5.3 习题解答

5.1 在自由空间中，已知电场 $\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_y 10^3\sin(\omega t-\beta z)$ V/m ,试求磁场强度 $\boldsymbol{H}(z,t)$。

解 以余弦为基准，重新写出已知的电场表示式

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\boldsymbol{e}_y 10^3\cos\left(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{V/m}$$

这是一个沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波的电场，其初相位为 $-90°$,与之相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}(z,t)=\frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y 10^3\cos\left(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\boldsymbol{e}_x\frac{10^3}{120\pi}\cos\left(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -e_x 2 \cdot 65\sin(\omega t - \beta z) \quad \text{A/m}$$

5.2 理想介质（参数为 $\mu=\mu_0$、$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$、$\sigma=0$）中有一均匀平面波沿 x 方向传播，已知其电场瞬时值表达式为

$$\boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{e}_y 377\cos(10^9 t - 5x) \quad \text{V/m}$$

试求：(1) 该理想介质的相对介电常数；(2) 与 $\boldsymbol{E}(x,t)$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}(x,t)$；(3) 该平面波的平均功率密度。

解　(1) 理想介质中的均匀平面波的电场 $\boldsymbol{E}$ 应满足波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

据此即可求出欲使给定的 $\boldsymbol{E}$ 满足方程所需的媒质参数。

方程中

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_y \nabla^2 E_y = \boldsymbol{e}_y \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\boldsymbol{e}_y 9\,425\cos(10^9 t - 5x)$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{e}_y \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\boldsymbol{e}_y 377 \times 10^{18}\cos(10^9 t - 5x)$$

故得

$$-9\,425\cos(10^9 t - 5x) + \mu\varepsilon[377 \times 10^{18}\cos(10^9 t - 5x)] = 0$$

即

$$\mu\varepsilon = \frac{9\,425}{377 \times 10^{18}} = 25 \times 10^{-18}$$

故

$$\varepsilon_r = \frac{25 \times 10^{-18}}{\mu_0\varepsilon_0} = 25 \times 10^{-18} \times (3 \times 10^8)^2 = 2.25$$

其实，观察题目给定的电场表达式，可知它表征一个沿 $+x$ 方向传播的均匀平面波，其相速为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{10^9}{5} \text{ m/s} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

而

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} \times 3 \times 10^8$$

故

$$\varepsilon_r = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$$

(2)与电场 $\boldsymbol{E}$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}$ 可由 $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$ 求得。先写出 $\boldsymbol{E}$ 的复数形式 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_y 377\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}\mathrm{V/m}$，故

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\boldsymbol{e}_z\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\boldsymbol{e}_z\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}377\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}(-\mathrm{j}5)$$

$$= \boldsymbol{e}_z\frac{1}{10^9\times 4\pi\times 10^{-7}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}$$

$$= \boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}\ \mathrm{A/m}$$

则得磁场的瞬时值表达式

$$\boldsymbol{H}(x,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10^9 t}]$$

$$= \boldsymbol{e}_z 1.5\cos(10^9 t - 5x)\ \mathrm{A/m}$$

也可以直接从关系式 $\boldsymbol{H}=\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}$ 得到 $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y 377\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x} = \boldsymbol{e}_z\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{\eta_0}\times 377\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x} = \boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}\ \mathrm{A/m}$$

(3)平均坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{e}_y 377\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5x}\times\boldsymbol{e}_z 1.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}5x}] = \boldsymbol{e}_x 282.75\ \mathrm{W/m^2}$$

5.3 在空气中，沿 $\boldsymbol{e}_y$ 方向传播的均匀平面波的频率 $f=400\ \mathrm{MHz}$。当 $y=0.5\ \mathrm{m}$、$t=0.2\ \mathrm{ns}$ 时，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的最大值为 250 V/m，表征其方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_x 0.6-\boldsymbol{e}_z 0.8$。试求出电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的瞬时表示式。

解 沿 $\boldsymbol{e}_y$ 方向传播的均匀平面波的电场强度的一般表达式为

$$\boldsymbol{E}(y,t) = \boldsymbol{E}_m\cos(\omega t - ky + \phi)$$

根据本题所给条件可知，式中各参数为

$$\omega = 2\pi f = 8\pi\times 10^8\quad \mathrm{rad/s}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{8\pi\times 10^8}{3\times 10^8}\mathrm{rad/s} = \frac{8\pi}{3}\quad \mathrm{rad/m}$$

$$\boldsymbol{E}_m = 250(\boldsymbol{e}_x 0.6 - \boldsymbol{e}_z 0.8) \quad \text{V/m}$$

由于 $y = 0.5$ m、$t = 0.2$ ns 时，$\boldsymbol{E}$ 达到最大值，即

$$\boldsymbol{E}_m \cos\left(8\pi \times 10^8 \times 0.2 \times 10^{-9} - \frac{8\pi}{3} \times \frac{1}{2} + \phi\right) = \boldsymbol{E}_m$$

于是得到

$$\phi = \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{25} = \frac{88\pi}{75}$$

故

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_x 150 - \boldsymbol{e}_z 200)\cos\left(8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{3}y + \frac{88\pi}{75}\right) \quad \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{e}_x \frac{5}{3\pi} + \boldsymbol{e}_z \frac{5}{4\pi}\right)\cos\left(8\pi \times 10^8 t - \frac{8\pi}{3}y + \frac{88\pi}{75}\right) \quad \text{A/m}$$

5.4 有一均匀平面波在 $\mu = \mu_0$、$\varepsilon = 4\varepsilon_0$、$\sigma = 0$ 的媒质中传播，其电场强度 $E = E_m \sin\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{3}\right)$。若已知平面波的频率 $f = 150$ MHz、平均功率密度为 0.265 $\mu\text{W/m}^2$。试求：(1) 电磁波的波数、相速、波长和波阻抗；(2) $t = 0$、$z = 0$ 时的电场 $E(0,0)$ 值；(3) 经过 $t = 0.1$ μs 后，电场 $E(0,0)$ 出现在什么位置？

解 (1) 由 $\boldsymbol{E}$ 的表达式可看出这是沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波，其波数为

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0} = 2\pi \times 150 \times 10^6 \sqrt{4\mu_0\varepsilon_0}$$

$$= 2\pi \times 150 \times 10^6 \times 2 \times \frac{1}{3 \times 10^8}$$

$$= 2\pi \ \text{rad/m}$$

相速为

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4\mu_0\varepsilon_0}} = 1.5 \times 10^8 \ \text{m/s}$$

波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1 \ \text{m}$$

波阻抗为

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi\ \Omega \approx 188.5\ \Omega$$

（2）平均坡印廷矢量为

$$S_{av} = \frac{1}{2\eta}E_m^2 = 0.265 \times 10^{-6}\ \text{W/m}$$

故得

$$E_m = (2\eta \times 0.265 \times 10^{-6})^{1/2} \approx 10^{-2}\ \text{V/m}$$

因此

$$E(0,0) = E_m \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8.66 \times 10^{-3}\ \text{V/m}$$

