5-9 用拉普拉斯变换方法求下列微分方程描述的系统冲激响应$h(t)$和阶跃响应$g(t)$

（2）$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+2x(t)$

解：设$y(t)\leftrightarrow Y(s)$，$x(t)\leftrightarrow X(s)$，对方程两边取单边拉式变换（其初始值为零）得：

$$s^2Y(s)+4sY(s)+3Y(s)=sX(s)+2X(s)$$

则$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+2}{s^2+4s+3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+3}$

对上式求逆变换得$h(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{u}(t)$，根据冲激响应与阶跃响应的关系得系统的阶跃响应为

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau+\int_0^t\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{u}(t)+\frac{1}{6}\left(1-\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{u}(t)$$

5-11 已知 LTI 系统函数为$H(s)=1+s+\frac{1}{s}$，求$h(t)$。

解：由于 LTI 系统的系统函数$H(s)$与其单位冲激相应$h(t)$为一对拉式变换对，故利用常用信号拉式变换及时域微分特性可得：

$$h(t)=\delta(t)+\delta'(t)+\mathrm{u}(t)$$

5-13 已知系统微分方程和初始条件如下：

$$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=2x'(t)+x(t),\ y(0_-)=1，y'(0_-)=1，x(t)=\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)$$

试用 s 域方法求零输入响应和零状态响应。

解：设$y(t)\leftrightarrow Y(s)$，$x(t)=\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)\leftrightarrow X(s)=\frac{1}{s+2}$，$\mathrm{Re}[s]>-2$

对方程$y''(t)+4y'(t)+3y(t)=2x'(t)+x(t)$两边取拉式变换得：

$$s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)+4\left[sY(s)-y(0_-)\right]+3Y(s)=2sX(s)+X(s)$$

其零输入响应的拉式变换为$Y_x(s)=\frac{sy(0_-)+y'(0_-)+4y(0_-)}{s^2+4s+3}$，代入已知条件并求其逆变换得系统的零输入响应

$$Y_x(s)=\frac{s+5}{s^2+4s+3}=\frac{-1}{s+3}+\frac{2}{s+1}\leftrightarrow y_x(t)=\left(-\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{u}(t)$$

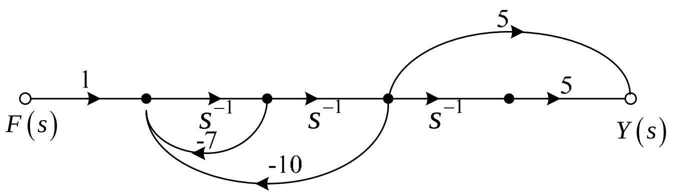
将初始条件为零，可得系统零状态响应的拉式变换为$Y_f(s)=\dfrac{2s+1}{s^2+4s+3}\cdot X(s)$，代入$x(t)$的拉式变换并求其逆变换得系统的零状态响应

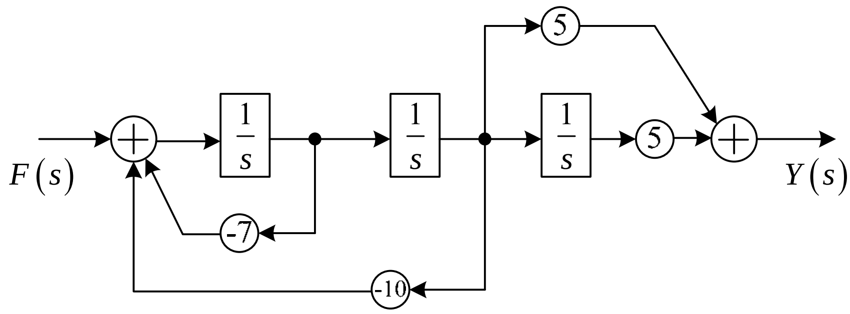
$$Y_f(s)=\frac{2s+1}{s^2+4s+3}\cdot\frac{1}{s+2}=\frac{-0.5}{s+1}+\frac{3}{s+2}+\frac{-2.5}{s+3}$$

$$\leftrightarrow y_f(t)=\left(-0.5\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{-2t}-2.5\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{u}(t)$$

5-14 已知系统函数$H(s)=\dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}$，分别画出直接型、级联型、并联型模拟图及信号流图。

解：$H(s)=\dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}=\dfrac{5s+5}{s^3+7s^2+10s}=\dfrac{5s^{-2}+5s^{-3}}{1-\left(-7s^{-1}-10s^{-2}\right)}$，由梅森公式可得系统的直接型信流图和模拟图分别如下图所示：



