

第3章 静态电磁场及其边值问题的解



- 静态电磁场：场量不随时间变化，包括：
静电场、恒定电场和恒定磁场
- 时变情况下，电场和磁场相互关联，构成统一的电磁场
- 静态情况下，电场和磁场由各自的源激发，且相互独立

本章内容

3.1 静电场分析

3.2 导电媒质中的恒定电场分析

3.3 恒定磁场分析

3.4 静态场的边值问题及解的惟一性定理



3.1 静电场分析

本节内容

- 3.1.1 静电场的基本方程和边界条件
- 3.1.2 电位函数
- 3.1.3 导体系统的电容与部分电容
- 3.1.4 静电场的能量



3.1.1 静电场的基本方程和边界条件

1. 基本方程

$$\text{微分形式: } \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{积分形式: } \begin{cases} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

$$\text{本构关系: } \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\text{2. 边界条件} \quad \begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \\ E_{1t} - E_{2t} = 0 \end{cases}$$

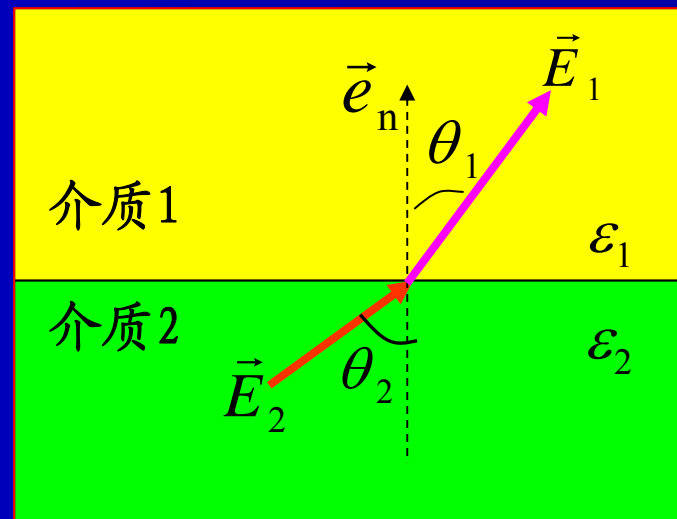
若分界面上不存在面电荷, 即 $\rho_s = 0$, 则

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases}$$



■ 场矢量的折射关系

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1 / D_{1n}}{\varepsilon_2 / D_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$



■ 导体表面的边界条件

在静电平衡的情况下，导体内部的电场为0，则导体表面的边界条件为

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot \vec{D} = \rho_s \\ \vec{e}_n \times \vec{E} = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} D_n = \rho_s \\ E_t = 0 \end{cases}$$



3.1.2 电位函数

1. 电位函数的定义

$$\text{由 } \nabla \times \vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$$

即静电场可以用一个标量函数的梯度来表示，标量函数 φ 称为静电场的标量电位或简称电位。



2. 电位的表达式

对于连续的体分布电荷, 由

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dV' = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(\vec{r}') \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dV' \\ &= -\nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{R} \right) dV' \right]\end{aligned}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

故得 $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' + C$

同理得, 面电荷的电位: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}')}{R} dS' + C$

线电荷的电位: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_C \frac{\rho_l(\vec{r}')}{R} dl' + C$

点电荷的电位: $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon R} + C$



3. 电位差

将 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 两端点乘 $d\vec{l}$, 则有

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\nabla\varphi \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = -d\varphi$$

上式两边从点 P 到点 Q 沿任意路径进行积分, 得

电场力做的功

$$\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_P^Q d\varphi = \varphi(P) - \varphi(Q)$$

P 、 Q 两点间的电位差



关于电位差的说明

- ➡ P 、 Q 两点间的电位差等于电场力将单位正电荷从 P 点移至 Q 点所做的功, 电场力使单位正电荷由高电位处移到低电位处。
- ➡ 电位差也称为电压, 可用 U 表示。
- ➡ 电位差有确定值, 只与首尾两点位置有关, 与积分路径无关。



4. 电位参考点

静电位不惟一，可以相差一个常数，即

$$\varphi' = \varphi + C \Rightarrow \nabla \varphi' = \nabla(\varphi + C) = \nabla \varphi$$

为使空间各点电位具有确定值，可以选定空间某一点作为参考点，且令参考点的电位为零，由于空间各点与参考点的电位差为确定值，所以该点的电位也就具有确定值，即

选参考点

令参考点电位为零

电位确定值(电位差)

两点间电位差有定值

- 选择电位参考点的原则
- 应使电位表达式有意义。
- 应使电位表达式最简单。若电荷分布在有限区域，通常取无限远作电位参考点。
- 同一个问题只能有一个参考点。

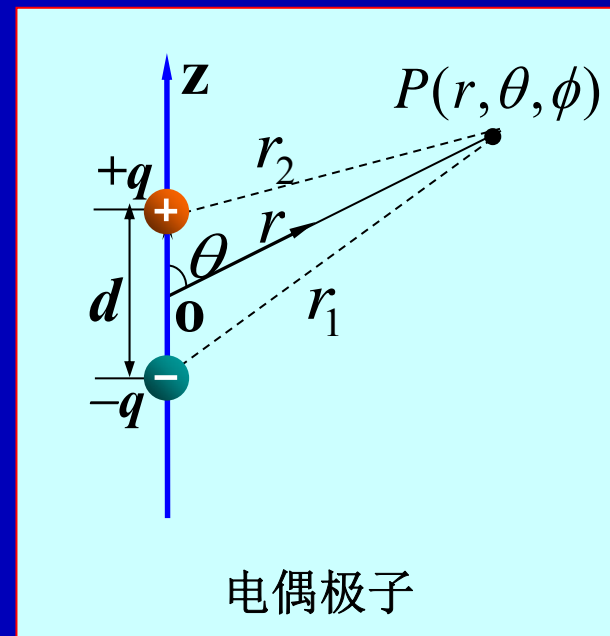


例 3.1.1 求电偶极子的电位.**解** 在球坐标系中

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 - rd \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 + rd \cos \theta}$$



用二项式展开, 由于 $r \gg d$, 得 $r_1 = r - \frac{d}{2} \cos \theta$, $r_2 = r + \frac{d}{2} \cos \theta$

代入上式, 得
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$\vec{p} = q\vec{d}$ 表示电偶极矩, 方向由负电荷指向正电荷。