（3）随着时间 t 的增加，波将沿 $+z$ 方向传播，当 $t = 0.1\ \mu s$ 时，电场为

$$E = 10^{-2}\sin\left(2\pi ft - kz + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 10^{-2}\sin\left(2\pi\times 150 \times 10^6 \times 0.1 \times 10^{-6} - 2\pi z + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 8.66 \times 10^{-3}$$

得

$$\sin\left(30\pi - 2\pi z + \frac{\pi}{3}\right) = 0.866$$

即

$$30\pi - 2\pi z + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

则

$$z = 15\ \text{m}$$

5.5 理想介质中的均匀平面波的电场和磁场分别为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x 10\cos(6\pi\times 10^7 t - 0.8\pi z)\ \text{V/m}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_y \frac{1}{6\pi}\cos(6\pi\times 10^7 t - 0.8\pi z)\ \text{V/m}$$

试求该介质的相对磁导率 μ_r和相对介电常数 ε_r。

解　由给出的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的表达式可知，它表征沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波，其相关参数为

角频率　　　　　　$\omega = 6\pi \times 10^7 \text{ rad/s}$

波数　　　　　　　$k = 0.8\pi \text{ rad/m}$

波阻抗　　　　　　$\eta = \dfrac{E}{H} = \dfrac{10}{\dfrac{1}{6\pi}}\ \Omega = 60\pi\ \Omega$

而

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = 0.8\pi \text{ rad/m} \tag{1}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 60\pi\ \Omega \tag{2}$$

联立解方程式(1)和(2)，得

$$\mu_r = 2, \varepsilon_r = 8$$

5.6　在自由空间传播的均匀平面波的电场强度复矢量为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x 10^{-4} e^{-j20\pi z} + \boldsymbol{e}_y 10^{-4} e^{-j\left(20\pi z - \frac{\pi}{2}\right)} \text{ V/m}$$

试求：(1) 平面波的传播方向和频率；

(2) 波的极化方式；

(3) 磁场强度 $\boldsymbol{H}$；

(4) 流过沿传播方向单位面积的平均功率。

解　(1) 传播方向为 $\boldsymbol{e}_z$

由题意知 $k = 20\pi = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，故

$$\omega = \frac{20\pi}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 6\pi \times 10^9 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3 \times 10^9 \text{ Hz} = 3 \text{ GHz}$$

(2) 原电场可表示为

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_x + j\boldsymbol{e}_y) 10^{-4} e^{-j20\pi z}$$

是左旋圆极化波。

(3) 由　　　　　　$\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}$

得

$$\boldsymbol{H} = \frac{10^{-4}}{120\pi}(\boldsymbol{e}_y - \mathrm{j}\boldsymbol{e}_x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20\pi z}$$

$$= -\boldsymbol{e}_x 2.65 \times 10^{-7}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(20\pi z - \frac{\pi}{2}\right)} + \boldsymbol{e}_y 2.65 \times 10^{-7}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20\pi z}$$

(4) $$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{[\boldsymbol{e}_x 10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}20\pi z} + \boldsymbol{e}_y 10^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(20\pi z - \frac{\pi}{2}\right)}] \times$$

$$[\boldsymbol{e}_y 2.65 \times 10^{-7}\mathrm{e}^{\mathrm{j}20\pi z} - \boldsymbol{e}_x 2.65 \times 10^{-7}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(20\pi z - \frac{\pi}{2}\right)}]\}$$

$$= \boldsymbol{e}_z 2.65 \times 10^{-11}\ \mathrm{W/m^2}$$

即 $$P_{\mathrm{av}} = 2.65 \times 10^{-11}\ \mathrm{W/m^2}$$

5.7 在空气中，一均匀平面波的波长为 12 cm，当该波进入某无损媒质中传播时，其波长减小为 8 cm，且已知在媒质中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的振幅分别为 50 V/m 和 0.1 A/m。试求该平面波的频率、媒质的相对磁导率和相对介电常数。

解 在自由空间中，波的相速 $v_{\mathrm{p}} = c = 3 \times 10^8$ m/s，故波的频率为

$$f = \frac{v_{\mathrm{p}}}{\lambda_0} = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{12 \times 10^{-2}}\ \mathrm{Hz} = 2.5 \times 10^9\ \mathrm{Hz}$$

在无损耗媒质中，波的相速为

$$v_{\mathrm{p}} = f\lambda = 2.5 \times 10^9 \times 8 \times 10^{-2}\ \mathrm{m/s} = 2 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

又

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\mu_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}}}$$

故

$$\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}} = \left(\frac{c}{v_{\mathrm{p}}}\right)^2 = \frac{9}{4} \tag{1}$$

无损耗媒质中的波阻抗为

$$\eta = \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{H}|} = \frac{E_{\mathrm{m}}}{H_{\mathrm{m}}} = \frac{50}{0.1}\ \Omega = 500\ \Omega$$

又由于

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

故

$$\frac{\mu_r}{\varepsilon_r} = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2 = \left(\frac{500}{377}\right)^2 \tag{2}$$

联解式(1)和式(2)，得

$$\mu_r = 1.99, \quad \varepsilon_r = 1.13$$

5.8 在自由空间中，一均匀平面波的相位常数为 $\beta_0 = 0.524$ rad/m，当该波进入到理想介质后，其相位常数变为 $\beta = 1.81$ rad/m 。设该理想介质的 $\mu_r = 1$，试求该理想介质的 ε_r 和波在该理想介质中的传播速度。

解　自由空间的相位常数

$$\beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

故

$$\omega = \frac{\beta_0}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 0.524 \times 3 \times 10^8 \text{ Hz} = 1.572 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

在理想电介质中，相位常数 $\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} = 1.81$ rad/m ，故得到

$$\varepsilon_r = \frac{1.81^2}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0} = 11.93$$

电介质中的波速则为

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{11.93}} \text{ m/s} = 0.87 \times 10^8 \text{ m/s}$$

5.9 在自由空间中，一均匀平面波的波长为 $\lambda_0 = 0.2$ m ，当该波进入到理想介质后，其波长变为 $\lambda = 0.09$ m。设该理想介质的 $\mu_r = 1$，试求该理想介质的 ε_r 和波在该理想介质中的传播速度。

解　在自由空间，波的相速 $v_p = c = 3 \times 10^8$ m/s ，故波的频率为

$$f = \frac{v_p}{\lambda_0} = \frac{3 \times 10^8}{0.2} \text{ Hz} = 1.5 \times 10^9 \text{ Hz}$$

在理想介质中，波长 $\lambda = 0.09$ m，故波的相速为

$$v_p = f\lambda = 1.5 \times 10^9 \times 0.09 \text{ m/s} = 1.35 \times 10^8 \text{ m/s}$$

