4-1 求下列各信号的傅里叶级数表达式

（1） $\mathrm{e}^{\mathrm{j}200t}$

解：由表达式可得信号的角频率 $\omega=200$，故 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{100}$。所以

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{200}}^{\frac{\pi}{200}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}200t}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}200nt}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{200}}^{\frac{\pi}{200}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}200(n+1)t}\mathrm{d}t=\cdots$$（麻烦！！）

如果将基波频率看为 $\omega_1=200$， $\mathrm{e}^{\mathrm{j}200t}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(1\times200)t}$ 故

$F_n=1$， $n=1$， $F_n=0$， n 为除 1 外的其它整数。

如果将基波频率看为 $\omega_1=100$， $\mathrm{e}^{\mathrm{j}200t}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\times100)t}$ 故

$F_n=1$， $n=2$， $F_n=0$， n 为除 2 外的其它整数。

以此类推，该题有许多答案。

（2） $\cos\left[\pi(t-1)/4\right]$

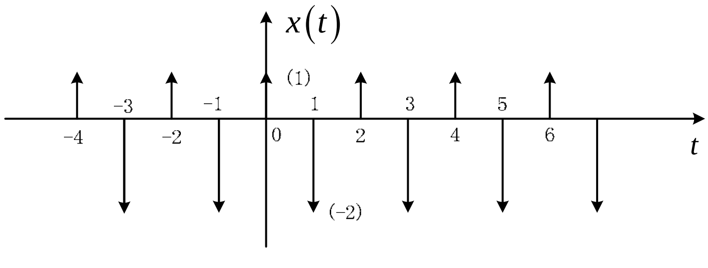
解：$\cos\left[\pi(t-1)/4\right]=\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi(t-1)}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi(t-1)}{4}}\right]$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(1\cdot\frac{\pi}{4}\right)t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left((-1)\times\frac{\pi}{4}\right)t}$$

故，$\dot{F}_1=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{j})$，$\dot{F}_{-1}=\dfrac{1}{2}(1+\mathrm{j})$，$\dot{F}_n=0,\ n=0,\pm2,\pm3,\cdots$

（类似于前一题，该题目还有其它答案！！）

（11） $x(t)$ 如题图 4-1(d)所示



题图 4-1(d)

由图可知，$T=2$，在一个周期内其时域表达式可表示为

$f_1(t)=\delta(t)-2\delta(t-1)$

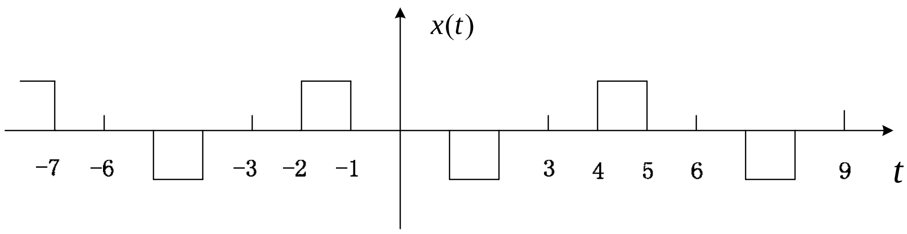
则：$F_n = \frac{1}{T}\int_{0_-}^{2_-}\left[\delta\left(t\right)-2\delta\left(t-1\right)\right]\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{T}\int_{0_-}^{2_-}\delta\left(t\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_{0_-}^{2_-}2\delta\left(t-1\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}-\frac{2}{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1} = \frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1}$$

其中 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

（上式可继续写为：$F_n = \frac{1}{2}-\left(-1\right)^n$）

(13) $x\left(t\right)$如题图 4-1（e）所示



题图 4-1(e)

解：由图可知信号的周期$T=6$，则：

$$F_n = \frac{1}{T}\int_T x\left(t\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-2}^{-1}1\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{1}^{2}\left(-1\right)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\left(-\mathrm{j}n\omega_1\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\Big|_{-2}^{-1} - \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\left(-\mathrm{j}n\omega_1\right)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\Big|_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}Tn\omega_1}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2n\omega_1}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1}\right)+\frac{1}{\mathrm{j}Tn\omega_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\omega_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1}\right)$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}Tn\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3n\omega_1}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\omega_1}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n\omega_1}{2}}\right)+\frac{1}{\mathrm{j}Tn\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3n\omega_1}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n\omega_1}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\omega_1}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{Tn\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3n\omega_1}{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\omega_1}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n\omega_1}{2}}}{2\mathrm{j}}\right)-\frac{2}{Tn\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3n\omega_1}{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{n\omega_1}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{n\omega_1}{2}}}{2\mathrm{j}}\right)$$

$$= \frac{2}{Tn\omega_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3n\omega_1}{2}}\sin\left(\frac{n\omega_1}{2}\right)-\frac{2}{Tn\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3n\omega_1}{2}}\sin\left(\frac{n\omega_1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3n\omega_1}{2}}Sa\left(\frac{n\omega_1}{2}\right)-\frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3n\omega_1}{2}}Sa\left(\frac{n\omega_1}{2}\right)$$

4-5 设$x\left(t\right)$是基本周期为T_0的周期信号，其傅里叶系数为a_k。求下列各信号的傅里叶级数系数（用a_k来表示）。

（1）$x\left(t-t_0\right)$

解：根据题意得：$x\left(t\right)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}$（其中$\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_0}$），由于$y\left(t\right)=x\left(t-t_0\right)$仍为周期为$T_0$的周期信号，故令

$$y\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t} \tag{1}$$

而$y\left(t\right)=x\left(t-t_0\right)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1\left(t-t_0\right)}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\left(a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t_0}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}$（2）

比较式（1）与式（2）得：

$$b_k=a_k \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t_0}$$

（3）$x\left(t\right)^*$

解：$x\left(t\right)^*$仍为周期为T_0的周期信号（$\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_0}$）

$$y\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}=x(t)^*=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}\right]^*=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}$$

由于k从$-\infty$到∞，故$y\left(t\right)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}b_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k^* \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_1 t}=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_{-k}^* \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}$，所以

$$b_k=a_{-k}^*$$

（5）$\dfrac{\mathrm{d}x\left(t\right)}{\mathrm{d}t}$

解：$\dfrac{\mathrm{d}x\left(t\right)}{\mathrm{d}t}$仍为周期为$T_0$的周期信号（$\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_0}$）

$$y\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a_k\cdot \mathrm{j}k\omega_1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t}$$

故 $b_k=a_k\cdot \mathrm{j}k\omega_1$