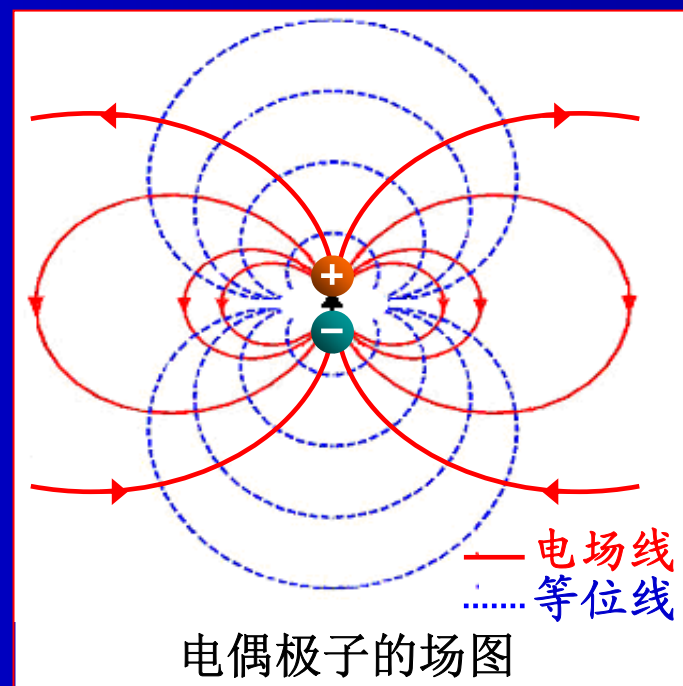


由球坐标系中的梯度公式，可得到电偶极子的远区电场强度

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla\varphi = -(\vec{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\vec{e}_r 2\cos\theta + \vec{e}_\theta \sin\theta)\end{aligned}$$

● 等位线方程:

$$\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = C \Rightarrow r^2 = C'\cos\theta$$

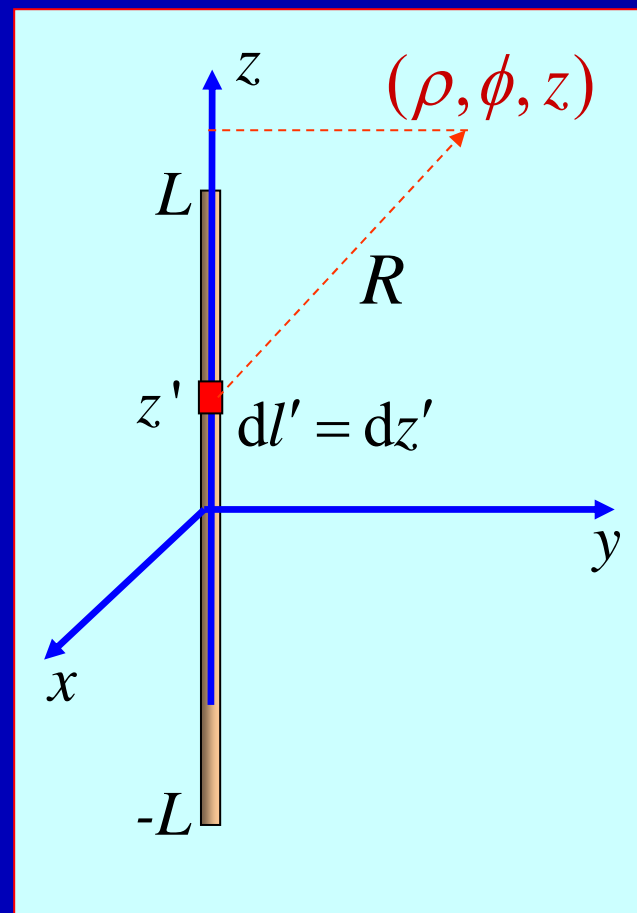


例3.1.2 求长度为 $2L$ 、电荷线密度为 ρ_{l0} 的均匀带电线的电位。

解 采用圆柱坐标系，令线电荷与 z 轴相重合，中点位于坐标原点。由于轴对称性，电位与 ϕ 无关。

在带电线上位于 z' 处的线元 $dl' = dz'$ ，它到点 $P(\rho, \phi, z)$ 的距离 $R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ ，则

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}') &= \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} dz' \\ &= \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln[z' - z + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}] \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (z - L)^2} - (z - L)}{\sqrt{\rho^2 + (z + L)^2} - (z + L)}\end{aligned}$$



在上式中若令 $L \rightarrow \infty$ ，则可得到无限长直线电荷的电位。当 $L \gg R$ 时，上式可写为

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + L^2} + L}{\sqrt{\rho^2 + L^2} - L} = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + L^2} + L}{\rho} \approx \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L}{\rho}$$

当 $L \rightarrow \infty$ 时，上式变为无穷大，这是因为电荷不是分布在有限区域内，而将电位参考点选在无穷远点之故。这时可在上式中加上一个任意常数，则有

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L}{\rho} + C$$

并选择有限远处为电位参考点。例如，选择 $\rho = a$ 的点为电位参考点，则有

$$C = -\frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2L}{a} \quad \longrightarrow \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho}$$



5. 电位的微分方程

在均匀介质中，有

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon \\ \vec{E} = -\nabla \varphi \end{array} \right\} \longrightarrow \nabla^2 \varphi = -\rho / \varepsilon$$

标量泊松方程

在无源区域， $\rho = 0 \longrightarrow \nabla^2 \varphi = 0$

拉普拉斯方程



6. 静电位的边界条件

设 P_1 和 P_2 是介质分界面两侧紧贴界面的相邻两点，其电位分别为 φ_1 和 φ_2 。当两点间距离 $\Delta l \rightarrow 0$ 时

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

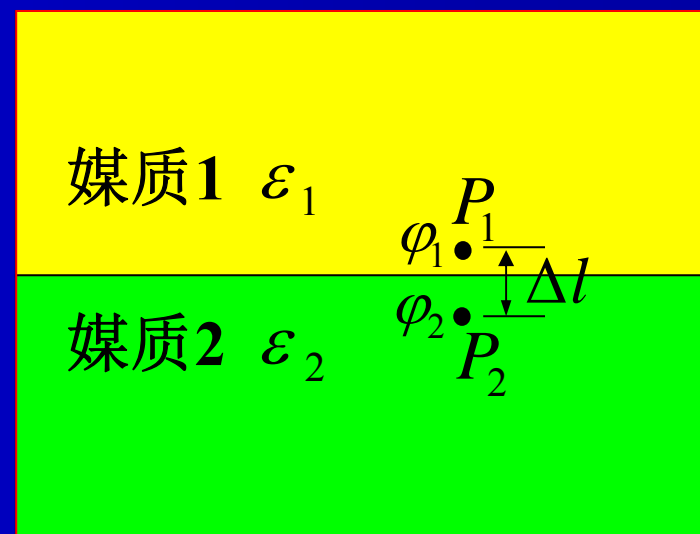
$$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$$

