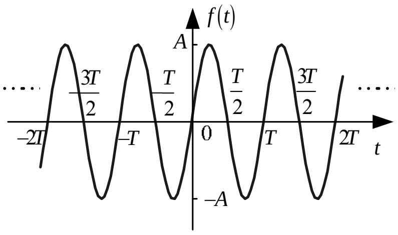
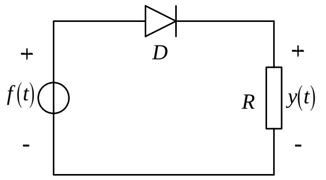
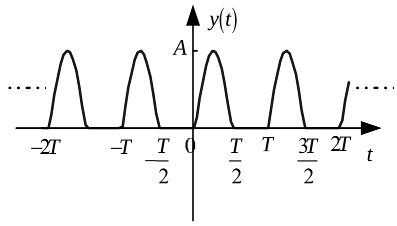
4-36 信号通过非线性系统所产生的失真称为非线性失真。其特点是在输出信号中产生了原信号中所没有的或新的频率成分。题图 4-36（b）所示为一非线性电路，其输入信号 $f(t)$（题图 4-36（a）所示）为单一正弦信号，其中只含有 f_0 的频率成分，经过该系统的非线性元件——二极管（理想器件，其阀值电压设为 0 伏）后得到半波整流信号（题图 4-36（c）所示），在波形上产生了失真，试计算输出信号 $y(t)$ 的傅里叶级数表示式，画出其幅度谱图。从幅度谱中，可看出输出信号产生了由无穷多个 f_0 的谐波分量构成的新频率。



（a）



（b）



（c）

题图 4-36 非线性失真

解：由已知可得输入信号的频率为 f_0，故其周期 $T=\dfrac{1}{f_0}$，角频率 $\omega_1=2\pi f_0$，其时域表达式为：$f(t)=A\cdot\sin(2\pi f_0\cdot t)$。由（c）图可知输出信号也为周期为 T 的周期信号，基波角频率仍为 $\omega_1=2\pi f_0$，在一个周期 $(0,T)$ 内，其表达式为：

$$y(t)=\begin{cases}A\cdot\sin(\omega_1\cdot t), & 0<t<\dfrac{T}{2}\\[2mm] 0, & \dfrac{T}{2}<t<T\end{cases}$$

故其傅里叶级数的系数为：

$$F_n=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}A\sin(\omega_1 t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}T}\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t(n-1)}\mathrm{d}t-\frac{1}{2\mathrm{j}T}\int_0^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t(n+1)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}T}\cdot\left[\frac{1}{-\mathrm{j}\omega_1(n-1)}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t(n-1)}\right]_0^{\frac{T}{2}}-\frac{1}{2\mathrm{j}T}\cdot\left[\frac{1}{-\mathrm{j}\omega_1(n+1)}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_1 t(n+1)}\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

由于 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T}$，故 $T\omega_1=2\pi$，则上式可写为

$$\frac{1}{4\pi(n-1)}\cdot\left[e^{-j\pi(n-1)}-1\right]-\frac{1}{4\pi(n+1)}\cdot\left[e^{-j\pi(n+1)}-1\right]$$

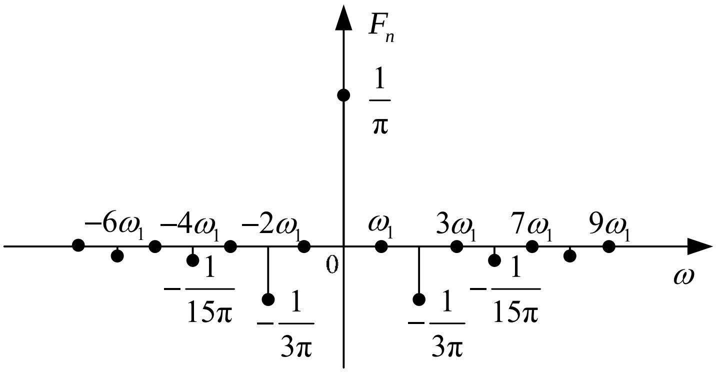
当n为奇数时，$n-1$，$n+1$为偶数，则$e^{-j\pi(n-1)}=e^{-j\pi(n+1)}=1$。故$F_n=0$。

