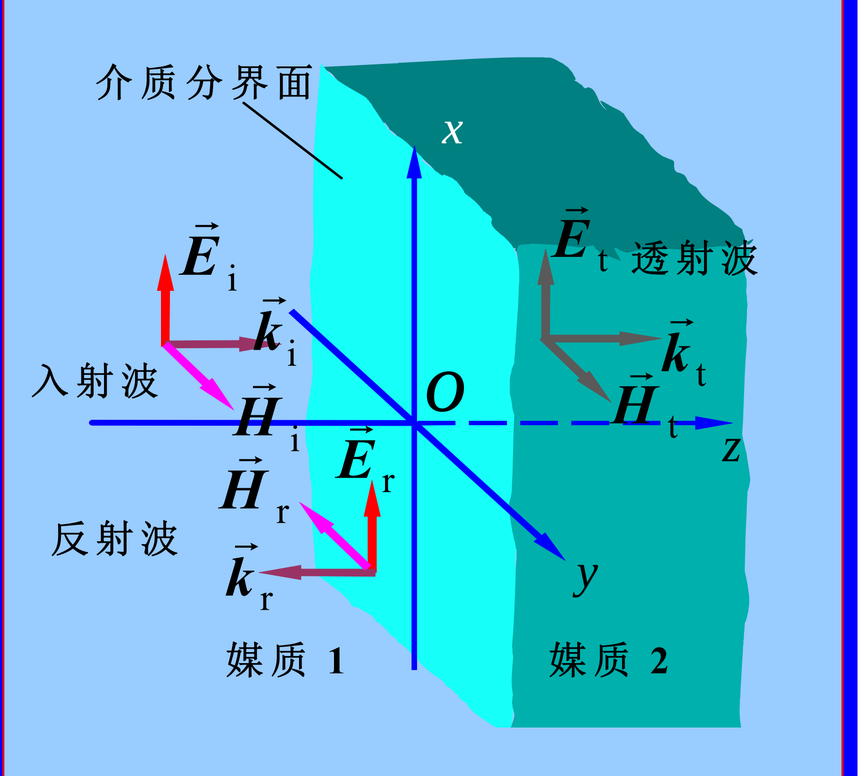
第6章 均匀平面波的反射与透射

讨论内容

- 现象：电磁波入射到不同媒质分界面上时，一部分波被分界面反射，一部分波透过分界 面。



均匀平面波垂直入射到两种不同媒质的分界平面

- 入射方式：垂直入射、斜入射；
- 媒质类型：

理想导体、理想介质、导电媒质

- 分析方法：

入射波（已知）＋反射波（未知） $\xleftrightarrow{\text{边界条件}}$ 透射波（未知）

6.1 均匀平面波对分界平面的垂直入射

6.1.1 对导电媒质分界面的垂直入射

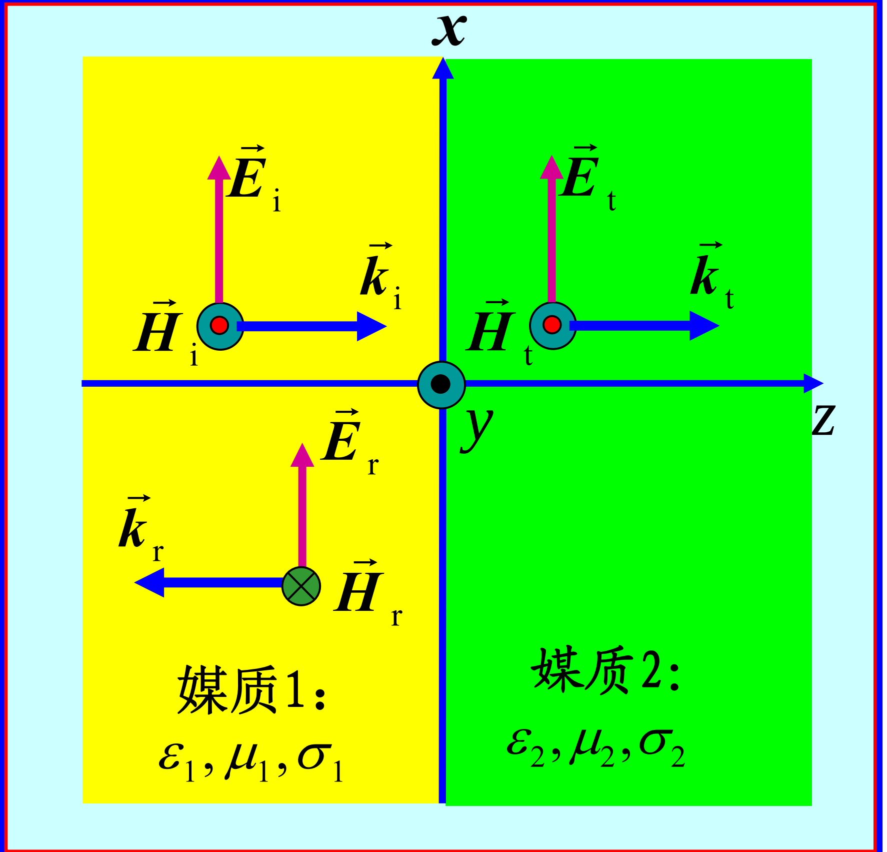
- $z<0$中，导电媒质1 的参数为

  μ_1、ε_1、σ_1

- $z>0$中，导电媒质 2 的参数为

  μ_2、ε_2、σ_2

- 沿x方向极化的均匀平面波从媒质1 垂直入射到与导电媒质 2 的分界平面上。



媒质1中的入射波：

$$\vec{E}_{\mathrm{i}}(z)=\vec{e}_x E_{\mathrm{im}}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{i}}(z)=\vec{e}_y \frac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_{1\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}$$

媒质1中的反射波：

$$\vec{E}_{\mathrm{r}}(z)=\vec{e}_x E_{\mathrm{rm}}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{r}}(z)=-\vec{e}_y \frac{E_{\mathrm{rm}}}{\eta_{1\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}$$

$$\gamma_1=\mathrm{j}k_{1\mathrm{c}}=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_{1\mathrm{c}}}$$

$$=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\,(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1})^{1/2}$$

$$\eta_{1\mathrm{c}}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_{1\mathrm{c}}}}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1})^{-1/2}$$

$$=\eta_1(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1})^{-1/2}$$

媒质1中的合成波：

$$\vec{E}_1(z)=\vec{E}_{\mathrm{i}}(z)+\vec{E}_{\mathrm{r}}(z)=\vec{e}_x E_{\mathrm{im}}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}+\vec{e}_x E_{\mathrm{rm}}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}$$

$$\vec{H}_1(z)=\vec{H}_{\mathrm{i}}(z)+\vec{H}_{\mathrm{r}}(z)=\vec{e}_y \frac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_{1\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{-\gamma_1 z}-\vec{e}_y \frac{E_{\mathrm{rm}}}{\eta_{1\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{\gamma_1 z}$$

媒质2中的透射波：

$$\vec{E}_t(z)=\vec{e}_x E_{tm}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}\ ,\ \vec{H}_t(z)=\vec{e}_y \frac{E_{tm}}{\eta_{2c}}\mathrm{e}^{-\gamma_2 z}$$

$$\gamma_2=\mathrm{j}k_{2c}=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_{2c}}=\mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2})^{1/2}$$

$$\eta_{2c}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{2c}}}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2})^{-1/2}=\eta_2(1-\mathrm{j}\frac{\sigma_2}{\omega\varepsilon_2})^{-1/2}$$