由 $\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$ 和 $\vec{D} = -\varepsilon \nabla \varphi$

$$\Rightarrow \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_s$$

• 若介质分界面上无自由电荷，即 $\rho_s = 0 \Rightarrow \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$

• 导体表面上电位的边界条件： $\varphi = \text{常数}$ ， $\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\rho_s$



小结

定义: $\vec{E} = -\nabla \varphi \longleftrightarrow \varphi(P) = \int_P^Q E \cdot d\vec{l}$

方程: $\nabla^2 \varphi = -\rho/\varepsilon \quad \nabla^2 \varphi = 0$

计算式: $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_q \frac{1}{R} dq(\vec{r}')$

边界条件: $\varphi_1 = \varphi_2 \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \rho_s \quad (\text{一般形式})$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \quad (\text{电介质分界面})$$

$$\varphi = \text{常数}, \quad \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\rho_s \quad (\text{导体表面})$$



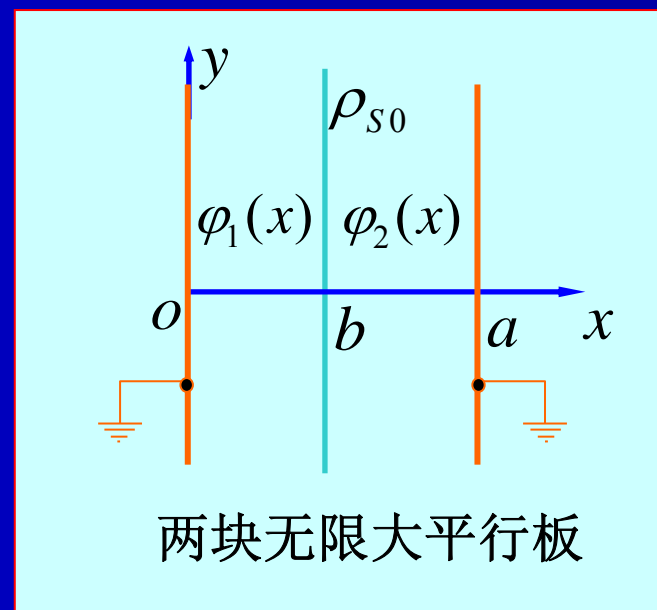
例3.1.3 两块无限大接地导体平板分别置于 $x=0$ 和 $x=a$ 处，在两板之间的 $x=b$ 处有一面密度为 ρ_{s0} 的均匀电荷分布，如图所示。求两导体平板之间的电位和电场。

解 在两块无限大接地导体平板之间，除 $x=b$ 处有均匀面电荷分布外，其余空间均无电荷分布，故电位函数满足一维拉普拉斯方程

$$\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2} = 0, \quad (0 < x < b)$$

$$\frac{d^2\varphi_2(x)}{dx^2} = 0, \quad (b < x < a)$$

方程的解为 $\varphi_1(x) = C_1x + D_1$
 $\varphi_2(x) = C_2x + D_2$



利用边界条件, 有

$$x=0 \text{ 处}, \varphi_1(0)=0$$

$$x=a \text{ 处}, \varphi_2(a)=0$$

$$x=b \text{ 处}, \varphi_1(b)=\varphi_2(b),$$

$$\left[\frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \right]_{x=b} = -\frac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}$$

所以 $D_1 = 0$

$$C_2 a + D_2 = 0$$

$$C_1 b + D_1 = C_2 b + D_2$$

$$C_2 - C_1 = -\frac{\rho_{s0}}{\varepsilon_0}$$

由此解得

$$C_1 = -\frac{\rho_{s0}(b-a)}{\varepsilon_0 a}, \quad D_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{\rho_{s0}b}{\varepsilon_0 a}, \quad D_2 = \frac{\rho_{s0}b}{\varepsilon_0}$$

最后得

$$\varphi_1(x) = \frac{\rho_{s0}(a-b)}{\varepsilon_0 a} x, \quad (0 \leq x \leq b)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\rho_{s0}b}{\varepsilon_0 a} (a-x), \quad (b \leq x \leq a)$$

$$\vec{E}_1(x) = -\nabla \varphi_1(x) = -\vec{e}_x \frac{\rho_{s0}(a-b)}{\varepsilon_0 a}$$

$$\vec{E}_2(x) = -\nabla \varphi_2(x) = \vec{e}_x \frac{\rho_{s0}b}{\varepsilon_0 a}$$



3.1.3 导体系统的电容

电容是导体系统的一种基本属性，是描述导体系统储存电荷能力的物理量。

■ 孤立导体的电容

定义： $C = \frac{q}{\varphi}$

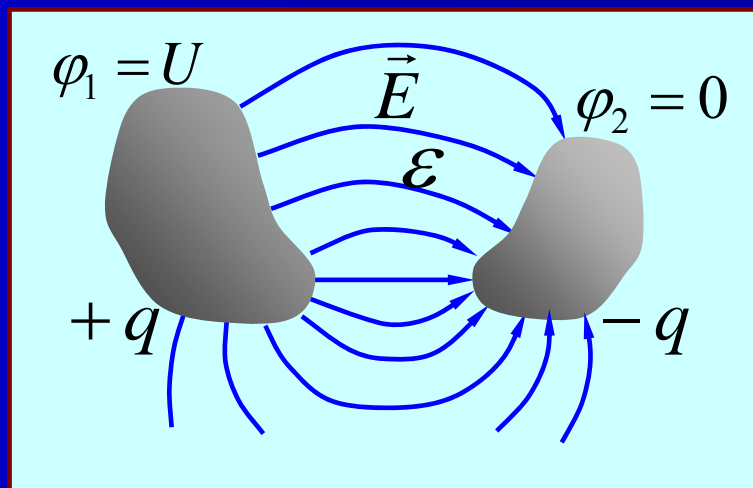
孤立导体所带的电量

孤立导体的电位

■ 电容器的电容

两个带等量异号电荷 ($\pm q$) 的导体构成电容器，其电容为

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{|\varphi_1 - \varphi_2|}$$



■ 特点：电容的大小只与导体系统的几何尺寸、形状和及周围电介质的特性参数有关，而与导体的带电量和电位无关。

■ 计算电容的方法一:

- (1) 假定两导体上分别带电荷 $+q$ 和 $-q$;
- (2) 计算两导体间的电场强度 E ;
- (3) 由 $U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$, 求出两导体间的电位差;
- (4) 求比值 $C = q/U$, 即得出所求电容。

■ 计算电容的方法二:

- (1) 假定两电极间的电位差为 U ;
- (2) 计算两电极间的电位分布 φ ;
- (3) 由 $\vec{E} = -\nabla\varphi$ 得到 E ;
- (4) 由 $\rho_S = \varepsilon E_n$ 得到 ρ_S ;
- (5) 由 $q = \oint_S \rho_S dS$, 求出导体的电荷 q ;
- (6) 求比值 $C = q/U$, 即得出所求电容。