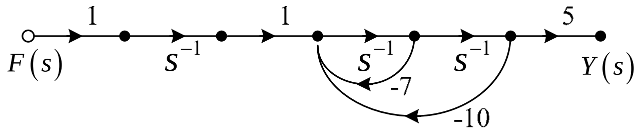


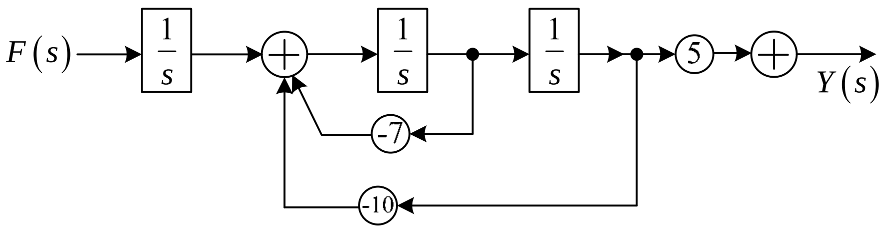
将$H(s)$写出连乘的形式，可得系统的级联型结构，

$$H(s)=\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}=\frac{1}{s}\cdot\frac{5}{(s+2)(s+5)}=\frac{1}{s}\cdot\frac{5}{s^2+7s+10}$$

其中$H_1(s)=\dfrac{1}{s}=\dfrac{s^{-1}}{1}$，$H_2(s)=\dfrac{5}{s^2+7s+10}=\dfrac{5s^{-2}}{1-\left(-7s^{-1}-10s^{-2}\right)}$，由梅森公式得系统的

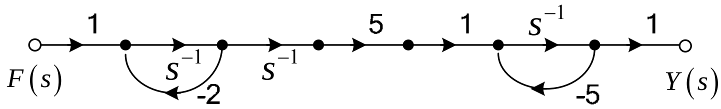
级联型信流图和模拟图分别如下图所示：





注：该级联形式有多种，如果对系统函数进行如下分解，则信号流图将进行如下变化：

$$H(s)=\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}=\frac{1}{s(s+2)}\cdot\frac{5}{(s+5)}=\frac{1}{s+5}\cdot\frac{5}{s^2+2s}=\frac{5s^{-2}}{1-\left(-2s^{-1}\right)}\cdot\frac{s^{-1}}{1-\left(-5s^{-1}\right)}$$

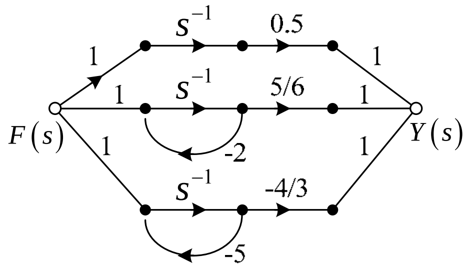


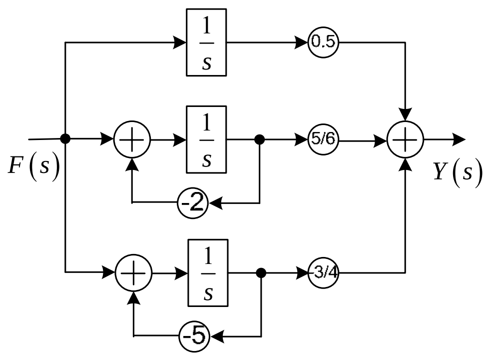
分解不同，其信号流图及模拟图都有所变化。

对 $H(s)$ 进行部分分式展开可得系统的并联形式

$$H(s)=\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}=\frac{0.5}{s}+\frac{\frac{5}{6}}{s+2}+\frac{-\frac{4}{3}}{s+5}=\frac{0.5s^{-1}}{1}+\frac{\frac{5}{6}s^{-1}}{1-\left(-2s^{-1}\right)}+\frac{-\frac{4}{3}s^{-1}}{1-\left(-5s^{-1}\right)}$$

其信号流图及模拟图如下图所示：

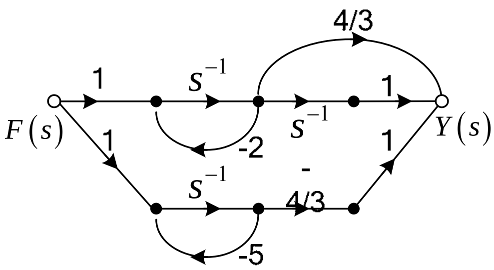




也可将 $H(s)$ 分解成一阶子系统和二阶子系统的级联形式，例如

$$H(s)=\frac{5(s+1)}{s(s+2)(s+5)}=\left[\frac{0.5}{s}+\frac{5/6}{s+2}\right]+\frac{-4/3}{s+5}=\frac{1+4s/3}{s^2+2s}+\frac{-4/3}{s+5}$$
$$=\frac{4s^{-1}/3+s^{-2}}{1-\left(-2s^{-1}\right)}+\frac{-4s^{-1}/3}{1-\left(-5s^{-1}\right)}$$