当n为偶数时，$n-1$，$n+1$为奇数，则$e^{-j\pi(n-1)}=e^{-j\pi(n+1)}=-1$。故

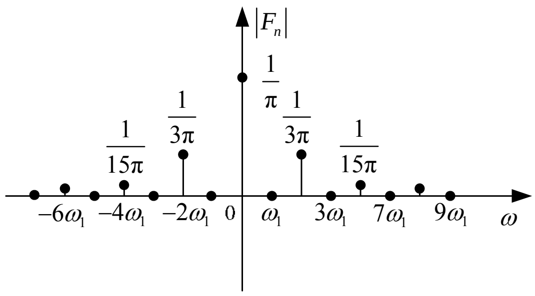
$$F_n=\frac{-2}{4\pi(n-1)}-\frac{-2}{4\pi(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi(n+1)}-\frac{1}{\pi(n-1)}\right]$$

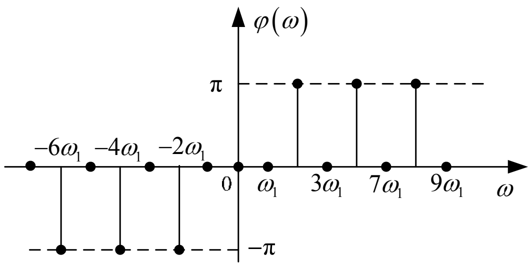
所以，$F_n=\begin{cases}0 & ,\ n\ is\ odd\\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi(n+1)}-\frac{1}{\pi(n-1)}\right]=-\frac{1}{(n^2-1)\pi}, & n\ is\ even\end{cases}$

其频谱图如下图所示：



或画出其振幅谱和相位谱（注意：振幅谱是偶函数；相位谱是奇函数）分别如下图所示：





4-9 计算下列各信号的傅里叶变换

（1）$(e^{-at}\cos\omega_0 t)u(t),\ a>0$

解：根据欧拉公式$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)$得：

$$(e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t)\,u(t)=\frac{1}{2}e^{-\alpha t}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)u(t)=\frac{1}{2}\left[e^{(j\omega_0-\alpha)t}+e^{-(j\omega_0+\alpha)t}\right]u(t)$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(a-j\omega_0+j\omega\right)}+\frac{1}{\left(a+j\omega_0+j\omega\right)}\right]$$

（2） $e^{2+t}u(-t+1)$

解： $e^{2+t}u(-t+1)\leftrightarrow\int_{-\infty}^{-1}e^{2+t}\cdot e^{-j\omega t}dt=e^2\int_{-\infty}^{-1}e^{(1-j\omega)t}dt=\frac{e^2}{1-j\omega}\cdot e^{(1-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{-1}$

$$=\frac{e^2}{1-j\omega}\cdot\left[e^{-(1-j\omega)}-0\right]=\frac{e^{j\omega+1}}{1-j\omega}$$

（4） $e^{-3|t|}[u(t+2)-u(t-3)]$

解：设 $x(t)$=$e^{-3|t|}\left[u(t+2)-u(t-3)\right]$，则

$$X\left(j\omega\right)=\int_{-2}^{0}e^{3t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{3}e^{-3t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1-e^{-2(3-j\omega)}}{3-j\omega}-\frac{e^{-3(3+j\omega)}-1}{3+j\omega}$$

（5） $\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\delta(t-kT),\quad\left|\alpha\right|<1$

解：
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\delta(t-kT)=\alpha^0\delta(t)+\alpha^1\delta(t-T)+\alpha^2\delta(t-2T)+\cdots$$

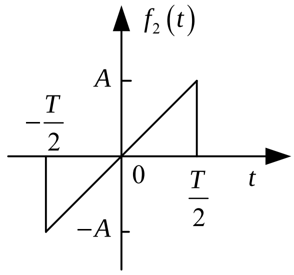
由于 α^k 是 k 的函数，与 t 无关，故当 k 一定时，α^k 相等于常数。而 $\delta(t-kT)\leftrightarrow e^{-jk\omega T}$，故