在分界面$z=0$上，电场强度和磁场强度切向分量连续，即

$$\begin{cases}E_1(0)=E_2(0)\\ H_1(0)=H_2(0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E_{im}+E_{rm}=E_{tm}\\ \dfrac{1}{\eta_{1c}}(E_{im}-E_{rm})=\dfrac{1}{\eta_{2c}}E_{tm}\end{cases}$$

定义分界面上的反射系数 Γ 为反射波电场的振幅与入射波电场振幅之比、透射系数 τ 为透射波电场的振幅与入射波电场振幅之比，则

$$\begin{cases} E_{\mathrm{im}} + E_{\mathrm{rm}} = E_{\mathrm{tm}} \\ \dfrac{1}{\eta_{1\mathrm{c}}}(E_{\mathrm{im}} - E_{\mathrm{rm}}) = \dfrac{1}{\eta_{2\mathrm{c}}} E_{\mathrm{tm}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma = \dfrac{E_{\mathrm{rm}}}{E_{\mathrm{im}}} = \dfrac{\eta_{2\mathrm{c}} - \eta_{1\mathrm{c}}}{\eta_{2\mathrm{c}} + \eta_{1\mathrm{c}}} \\ \tau = \dfrac{E_{\mathrm{tm}}}{E_{\mathrm{im}}} = \dfrac{2\eta_{2\mathrm{c}}}{\eta_{2\mathrm{c}} + \eta_{1\mathrm{c}}} \end{cases}$$

- 讨论：
  - $1 + \Gamma = \tau$
  - Γ 和 τ 是复数，表明反射波和透射波的振幅和相位与入射波都不同。
  - 若媒质2为理想导体，即 $\sigma_2 = \infty$，则 $\eta_{2\mathrm{c}} = 0$，故有

$$\Gamma = -1、\ \tau = 0$$

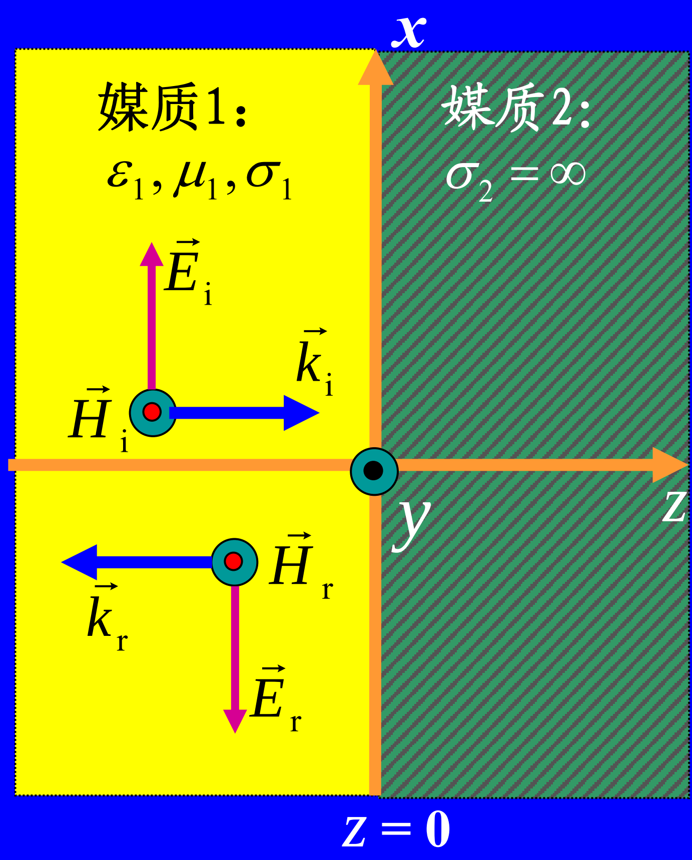
  - 若两种媒质均为理想介质，即 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$，则得到

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \quad \tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

6.1.2 对理想导体表面的垂直入射

媒质1为理想介质，$\sigma_1 = 0$

媒质2为理想导体，$\sigma_2 = \infty$



则 $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$，$\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$，$\eta_2 = 0$

故 $\Gamma = -1$、$\tau = 0$

$$E_{\mathrm{rm}} = -E_{\mathrm{im}}$$

在分界面上，反射波电场与入射波电场的相位差为π

媒质1中的入射波：$\vec{E}_{\mathrm{i}}(z) = \vec{e}_x E_{\mathrm{im}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}$，$\vec{H}_{\mathrm{i}}(z) = \vec{e}_y \dfrac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}$

媒质1中的反射波：$\vec{E}_{\mathrm{r}}(z) = -\vec{e}_x E_{\mathrm{im}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}$，$\vec{H}_{\mathrm{r}}(z) = \vec{e}_y \dfrac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}$

媒质1中合成波的电磁场为

$$\vec{E}_1(z)=\vec{e}_x E_{\text{im}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})=-\vec{e}_x \mathrm{j}2E_{\text{im}}\sin(\beta_1 z)$$

$$\vec{H}_1(z)=\vec{e}_y\frac{E_{\text{im}}}{\eta_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})=\vec{e}_y\frac{2E_{\text{im}}\cos(\beta_1 z)}{\eta_1}$$

瞬时值形式 $\vec{E}_1(z,t)=\mathrm{Re}[\vec{E}_1(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\vec{e}_x 2E_{\text{im}}\sin(\beta_1 z)\sin(\omega t)$

$$\vec{H}_1(z,t)=\mathrm{Re}[\vec{H}_1(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\vec{e}_y\frac{2E_{\text{im}}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z)\cos(\omega t)$$

合成波的平均能流密度矢量

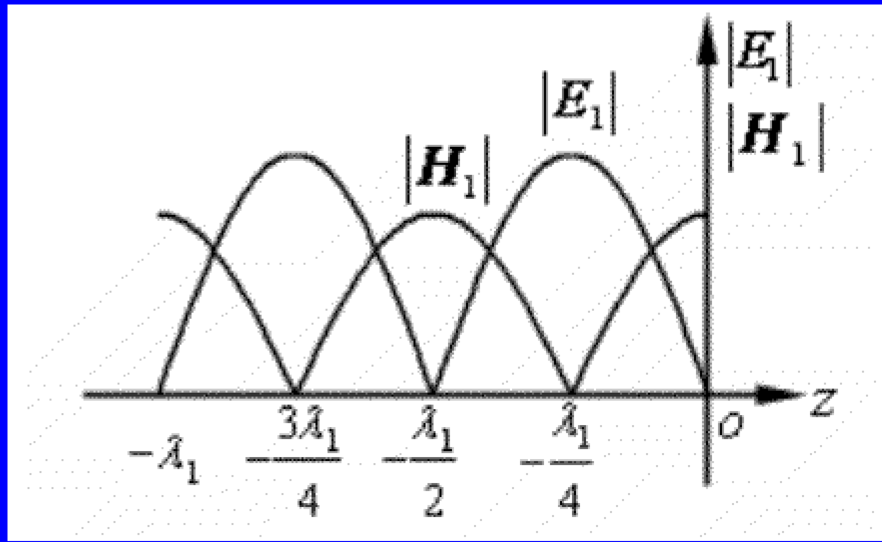
$$\vec{S}_{\text{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}_1\times\vec{H}_1^*]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\vec{e}_x \mathrm{j}2E_{\text{im}}\sin(\beta_1 z)\times\vec{e}_y\left(\frac{2E_{\text{im}}\cos(\beta_1 z)}{\eta_1}\right)^*\right]=0$$