其信号流图如下图所示



与级联形式相类似，分解不同，其信号流图及模拟图都有所变化。

5-16 试判断下列系统的稳定性：

（1）$H(s)=\dfrac{s+1}{s^2+2s}$　　　　（2）$H(s)=\dfrac{s+2}{(s+1)^{10}}$

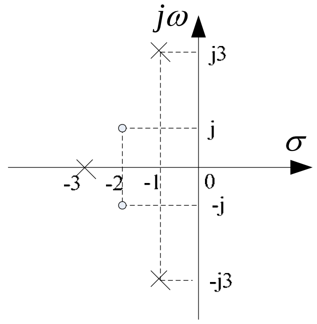
（3）$H(s)=\dfrac{3s+1}{s^3-4s^2-3s+2}$

解：（1）由于其分母多项式 $A(s)=s^2+2s$ 有缺项（缺 s^0 项），故不满足霍尔维兹多项式的必要条件，所以系统不稳定。

（2）由系统函数 $H(s)$ 得系统在 $s=-1$ 处有一个 10 阶极点，其收敛域为 $\mathrm{Re}[s]>-1$，其极点全部在左半平面，故系统稳定。（注：可以采用罗斯-霍尔维兹准则进行判决，但比较麻烦）

（3）由于其分母多项式 $A(s)=s^3-4s^2-3s+2$ 中 a_i 的符号不完全相同，故不满足霍尔维兹多项式的必要条件，所以系统不稳定。

5-17 某系统的零极点图如题图 5-18 所示，且单位冲激响应 $h(t)$ 的初值 $h(0^+)=5$，试写出该系统的系统函数 $H(s)$。



题图 5-18

解：由系统的零极点图可知，该系统包括三个极点：分别为 $p_1=-3$、$p_2=-1+3\mathrm{j}$、$p_3=-1-3\mathrm{j}$；系统包括两个零点：$z_1=-2+\mathrm{j}$、$z_2=-2-\mathrm{j}$，则系统函数为：

$$H(s)=K\cdot\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)}$$

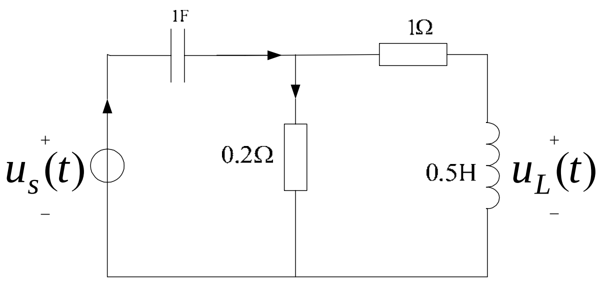
分别代入零极点的值得：

$$H(s)=K\cdot\frac{(s+2-\mathrm{j})(s+2+\mathrm{j})}{(s+3)(s+1-3\mathrm{j})(s+1+3\mathrm{j})}=K\cdot\frac{(s+2)^2+1}{(s+3)\left[(s+1)^2+9\right]}$$

由初值定理得：$h(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sH(s)=\lim\limits_{s\to\infty}K\cdot\dfrac{\left(1+s^{-1}\right)^2+s^{-2}}{\left(1+3s^{-1}\right)\left[\left(1+s^{-1}\right)^2+9s^{-2}\right]}=5$，故 $K=5$，所以系统函数为：

$$H(s)=5\cdot\frac{(s+2)^2+1}{(s+3)\left[(s+1)^2+9\right]}$$

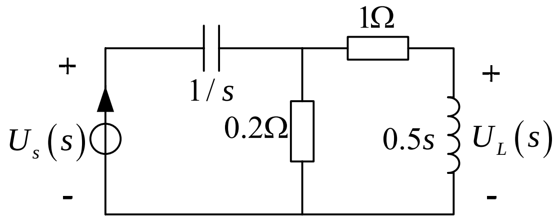
5-19 已知 RLC 电路系统，如题图 5-19 所示：



题图 5-19

其中 $u_s(t)=10\mathrm{u}(t)$ V，电容和电感初始状态为零，求电感两端电压的零状态响应 $u_L(t)$。

解：该 RLC 电路系统的 s 域模型为（初始状态为零）：



根据分压规则得：

$$U_L(s)=\frac{0.5s}{1+0.5s}\cdot\frac{(1+0.5s)//0.2}{(1+0.5s)//0.2+\frac{1}{s}}\cdot U_s(s)$$