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\delta(t-kT)\leftrightarrow\alpha^0\cdot1+\alpha^1\cdot e^{-j\omega T}+\alpha^2\cdot e^{-j2\omega T}+\cdots$$

由于 $\frac{a_k}{a_{k-1}}=\alpha\cdot e^{-j\omega T}$（复数），又因为 $\left|\alpha\right|<1$，故 $\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|=\left|\alpha\right|<1$，利用等比数列求和公式得：

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k\delta(t-kT)\leftrightarrow\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega T}}$$

4-10 求题图 4-10 所示信号的傅里叶变换



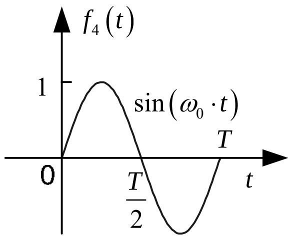
解：由该信号波形图可得 $f_2(t)=\frac{2A}{T}\cdot t\cdot\left[\mathrm{u}\left(t+\frac{T}{2}\right)-\mathrm{u}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2A}{T}t\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2A}{T}\cdot\frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}t\cdot\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})=\frac{\mathrm{j}2A}{\omega T}\left[t\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}-\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\mathrm{j}2A}{\omega T}\left[\frac{T}{2}(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\omega T}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\omega T}{2}})-\frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\right]=\frac{\mathrm{j}2A}{\omega T}\left[T\cos\frac{\omega T}{2}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\omega T}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\omega T}{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{\mathrm{j}2A}{\omega}\left[\cos\frac{\omega T}{2}-Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right]\qquad(\omega\neq 0)$$

当 $\omega=0$ 时，$F_2(0)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2A}{T}t\mathrm{d}t=0$



解：由该信号波形图可得 $f_4(t)=\sin(\omega_0\cdot t)\cdot\left[\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-T)\right]$

其中 $\sin(\omega_0\cdot t)\leftrightarrow \mathrm{j}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$

$$\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-T)=g_T\left(t-\frac{T}{2}\right)\leftrightarrow T\cdot Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot\frac{T}{2}}$$

利用卷积特性可得：

$$\sin(\omega_0\cdot t)\cdot\left[\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-T)\right]$$

$$\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\cdot\left\{\mathrm{j}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]\right\}*\left\{T\cdot Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\cdot\frac{T}{2}}\right\}$$

$$=\frac{\mathrm{j}T}{2}\left\{Sa\left[\frac{(\omega+\omega_0)T}{2}\right]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega+\omega_0)\cdot\frac{T}{2}}-Sa\left[\frac{(\omega-\omega_0)T}{2}\right]\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)\cdot\frac{T}{2}}\right\}$$

4-11 求下列各傅里叶变换对应的连续时间信号

（1）$X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2\sin\left[3\left(\omega-2\pi\right)\right]}{\omega-2\pi}$

解：$X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2\sin\left[3\left(\omega-2\pi\right)\right]}{\omega-2\pi}=\dfrac{2\times3\sin\left[3\left(\omega-2\pi\right)\right]}{3\left(\omega-2\pi\right)}=6Sa\left[3\left(\omega-2\pi\right)\right]$

利用常用信号的傅里叶变换对可得

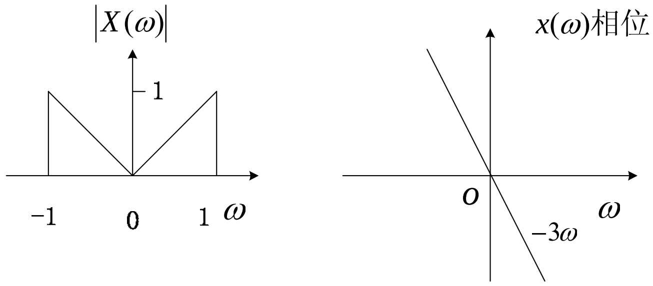
$$g_\tau\left(t\right)\leftrightarrow\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{\tau}g_\tau\left(t\right)\leftrightarrow Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由 $X(\mathrm{j}\omega)$ 的表达式可得 $\dfrac{\tau}{2}=3\Rightarrow\tau=6$