理想导体表面上的感应电流

$$\vec{J}_S=\vec{e}_{\text{n}}\times\vec{H}_1(z)\big|_{z=0}=-\vec{e}_z\times\vec{e}_y\frac{2E_{\text{im}}\cos(\beta_1 z)}{\eta_1}\Big|_{z=0}=\vec{e}_x\frac{2E_{\text{im}}}{\eta_1}$$

■ 合成波的特点 P268

- 媒质1中的合成波是驻波。电场振幅的最大值为$2E_{im}$，最小值为0；磁场振幅的最大值为$2E_{im}/\eta_1$，最小值也为0。



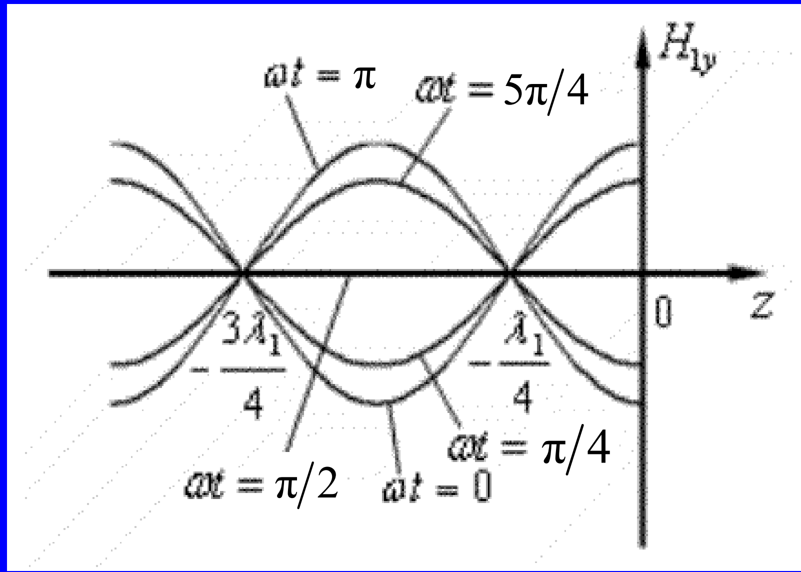
- 电场波节点（$|E_1(z)|$的最小值的位置）

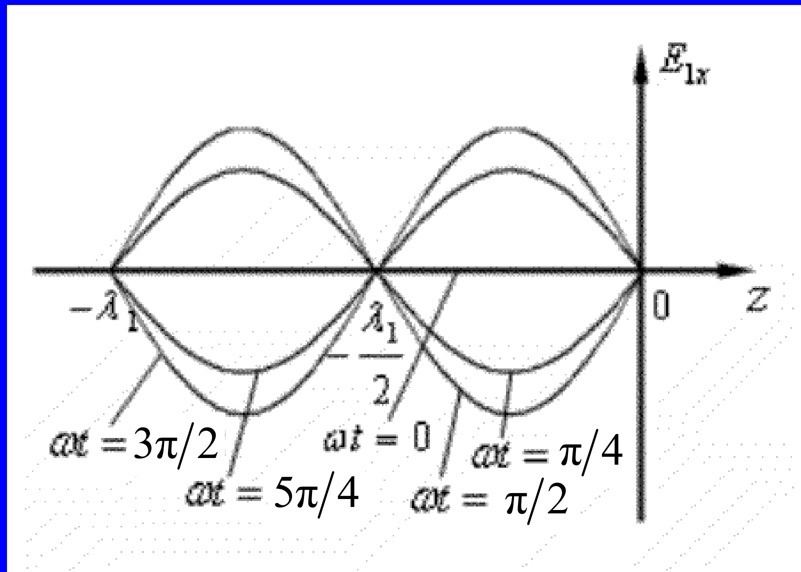
$$\beta_1 z_{min} = -n\pi \Longrightarrow z_{min} = -\frac{n\lambda_1}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

- 电场波腹点（$|\vec{E}_1(z)|$的最大值的位置）

$$\beta_1 z_{min} = -(2n+1)\pi/2 \Longrightarrow z_{max} = -\frac{(2n+1)\lambda_1}{4} \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

- 两相邻波节点之间任意两点的电场同相。同一波节点两侧的电场反相。
- $\vec{E}_1$、$\vec{H}_1$在时间上有$\pi/2$的相移。
- $\vec{E}_1$、$\vec{H}_1$在空间上错开$\lambda/4$，电场的波腹（节）点正好是磁场的波节腹）点。
- 坡印廷矢量的平均值为零，不发生能量传输过程，仅在两个波节间进行电场能量和磁场能的交换。





例6.1.1　一均匀平面波沿+z 方向传播，其电场强度矢量为

$$\vec{E}_{\mathrm{i}} = \vec{e}_x 100\sin(\omega t - \beta z) + \vec{e}_y 200\cos(\omega t - \beta z)\ \ \mathrm{V/m}$$

（1）求相伴的磁场强度；

（2）若在传播方向上 $z=0$处，放置一无限大的理想导体平板，求区域 $z<0$ 中的电场强度 和磁场强度；

（3）求理想导体板表面的电流密度。

解：(1)　电场强度的复数表示

$$\vec{E}_{\mathrm{i}} = \vec{e}_x 100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} + \vec{e}_y 200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

则

$$\vec{H}_{\mathrm{i}}(z) = \frac{1}{\eta_0}\vec{e}_z \times \vec{E}_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\eta_0}(-\vec{e}_x 200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \vec{e}_y 100\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2})$$

写成瞬时表达式

$$\vec{H}_{\mathrm{i}}(z,t)=\mathrm{Re}[\vec{H}_{\mathrm{i}}(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$=\frac{1}{\eta_0}[-\vec{e}_x 200\cos(\omega t-\beta z)+\vec{e}_y 100\cos(\omega t-\beta z-\frac{1}{2}\pi)]$$

(2) 反射波的电场为

$$\vec{E}_{\mathrm{r}}(z)=-\vec{e}_x 100\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}-\vec{e}_y 200\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}$$

反射波的磁场为

$$\vec{H}_{\mathrm{r}}(z)=\frac{1}{\eta_0}(-\vec{e}_z\times\vec{E}_{\mathrm{r}})=\frac{1}{\eta_0}(-\vec{e}_x 200\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}+\vec{e}_y 100\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2})$$

在区域 $z<0$ 的合成波电场和磁场分别为

$$\vec{E}_1=\vec{E}_\mathrm{i}+\vec{E}_\mathrm{r}=-\vec{e}_x\mathrm{j}200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\sin(\beta z)-\vec{e}_y\mathrm{j}400\sin(\beta z)$$

$$\vec{H}_1=\vec{H}_\mathrm{i}+\vec{H}_\mathrm{r}=\frac{1}{\eta_0}[-\vec{e}_x400\cos(\beta z)+\vec{e}_y200\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\cos(\beta z)]$$

(3) 理想导体表面电流密度为

$$\vec{J}_S=-\vec{e}_z\times\vec{H}_1\big|_{z=0}$$

$$=\vec{e}_x\frac{200}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}+\vec{e}_y\frac{400}{\eta_0}=-\vec{e}_x\mathrm{j}0.53+\vec{e}_y1.06$$

