

7.3 频率采样法设计FIR数字滤波器

引言：窗函数法的核心问题

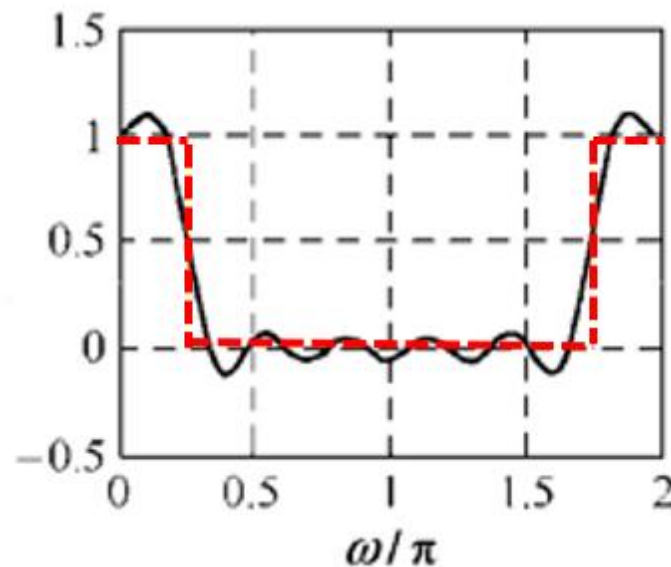
过渡带和阻带衰减不可调和（主瓣窄则副瓣高）

频率采样法的思路是：

直接在频域对理想滤波器的频率响应进行采样，再通过IDFT得到“时域冲激响应”，从而灵活控制频域采样点的取值（包括过渡带的采样点），实现对通带、阻带、过渡带的精确设计。

1、设计原理

频率采样法：[频域采样](#)



频域采样：使得所设计的FIR滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 在N个取样点上与理想滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 相等。

$$H_d(e^{j\omega_k}) = H(e^{j\omega_k}), \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = (0 \cdots N-1)$$

2、设计目标

FIR数字滤波器的设计需要找出满足需求的 $h(n)$

(1) 频域逼近——频域上采样点相等: $H_d(e^{j\omega_k}) = H(e^{j\omega_k}) \quad \omega_k = \frac{2\pi}{N}k,$
 $k=(0\cdots\cdots N-1)$

(2) 满足线性相位

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \quad \text{频域N点采样后}$$

$$H_d(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega_k n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)W_N^{kn} = H_d(k)$$

$$H_d(k) = \text{DFT}[h(n)] \quad h(n) = \text{IDFT}[H_d(k)]$$

只要设定好N个频域采样点H(k)，就能唯一确定FIR滤波器。

2、设计目标

FIR数字滤波器的设计需要找出满足需求的 $h(n)$

(1) 频域逼近——频域上采样点相等: $H_d(e^{j\omega_k}) = H(e^{j\omega_k})$ $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$,
 $k=(0\cdots\cdots N-1)$

(2) 满足线性相位

$$H_d(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$$

$$H_d(e^{j\omega_k}) = H_g(\omega_k)e^{-j\theta(\omega_k)} = H_g\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{-j\theta\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

$$h(n) = \text{IDFT}[H_d(k)] = \text{IDFT}[H_d(e^{j\omega_k})] = \text{IDFT}[H_g(\omega_k)e^{-j\theta(\omega_k)}]$$