再利用频移特性可得：

$$6Sa\left[3\left(\omega-2\pi\right)\right]\leftrightarrow6\cdot\frac{1}{6}g_6\left(t\right)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\cdot t}=g_6\left(t\right)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\cdot t}$$

（3）$X(\mathrm{j}\omega)$ 的幅值和相位特性曲线如题图 4-11(a)所示



题图 4-11(a)

解：由幅度谱图形可得：$\left|X(\omega)\right|=\left(-\omega\right)\cdot\left[\mathrm{u}\left(\omega+1\right)-\mathrm{u}\left(\omega\right)\right]+\omega\cdot\left[\mathrm{u}\left(\omega\right)-\mathrm{u}\left(\omega-1\right)\right]$

故 $X(\mathrm{j}\omega)=\left|X(\omega)\right|\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=\left|X(\omega)\right|\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}$

根据傅里叶逆变换的定义可得

$$\begin{aligned}x(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left\{\left(-\omega\right)\cdot\left[\mathrm{u}\left(\omega+1\right)-\mathrm{u}\left(\omega\right)\right]+\omega\cdot\left[\mathrm{u}\left(\omega\right)-\mathrm{u}\left(\omega-1\right)\right]\right\}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-1}^{0}\left(-\omega\right)\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega+\int_{0}^{1}\omega\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\left\{\frac{\omega}{\mathrm{j}(t-3)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-3)}-\frac{1}{\left[\mathrm{j}(t-3)\right]^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-3)}\right\}\Bigg|_{-1}^{0}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\omega}{\mathrm{j}(t-3)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-3)}-\frac{1}{\left[\mathrm{j}(t-3)\right]^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-3)}\right\}\Bigg|_{0}^{1}$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\left\{-\frac{1}{\left[\mathrm{j}(t-3)\right]^2}-\frac{-1}{\mathrm{j}(t-3)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(t-3)}+\frac{1}{\left[\mathrm{j}(t-3)\right]^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(t-3)}\right\}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\mathrm{j}(t-3)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t-3)}-\frac{1}{\left[\mathrm{j}(t-3)\right]^2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t-3)}+\frac{1}{\left[\mathrm{j}(t-3)\right]^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{\mathrm{j}(t-3)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t-3)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(t-3)}\right]-\frac{1}{\left[\mathrm{j}(t-3)\right]^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t-3)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(t-3)}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(t-3)}{t-3}+\frac{\cos(t-3)}{(t-3)^2}\right]$$

（4）$X(\mathrm{j}\omega)=2[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]+3[\delta(\omega-2\pi)+\delta(\omega+2\pi)]$

解：由于

$$\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$
$$\sin(\omega_0 t)\leftrightarrow\mathrm{j}\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$$2[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]=\frac{-2}{\mathrm{j}\pi}\left\{\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+1)-\delta(\omega-1)]\right\}$$

故 $\quad x(t)=\frac{2\mathrm{j}}{\pi}\sin t+\frac{3}{\pi}\cos(2\pi t)$

（6）$F(\mathrm{j}\omega)=\frac{4\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

解：由于 $\mathrm{e}^{-\alpha|t|}(\alpha>0)\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\Rightarrow\mathrm{e}^{-|t|}=\mathrm{e}^{-\alpha|t|}\Big|_{\alpha=1}\leftrightarrow\frac{2}{1+\omega^2}$

利用频域微分特性可得：

$$(-\mathrm{j}t)\cdot\mathrm{e}^{-|t|}\leftrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)=\frac{-4\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$$

故 $F(\mathrm{j}\omega)=\frac{4\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}\leftrightarrow\mathrm{j}t\cdot\mathrm{e}^{-|t|}$

（7）$\delta(\omega-2000\pi)$

解：由$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$及频移特性可得：

$$\delta\left(\omega-2000\pi\right)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2000\pi t}$$