例3.1.4 同轴线内导体半径为 a ，外导体半径为 b ，内外导体间填充的介电常数为 ε 的均匀介质，求同轴线单位长度的电容。

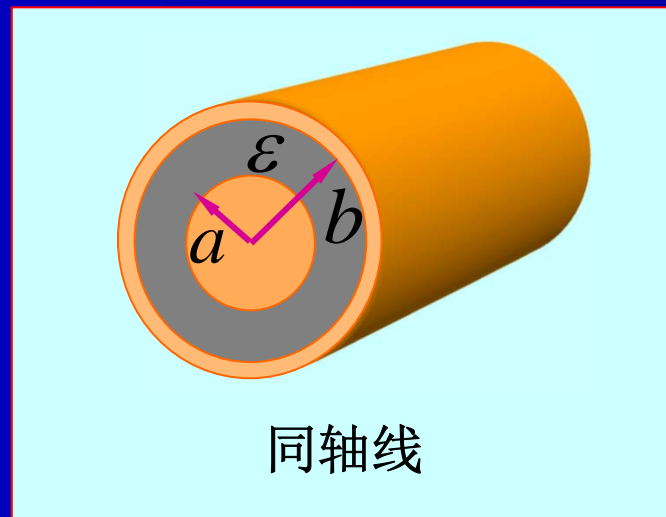
解 设同轴线的内、外导体单位长度带电量分别为 $+\rho_l$ 和 $-\rho_l$ ，应用高斯定理可得到内外导体间任一点的电场强度为

$$\vec{E}(\rho) = \vec{e}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}$$

内外导体间的电位差

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b \vec{E}(\rho) \cdot \vec{e}_\rho d\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \ln(b/a) \end{aligned}$$

故得同轴线单位长度的电容为 $C_1 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \quad (\text{F/m})$



3.1.4 静电场的能量

- 带电导体系统的电场能量 $W_e = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i$
- 点电荷系统的电场能量 $W_e = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i$
- 电容器中储存的电场能量 $W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2C} q^2$
- 体密度分布系统的电场能量 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$
- 静电场能量 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E^2 dV$
- 静电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$



例3.1.5 半径为 a 的球形空间内均匀分布有电荷体密度为 ρ 的电荷，试求静电场能量。

解： 方法一，利用 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$ 计算

根据高斯定理求得电场强度

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_r \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (r < a)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_r \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad (r > a)$$

$$\text{故 } W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_{V_1} \epsilon_0 E_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} \epsilon_0 E_2^2 dV$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{\rho^2 a^6}{9\epsilon_0^2 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \right) = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 a^5$$



方法二：利用 $W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV$ 计算

先求出电位分布

$$\phi_1 = \int_r^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_a^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^a \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (r \leq a)$$

$$\phi_2 = \int_r^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0} \quad (r \geq a)$$

故

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi_1 dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \int_0^a \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 a^5$$



3.2 导电媒质中的恒定电场分析

本节内容

3.2.1 恒定电场的基本方程和边界条件

3.2.2 恒定电场与静电场的比拟

3.2.3 漏电导



3.2.1 恒定电场的基本方程和边界条件

- 恒定电场：电荷作稳定运动、但电荷分布是不随时间变化时所产生的电场。
- 恒定电场和静电场具有相同的性质：有源无旋场。
- 恒定电场与静电场的重要区别：
 - (1) 恒定电场可以存在于导体内部；
 - (2) 恒定电场中有恒定电流，会产生电场能量的损耗，要维持导体中的恒定电流，必须有外加电源来不断补充被损耗的电场能量。



1. 恒定电场的基本方程

- 恒定电场的基本场矢量: $\vec{J}(\vec{r})$ $\vec{E}(\vec{r})$

- 恒定电场的基本方程

$$\begin{array}{ll} \text{微分形式: } \begin{cases} \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{cases} & \text{积分形式: } \begin{cases} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{cases} \end{array}$$

- 线性各向同性导电媒质的本构关系: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

若媒质是均匀的 $\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0$

- 恒定电场的电位函数

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$$

由 $\nabla \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$

均匀导电媒质中
没有体分布电荷



2. 恒定电场的边界条件

● 场矢量的边界条件

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \longrightarrow \vec{e}_n \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0 \quad \text{即} \quad J_{1n} = J_{2n}$$

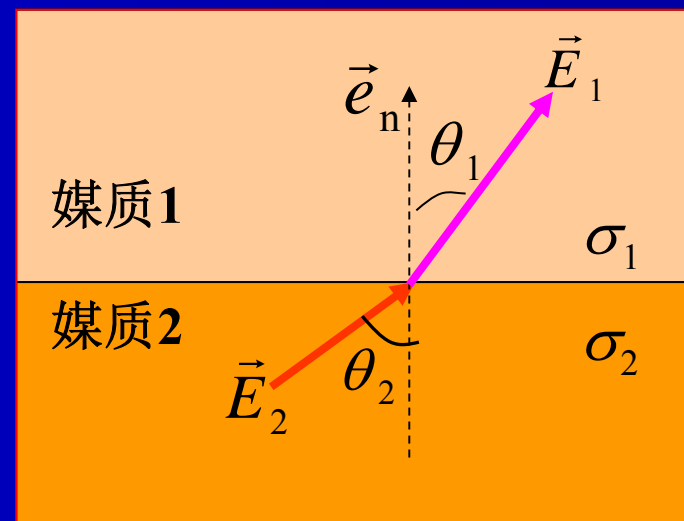
$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \longrightarrow \vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad \text{即} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

● 场矢量的折射关系

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{\sigma_1 / J_{1n}}{\sigma_2 / J_{2n}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

● 导电媒质分界面上的电荷面密度

$$\rho_s = \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \vec{e}_n \cdot \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \vec{J}_1 - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \vec{J}_2 \right) = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) J_n$$



● 电位的边界条件 $\varphi_1 = \varphi_2$, $\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$

■ 关于恒定电场的进一步说明:

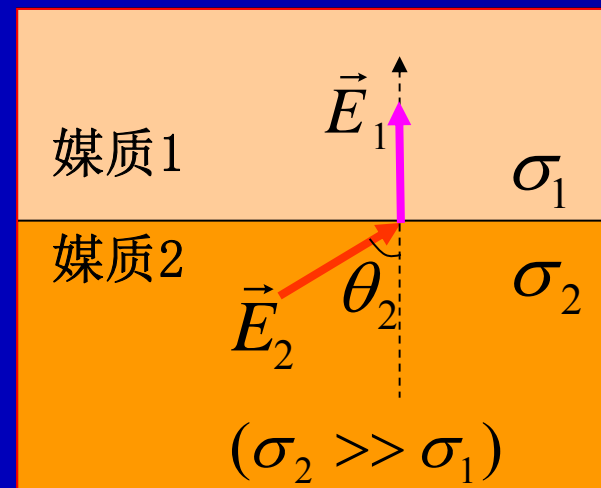
● 恒定电场与静电场性质相同，但产生的源不同，分别为运动电荷和静止电荷，但其密度都不随时间变化；