3、设计步骤

(1) 由 $H_d(e^{j\omega})$ 确定FIR数字滤波器的类型和 $H_g(\omega)$

(2) 由FIR数字滤波器的类型确定相位 $\theta(\omega)$

(3) 确定 $H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上N个采样点的值 $H_d(k)$

$$H_d(k) = H_g(\omega_k)e^{-j\theta(\omega_k)}$$

(4) 对 $H_d(k)$ 做N点IDFT, 得到有限长因果序列 $h(n)$

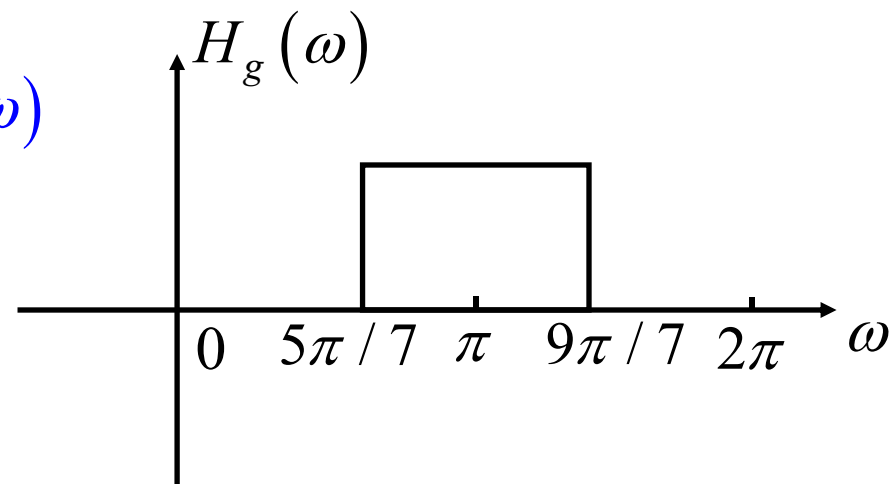
$$h(n) = \text{IDFT}[H_d(k)]$$

例：利用频率采样法设计截止频率为 $\omega_c = \frac{5}{7}\pi \text{ rad}$ 的高通线性相位FIR滤波器，采样点数为N=7

(1) 由 $H_d(e^{j\omega})$ 确定FIR数字滤波器的类型和 $H_g(\omega)$

高通可以选择情况1和情况4，选择情况1；

$$H_g(\omega) = \begin{cases} 1 & 5\pi/7 \leq \omega \leq 9\pi/7 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

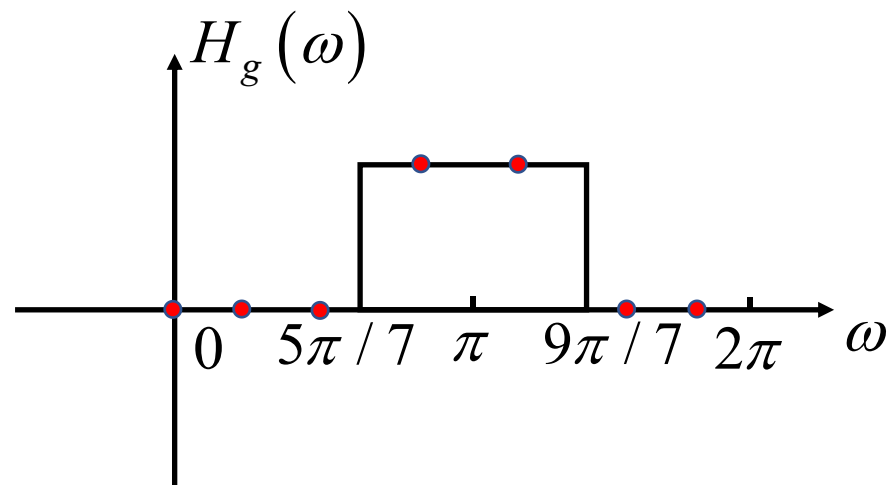


(2) 由FIR数字滤波器的类型确定相位

$$\theta(\omega) = -\tau\omega = -\frac{N-1}{2}\omega = 3\omega$$

(3) 确定 $H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上N个采样点的值 $H_d(k)$

$$H_d(k) = H_g(\omega_k)e^{-j\theta(\omega_k)} = e^{-j3\omega_k} H_g(\omega_k), \omega_k = \frac{2\pi}{7}k, k = 0, 1, \dots, 6$$



(4) 对 $H_d(k)$ 做N点IDFT, 得到有限长因果序列 $h(n)$

$$h(n) = \text{IDFT}[H_d(k)] = \frac{2}{7} \cos\left[\frac{6\pi}{7}[n-3]\right]$$

4、误差及改进方法

误差： 频域的采样对应时域的周期化，从而导致时域混叠。

$$H_d(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{频域的采样}} H_d(k)$$

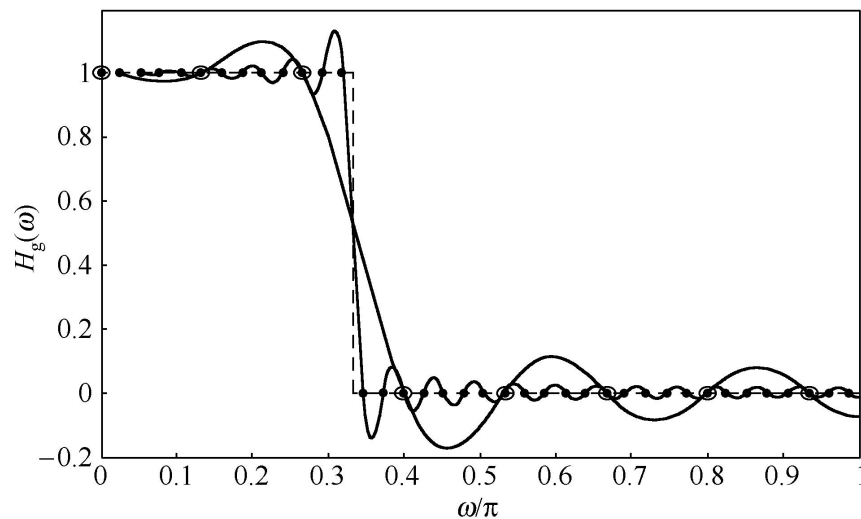
$$h_d(n) \xrightarrow{\text{时域周期化}} h(n)$$

