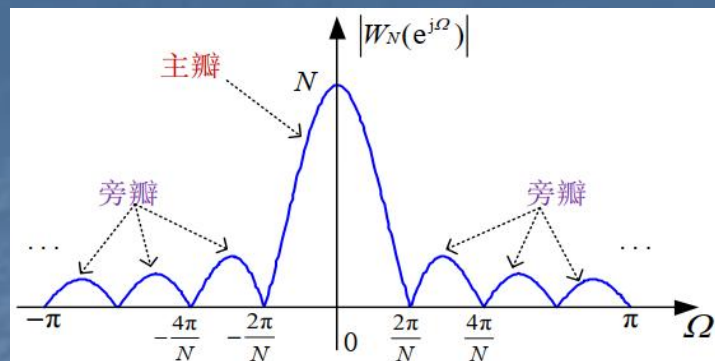
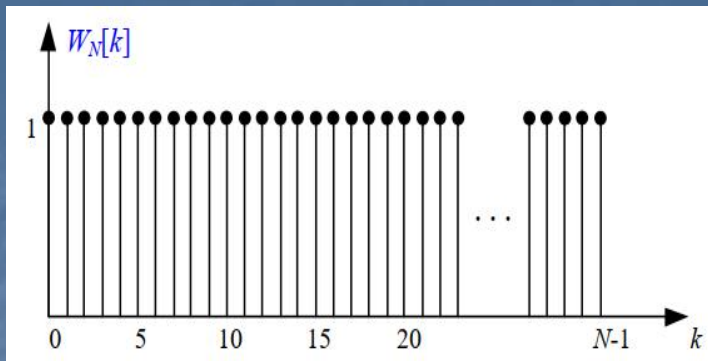
时间无限
频带有限



泄露现象即是时间无限，为了进行DFT，将时域进行截断（时域上加窗），对应的频域上，信号频谱与窗的频谱进行卷积，造成频谱泄露。



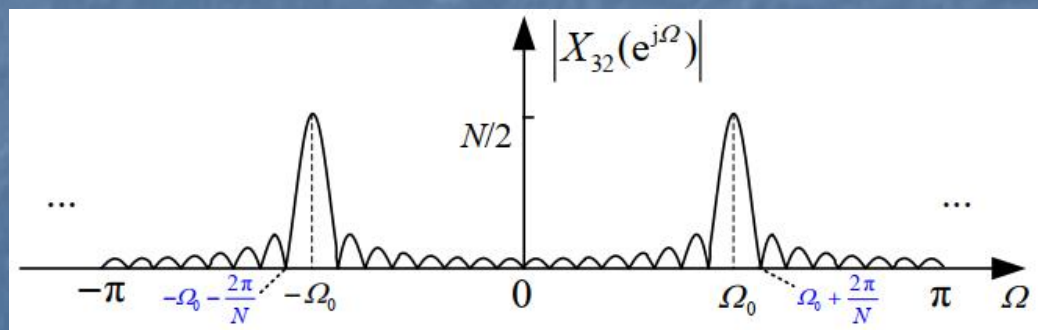
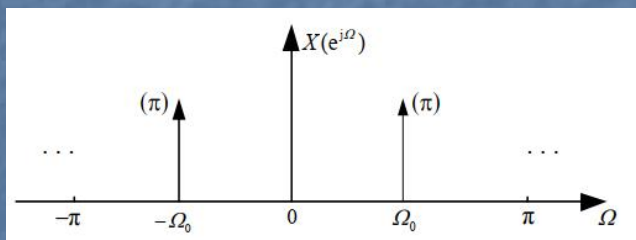
矩形窗:



例: $x(n) = \cos(\frac{\pi}{4}n)$ 其频谱如下:

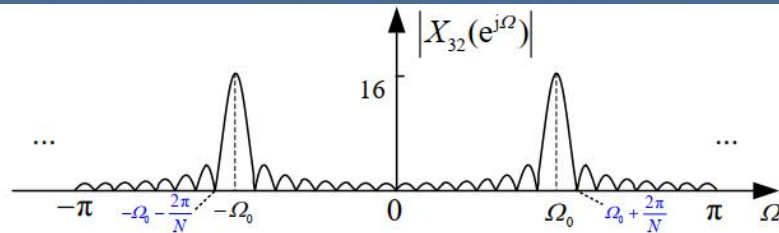
$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\delta(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi l) + \delta(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi l)]$$

加矩形窗截断后 $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$

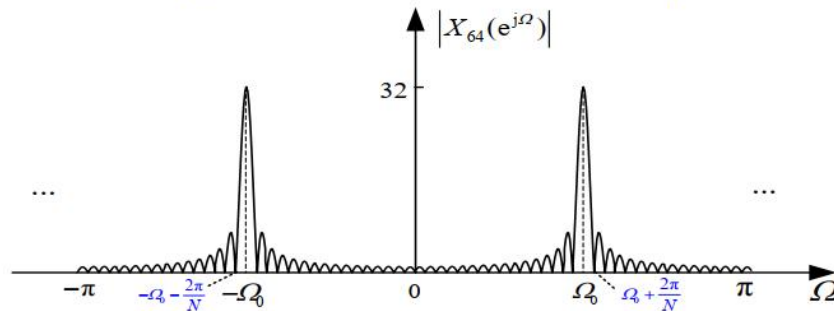


N的取值不同, 会使得主瓣宽度改变; 选不同的窗可以改变抑制旁瓣。

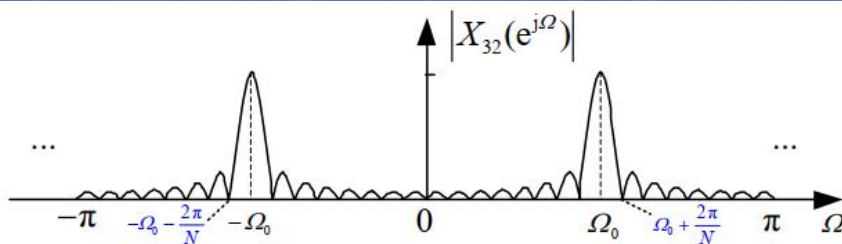
$N=32$



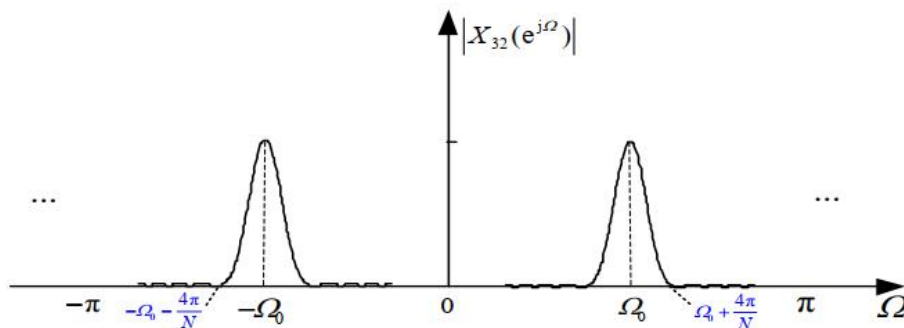
$N=64$



矩形窗



海明窗

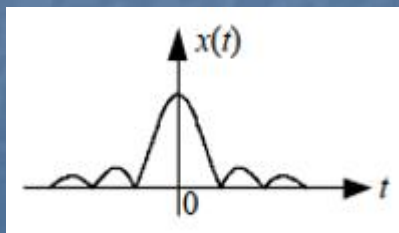
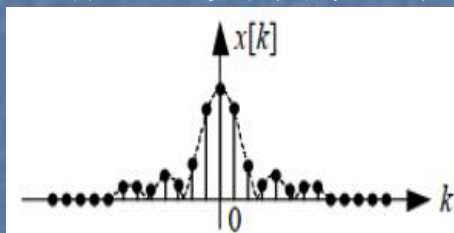