由于 $u_s(t)=10\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\frac{10}{s}$，故

$$U_L(s)=\frac{0.5s}{1+0.5s}\cdot\frac{(1+0.5s)//0.2}{(1+0.5s)//0.2+\frac{1}{s}}\cdot\frac{10}{s}=\frac{0.5s}{1+0.5s}\cdot\frac{\frac{0.2+0.1s}{1.2+0.5s}}{\frac{0.2+0.1s}{1.2+0.5s}+\frac{1}{s}}\cdot\frac{10}{s}$$

$$=\frac{0.5s}{1+0.5s}\cdot\frac{0.1s^2+0.2s}{0.1s^2+0.7s+1.2}\cdot\frac{10}{s}=\frac{10(s^2+2s)}{(s+2)(s+3)(s+4)}=\frac{10s}{(s+3)(s+4)}$$

$$=\frac{40}{s+4}-\frac{30}{s+3}$$

求其逆变换得电感两端电压的零状态响应 $u_L(t)=\left(40\,\mathrm{e}^{-4t}-30\mathrm{e}^{-3t}\right)\mathrm{u}(t)$

5-23 已知 LTI 系统的单位冲激响应函数 $h(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{u}(t)$，求该系统的微分方程。

解：由 $h(t)=(1-\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{u}(t)\leftrightarrow H(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}=\frac{2}{s^2+2s}=\frac{Y(s)}{F(s)}$ 得：

$$(s^2+2s)Y(s)=2F(s)\Rightarrow s^2Y(s)+2sY(s)=2F(s)$$

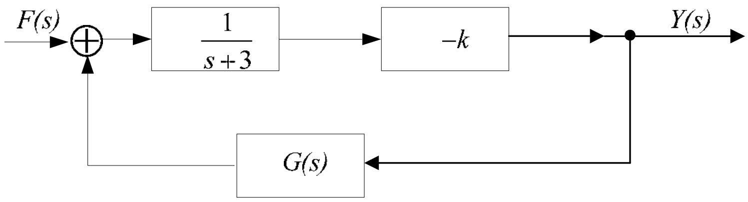
故系统的微分方程为：

$$y''(t)+2y'(t)=2f(t)$$

5-26 某反馈系统如题图 5-26 所示，试求：

（1）$H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}$。

（2）若 $G(s)=\frac{1}{s+1}$，$H(s)$ 是稳定系统，确定 k 的取值范围。



题图 5-26

解：（1）设加法器的输出为 $X(s)$，则：$X(s)=F(s)+Y(s)\cdot G(s)$，由系统框图可得：

$$Y(s)=X(s)\cdot\frac{1}{s+3}\cdot(-K)$$

代入 $X(s)$ 的表达式得

$$Y(s)=\left[F(s)+Y(s)\cdot G(s)\right]\cdot\frac{-K}{s+3}=\frac{-K}{s+3}\cdot F(s)+\frac{(-K)\cdot G(s)}{s+3}\cdot Y(s)$$

$$\left(1+\frac{KG(s)}{s+3}\right)Y(s)=\frac{-K}{s+3}\cdot F(s)\Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{-K}{s+3+KG(s)}$$

（2）代入 $G(s)=\dfrac{1}{s+1}$ 得 $H(s)=\dfrac{Y(s)}{F(s)}=\dfrac{-K\cdot(s+1)}{(s+3)(s+1)+K}=\dfrac{-K\cdot(s+1)}{s^2+4s+(K+3)}$

由于 $H(s)$ 是稳定系统，则需 $H(s)$ 的分母多项式为霍尔维兹多项式，故 $K+3>0$，其罗斯阵列为：

$$\begin{array}{ll} 1 & K+3 \\ 4 & 0 \\ c_{n-1} & \end{array}$$

其中 $c_{n-1}=\dfrac{-1}{4}\cdot\begin{vmatrix}1 & K+3\\4 & 0\end{vmatrix}=\dfrac{-1}{4}\cdot\left[-4(K+3)\right]=K+3$，当 $c_{n-1}>0$，即 $K+3>0$，故当 $K>-3$ 时，系统稳定。