6.1.3 对理想介质分界面的垂直入射

设两种媒质均为理想介质，即

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

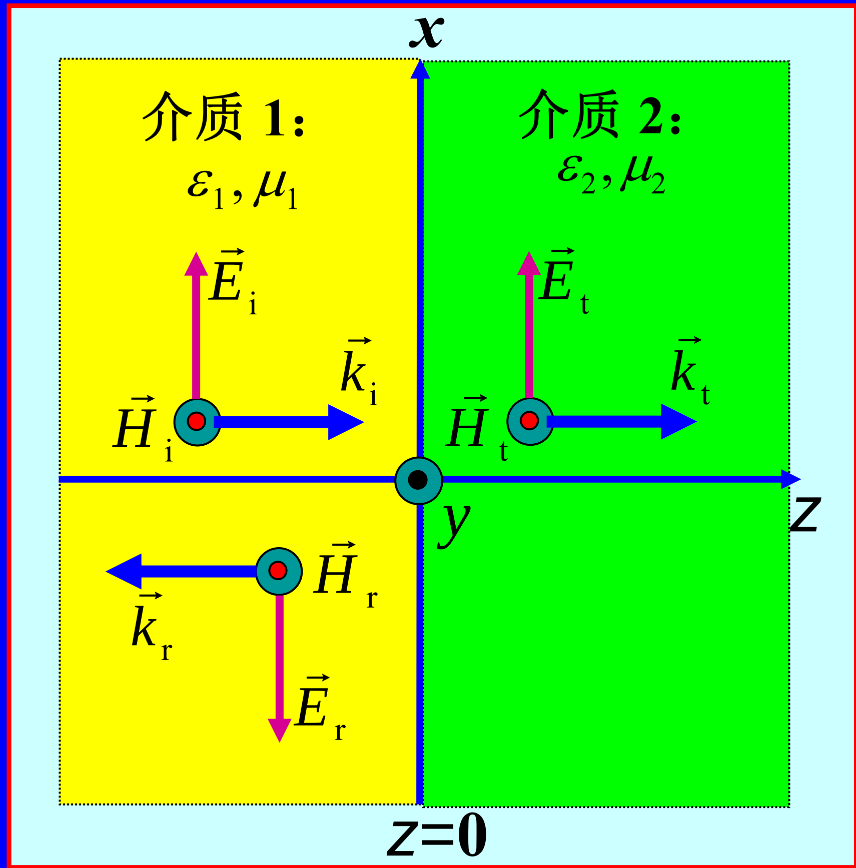
则

$$\gamma_1 = \mathrm{j}\beta_1 = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$$

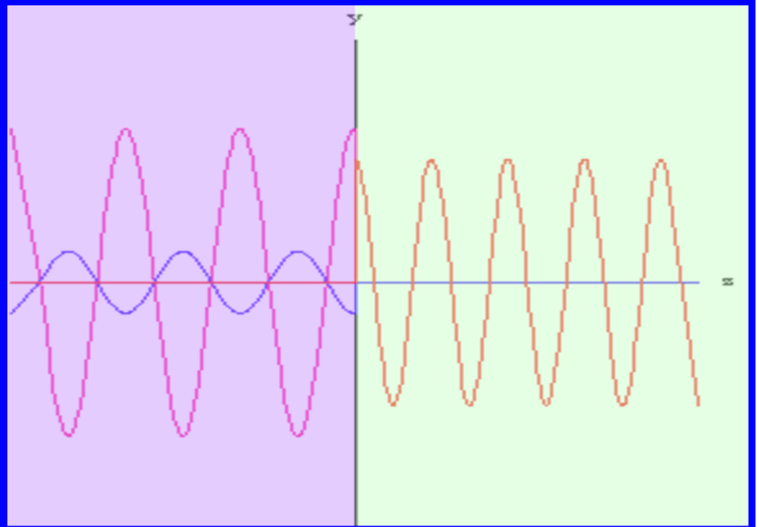
$$\gamma_2 = \mathrm{j}\beta_2 = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$$

$$\eta_{1c} = \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\,, \quad \eta_{2c} = \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}\,, \qquad \tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$



- 讨论
  - 当$\eta_2 > \eta_1$时，$\Gamma > 0$，反射波电场与入射波电场同相。
  - 当$\eta_2 < \eta_1$时，$\Gamma < 0$，反射波电场与入射波电场反相。



媒质1中的入射波：$\vec{E}_{\mathrm{i}}(z)=\vec{e}_x E_{\mathrm{im}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}$

$$\vec{H}_{\mathrm{i}}(z)=\vec{e}_y \frac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}$$

媒质1中的反射波：$\vec{E}_{\mathrm{r}}(z)=\vec{e}_x \varGamma E_{\mathrm{im}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}$

$$\vec{H}_{\mathrm{r}}(z)=-\vec{e}_y \frac{\varGamma E_{\mathrm{im}}}{\eta_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}$$

媒质1中的合成波：$\vec{E}_1(z)=\vec{E}_{\mathrm{i}}(z)+\vec{E}_{\mathrm{r}}(z)=\vec{e}_x E_{\mathrm{im}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}+\varGamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})$

$$\vec{H}_1(z)=\vec{H}_{\mathrm{i}}(z)+\vec{H}_{\mathrm{r}}(z)=\vec{e}_y \frac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}-\varGamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})$$

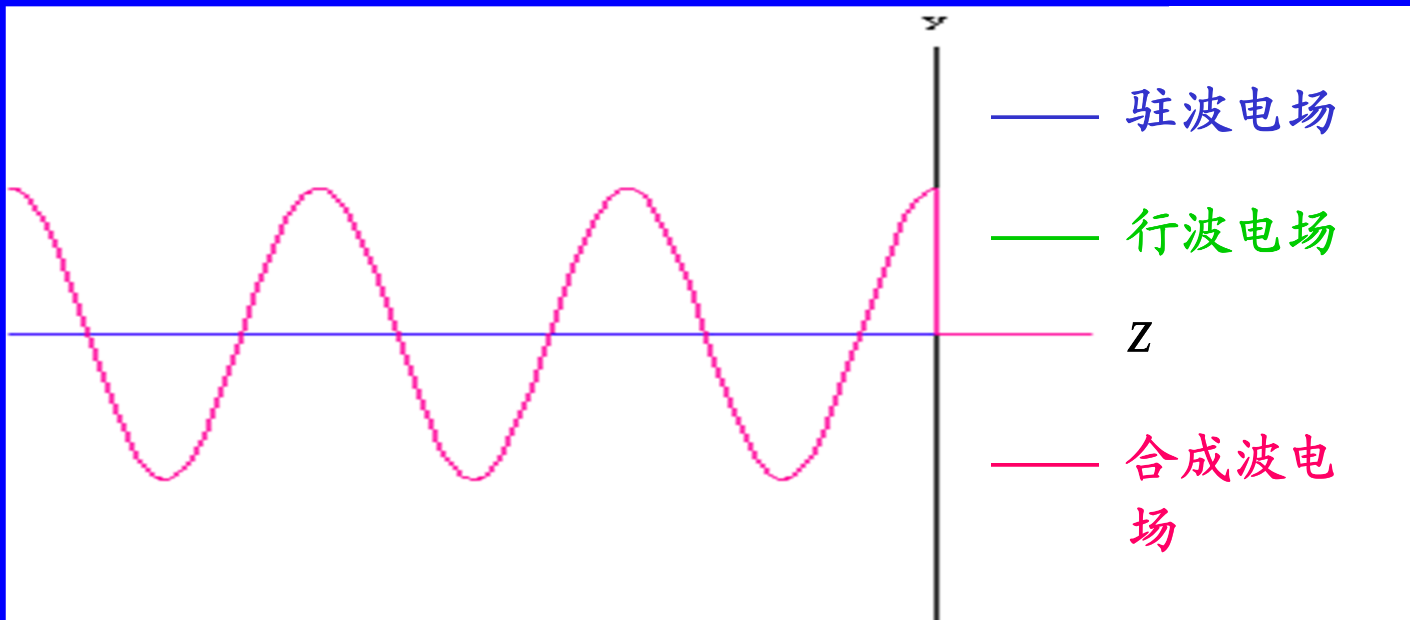
媒质2中的透射波：$\vec{E}_2(z)=\vec{E}_{\mathrm{t}}(z)=\vec{e}_x \tau E_{\mathrm{im}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}$