另一方面

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

故

$$\varepsilon_r = \left(\frac{c}{v_p}\right)^2 = \left(\frac{3\times10^8}{1.35\times10^8}\right)^2 = 4.94$$

5.10 均匀平面波的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的振幅为 $\frac{1}{3\pi}$ A/m，在自由空间沿 $-\boldsymbol{e}$ 方向传播,其相位常数 $\beta=30$ rad/m。当 $t=0$、$z=0$ 时,$\boldsymbol{H}$ 在 $-\boldsymbol{e}_y$ 方向。

（1）写出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的表达式;

（2）求频率和波长。

解 以余弦为基准，按题意先写出磁场表示式

$$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(\omega t+\beta z) \quad \text{A/m}$$

与之相伴的电场为

$$\boldsymbol{E} = \eta_0[\boldsymbol{H}\times(-\boldsymbol{e}_z)] = 120\pi\left[-\boldsymbol{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(\omega t+\beta z)\times(-\boldsymbol{e}_z)\right]$$

$$= \boldsymbol{e}_x 40\cos(\omega t+\beta z) \quad \text{V/m}$$

由 $\beta=30$ rad/m 得波长 λ 和频率 f 分别为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.21 \text{ m}$$

$$f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{0.21}\text{ Hz} = 1.43\times10^9 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\times1.43\times10^9 \text{ rad/s} = 9\times10^9 \text{ rad/s}$$

则磁场和电场分别为

$$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{e}_y\frac{1}{3\pi}\cos(9\times10^9 t+30z) \quad \text{A/m}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x 40\cos(9\times10^9 t+30z) \quad \text{V/m}$$

5.11 在空气中，一均匀平面波沿 $\boldsymbol{e}_y$ 方向传播，其磁场强度的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{H}(y,t) = \boldsymbol{e}_z 4\times10^{-6}\cos\left(10^7\pi t-\beta y+\frac{\pi}{4}\right)$$

(1) 求相位常数 β 和 $t=3$ ms 时，$H_z=0$ 的位置；

(2) 求电场强度的瞬时表达式 $\boldsymbol{E}(y,t)$。

解　(1) $\beta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=10^7\pi\times\dfrac{1}{3\times10^8}$ rad/m $=\dfrac{\pi}{30}$ rad/m

在 $t=3$ ms 时，欲使 $H_z=0$，则要求

$$\cos\left(10^7\pi\times3\times10^{-3}-\frac{\pi}{30}y+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{30}y+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

即

$$-\frac{\pi}{30}y+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\pm n\pi,\quad n=0,1,2,\cdots$$

故

$$y=-\frac{30}{4}\pm30n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

考虑到波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}=60$ m，故 $t=3$ ms 时，$H_z=0$ 的位置为

$$y=22.5\pm n\frac{\lambda}{2}\ \text{m},\quad n=0,1,2,\cdots$$

(2) 电场的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{e}_y)\eta_0=\left[\boldsymbol{e}_z4\times10^{-6}\cos\left(10^7\pi t-\beta y+\frac{\pi}{4}\right)\times\boldsymbol{e}_y\right]\times120\pi$$

$$=-\boldsymbol{e}_x1.508\times10^{-3}\cos\left(10^7\pi t-\frac{\pi}{30}y+\frac{\pi}{4}\right)\quad \text{V/m}$$

5.12　已知在自由空间传播的均匀平面波的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}(z,t)=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)\times0.8\cos(6\pi\times10^8t-2\pi z)\quad \text{A/m}$$

(1) 求该均匀平面波的频率、波长、相位常数、相速；

(2)求与 $\boldsymbol{H}(z,t)$ 相伴的电场强度 $\boldsymbol{E}(z,t)$；

(3) 计算瞬时坡印廷矢量。

解 (1) 从给定的磁场表达式，可直接得出

频率　$f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{6\pi\times10^8}{2\pi}$ Hz $=3\times10^8$ Hz

相位常数 $\beta = 2\pi \text{ rad/m}$

波长 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2\pi} \text{ m} = 1 \text{ m}$

相速 $v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{6\pi \times 10^8}{2\pi} \text{ m/s} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

(2) 与 $\boldsymbol{H}(z,t)$ 相伴的电场强度

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \eta_0 \boldsymbol{H}(z,t) \times \boldsymbol{e}_z = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) \times \boldsymbol{e}_z 0.8 \times 120\pi \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z)$$

$$= (\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y) 96\pi \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z)$$

(3) 瞬时坡印廷矢量为

$$\boldsymbol{S}(z,t) = \boldsymbol{E}(z,t) \times \boldsymbol{H}(z,t) = \boldsymbol{e}_z 153.6\pi \cos^2(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \text{ W/m}^2$$

5.13 频率 $f = 500$ kHz 的正弦均匀平面波在理想介质中传播，其电场振幅矢量 $\boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{e}_x 4 - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z 2$ kV/m，磁场振幅矢量 $\boldsymbol{H}_m = \boldsymbol{e}_x 6 + \boldsymbol{e}_y 18 - \boldsymbol{e}_z 3$ A/m。试求：(1) 波传播方向的单位矢量；(2) 介质的相对介电常数 ε_r；(3) 电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的复数表达式。

解 (1) 表征电场方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_E = \frac{\boldsymbol{E}}{E} = \frac{\boldsymbol{e}_x 4 - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z 2}{\sqrt{4^2 + 1 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(\boldsymbol{e}_x 4 - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z 2)$$

表征磁场方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_H = \frac{\boldsymbol{H}}{H} = \frac{\boldsymbol{e}_x 6 + \boldsymbol{e}_y 18 - \boldsymbol{e}_z 3}{\sqrt{6^2 + 18^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{41}}(\boldsymbol{e}_x 2 + \boldsymbol{e}_y 6 - \boldsymbol{e}_z)$$

由此得到波传播方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_E \times \boldsymbol{e}_H = \frac{1}{\sqrt{21}}(\boldsymbol{e}_x 4 - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z 2) \times \frac{1}{\sqrt{41}}(\boldsymbol{e}_x 2 + \boldsymbol{e}_y 6 - \boldsymbol{e}_z)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{861}}(-\boldsymbol{e}_x 11 + \boldsymbol{e}_y 8 + \boldsymbol{e}_z 26)$$

$$= -\boldsymbol{e}_x 0.375 + \boldsymbol{e}_y 0.273 + \boldsymbol{e}_z 0.886$$

(2) 由 $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{|\boldsymbol{E}_m|}{|\boldsymbol{H}_m|} = \frac{\sqrt{21} \times 10^3}{\sqrt{369}}$，可得到

$$\varepsilon_r = 2.5$$

(3) 电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的复数表达式分别为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{e}_x 4 - \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)10^3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{e}_x 6 + \boldsymbol{e}_y 18 - \boldsymbol{e}_z 3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{r}}$$