4-13 试求下列信号的频谱函数

（2）$g_{2\pi}\left(t\right)\cdot\cos\omega_0 t$

解：由于$g_{2\pi}\left(t\right)\leftrightarrow 2\pi Sa\left(\frac{2\pi\omega}{2}\right)$，$\cos(\omega_0 t)\leftrightarrow\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$，由卷积特性可得：

$$\begin{aligned}g_{2\pi}\left(t\right)\cdot\cos\omega_0 t&\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\cdot\left\{2\pi Sa\left(\pi\omega\right)*\pi\left[\delta\left(\omega+\omega_0\right)+\delta\left(\omega-\omega_0\right)\right]\right\}\\&=\pi\left[Sa\left(\pi\left(\omega+\omega_0\right)\right)+Sa\left(\pi\left(\omega-\omega_0\right)\right)\right]\end{aligned}$$

（3）$\frac{\sin 2\pi\left(t-3\right)}{\pi\left(t-3\right)}$

解：$$\frac{\sin 2\pi\left(t-3\right)}{\pi\left(t-3\right)}=2\cdot\frac{\sin 2\pi\left(t-3\right)}{2\pi\left(t-3\right)}=2Sa\left[2\pi\left(t-3\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\left\{4\pi\cdot Sa\left[\frac{4\pi\left(t-3\right)}{2}\right]\right\}$$

利用常用信号变换对，对称性及时移性可得：

$$\frac{1}{2\pi}\left\{4\pi\cdot Sa\left[\frac{4\pi\left(t-3\right)}{2}\right]\right\}\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi g_{4\pi}\left(\omega\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}=g_{4\pi}\left(\omega\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega}$$

（4）$\mathrm{e}^{-(3+3t)}\delta\left(t\right)$

解：利用$\delta\left(t\right)$函数的性质及其傅里叶变换可得：

$$\mathrm{e}^{-(3+3t)}\delta\left(t\right)=\mathrm{e}^{-3}\delta\left(t\right)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-3}\cdot 1=\mathrm{e}^{-3}$$

4-14 已知信号$f\left(t\right)$的傅里叶变换为$F\left(\mathrm{j}\omega\right)$，试利用傅里叶变换的性质求如下函数的傅里叶变换

（1）$t\cdot f\left(3t\right)$

解：利用尺度变换及频域微分特性可得：

$$f(3\mathrm{t})\leftrightarrow\frac{1}{3}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{3}\right),\ \left(-\mathrm{j}t\right)\cdot f\left(3t\right)\leftrightarrow\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{3}\right)}{\mathrm{d}\omega}\Rightarrow t\cdot f\left(3t\right)\leftrightarrow\frac{\mathrm{j}}{3}\frac{\mathrm{d}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{3}\right)}{\mathrm{d}\omega}$$

令$\frac{\omega}{3}=\omega'$，则$\mathrm{d}\omega=3\mathrm{d}\omega'$，可得：

$$t\cdot f(3t)\leftrightarrow \frac{\mathrm{j}}{9}\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega')}{\mathrm{d}\omega'}$$

将上式中的ω'用ω替换（即令$\omega'=\omega$）得：

$$t\cdot f(3t)\leftrightarrow \frac{\mathrm{j}}{9}\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

（2）$(t-5)\cdot f(t)$

解：由于$tf(t)\leftrightarrow \mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$，　$5f(t)\leftrightarrow 5F(\mathrm{j}\omega)$

由线性特性可得：$(t-5)\cdot f(t)=t\cdot f(t)-5f(t)\leftrightarrow \mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}-5F(\mathrm{j}\omega)$

（3）$(t-1)\cdot\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$

解：由时域微分特性可得：$\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow \mathrm{j}\omega\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$

由频域微分特性得：$t\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow \mathrm{j}\left[\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)\right]'=-F(\mathrm{j}\omega)-\omega\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$

故由线性性得：

$$(t-1)\cdot\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=t\cdot\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow -F(\mathrm{j}\omega)-\omega\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}-\mathrm{j}\omega\frac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

（4）$(2-t)\cdot f(2-t)$

解：方法一：

$(t+2)f(t+2)\leftrightarrow \mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}F'(\mathrm{j}\omega)$（时移性及频域微分）