$$\vec{H}_2(z)=\vec{H}_{\mathrm{t}}(z)=\vec{e}_y \frac{\tau E_{\mathrm{im}}}{\eta_2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}$$

合成波的特点

$$\vec{E}_1(z) = \vec{e}_x E_{\mathrm{im}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})$$
$$= \vec{e}_x E_{\mathrm{im}}\left[(1+\Gamma)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \Gamma(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z})\right]$$
$$= \vec{e}_x E_{\mathrm{im}}\left[(1+\Gamma)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \mathrm{j}2\Gamma\sin(\beta_1 z)\right]$$

- 这种由行波和纯驻波合成的波称为**混合波**



- 合成波电场振幅（$\varGamma > 0$）

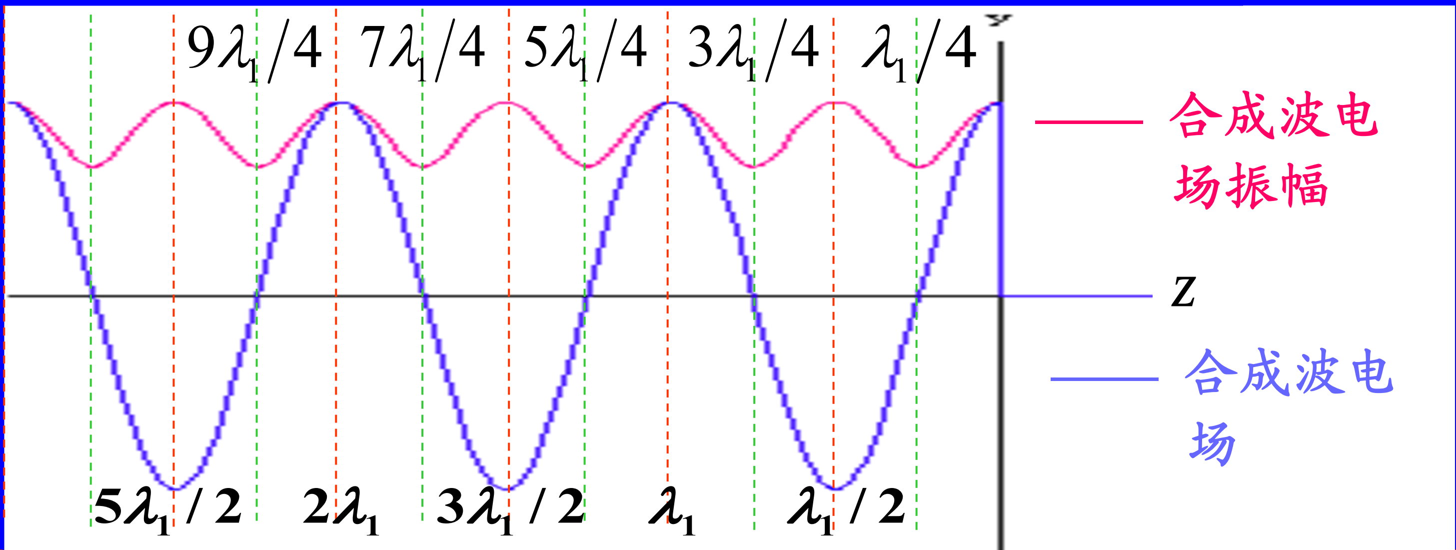
$$\left|\vec{E}_1(z)\right| = E_{\mathrm{im}}\left|1+\varGamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}\right| = E_{\mathrm{im}}\sqrt{1+\varGamma^2+2\varGamma\cos(2\beta_1 z)}$$

当 $\beta_1 z = -n\pi$，即 $z = -n\lambda_1/2$ 　$(n = 0,1,2,\cdots$时)，有

$$\left|\vec{E}_1(z)\right|_{\max} = E_{\mathrm{im}}\left|1+\varGamma\right|$$

当 $\beta_1 z = -(2n+1)\pi/2$，即 $z = -(n/2+1/4)\lambda_1$ 　$(n = 0,1,2,\cdots$时)，有

$$\left|\vec{E}_1(z)\right|_{\min} = E_{\mathrm{im}}\left|1-\varGamma\right|$$



合成波电场振幅（$\Gamma < 0$）

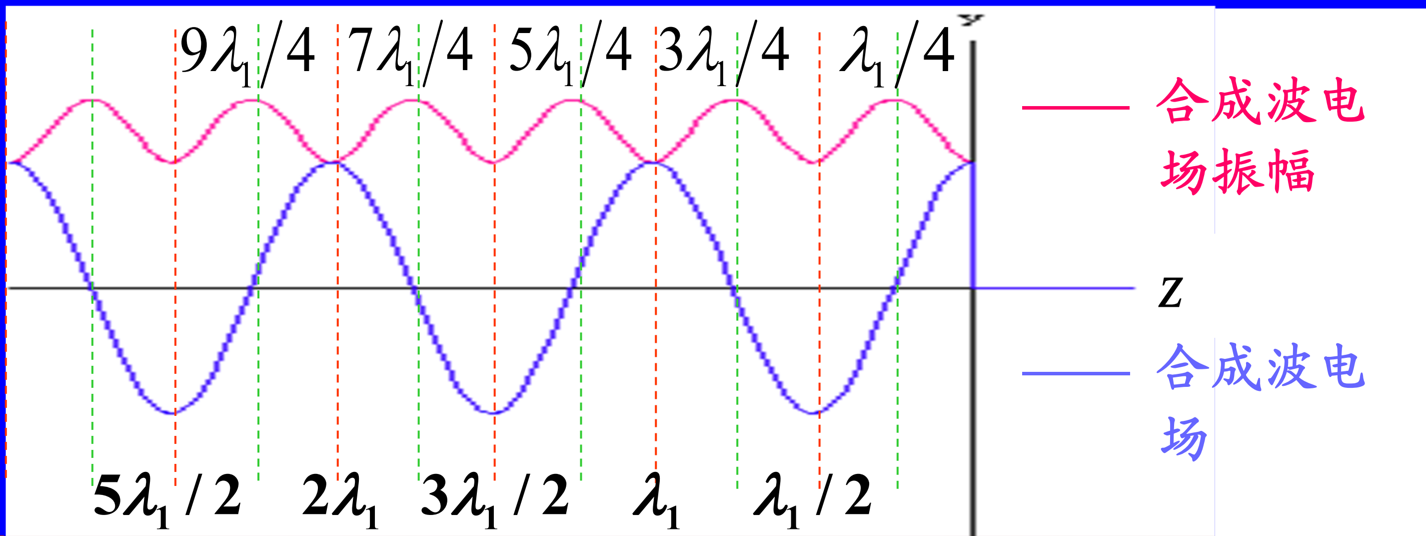
$$\left|\vec{E}_1(z)\right| = E_{\mathrm{im}}\left|1+\Gamma \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}\right| = E_{\mathrm{im}}\sqrt{1+\Gamma^2+2\Gamma\cos(2\beta_1 z)}$$