● 恒定电场同时存在于导体内部和外部，在导体表面上的电场既有法向分量又有切向分量，电场并不垂直于导体表面，因而导体表面不是等位面；

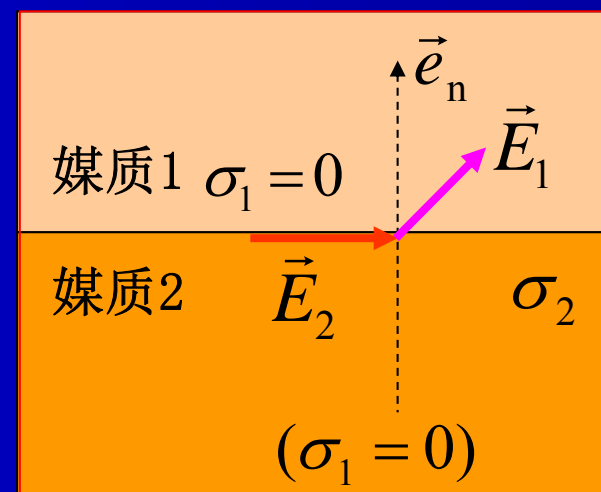
● 恒定电场问题可利用对应量变换，先变成静电场问题求解，最后再换回来；



- 如 $\sigma_2 \gg \sigma_1$ 、且 $\theta_2 \neq 90^\circ$ ，则 $\theta_1 = 0$ ，即电场线近似垂直于良导体表面。此时，良导体表面可近似地看作为等位面；



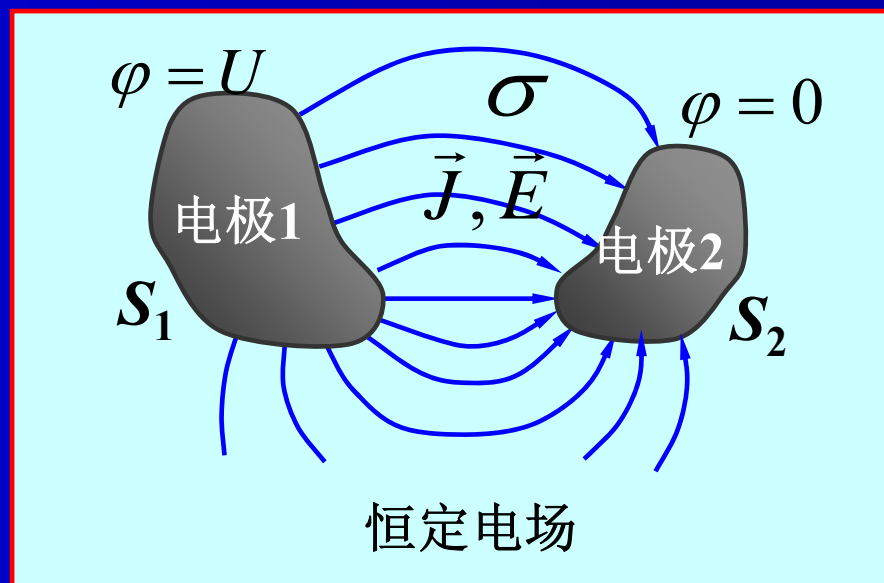
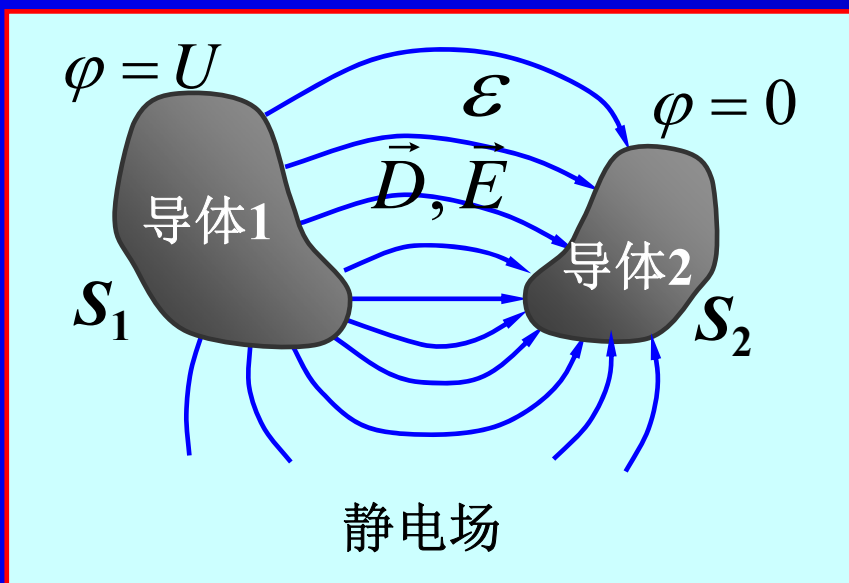
- 若媒质1为理想介质，即 $\sigma_1 = 0$ ，则 $J_1 = 0$ ，故 $J_{2n} = 0$ 且 $E_{2n} = 0$ ，即导体中一侧中只有切向电流和切向电场。



3.2.2 恒定电场与静电场的比拟

	静电场 ($\rho=0$ 区域)	恒定电场 (电源外)
基本方程	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
	$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = 0$
本构关系	$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$
位函数	$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0$	$\vec{E} = -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0$
边界条件	$E_{1t} = E_{2t} \quad D_{1n} = D_{2n}$	$E_{1t} = E_{2t} \quad J_{1n} = J_{2n}$
	$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$	$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$