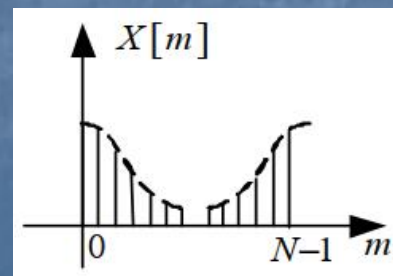
截断后的频谱与原序列频谱存在差别表现为:

■ 频谱泄漏: 在上图中, 原谱线是离散谱线, 而截短后, 原来的离散谱线向附近展宽, 常称这种展宽为泄漏。使谱分辨率 F 降低。泄漏原因是截取的窗函数有限长。

■ 谱间干扰: 在主谱线两边形成很多旁瓣, 引起不同频率分量间的干扰 (简称谱间干扰), 影响频谱分辨率 F , 旁瓣的信号很强时, 可能湮没弱信号的主谱线, 导致较大的偏差。

 T_p  NT_s

$$F = \frac{F_s}{N} = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T_p}$$

 F_s



上述两种现象都是由于截短序列引起的，统称截断效应。
为了减小截短效应的影响，可采取以下措施：

- 窗函数不变，增大采样点 N 值：

使主瓣变窄（ $4\pi/N \downarrow$ ），提高频率分辨率。但旁瓣个数，相对幅度大小不变，即谱间干扰不变。

- 采样点 N 不变，改变窗函数：

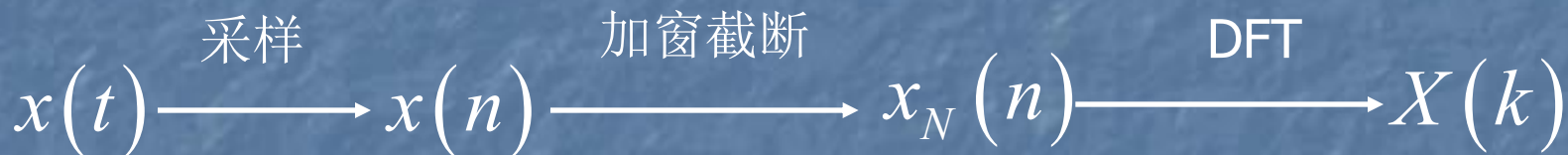
选用旁瓣小的窗函数，使旁瓣个数减少，相对幅度减小，谱间干扰减小。但旁瓣越小，其主瓣就越宽，从而使谱分辨率降低。

谱分辨率与谱间干扰是一对矛盾体，要综合考虑和兼顾。

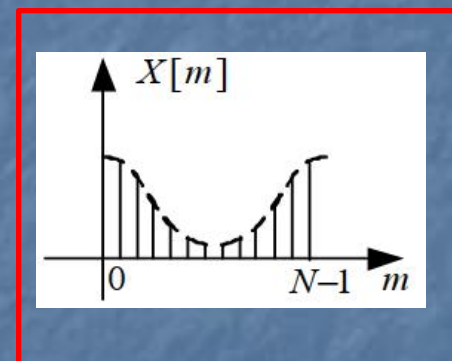
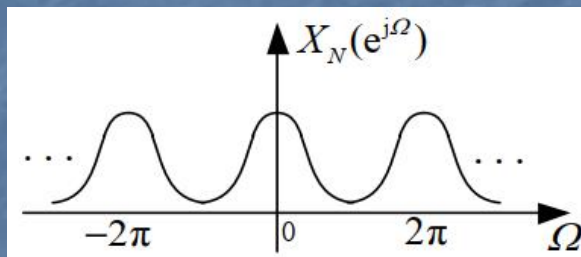
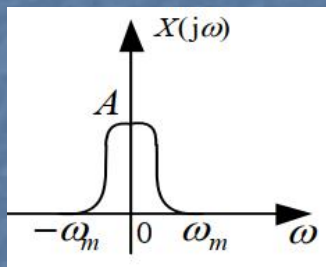
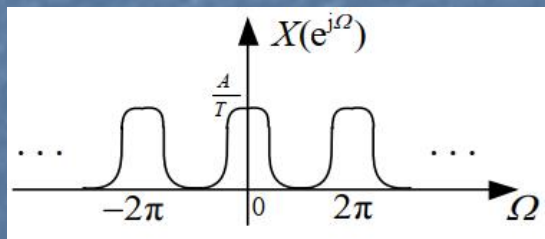