当$\beta_1 z = -n\pi$，即 $z = -n\lambda_1/2$　　$(n = 0,1,2,\cdots)$时，有

$$\left|\vec{E}_1(z)\right|_{\min} = E_{\mathrm{im}}\left|1+\Gamma\right|$$

当$\beta_1 z = -(2n+1)\pi/2$，即$z = -(n/2+1/4)\lambda_1$　　$(n = 0,1,2,\cdots)$时，有

$$\left|\vec{E}_1(z)\right|_{\max} = E_{\mathrm{im}}\left|1-\Gamma\right|$$



驻波系数(驻波比) S

驻波系数 S 定义为驻波的电场强度振幅的最大值与最小值之比，即

$$S=\frac{|\vec{E}|_{\max}}{|\vec{E}|_{\min}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \Longleftrightarrow |\Gamma|=\frac{S-1}{S+1}$$

讨论

- 当 $\Gamma=0$ 时，$S=1$，为行波。
- 当 $\Gamma=\pm1$ 时，$S=\infty$，是纯驻波。
- 当 $0<|\Gamma|<1$ 时，$1<S<\infty$，为混合波。S 越大，驻波分量越 大，行波分量越小；

电磁能流密度

媒质1中沿 z 方向传播的平均功率密度

$$\vec{S}_{\text{iav}}=\frac{1}{2}\text{Re}\left[\vec{E}_{\text{i}}\times\vec{H}_{\text{i}}^{*}\right]=\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_1}E_{\text{im}}^2$$

$$\vec{S}_{\text{rav}}=\frac{1}{2}\text{Re}\left[\vec{E}_{\text{r}}\times\vec{H}_{\text{r}}^{*}\right]=-\vec{e}_z\frac{1}{2\eta_1}\Gamma^2E_{\text{im}}^2$$

$$\vec{S}_{1\text{av}}=\frac{1}{2}\text{Re}\left[\vec{E}_1\times\vec{H}_1^{*}\right]=\vec{e}_z\frac{E_{\text{im}}^2}{2\eta_1}(1-\Gamma^2)$$

入射波平均功率密度减去反射波平均功率密度

媒质2中的平均功率密度

$$\vec{S}_{2\text{av}}=\frac{1}{2}\text{Re}\left[\vec{E}_2\times\vec{H}_2^{*}\right]=\vec{e}_z\frac{E_{\text{im}}^2}{2\eta_2}\tau^2$$

由 $1-\Gamma^2=(1+\Gamma)(1-\Gamma)=\dfrac{\eta_1}{\eta_2}\tau^2$ $\Rightarrow$ $\vec{S}_{1\text{av}}=\vec{S}_{2\text{av}}$

例 6.1.2 已知媒质1的$\varepsilon_{r1}=4$、$\mu_{r1}=1$、$\sigma_1=0$； 媒质2 的$\varepsilon_{r2}=10$、$\mu_{r2}=4$、$\sigma_2=0$ 。角频率$\omega=5\times10^8$ rad /s 的均匀平面波从媒质1垂直入射到分界面上，设入射波是沿 x 轴方向的线极化波，在 $t=0$、$z=0$ 时，入射波电场的振幅为2.4 V/m 。求：

(1) β_1和β_2；

(2) 反射系数Γ_1和Γ_2；

(3) 1区的电场 $\vec{E}_1(z,t)$；

(4) 2区的电场 $\vec{E}_2(z,t)$。

解：（1）$\beta_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}=\dfrac{5\times10^8}{3\times10^8}\times2=3.33\ \text{rad/m}$

$$\beta_2=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}=\frac{5\times10^8}{3\times10^8}\sqrt{10\times4}=10.54\ \text{rad/m}$$

（2）
$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\varepsilon_{r1}}}=\eta_0\frac{1}{2}=60\pi\ \Omega$$

$$\eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=\eta_0\sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}}=\eta_0\sqrt{\frac{4}{10}}\approx 75.9\pi\ \Omega$$

$$\Gamma=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=\frac{75.9-60}{60+75.9}=0.117$$

（3） 1区的电场

$$\vec{E}_1(z)=\vec{E}_i(z)+\vec{E}_r(z)=\vec{e}_x E_{im}(e^{-j\beta_1 z}+\Gamma e^{j\beta_1 z})$$
$$=\vec{e}_x E_{im}[(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z}+j2\Gamma\sin(\beta_1 z)]$$
$$=\vec{e}_x 2.4[1.117e^{-j3.33z}+j0.234\sin(3.33z)]$$

或 $\vec{E}_1(z)=\vec{E}_\mathrm{i}(z)+\vec{E}_\mathrm{r}(z)=\vec{e}_x 2.4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3.33z}+\vec{e}_x 0.281\mathrm{e}^{\mathrm{j}3.33z}$

$$\vec{E}_1(z,t)=\mathrm{Re}\left[\vec{E}_1(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]$$

$$=\vec{e}_x 2.4\cos(5\times10^8 t-3.33z)+\vec{e}_x 0.281\cos(5\times10^8 t+3.33z)$$

（4） $\tau=\dfrac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\approx1.12$

故 $\vec{E}_2(z)=\vec{e}_x E_\mathrm{tm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}=\vec{e}_x\tau E_\mathrm{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}$

$$=\vec{e}_x 1.12\times2.4\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10.54z}=\vec{e}_x 2.68\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10.54z}$$