式中

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\varepsilon_0} = 2\pi\times 500\times 10^3\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\pi\times 10^6}{3\times 10^8}\sqrt{2.5}\ \mathrm{rad/m}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2.5}}{3}\times 10^{-2}\ \mathrm{rad/m}$$

5.14 已知自由空间传播的均匀平面波的磁场强度为

$$\boldsymbol{H} = \left(\boldsymbol{e}_x\frac{3}{2} + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\right)10^{-6}\cos\left[\omega t - \pi\left(-x + y + \frac{1}{2}z\right)\right]\quad \mathrm{A/m}$$

试求：(1) 波的传播方向；(2) 波的频率和波长；(3) 与磁场 $\boldsymbol{H}$ 相伴的电场 $\boldsymbol{E}$ (4) 平均坡印廷矢量。

解 (1) 波的传播方向由波矢量 $\boldsymbol{k}$ 来确定。由给出的 $\boldsymbol{H}$ 的表达式可知

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z = -\pi x + \pi y + 0.5\pi z$$

故

$$k_x = -\pi,\quad k_y = \pi,\quad k_z = 0.5\pi$$

即

$$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{e}_x\pi + \boldsymbol{e}_y\pi + \boldsymbol{e}_z 0.5\pi$$

$$k = \pi\sqrt{(-1)^2 + 1 + (0.5)^2}\ \mathrm{rad/m} = \frac{3}{2}\pi\quad \mathrm{rad/m}$$

则波传播方向单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = \frac{\boldsymbol{k}}{k} = \frac{1}{1.5\pi}\left(-\boldsymbol{e}_x\pi + \boldsymbol{e}_y\pi + \boldsymbol{e}_z\frac{\pi}{2}\right) = -\boldsymbol{e}_x\frac{2}{3} + \boldsymbol{e}_y\frac{2}{3} + \boldsymbol{e}_z\frac{1}{3}$$

(2)
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3\pi/2}\ \mathrm{m} = \frac{4}{3}\ \mathrm{m}$$

$$f = \frac{v_{\mathrm{p}}}{\lambda} = \frac{3\times 10^8}{4/3}\ \mathrm{Hz} = \frac{9}{4}\times 10^8\ \mathrm{Hz}$$

(3) 与 $\boldsymbol{H}$ 相伴的 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= (\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{e}_n)\eta_0 \\ &= \left(\boldsymbol{e}_x\frac{3}{2}+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\right)10^{-6}\cos\left[\omega t-\pi\left(-x+y+\frac{1}{2}z\right)\right]\times \\ &\quad \left(-\boldsymbol{e}_x\frac{2}{3}+\boldsymbol{e}_y\frac{2}{3}+\boldsymbol{e}_z\frac{1}{3}\right)\times 377 \\ &= 377\times 10^{-6}\left(-\boldsymbol{e}_x\frac{1}{3}-\boldsymbol{e}_y\frac{7}{6}+\boldsymbol{e}_z\frac{5}{3}\right)\times \\ &\quad \cos\left[\frac{9\pi}{2}\times 10^8 t-\pi(-x+y+0.5z)\right]\quad \text{V/m}\end{aligned}$$

(4) 平均坡印廷矢量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{av} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[377\times 10^{-6}\left(-\boldsymbol{e}_x\frac{1}{3}-\boldsymbol{e}_y\frac{7}{6}+\boldsymbol{e}_z\frac{5}{3}\right)\mathrm{e}^{-j\pi(-x+y+0.5z)}\times\right. \\ &\quad \left.10^{-6}\left(\boldsymbol{e}_x\frac{3}{2}+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\right)\mathrm{e}^{j\pi(-x+y+0.5z)}\right] \\ &= 1.7\pi\times 10^{-10}\left(-\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\frac{1}{2}\right)\ \text{W/m}^2\end{aligned}$$

5.15 频率为 100 MHz 的正弦均匀平面波，沿 $\boldsymbol{e}_z$方向传播。当 $t=0$ 时，在自由空间点 $P(4,-2,6)$的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_x100-\boldsymbol{e}_y70$ V/m，试求：

(1) $t=0$ 时，P 点的 $|\boldsymbol{E}|$；

(2) $t=1$ ns 时，P 点的 $|\boldsymbol{E}|$；

(3) $t=2$ ns 时，点 $Q(3,5,8)$ 的$|\boldsymbol{E}|$.

解 在自由空间中

$$v_p = c = 3\times 10^8 \quad \text{m/s}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\times 10^8 \quad \text{rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi\times 10^8}{3\times 10^8}\ \text{rad/m} = \frac{2\pi}{3}\ \text{rad/m}$$

由题意可设电场强度的瞬时表达式为

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_x100-\boldsymbol{e}_y70)\cos\left(2\pi\times 10^8 t-\frac{2\pi}{3}z+\phi\right)\ \text{V/m}$$

当 $t=0$、$z=6$ 时，应有

$$(\boldsymbol{e}_x 100 - \boldsymbol{e}_y 70)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\times 6+\phi\right)=\boldsymbol{e}_x 100 - \boldsymbol{e}_y 70$$

所以

$$\phi = 0$$

故得到：(1) 当 $t=0$ 时，在 P 点

$$|\boldsymbol{E}| = \left|(\boldsymbol{e}_x 100 - \boldsymbol{e}_y 70)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\times 6\right)\right|$$

$$= \sqrt{100^2+70^2}\ \text{V/m} = 122.1\ \text{V/m}$$

(2) 当 $t=1$ ns 时，在 P 点

$$|\boldsymbol{E}| = |(\boldsymbol{e}_x 100 - \boldsymbol{e}_y 70)\cos(2\pi\times 10^8\times 10^{-9} - 4\pi)|$$

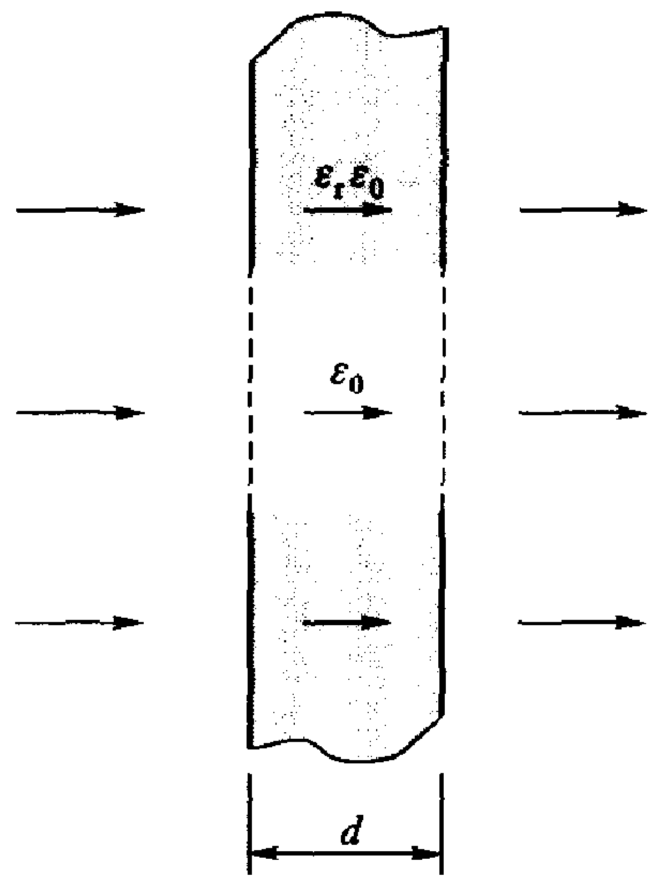
$$= \sqrt{100^2+70^2}\times 0.809\ \text{V/m} = 98.8\ \text{V/m}$$