$h_d(n)$ 无限长，周期化后时域混叠，取主值区间后得到 $h(n)$ 失真。

$$h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_d(n+mN) R_N(n)$$

改进： 增大采样点数 N ，可以减小时域混叠；同时，

可以在频域上减小过渡带宽度 $\Delta\omega = \omega_p - \omega_s = \frac{2\pi}{N}$ 。



$N=15$ 和 $N=75$

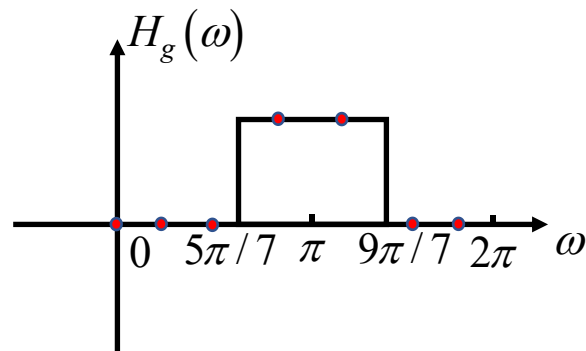
然而，阻带衰减并未提高

如何改进阻带衰减？

原因：增加采样点数 N 不能改进阻带衰减的原因是，从通带到阻带所选择的样本点出现从1到0的跳变。

想象理想滤波器的频率响应是“一堵垂直的墙”：通带在墙左边（全 1），阻带在墙右边（全 0），墙的位置就是截止频率。

当我们对这堵墙“采样”时，采样点 $H(k)$ 要么在墙左边（取 1），要么在墙右边（取 0）——两个相邻采样点一个是 1，一个是 0，中间没有过渡，形成“硬跳变”。



如何改进阻带衰减？

原因： 增加采样点数N不能改进阻带衰减的原因是，从通带到阻带所选择的样本点出现从1到0的跳变。

改进： 在过渡带间增加幅度在0-1之间的过渡点。

m	1	2	3
α_s	44~54 dB	65~75 dB	85~95 dB

总结：“单纯增加N只是让采样点更密，但只要通带和阻带的采样点仍是1和0的硬跳变，吉布斯现象就会存在，阻带衰减无法改进。必须在跳变处加过渡采样点（变跳变为渐变），才能真正提高阻带衰减。”

5、加入过渡点设计步骤

(1) 由阻带衰减确定过渡点数量 m

(2) 由过渡带宽度确定采样点数 N $\Delta\omega = \omega_p - \omega_s = \frac{2\pi}{N}$

(3) 由 $H_d(e^{j\omega})$ 确定FIR数字滤波器的类型和 $H_g(\omega)$

(4) 由FIR数字滤波器的类型确定相位 $\theta(\omega)$

(5) 确定 $H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)}$ 在 $[0, 2\pi]$ 区间上 N 个采样点的值 $H_d(k)$

$$H_d(k) = H_g(\omega_k)e^{-j\theta(\omega_k)}$$

(6) 对 $H_d(k)$ 做 N 点IDFT, 得到有限长因果序列 $h(n)$

$$h(n) = \text{IDFT}[H_d(k)]$$

7.5 IIR和FIR数字滤波器的比较

1、从性能上

❖ IIR滤波器:

- (1) 极点位于 z 平面任意位置，可用较低的阶数获得高的选择性，所用的存储单元少，经济、效率高；
- (2) 相位为非线性，若用全通网络进行校正相位，增大阶数和复杂性；

❖ FIR滤波器:

- (1) 极点位于原点，只能用较高的阶数达到高的选择性；
- (2) 可以达到严格的线性相位；

2、从结构上

❖ IIR滤波器:

采用递归结构，极点须位于单位圆内，否则系统不稳定。

❖ FIR滤波器:

主要采用非递归结构，不存在不稳定现象，运算误差较小；
还可以用FFT算法，在相同阶数的条件下，运算速度与IIR
相比，可以快很多；

3、从设计上

❖ IIR滤波器：

- (1) 可以借用模拟滤波器进行设计，其有效的封闭形式的设计公式可准确计算，计算工作量较小；
- (2) 主要用于设计规格化的选频滤波器

❖ FIR滤波器：

- (1) 一般没有封闭形式的设计公式；设计借助于计算机
- (2) 可设计各种幅频特性和相频特性的滤波器

从以上讨论可看出，IIR滤波器与FIR滤波器各有特点，所以可以由实际应用时的要求，从多方面考虑加以选择。

作业

- 1 (1)
- 3
- 4
- 13 (1)

补充

5.5 线性相位结构

线性相位结构是FIR系统的直接型结构的简化网络结构，特点是网络具有线性相位特性，比直接型结构节约了近一半的乘法器。第7章已经证明，如果系统具有线性相位，它的单位脉冲响应满足下面公式：

$$h(n) = \pm h(N - n - 1) \quad (5.5.1)$$

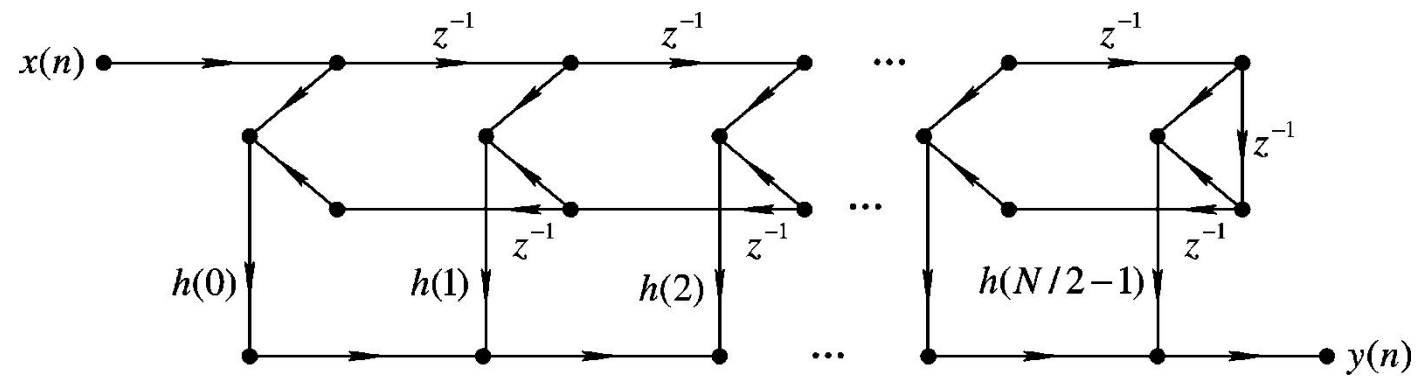
式中，“+”代表第一类线性相位滤波器；“-”号代表第二类线性相位滤波器。
系统函数满足下面两式：

当 N 为偶数时，

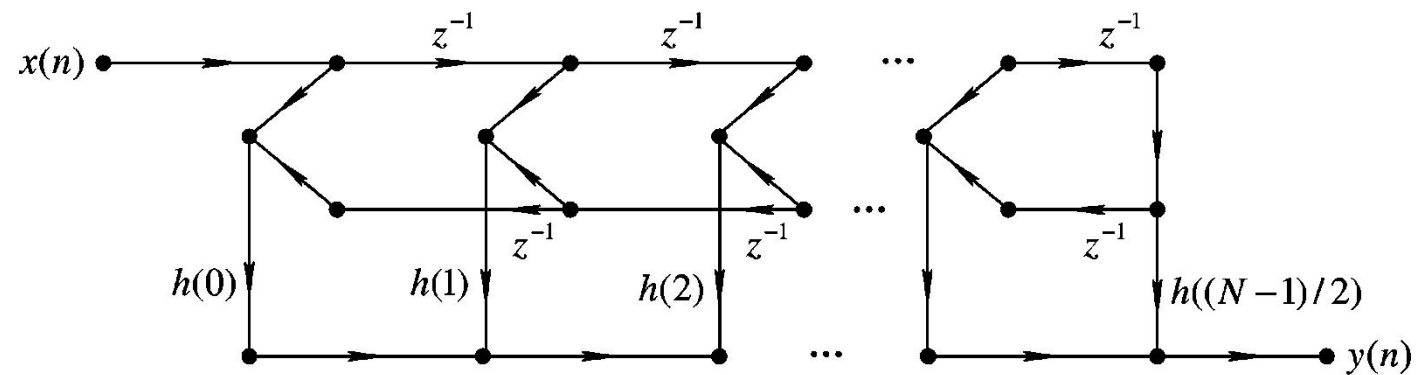
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}] \quad (5.5.2)$$