由尺度变换（注意：只将t用$-t$替换，$a=-1$）得：

$$(2-t)f(2-t)\leftrightarrow \mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\left[F'(\mathrm{j}\omega)\right]_{\omega=-\omega}=\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\frac{\mathrm{d}F(-\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}(-\omega)}=-\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\frac{\mathrm{d}F(-\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}(\omega)}$$

方法二：$(2-t)\cdot f(2-t)=-(t-2)\cdot f\left[-(t-2)\right]$

由于$t\cdot f(t)\leftrightarrow \mathrm{j}\dfrac{\mathrm{d}F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$，故由尺度变换（$a=-1$）得：

$$(-t)\cdot f(-t)\leftrightarrow \mathrm{j}\cdot\frac{1}{|-1|}\frac{\mathrm{d}F(-\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}(-\omega)}=-\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F(-\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}$$

由时移性得：

$$-(t-2)\cdot f\left[-(t-2)\right]\leftrightarrow -\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}F(-\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

4-15 已知 $f(t)*f'(t)=(1-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)$，求信号 $f(t)$。

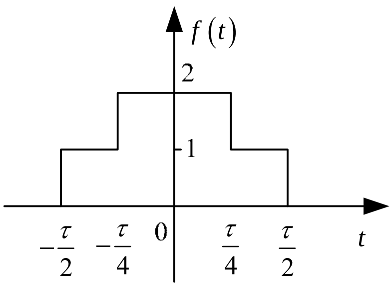
解：设 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则根据时域微分特性可得 $f'(t)\leftrightarrow \mathrm{j}\omega\cdot F(\mathrm{j}\omega)$。对式 $f(t)*f'(t)=(1-t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)$ 两边求傅里叶变换得：

$$F(\mathrm{j}\omega)\cdot\left[\mathrm{j}\omega\cdot F(\mathrm{j}\omega)\right]=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}-\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}\right)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{(1+\mathrm{j}\omega)^2}=\frac{\mathrm{j}\omega}{(1+\mathrm{j}\omega)^2}$$

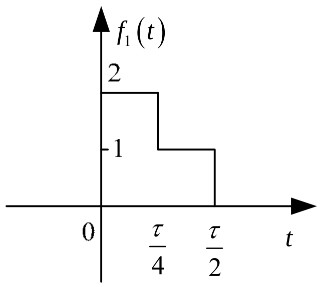
故 $$F^2(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{(1+\mathrm{j}\omega)^2}\Rightarrow F(\mathrm{j}\omega)=\pm\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$$

求其逆变换得：$f(t)=\pm\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)$

4-17 已知信号 $f(t)$ 如题图 4-17（a）所示，试使用以下方法计算其傅里叶变换



（a）



（b）

题图 4-17

（1）利用定义计算 $F(\mathrm{j}\omega)$；

解：$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\tau/2}^{-\tau/4}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\tau/4}^{\tau/4}2\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{\tau/4}^{\tau/2}1\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{-\frac{\tau}{4}}+\frac{2}{(-\mathrm{j}\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{4}}+\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{\frac{\tau}{4}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$=\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)}\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\right)+\frac{2}{(-\mathrm{j}\omega)}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}\right)+\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{(-\mathrm{j}\omega)}\cdot\left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}\right)-\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\right)-2\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}\right)\right]$$

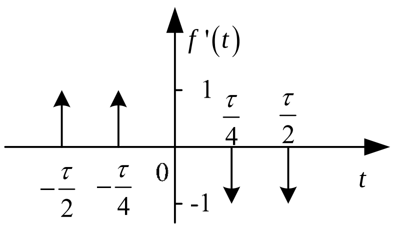
$$=\frac{2}{\omega}\cdot\left[\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{4}}}{2\mathrm{j}}\right)+\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{2\mathrm{j}}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{\omega}\cdot\left[\sin\left(\omega\frac{\tau}{4}\right)+\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

故 $$F(\mathrm{j}\omega)=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)+\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

（2）利用傅里叶变换的微积分特性计算；

解：$f(t)$ 的一阶导数如下图所示，则 $f'(t)=\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right)+\delta\left(t+\frac{\tau}{4}\right)-\delta\left(t-\frac{\tau}{4}\right)\delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$。