$$\vec{E}_2(z,t)=\vec{e}_x 2.68\cos(5\times10^8 t-10.54z)$$

6.2 均匀平面波对多层介质分界平面的垂直入射

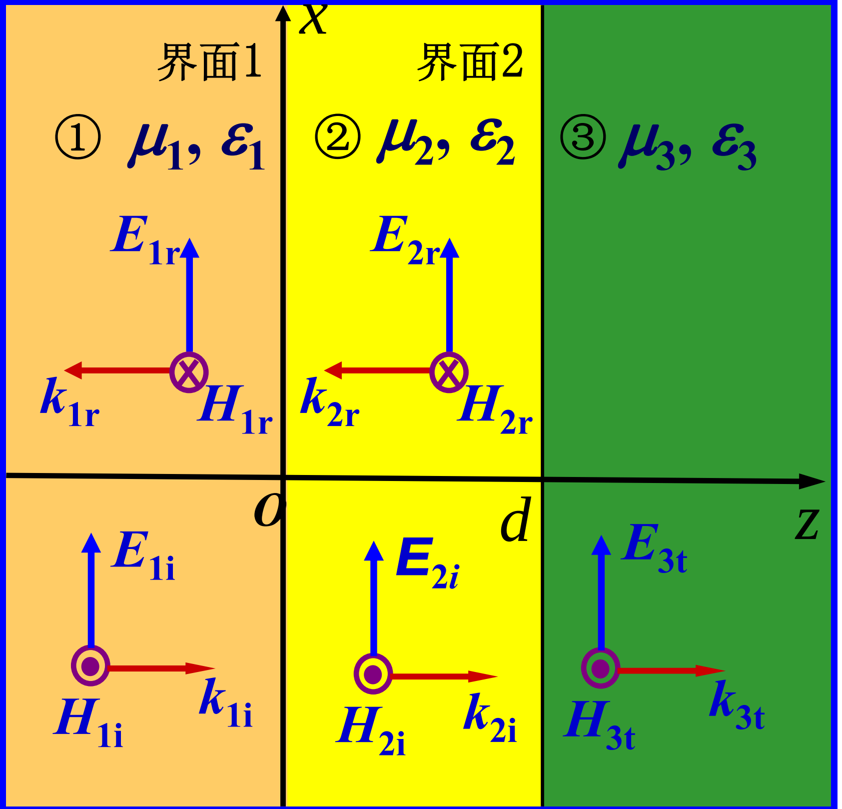
本节内容

6.2.1 多层介质中的场量关系与等效波阻抗

电磁波在多层介质中的传播具有普遍的实际意义。

以三种介质形成的多层媒质为例，说明平面波在多层媒质中的传播过程及其求解方法。

如图所示，当平面波自媒质①向分界面垂直入射时，在媒质①和②之间的分界面上发生反射和透射。当透射波到达媒质②和③的分界面时，又发生反射与透射，而且此分界面上的反射波回到媒质①和②的分界面上时再次发生反射与透射。



由此可见，在两个分界面上发生多次反射与透射现象。

媒质①和②中存在两种平面波，其一是向正z方向传播的波，另一是向负z 方向传播的波，在媒质③中仅存在向正z 方向传播的波 。因此，各个媒质中的电场和磁场强度可以分别表示为

$$\vec{E}_1(z)=\vec{e}_x(E_{1\mathrm{im}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}+E_{1\mathrm{rm}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})=\vec{e}_x E_{1\mathrm{im}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}+\Gamma_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})$$

$$\vec{H}_1(z)=\vec{e}_y\frac{E_{1\mathrm{im}}}{\eta_1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}-\Gamma_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z})$$

$$\Gamma_1=\frac{E_{1\mathrm{rm}}}{E_{1\mathrm{im}}}$$

$$\vec{E}_2(z)=\vec{e}_x[E_{2\mathrm{im}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2(z-d)}+E_{2\mathrm{rm}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2(z-d)}]=\vec{e}_x\tau_1 E_{1\mathrm{im}}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2(z-d)}+\Gamma_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2(z-d)}]$$

$$\vec{H}_2(z)=\vec{e}_y\frac{\tau_1 E_{1\mathrm{im}}}{\eta_2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2(z-d)}-\Gamma_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2(z-d)}]$$

$$\tau_1=\frac{E_{2\mathrm{im}}}{E_{1\mathrm{im}}}$$

$$\Gamma_2=\frac{E_{2\mathrm{rm}}}{E_{2\mathrm{im}}}$$

$$\vec{E}_3(z)=\vec{e}_x E_{3\mathrm{tm}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_3(z-d)}=\vec{e}_x\tau_1\tau_2 E_{1\mathrm{im}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_3(z-d)}$$

$$\vec{H}_3(z)=\vec{e}_y\frac{\tau_1\tau_2 E_{1\mathrm{im}}}{\eta_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_3(z-d)}$$

$$\tau_2=\frac{E_{3\mathrm{tm}}}{E_{2\mathrm{im}}}$$

根据边界条件，在分界面$z=d$上，$E_2(d)=E_3(d)$、$H_2(d)=H_3(d)$ 得

$$1+\Gamma_2=\tau_2$$
$$\frac{1}{\eta_2}(1-\Gamma_2)=\frac{\tau_2}{\eta_3}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_2=\frac{\eta_3-\eta_2}{\eta_3+\eta_2},\quad \tau_2=\frac{2\eta_3}{\eta_3+\eta_2}$$

在分界面$z=0$ 上，$E_1(0)=E_2(0)$、$H_1(0)=H_2(0)$，得

$$1+\Gamma_1=\tau_1[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}+\Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}]$$
$$\frac{1}{\eta_1}(1-\Gamma_1)=\frac{\tau_1}{\eta_2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}-\Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}]$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_1=\frac{\eta_{\mathrm{ef}}-\eta_1}{\eta_{\mathrm{ef}}+\eta_1},\quad \tau_1=\frac{1+\Gamma_1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}+\Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}}$$

其中：$\eta_{\mathrm{ef}}=\eta_2\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}+\Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}-\Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}}=\eta_2\dfrac{\eta_3+\mathrm{j}\eta_2\tan(\beta_2 d)}{\eta_2+\mathrm{j}\eta_3\tan(\beta_2 d)}$