对应物理量	静电场	\vec{E}	\vec{D}	φ	q	ε	C
	恒定电场	\vec{E}	\vec{J}	φ	I	σ	G



如果两种场具有相同的场方程和相同的边界条件，则其解也相同。只需求出一种场的解，就可以用对应的物理量作替换而得到另一种场的解。这种求解场的方法称为**比拟法**。



3.2.3 漏电导

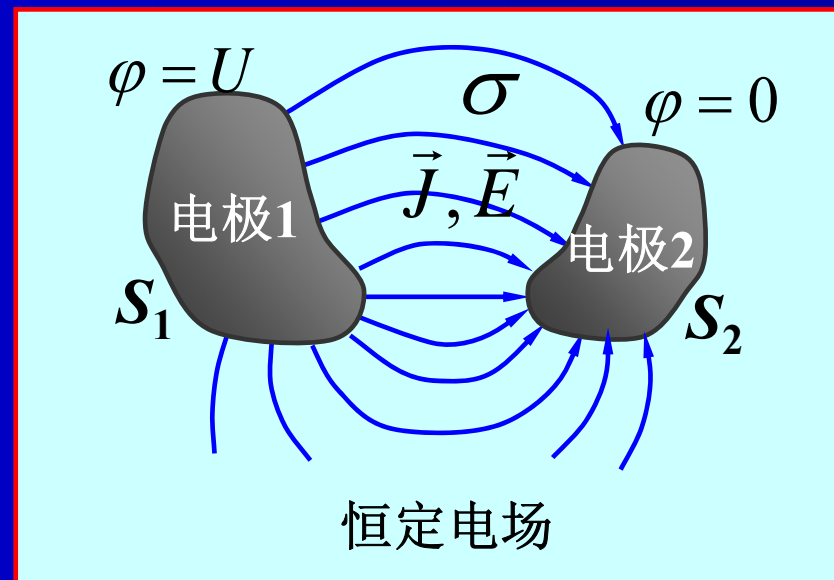
工程上，常在电容器两极板之间、同轴电缆的芯线与外壳之间，填充不导电的材料作电绝缘。这些绝缘材料的电导率远远小于金属材料的电导率，但毕竟不为零，因而当在电极间加上电压 U 时，必定会有微小的漏电流 J 存在。

漏电流与电压之比为**漏电导**，即

$$G = \frac{I}{U}$$

其倒数称为**绝缘电阻**，即

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I}$$



- 计算电导的方法一:

- (1) 假定两电极间的电流为 I ;
- (2) 计算两电极间的电流密度矢量 J ;
- (3) 由 $J = \sigma E$ 得到 E ;
- (4) 由 $U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$, 求出两导体间的电位差;
- (5) 求比值 $G = I/U$, 即得出所求电导。

- 计算电导的方法二:

- (1) 假定两电极间的电位差为 U ;
- (2) 计算两电极间的电位分布 φ ;
- (3) 由 $\vec{E} = -\nabla \varphi$ 得到 E ;
- (4) 由 $J = \sigma E$ 得到 J ;
- (5) 由 $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$, 求出两导体间电流;
- (6) 求比值 $G = I/U$, 即得出所求电导。

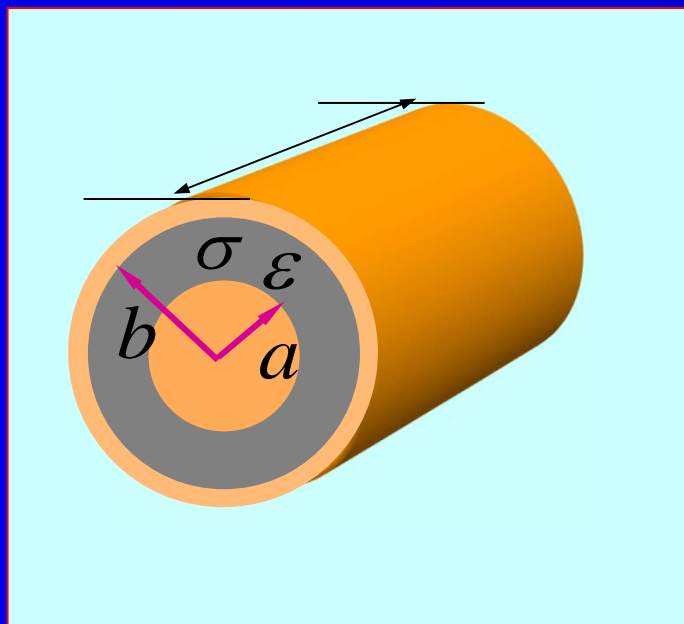
- 计算电导的方法三:

静电比拟法: $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow G = \frac{\sigma}{\varepsilon} C$



例3.2.1 求同轴电缆的绝缘电阻。设内外的半径分别为 a 、 b ，长度为 l ，其间媒质的电导率为 σ 、介电常数为 ε 。

解： 直接用恒定电场的计算方法
设由内导体流向外导体的电流为 I 。



$$\text{则 } I \Rightarrow J = \frac{I}{2\pi\rho l} \Rightarrow E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\rho l\sigma}$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{I}{2\pi\rho l\sigma} d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$

$$\text{电导} \quad G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\sigma l}{\ln(b/a)}$$

$$\text{绝缘电阻} \quad R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$



3.3 恒定磁场分析

本节内容

- 3.3.1 恒定磁场的基本方程和边界条件
- 3.3.2 恒定磁场的矢量磁位和标量磁位
- 3.3.3 电感
- 3.3.4 恒定磁场的能量



3.3.1 恒定磁场的基本方程和边界条件

1. 基本方程

$$\text{微分形式: } \begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\text{积分形式: } \begin{cases} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{cases}$$

$$\text{本构关系: } \vec{B} = \mu \vec{H}$$

2. 边界条件

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = J_S \end{cases}$$

若分界面上不存在面电流, 即 $J_S = 0$, 则

$$\begin{cases} \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = 0 \end{cases}$$



3.3.2 恒定磁场的矢量磁位和标量磁位

1. 恒定磁场的矢量磁位

■ 矢量磁位的定义

$$\text{由 } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

即恒定磁场可以用一个矢量函数的旋度来表示。

矢量磁位或称磁矢位

■ 磁矢位的任意性

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times (\nabla \psi) = \nabla \times \vec{A}$$

即磁矢位不是惟一确定的，它加上任意一个标量 ψ 的梯度以后，仍然表示同一个磁场。

原因：没有规定 \vec{A} 的散度。

恒定磁场中，通常规定 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ，并称为库仑规范。



■ 磁矢位的微分方程

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu \vec{J} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} \longrightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}$$

矢量泊松方程
 $\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$
 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

在无源区: $\vec{J} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \vec{A} = 0$ — 矢量拉普拉斯方程

■ 磁矢位的表达式

在直角坐标系中, 矢量位A的各分量满足标量泊松方程, 即

$$\nabla^2 A_i = -\mu J_i \quad (i=1,2,3) \longrightarrow \text{其中 } 1, 2, 3 \text{ 分别对应 } x, y, z$$

与静电场标量位φ满足的泊松方程比较, 可得Ai之解, 即

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon} & \nabla^2 A_i &= -\mu J_i \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dV' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varphi &\rightarrow A_i \\ \rho &\rightarrow J_i \\ \varepsilon &\rightarrow 1/\mu \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_i = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_i(r')}{|r-r'|} dV'$$