当 N 为奇数时，

$$H(z) = \sum_{n=0}^{(\frac{N-1}{2})-1} h(n) [z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}] + h(\frac{N-1}{2}) z^{-\frac{N-1}{2}} \quad (5.5.3)$$

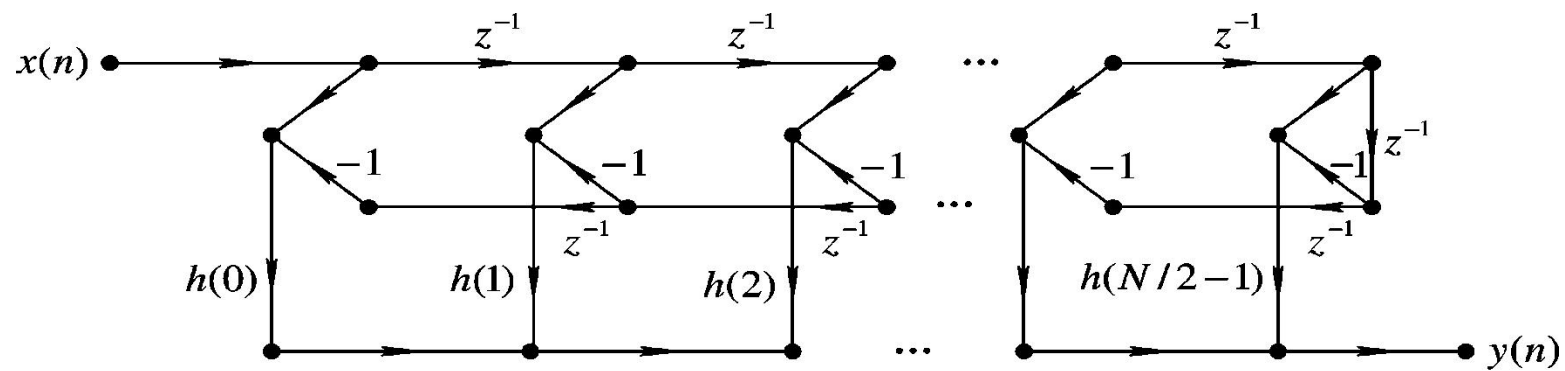


(a) N 为偶数

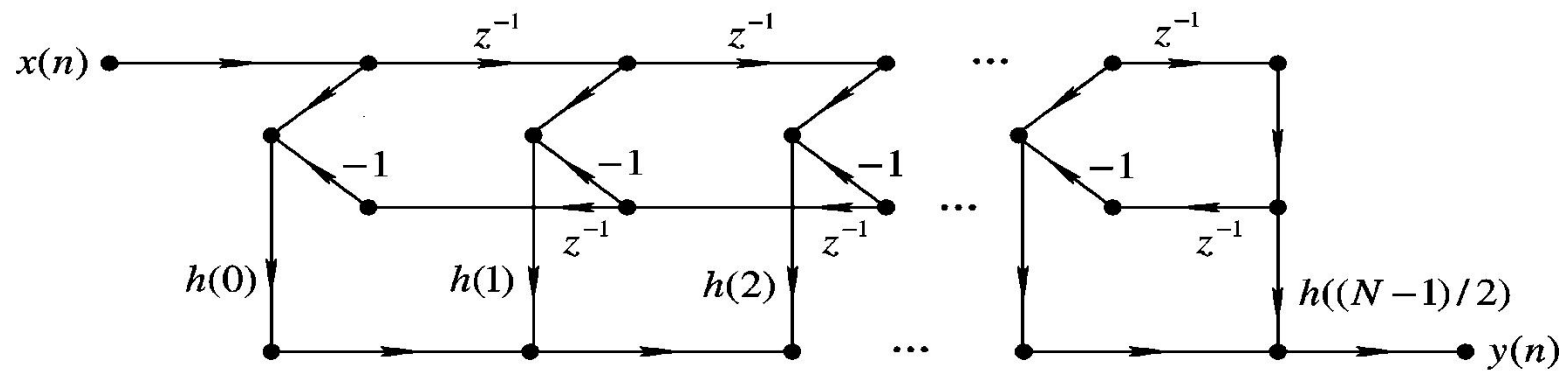


(b) N 为奇数

图5.5.1 第一类线性相位网络结构流图



(a) N 为偶数



(b) N 为奇数

图5.5.2 第二类线性相位网络结构流图