(3) 当 $t=2$ ns 时，在 Q 点

$$|\boldsymbol{E}| = \left|(\boldsymbol{e}_x 100 - \boldsymbol{e}_y 70)\cos\left(2\pi\times 10^8\times 2\times 10^{-9} - \frac{2\pi}{3}\times 8\right)\right|$$

$$= \sqrt{100^2+70^2}\times 0.978\ \text{V/m} = 119.4\ \text{V/m}$$

5.16 频率 $f=3$ GHz 的均匀平面波垂直入射到有一个大孔的聚苯乙烯（$\varepsilon_r=2.7$）介质板上，平面波将分别通过孔洞和介质板达到的右侧界面，如图题 5.16 所示。试求介质板的厚度 d 为多少时，才能使通过孔洞和通过介质板的平面波有相同的相位？（注：计算此题时不考虑边缘效应，也不考虑在界面上的反射）



图题 5.16

解　相位常数与媒质参数及波的频率有关，对于介质板

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{\mu_0(2.7\varepsilon_0)}$$

对孔洞

$$\beta_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

可见，波在介质板中传播单位距离引起的相位移要大于空气中的相位移。按题目要求，介质板的厚度 d 应满足下式

$$\beta d = \beta_0 d + 2\pi$$

故得

$$d = \frac{2\pi}{\beta - \beta_0} = \frac{2\pi}{2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}(\sqrt{2.7} - 1)}$$

$$= \frac{3\times 10^8}{3\times 10^9(\sqrt{2.7} - 1)}\ \text{m} = 155.5\ \text{mm}$$

5.17 证明：一个椭圆极化波可以分解为两个旋向相反的圆极化波。

证 表征沿 $+z$ 方向传播的椭圆极化波的电场可表示为

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_x E_{xm} e^{-j\phi_x} + \boldsymbol{e}_y E_{ym} e^{-j\phi_y}) e^{-j\beta z}$$

设两个旋向相反的圆极化波分别为

$$\boldsymbol{E}_1 = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \mathrm{j}) E_{1m} e^{-j\beta z}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = (\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y \mathrm{j}) E_{2m} e^{-j\beta z}$$

其中 E_{1m}、E_{2m} 均为复数。

令 $\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}$，即

$$(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \mathrm{j}) E_{1m} e^{-j\beta z} + (\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y \mathrm{j}) E_{2m} e^{-j\beta z} = (\boldsymbol{e}_x E_{xm} e^{-j\phi_x} + \boldsymbol{e}_y E_{ym} e^{-j\phi_y}) e^{-j\beta z}$$

则有

$$E_{1m} + E_{2m} = E_{xm} e^{-j\phi_x}$$

$$E_{1m} - E_{2m} = -\mathrm{j} E_{ym} e^{-j\phi_y}$$

由此可解得

$$E_{1m} = \frac{1}{2}(E_{xm} e^{-j\phi_x} - \mathrm{j} E_{ym} e^{-j\phi_y})$$

$$E_{2m} = \frac{1}{2}(E_{xm} e^{-j\phi_x} + \mathrm{j} E_{ym} e^{-j\phi_y})$$

故得到两个旋向相反的圆极化波分别为

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y \mathrm{j})(E_{xm} e^{-j\phi_x} - \mathrm{j} E_{ym} e^{-j\phi_y}) e^{-j\beta z}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y\mathrm{j})(E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_x} + \mathrm{j}E_{ym}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_y})E_{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

5.18 已知一右旋圆极化波的波矢量为

$$\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)\omega\sqrt{\mu\varepsilon/2}$$

且 $t=0$ 时，坐标原点处的电场为 $\boldsymbol{E}(0)=\boldsymbol{e}_x E_0$。试求此右旋圆极化波的电场、磁场表达式。

解　波矢量的方向即均匀平面波的传播方向，用其单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$表示，即

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{k}}{k} = \frac{(\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)\omega\sqrt{\mu\varepsilon/2}}{\sqrt{(1^2+1^2)}\omega\sqrt{\mu\varepsilon/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)$$

沿 $\boldsymbol{e}_n$方向传播的均匀平面波的电场和磁场均位于与 $\boldsymbol{e}_n$ 方向垂直的横向平面内。设电场的两个分量的方向单位矢量分别为 $\boldsymbol{e}_{n1}$和 $\boldsymbol{e}_{n2}$，则应有 $\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_{n1}\times\boldsymbol{e}_{n2}$。因此，沿 $\boldsymbol{e}_n$方向传播的右旋圆极化波的电场可表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_0(\boldsymbol{e}_{n1} - \boldsymbol{e}_{n2}\mathrm{j})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}$$

根据题中所给条件 $t=0$ 时，坐标原点处的电场为 $\boldsymbol{E}(0)=\boldsymbol{e}_x E_0$，故得

$$\boldsymbol{e}_{n1} = \boldsymbol{e}_x$$

而

$$\boldsymbol{e}_{n2} = \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{e}_{n1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)\times\boldsymbol{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z)$$

故

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \left[\boldsymbol{e}_x - \frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z)\right]E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}_n\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z)\times E_0\left[\boldsymbol{e}_x - \frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$= \left(\boldsymbol{e}_x\mathrm{j} + \boldsymbol{e}_y\frac{1}{\sqrt{2}} - \boldsymbol{e}_z\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}$$

写成瞬时值形式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}\left[\left(\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{e}_z\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\right)E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$= E_0\left[\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. \boldsymbol{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0\left[\boldsymbol{e}_x\cos\left(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{e}_y \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) - \right.$$

$$\left. \boldsymbol{e}_z \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right]$$

5.19 自由空间的均匀平面波的电场表达式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 + \boldsymbol{e}_z E_{zm})10\cos(\omega t + 3x - y - z) \quad \text{V/m}$$

式中的 E_{zm} 为待定量。试由该表达式确定波的传播方向、角频率 ω、极化状态，并求与 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$。

解　设波的传播方向的单位矢量为 $\boldsymbol{e}_n$，则电场的复数形式可表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_m e^{-jk\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r}}$$