由此可得出 $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV'$

对于面电流和细导线电流回路，磁矢位分别为

面电流: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s(\vec{r}')}{R} dS'$ 细线电流: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l}'}{R}$

■ 利用磁矢位计算磁通量: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

■ 磁矢位的边界条件

$$\left. \begin{aligned} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 &\longrightarrow A_{1t} = A_{2t} \\ \nabla \cdot \vec{A} = 0 &\longrightarrow \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 0 \longrightarrow A_{1n} = A_{2n} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \vec{A}_1 = \vec{A}_2$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_s \\ \vec{H} &= \nabla \times \vec{A} / \mu \end{aligned} \right\} \longrightarrow \vec{e}_n \times \left(\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \vec{A}_1 - \frac{1}{\mu_2} \nabla \times \vec{A}_2 \right) = \vec{J}_s$$





关于磁矢位 A 的补充说明

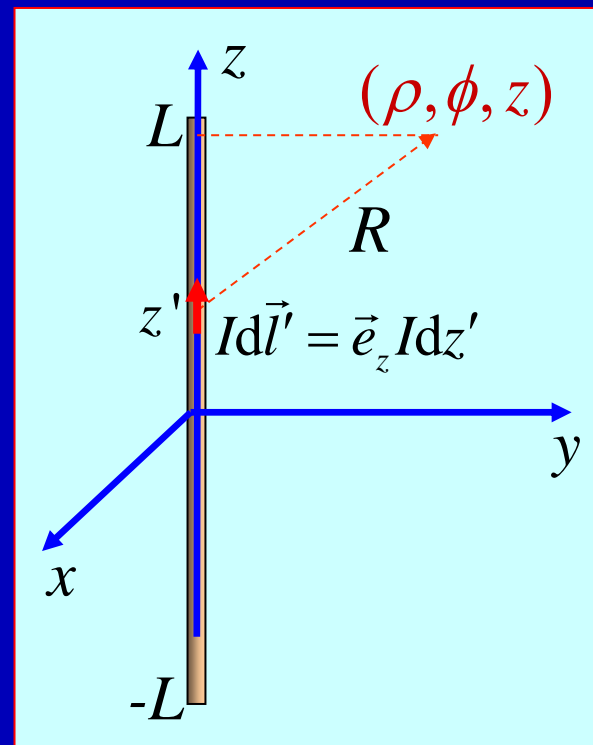
- ➡ 线电流的磁矢位与电流方向一致，求解比较简单；
- ➡ 对体分布电流，需要直接从泊松方程求解，其过程比较复杂；
- ➡ 引入磁矢位 A 是为了简化求解磁场，但只有对复杂问题才能显示出其优越性，对于简单问题，还是直接求解磁场为宜。



例 3.3.1 求无限长线电流 I 的磁矢位, 设电流沿 $+z$ 方向流动。

解: 先求长度为 $2L$ 的直线电流的磁矢位。电流元 $Id\vec{l}' = \vec{e}_z Idz'$ 到点 $P(\rho, \phi, z)$ 的距离 $R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ 。则

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}') &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} dz' \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln[z' - z + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}] \Big|_{-L}^L \\ &= \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + (z - L)^2} - (z - L)}{\sqrt{\rho^2 + (z + L)^2} - (z + L)}\end{aligned}$$



与计算无限长线电荷的电位一样, 令 $L \rightarrow \infty$ 可得到无限长线电流

的磁矢位 $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{2l}{\rho}\right) \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)$ ρ_0 为矢量磁位的参考点

2. 恒定磁场的标量磁位

■ 标量磁位的引入

一般情况下，恒定磁场只能引入磁矢位来描述，但在无传导电流 ($J=0$) 的空间中，则有

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \longrightarrow \vec{H} = -\nabla \varphi_m$$

标量磁位或磁标位

即在没有传导电流 ($J=0$) 的空间中，可以引入一个标量位函数来描述磁场。

在线性、各向同性的均匀媒质中

$$\vec{B} = -\mu_0 \vec{H}, \quad \vec{H} = -\nabla \varphi_m, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \nabla^2 \varphi_m = 0$$

■ 标量磁位的边界条件

$$\varphi_{m1} = \varphi_{m2} \quad \text{和} \quad \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n}$$



3.3.3 电感

1. 磁通与磁链

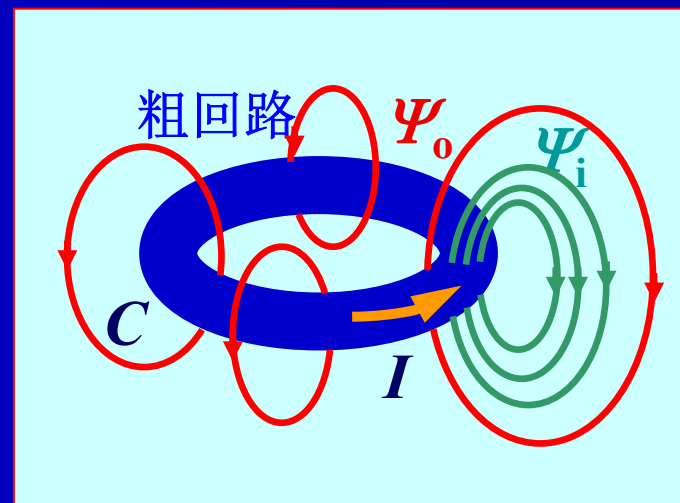
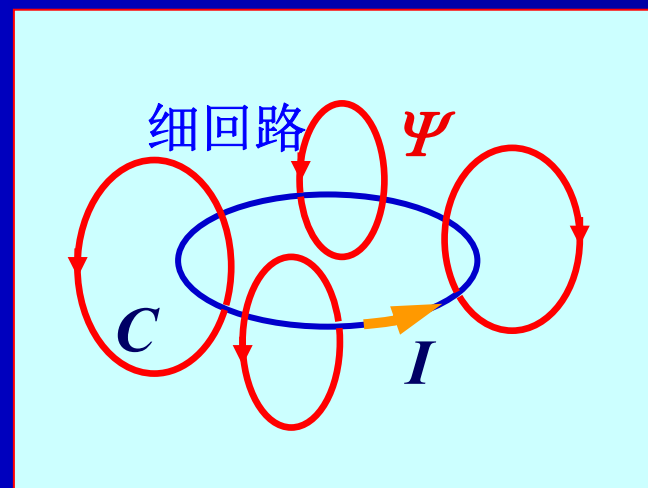
- 单匝线圈形成的回路的磁链定义为穿过该回路的磁通量

$$\Psi = \Phi$$

- 多匝线圈形成的导线回路的磁链定义为所有线圈的磁通总和

$$\Psi = \sum_i \Phi_i$$

- 粗导线构成的回路，磁链分为两部分：一部分是粗导线包围的、磁力线不穿过导体的外磁通量 Ψ_0 ；另一部分是磁力线穿过导体、只有粗导线的一部分包围的内磁通量 Ψ_i 。