根据 $\delta(t)\leftrightarrow 1$ 及时移特性得：$f'(t)\leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{4}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\tau}{4}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}$。由 $f'(t)$ 的波形图可知 $\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\mathrm{d}t=0$，故根据时域积分特性可得：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{t}f'(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\tau}{4}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\tau}{4}\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}}{\mathrm{j}\omega}=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)+\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

（3）$f(t)=\left[\mathrm{u}\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\mathrm{u}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]+\left[\mathrm{u}\left(t+\frac{\tau}{4}\right)-\mathrm{u}\left(t-\frac{\tau}{4}\right)\right]$，利用常用信号 $\mathrm{u}(t)$ 的傅里叶变换及傅里叶变换的线性特性及时移特性计算 $F(\mathrm{j}\omega)$；

解：由于 $\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$，则 $\mathrm{u}(t\pm t_0)\leftrightarrow\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0}$

所以 $f\left(t\right)\leftrightarrow\left[\pi\delta\left(\omega\right)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{4}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{4}}\right]=\tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)+\dfrac{\tau}{2}Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$

（4） $f\left(t\right)=f_1\left(t\right)+f_1\left(-t\right)$（ $f_1\left(t\right)$ 如题图 4-17（b）所示），先计算 $F_1\left(\mathrm{j}\omega\right)$，然后利用尺度变换性质计算 $F\left(\mathrm{j}\omega\right)$；

解： $f_1\left(t\right)=2\mathrm{u}\left(t\right)-\mathrm{u}\left(t-\dfrac{\tau}{4}\right)-\mathrm{u}\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)$，利用阶跃信号的傅里叶变换及时移特性得：

$$f_1\left(t\right)\leftrightarrow\left[\pi\delta\left(\omega\right)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\left(2-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{4}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}\right)=\frac{2-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{4}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}}{\mathrm{j}\omega}$$

由于 $f\left(t\right)=f_1\left(t\right)+f_1\left(-t\right)$，由尺度变换得：

$$\begin{aligned}f\left(t\right)=f_1\left(t\right)+f_1\left(-t\right)\leftrightarrow F_1\left(\mathrm{j}\omega\right)+F_1\left(-\mathrm{j}\omega\right)&=\frac{2-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{4}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}}{\mathrm{j}\omega}+\frac{2-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{4}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}}{\mathrm{j}\left(-\omega\right)}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{4}}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{4}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}}{\mathrm{j}\omega}=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)+\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\end{aligned}$$

（5） $f\left(t\right)=g_\tau\left(t\right)+g_{\tau/2}\left(t\right)$，利用门函数的傅里叶变换及傅里叶变换的线性特性 $F\left(\mathrm{j}\omega\right)$；

解：由于 $g_\tau\left(t\right)\leftrightarrow\tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$， $g_{\frac{\tau}{2}}\left(t\right)\leftrightarrow\dfrac{\tau}{2}Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$，根据线性性得：

$$f_1\left(t\right)=g_\tau\left(t\right)+g_{\frac{\tau}{2}}\left(t\right)\leftrightarrow\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)+\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

（6） $f\left(t\right)=2g_{\tau/2}\left(t\right)+g_{\tau/4}\left(t+\dfrac{3\tau}{8}\right)+g_{\tau/4}\left(t-\dfrac{3\tau}{8}\right)$，利用门函数的傅里叶变换和傅里叶变换的线性特性及时移特性计算 $F\left(\mathrm{j}\omega\right)$。

解： $g_{\frac{\tau}{2}}\left(t\right)\leftrightarrow\dfrac{\tau}{2}Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$， $g_{\frac{\tau}{4}}\left(t\right)\leftrightarrow\dfrac{\tau}{4}Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{8}\right)$，则由时移特性可得：

$$f\left(t\right)=2g_{\tau/2}\left(t\right)+g_{\tau/4}\left(t+\frac{3\tau}{8}\right)+g_{\tau/4}\left(t-\frac{3\tau}{8}\right)$$

$$\leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)+\frac{\tau}{4}Sa\left(\frac{\omega\tau}{8}\right)\mathrm{e}^{\frac{3\tau}{8}\mathrm{j}\omega}+\frac{\tau}{4}Sa\left(\frac{\omega\tau}{8}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3\tau}{8}\mathrm{j}\omega}$$

$$=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)+\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{8}\right)\cos\left(\frac{3\tau}{8}\omega\right)$$

$$\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{8}\right)\cos\left(\frac{3\tau}{8}\omega\right)=\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\tau}{8}\omega\right)}{\frac{\omega\tau}{8}}$$