题目中给定的电场的复数形式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 + \boldsymbol{e}_z E_{zm})10e^{-j(-3x+y+z)} \quad \text{V/m}$$

于是有

$$\boldsymbol{E}_m = \boldsymbol{e}_x 10 + \boldsymbol{e}_y 20 + \boldsymbol{e}_z 10E_{zm}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{r} = -3x + y + z$$

又

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

可见

$$k_x = -3, \quad k_y = 1, \quad k_z = 1$$

故波矢量

$$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{e}_x 3 + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$$

$$k = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}\ \text{rad/m} = \sqrt{11}\ \text{rad/m}$$

波传播方向的单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 为

$$e_n = \frac{k}{k} = \frac{-e_x3 + e_y + e_z}{\sqrt{11}}$$

波的角频率为

$$\omega = kv_p = kc = \sqrt{11} \times 3 \times 10^8 \text{ rad/s} = 9.95 \times 10^8 \quad \text{rad/s}$$

为了确定 E_{zm},可利用均匀平面波的电场矢量垂直于波的传播方向这一性质,故有 $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_m = 0$, 即

$$(-e_x3 + e_y + e_z) \cdot (e_x10 + e_y20 + e_z10E_m) = 0$$

由此得

$$-30 + 20 + 10E_{zm} = 0$$

故得到

$$E_{zm} = 1$$

因此，自由空间任意一点 $\boldsymbol{r}$ 处的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 10(e_x + e_y2 + e_z)\cos(9.95 \times 10^8 t + 3x - y - z) \quad \text{V/m}$$

上式表明电场的各个分量同相位，故 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 表示一个直线极化波。

与 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{\eta_0} e_n \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \\ &= \frac{1}{120\pi} \times \frac{1}{\sqrt{11}}(-e_x3 + e_y + e_z) \times (e_x + e_y2 + e_z) \times \\ &\quad 10\cos(9.95 \times 10^8 t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) \\ &= 8 \times 10^{-3}(-e_x + e_y4 - e_z7)\cos(9.95 \times 10^8 t + 3x - y - z) \quad \text{A/m}\end{aligned}$$

5.20 已知自由空间的均匀平面波的电场表达式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (e_x + e_y2 + e_z\mathrm{j}\sqrt{5})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2x+by+cz)} \quad \text{V/m}$$

试由此表达式确定波的传播方向、波长、极化状态，并求与 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 相伴的磁场 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$。

解　波的传播方向由波矢量的方向确定。由

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z = 2x + by + cz$$

有

$$k_x = 2,\quad k_y = b,\quad k_z = c$$

为确定 b 和 c,利用 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}=0$, 得

$$(\boldsymbol{e}_x 2 + \boldsymbol{e}_y b + \boldsymbol{e}_z c)\cdot(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 + \boldsymbol{e}_z \mathrm{j}\sqrt{5}) = 2 + 2b + \mathrm{j}\sqrt{5}c = 0$$

故

$$b = -1,\quad c = 0$$

则波矢量为

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_x 2 - \boldsymbol{e}_y$$

波传播方向的单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} = \frac{\boldsymbol{k}}{k} = \frac{\boldsymbol{e}_x 2 - \boldsymbol{e}_y}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_x 2 - \boldsymbol{e}_y)$$

波长为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\ \mathrm{m} = 2.81\ \mathrm{m}$$

已知的电场复振幅可写为

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}} = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2) + \boldsymbol{e}_z \mathrm{j}\sqrt{5} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}R} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}I}$$

其中

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}R} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2)\sqrt{5} = \boldsymbol{e}_R\sqrt{5}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}I} = \boldsymbol{e}_z \mathrm{j}\sqrt{5}$$

可见,$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}R}$ 与 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}I}$ 的大小相等，即

$$|\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}R}| = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5},\quad |\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}I}| = \sqrt{5}$$

且

$$\boldsymbol{e}_R \times \boldsymbol{e}_z = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2)\times\boldsymbol{e}_z = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y) = \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

$$\boldsymbol{e}_R \cdot \boldsymbol{e}_z = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2)\cdot\boldsymbol{e}_z = 0$$

由于 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}R}$ 与 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}I}$ 的相位相差 $90°$, 即 $\phi_R = 0, \phi_I = 90°$,故 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 表示一个左旋圆极

化波。

与 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 相伴的磁场为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\eta_0}\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{120\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_x 2 - \boldsymbol{e}_y) \times (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 + \boldsymbol{e}_z \mathrm{j}\sqrt{5})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2x-y)}$$

$$= \frac{1}{120\pi}(-\boldsymbol{e}_x \mathrm{j} - \boldsymbol{e}_y \mathrm{j}2 + \boldsymbol{e}_z\sqrt{5})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2x-y)} \quad \mathrm{A/m}$$

5.21 证明：电磁波在良导体中传播时，场强每经过一个波长振幅衰减 55 dB。

证 在良导体中 $\alpha \approx \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$，故场强 的衰减因子为

$$\mathrm{e}^{-\alpha z} \approx \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\lambda}z}$$

场强的振幅经过 $z = \lambda$ 的距离后

$$\left|\frac{E_m(\lambda)}{E_m(0)}\right| = \mathrm{e}^{-2\pi} = 0.002$$

即衰减到起始值的 0.002。用分贝表示，则为

$$20\ \lg\left|\frac{E_m(\lambda)}{E_m(0)}\right| = 20\ \lg\ \mathrm{e}^{-2\pi} = -2\pi \times 20\ \lg\ \mathrm{e} \approx -55\ \mathrm{dB}$$

5.22 有一线极化的均匀平面波在海水（$\varepsilon_r = 81$、$\mu_r = 1$、$\sigma = 4\ \mathrm{S/m}$）中沿 $+y$ 方向传播，其磁场强度在 $y = 0$ 处为

$$\boldsymbol{H}(0,t) = \boldsymbol{e}_x 0.1\sin(10^{10}\pi t - \pi/3) \quad \mathrm{A/m}$$

(1) 求衰减常数、相位常数、本征阻抗、相速、波长及透入深度；(2) 求出 $\boldsymbol{H}$ 的振幅为 0.01 A/m 时的位置；(3) 写出 $\boldsymbol{E}(y,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(y,t)$ 的表示式。

解 (1) $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{4 \times 36\pi \times 10^9}{10^{10}\pi \times 81} = \frac{16}{90} \approx 0.18$