2. 自感

设回路 C 中的电流为 I ，所产生的磁场与回路 C 交链的磁链为 Ψ ，则磁链 Ψ 与回路 C 中的电流 I 有正比关系，其比值

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

称为回路 C 的自感系数，简称自感。

粗导体回路的自感： $L = L_i + L_o$

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} \text{ —— 内自感； } L_o = \frac{\Psi_o}{I} \text{ —— 外自感}$$

■ 自感的特点：

自感只与回路的几何形状、尺寸以及周围的磁介质有关，与电流无关。



3.3.4 恒定磁场的能量

■ **N** 个载流回路的磁场能量
$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \Psi_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \oint_{C_j} \vec{A}_j \cdot d\vec{l}_j$$

■ 单个载流回路的磁场能量
$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

■ 两个载流回路的磁场能量
$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

■ 体分布电流的磁场能量
$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{J} \cdot \vec{A} dV$$

■ 恒定磁场能量
$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu \vec{H} \cdot \vec{H} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV$$

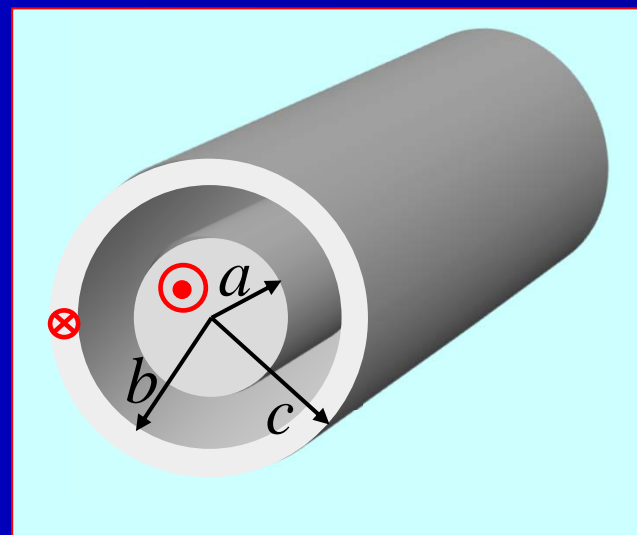
■ 恒定磁场能量密度
$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu \vec{H} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$$



例3.3.2 同轴电缆的内导体半径为 a ，外导体的内、外半径分别为 b 和 c ，如图所示。导体中通有电流 I ，试求同轴电缆中单位长度储存的磁场能量。

解： 由安培环路定理，得

$$\vec{H} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \frac{\rho I}{2\pi a^2} & 0 < \rho < a \\ \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi \rho} & a < \rho < b \\ \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi \rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} & b < \rho < c \\ 0 & \rho > c \end{cases}$$



三个区域单位长度内的磁场能量分别为

$$W_{m1} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^a \left(\frac{\rho I}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

$$W_{m2} = \frac{\mu_0}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi \rho} \right)^2 2\pi \rho d\rho = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} W_{m3} &= \frac{\mu_0}{2} \int_b^c \left(\frac{I}{2\pi \rho} \right)^2 \left(\frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right)^2 2\pi \rho d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \end{aligned}$$



单位长度内总的磁场能量为

$$\begin{aligned} W_m &= W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\frac{c^4}{(c^2 - b^2)^2} \ln \frac{c}{b} - \frac{3c^2 - b^2}{4(c^2 - b^2)} \right] \end{aligned}$$



3.4 静态场的边值问题及解的惟一性定理

- 边值问题：在给定的边界条件下，求解位函数的泊松方程或拉普拉斯方程

本节内容

3.4.1 边值问题的类型

3.4.2 惟一性定理



3.4.1 边值问题的类型

- 第一类边值问题（或狄里赫利问题）

已知场域边界面 S 上的位函数值，即

$$\varphi|_S = f_1(S)$$

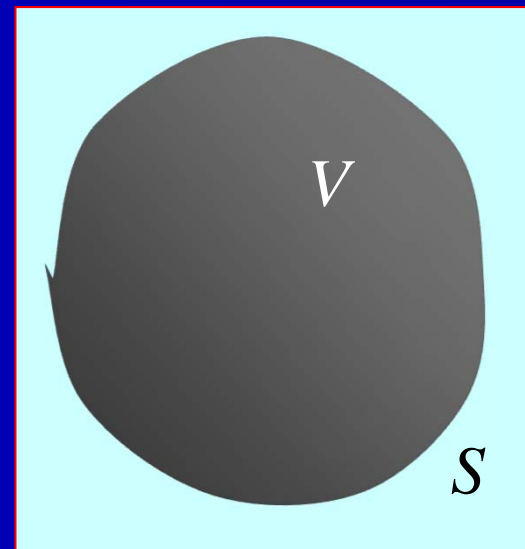
- 第二类边值问题（或纽曼问题）

已知场域边界面 S 上的位函数的法向导数值，即 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = f_2(S)$

- 第三类边值问题（或混合边值问题）

已知场域一部分边界面 S_1 上的位函数值，而另一部分边界面 S_2 上则已知位函数的法向导数值，即

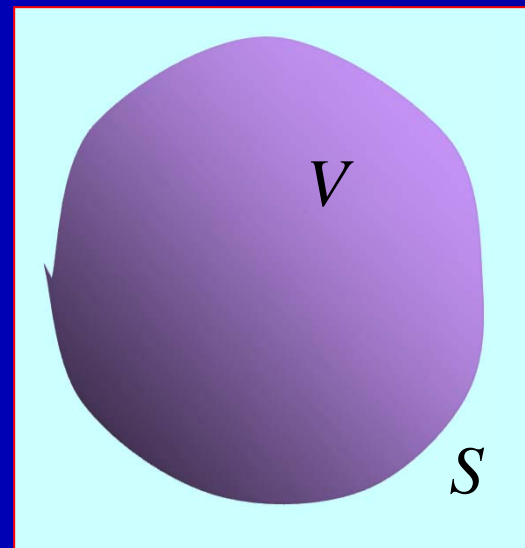
$$\varphi|_{S_1} = f_1(S_1), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_{S_2} = f_2(S_2)$$



3.4.2 惟一性定理

■ 惟一性定理的表述

在场域 V 的边界面 S 上给定 φ 或 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 的值，则泊松方程或拉普拉斯方程在场域 V 具有惟一值。



■ 惟一性定理的重要意义

- 给出了静态场边值问题具有惟一解的条件
- 为静态场边值问题的各种求解方法提供了理论依据
- 为求解结果的正确性提供了判据