由于$2\sin x\cos y=\sin(x-y)+\sin(x+y)$，则

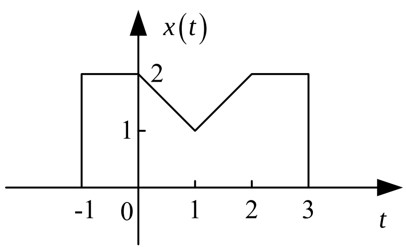
$$\sin\left(\frac{\omega\tau}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\tau}{8}\omega\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(-\frac{\omega\tau}{4}\right)+\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)-\sin\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\right]$$

故：$$\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{8}\right)\cdot\cos\left(\frac{3\tau}{8}\omega\right)}{\frac{\omega\tau}{8}}=\frac{2}{\omega}\left[\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)-\sin\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)\right]=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)-\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

所以 $$f(t)\leftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)+\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{8}\right)\cos\left(\frac{3\tau}{8}\omega\right)=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)+\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)-\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$=\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)+\frac{\tau}{2}Sa\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

4-19 设$X(\mathrm{j}\omega)$表示题图 4-19 所示信号的傅里叶变换。



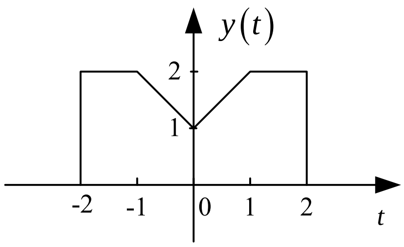
题图 4-19

（1）求$X(\mathrm{j}\omega)$的相位；（2）求$X(0)$

（3）求$\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega$（4）计算$\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}\mathrm{d}\omega$

（5）计算$\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega$

解：（1）设$y(t)=x(t+1)$，其波形如下图所示。$y(t)\leftrightarrow Y(\mathrm{j}\omega)$，则$Y(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$。



由 $y(t)$ 的波形可知，其为实偶函数，根据傅里叶变换的定义可得 $Y(\mathrm{j}\omega)$ 为 ω 的偶函数，且为实函数，因此 $Y(\mathrm{j}\omega)$ 的相位为 0，由式 $Y(\mathrm{j}\omega)=X(\mathrm{j}\omega)e^{\mathrm{j}\omega}$ 得：

$$X(\mathrm{j}\omega)=Y(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$$

故 $X(\mathrm{j}\omega)$ 的相位为 $\varphi(\omega)=-\omega$

（2）$X(0)=X(\mathrm{j}0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{d}t=7$（$x(t)$ 的面积）

（3）由 $x(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$ 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega=2\pi x(0)=4\pi$$

（4）设 $Y(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}=2Sa(\omega)\leftrightarrow y(t)=g_2(t)$

由 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$ 得：

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}\mathrm{d}\omega=2\pi f(2)$$

故 $\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\dfrac{2\sin\omega}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}\mathrm{d}\omega=2\pi\mathscr{F}^{-1}\left[X(\mathrm{j}\omega)\cdot Y(\mathrm{j}\omega)\right]\Big|_{t=2}=2\pi\cdot\left[x(t)*y(t)\right]\Big|_{t=2}$

由时域卷积可得 $f(2)=x(t)*y(t)\Big|_{t=2}=2$，故 $\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\omega)\dfrac{2\sin\omega}{\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}\mathrm{d}\omega=4\pi$ 。

（5）由帕塞瓦尔定理得 $\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)\mathrm{d}t=26\pi$（$x^2(t)$ 的面积乘以 2π）

$x^2(t)$ 的图形如下图所示