实际工程中的误差

■ 栅栏效应



时间无限
频带有限



DFT 点数

对信号的频谱进行有限点采样，有可能漏掉(挡住)部分的频谱分量。

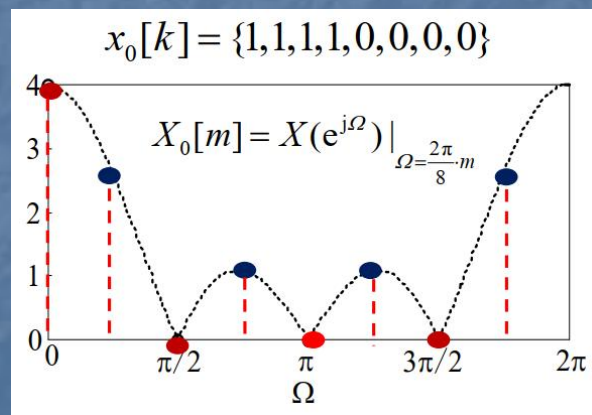
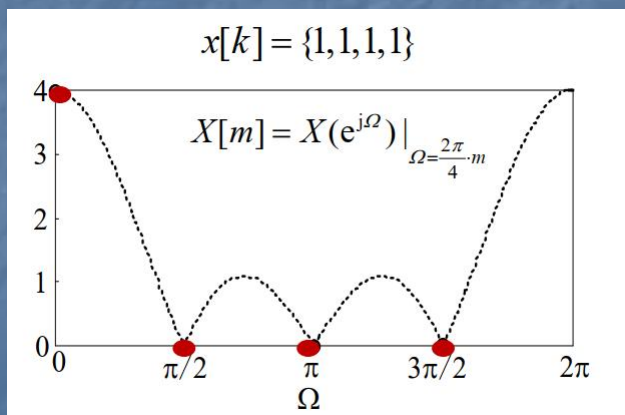


减少栅栏效应的措施:

1. 对有限长序列，在原序列尾部补**0**，增大 **N** ，以增加采样点；

2. 对无限长序列，可以增大截取长度及**DFT**变换区间长度；

从而减小频域采样间隔，增加频域采样点数、改变采样点位置，使原来漏掉的某些频谱分量被检测出来。





例：对实信号进行谱分析，要求谱分辨率 $F \leq 10 \text{ Hz}$ ，信号最高频率 $f_c = 2.5 \text{ kHz}$ ，试确定最小记录时间 $T_{p\min}$ ，最大的采样间隔 T_{\max} ，最少的采样点数 N_{\min} 。如果 f_c 不变，要求谱分辨率增加一倍，最少的采样点数和最小的记录时间是多少？

$$F = \frac{F_s}{N} = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T_p}$$

解：根据信号观察时间 T_p 的选择原则： $T_p \geq 1/F = 1/10 = 0.1 \text{ s}$ $T_{p\min} = 0.1 \text{ s}$

因为要求： $F_s \geq 2f_c$ ，最小的采样频率为 $2f_c$ ，所以：

$$T_{\max} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2 \times 2500} = 0.2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$N_{\min} = \frac{T_p}{T} = \frac{0.1}{0.2 \times 10^{-3}} = 500$$

取 $N=512$

频率分辨率提高一倍，即： $F=5 \text{ Hz}$

$$T_{p\min} = \frac{1}{F} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$N_{\min} = \frac{T_p}{T} = \frac{0.2}{0.2 \times 10^{-3}} = 1000$$

取 $N=1024$



作业

- 1. (1) (3) (5)
- 12(2)
- 14
- 15 (1)
- 18