可见，在角频率 $\omega = 10^{10}\pi$ 时，海水为一般有损耗媒质，故

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right]} = 10^{10}\pi\sqrt{\frac{81\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1 + 0.18^2} - 1]}$$

$$= 83.9\ \mathrm{Np/m}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1\right]} = 10^{10}\pi\sqrt{\frac{81\mu_0\varepsilon_0}{2}[\sqrt{1 + 0.18^2} + 1]}$$

$$\approx 300\pi \ \mathrm{rad/m}$$

$$\eta_c = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}}{\sqrt{1 - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu_0}{81\varepsilon_0}}}{\sqrt{1 - \mathrm{j}0.18}} = \frac{41.89}{1.008\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.028\pi}}\ \Omega = 41.56\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.028\pi}\quad \Omega$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^{10}\pi}{300\pi} = 0.333 \times 10^8 \ \mathrm{m/s}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{300\pi} = 6.67 \times 10^{-3} \ \mathrm{m}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{83.9}\ \mathrm{m} = 11.92 \times 10^{-3} \ \mathrm{m}$$

（2）由 $0.01 = 0.1\mathrm{e}^{-\alpha y}$，即 $\mathrm{e}^{-\alpha y} = 0.1$，得

$$y = \frac{1}{\alpha}\ln 10 = \frac{1}{83.9} \times 2.303 \ \mathrm{m} = 27.4 \times 10^{-3} \ \mathrm{m}$$

（3）　$$\boldsymbol{H}(y,t) = \boldsymbol{e}_x 0.1\mathrm{e}^{-83.9y}\sin\left(10^{10}\pi t - 300\pi y - \frac{\pi}{3}\right) \quad \mathrm{A/m}$$

其复数形式为

$$\boldsymbol{H}(y) = -\boldsymbol{e}_x 0.1\mathrm{j}\mathrm{e}^{-83.9y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}300\pi y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}} \quad \mathrm{A/m}$$

故电场的复数表示式为

$$\boldsymbol{E}(y) = \eta_c \boldsymbol{H}(y) \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y 41.56\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.028\pi} \times 0.1\mathrm{e}^{-83.9y} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(300\pi y + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \boldsymbol{e}_z 4.156\mathrm{e}^{-83.9y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(300\pi y + \frac{\pi}{3} - 0.028\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \quad \mathrm{V/m}$$

则

$$\boldsymbol{E}(y,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$= \boldsymbol{e}_z 4.156\mathrm{e}^{-83.9y}\sin\left(10^{10}\pi t - 300\pi y - \frac{\pi}{3} + 0.028\pi\right) \quad \mathrm{V/m}$$

5.23　海水的电导率 $\sigma = 4$ S/m、相对介电常数 $\varepsilon_r = 81$。求频率为 10 kHz、100 kHz、1 MHz、10 MHz、100 MHz、1 GHz 的电磁波在海水中的波长、衰减系数和波阻抗。

解　先判定海水在各频率下的属性

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0} = \frac{4}{2\pi f \times 81\varepsilon_0} = \frac{8.89 \times 10^8}{f}$$

可见，当 $f \leqslant 10^7$ Hz 时，满足 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$，海水可视为良导体，此时

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}, \quad \eta_c \approx (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}}$$

$f = 10$ kHz 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} = 0.126\pi \ \mathrm{Np/m} = 0.396 \ \mathrm{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.126\pi} \ \mathrm{m} = 15.87 \ \mathrm{m}$$

$$\eta_c = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi \times 10 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} \ \Omega = 0.099(1+\mathrm{j}) \ \Omega$$

$f = 100$ kHz 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 100 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} \ \mathrm{Np/m} = 1.26\pi \ \mathrm{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{1.26} \ \mathrm{m} = 5 \ \mathrm{m}$$

$$\eta_c = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi \times 100 \times 10^3 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} \ \Omega = 0.314(1+\mathrm{j}) \ \Omega$$

$f = 1$ MHz 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} \ \mathrm{Np/m} = 3.96 \ \mathrm{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{3.96} \ \mathrm{m} = 1.587 \ \mathrm{m}$$

$$\eta_c = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} \ \Omega = 0.99(1+\mathrm{j}) \ \Omega$$

$f = 10$ MHz 时

$$\alpha = \sqrt{\pi \times 10 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 4} \ \mathrm{Np/m} = 12.6 \ \mathrm{Np/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{12.6} \ \mathrm{m} = 0.5 \ \mathrm{m}$$

$$\eta_c = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi \times 10 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7}}{4}} \ \Omega = 3.14(1+\mathrm{j}) \ \Omega$$

当 $f=100$ MHz 及以上时，$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ 不再满足，海水属一般有损耗媒质，此时，

$$\alpha = 2\pi f\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)^2}-1\right]}$$

$$\beta = 2\pi f\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0}\right)^2}+1\right]}$$

$$\eta_c = \frac{\sqrt{\mu_0/(\varepsilon_r\varepsilon_0)}}{\sqrt{1-\mathrm{j}\sigma/(2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0)}}$$

$f=100$ MHz 时

$$\alpha = 37.57\ \mathrm{Np/m}$$

$$\beta = 42.1\ \mathrm{rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.149\ \mathrm{m}$$

$$\eta_c = \frac{42}{\sqrt{1-\mathrm{j}8.9}}\ \Omega = 14.05\mathrm{e}^{\mathrm{j}41.8^\circ}\ \Omega$$

$f=1$ GHz 时

$$\alpha = 69.12\ \mathrm{Np/m}$$

$$\beta = 203.58\ \mathrm{rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.03\ \mathrm{m}$$

$$\eta_c = \frac{42}{\sqrt{1-\mathrm{j}0.89}}\ \Omega = 36.5\mathrm{e}^{\mathrm{j}20.8^\circ}\ \Omega$$

5.24 已知某区域内的电场强度表达式为

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_x 4 + \boldsymbol{e}_y 3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}})\mathrm{e}^{-(0.1z+\mathrm{j}0.3z)}\quad \mathrm{V/m}$$

试讨论电场所表示的均匀平面波的极化特性。

解 由给定的电场表达式可看出，这是在有损耗媒质中沿 $+z$ 方向传播的均匀平面波。写出电场强度的两个分量的瞬时表达式

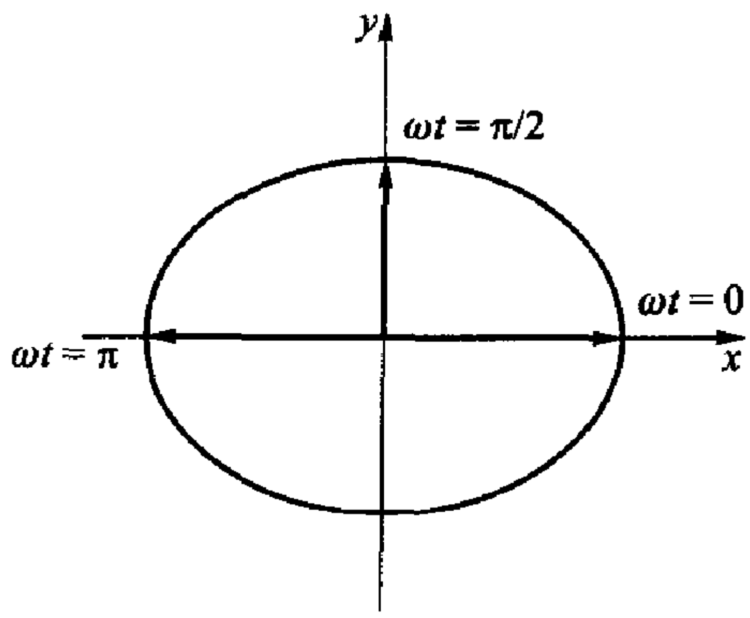
$$E_x(z,t) = \mathrm{Re}[E_x\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[4\mathrm{e}^{-(0.1z+\mathrm{j}0.3z)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = 4\mathrm{e}^{-0.1z}\cos(\omega t-0.3z)$$

$$E_y(z,t) = \mathrm{Re}[E_y e^{j\omega t}]$$
$$= \mathrm{Re}[3e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-(0.1z+j0.3z)} e^{j\omega t}]$$
$$= 3e^{-0.1z}\cos\left(\omega t - 0.3z - \frac{\pi}{2}\right)$$

为简化讨论，取 $z=0$，得

$$E_x(0,t) = 4\cos\omega t$$

$$E_y(z,t) = 3\sin\omega t$$



图题 5.24

将以上两式平方后再相加，得

$$\frac{E_x^2(0,t)}{16} + \frac{E_y^2(0,t)}{9} = 1$$

这是一个标准的椭圆方程，半长轴 $a=4$，半短轴 $b=3$。因此，题目给定的 $\boldsymbol{E}$ 表示一个椭圆极化波。取以下时间：

$$\omega t = 0、\frac{\pi}{2}、\pi$$

有

$$E_x(0,t) = 4、0、-4$$

$$E_y(0,t) = 0、3、0$$

由此得出，在 $z=0$ 的平面上，$\boldsymbol{E}$ 矢量的端点随时间变化的轨迹如图题 5.24 所示。可见，$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_x 4+\boldsymbol{e}_y 3e^{-j\frac{\pi}{2}})e^{-(0.1z+j0.3z)}$ 表示一个右旋椭圆极化波。

5.25 在相对介电常数 $\varepsilon_r=2.5$、损耗角正切值为 10^{-2} 的非磁性媒质中，频率为 3 GHz、$\boldsymbol{e}_y$ 方向极化的均匀平面波沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向传播。

(1) 求波的振幅衰减一半时，传播的距离；

(2) 求媒质的本征阻抗、波的波长和相速；

(3) 设在 $x=0$ 处的 $\boldsymbol{E}(0,t)=\boldsymbol{e}_y 50\sin\left(6\pi\times10^9 t+\frac{\pi}{3}\right)$，写出 $\boldsymbol{H}(x,t)$ 的表达式。

解 (1) 由 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \dfrac{\sigma}{2\pi f\varepsilon_r\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{2\pi\times3\times10^9\times2.5\times10^{-9}/(36\pi)} = \dfrac{18\sigma}{3\times2.5}$

$=10^{-2}$

得

$$\sigma = \frac{3\times2.5\times10^{-2}}{18}\text{ S/m} = 0.417\times10^{-2}\text{ S/m}$$

而

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 10^{-2} \ll 1$$

该媒质在 $f=3$ GHz 时可视为弱导电媒质，故衰减常数为

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{0.417 \times 10^{-2}}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}} = 0.497 \text{ Np/m}$$

由 $e^{-\alpha x}=\frac{1}{2}$，得波的振幅衰减一半时，传播的距离

$$x = \frac{1}{\alpha}\ln 2 = \frac{1}{0.497}\ln 2 \text{ m} = 1.395 \text{ m}$$

（2）对于弱导电媒质，本征阻抗为

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) = \sqrt{\frac{\mu_0}{2.5\varepsilon_0}}\left(1 + j\frac{10^{-2}}{2}\right) = 238.44(1 + j0.005)$$

$$= 238.44e^{j0.286^\circ} = 238.44e^{j0.0016\pi} \quad \Omega$$

而相位常数

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{2.5\mu_0\varepsilon_0}$$

$$= 2\pi \times 3 \times 10^9 \times \frac{\sqrt{2.5}}{3 \times 10^8} \text{ rad/m}$$

$$= 31.6\pi \text{ rad/m}$$

故波长和相速分别为

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{31.6\pi} \text{ m} = 0.063 \text{ m}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 3 \times 10^9}{31.6\pi} \text{ m/s} = 1.899 \times 10^8 \text{ m/s}$$

（3）在 $x=0$ 处，

$$\boldsymbol{E}(0,t) = \boldsymbol{e}_y 50\sin\left(6\pi \times 10^9 t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{V/m}$$

故

$$\boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{e}_y 50e^{-0.497x}\sin\left(6\pi \times 10^9 t - 31.6\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{V/m}$$

则

$$\boldsymbol{H}(x)=\frac{1}{|\eta_c|}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{E}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}$$

$$=\frac{1}{238.44}\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y 50\mathrm{e}^{-0.497x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}31.6\pi x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.0016\pi}$$

$$=\boldsymbol{e}_z 0.21\mathrm{e}^{-0.497x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}31.6\pi x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.0016\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}\quad \mathrm{A/m}$$

故

$$\boldsymbol{H}(x,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$=\boldsymbol{e}_z 0.21\mathrm{e}^{-0.497x}\sin\left(6\pi\times10^9 t-31.6\pi x+\frac{\pi}{3}-0.0016\pi\right)\quad \mathrm{A/m}$$

5.26 已知在 100 MHz 时，石墨的趋肤深度为 0.16 mm，试求：

(1) 石墨的电导率；

(2) 1 GHz 的电磁波在石墨中传播多长距离其振幅衰减了 30 dB？

解 (1) 由趋肤深度

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$$

得到石墨的电导率

$$\sigma=\frac{1}{\pi f\mu\delta^2}=0.99\times10^5\quad \mathrm{S/m}$$

(2) 当 $f=10^9$ Hz 时

$$\alpha=\sqrt{\pi f\mu\sigma}=1.98\times10^4\quad \mathrm{Np/m}$$

要求

$$20\lg\mathrm{e}^{-\alpha z}=-30\ \mathrm{dB}$$

故得到

$$z=\frac{1.5}{\alpha\lg\mathrm{e}}=1.75\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

5.27 频率为 150 MHz 的均匀平面波在损耗媒质中传播，已知 $\varepsilon_r=1.4$、$\mu_r=1$ 及 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=10^{-4}$，问电磁波在该媒质中传播几米后，波的相位改变 90°？

解　因 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 10^{-4} \ll 1$，为弱导电媒质，故

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_r}$$

$$= 2\pi \times 150 \times 10^6 \times \frac{\sqrt{1.4}}{3 \times 10^8}\ \text{rad/m}$$

$$= 1.18\pi\ \text{rad/m}$$

由相移量

$$\beta z = 1.18\pi z = \frac{\pi}{2}$$

故得到

$$z = 0.424\ \text{m}$$