等效波阻抗

在计算多层媒质的第一个分界面上的总反射系数时，引入等效波阻抗概念可以简化求解过程。

定义媒质中任一点的合成波电场与合成波磁场之比为该点的波阻抗 $\eta(z)$，即

$$\eta(z)=\frac{E(z)}{H(z)}$$

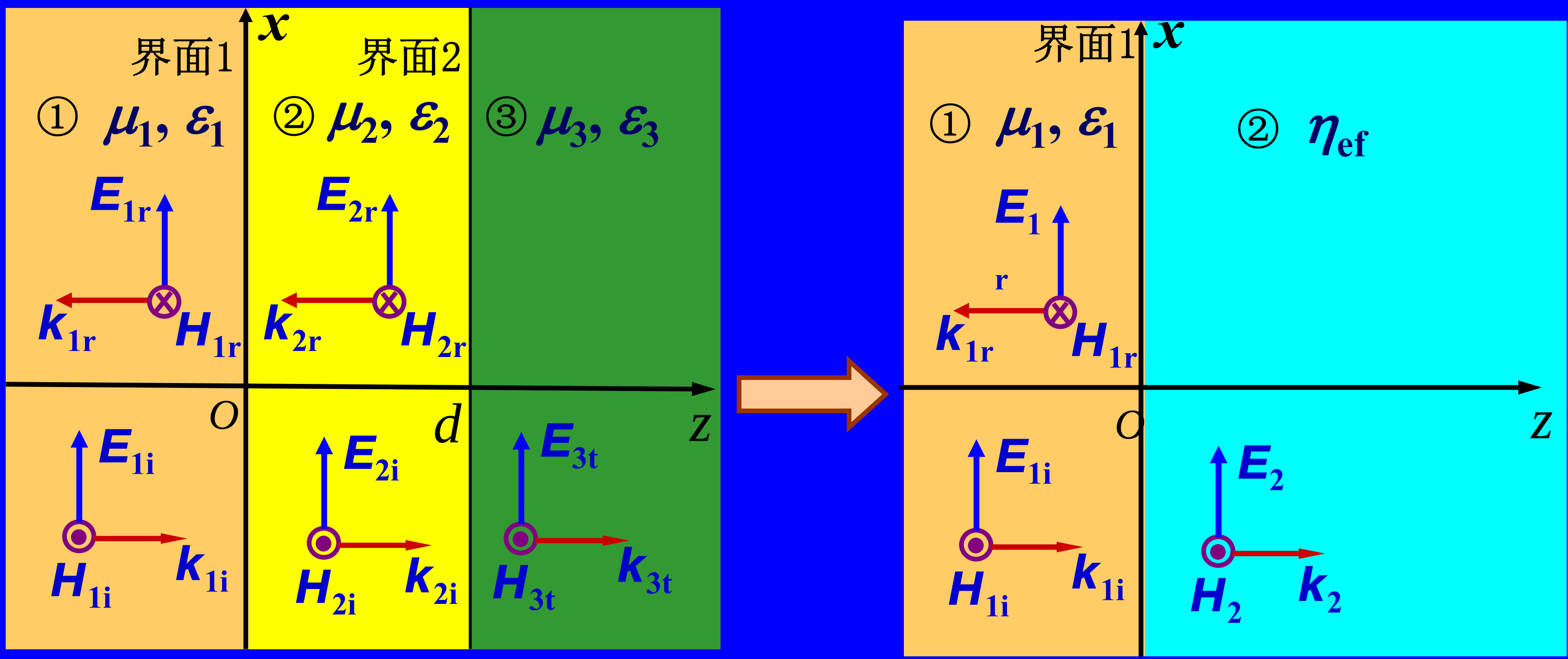
则媒质②中任一点的波阻抗为

$$\eta_2(z)=\frac{E_2(z)}{H_2(z)}=\eta_2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2(z-d)}+\Gamma_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2(z-d)}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2(z-d)}-\Gamma_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2(z-d)}}$$

在 $z=0$ 处，有 $$\eta_2(0)=\eta_2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}+\Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}-\Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}}=\eta_{\mathrm{ef}}$$

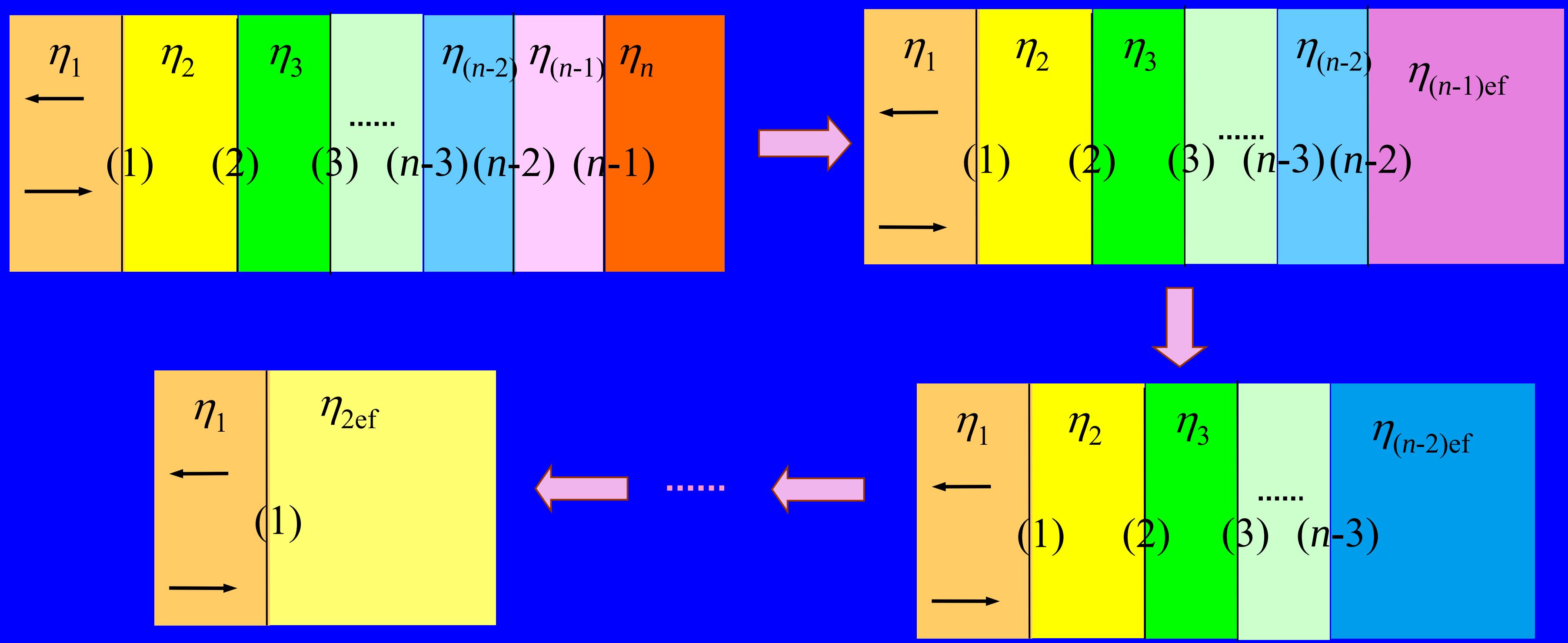
由此可见，η_{ef}即为媒质②中 $z=0$ 处的波阻抗。

引入等效波阻抗以后，在计算第一层媒质分界面上的反射系数Γ_1时，第二层媒质和第三层媒质可以看作等效波阻抗为 η_{ef} 的一种媒质。



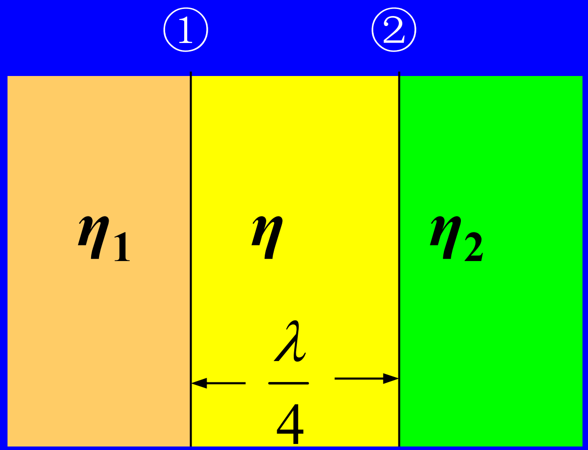
利用等效波阻抗计算n 层媒质的第一条边界上的总反射系数时，首先求出第 $(n-2)$ 条分界面处的等效波阻抗$\eta_{(n\text{-}2)\mathrm{ef}}$ ，然后用波阻抗为$\eta_{(n\text{-}2)\mathrm{ef}}$ 的媒质代替第$(n-1)$ 层及第 n 层媒质。

依次类推，自右向左逐一计算各条分界面处的等效波阻抗，直至求得第一条边界处的等效波阻抗后，即可计算总反射系数。



6.2.2 四分之一波长匹配层

设两种理想介质的波阻抗分别为η_1与η_2，为了消除分界面的反射，可在两种理想介质中间插入厚度为四分之一波长（该波长是指平面波在夹层中的波长）的理想介质夹层，如图所示。



首先求出第一个分界面上的等效波阻抗。考虑到

$$d = \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \beta d = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \eta_{ef} = \eta \frac{\eta_2 + j\eta \tan(\beta d)}{\eta + j\eta_2 \tan(\beta d)} = \frac{\eta^2}{\eta_2}$$

为了消除反射，必须要求 $\eta_{ef} = \eta_1$，那么由上式得

$$\eta_1 = \frac{\eta^2}{\eta_2} \Rightarrow \eta = \sqrt{\eta_1 \eta_2}$$

6.2.3 半波长介质窗

如果介质1和介质3是相同的介质，即 $\eta_3=\eta_1$，当介质2的厚度 $d=\lambda_2/2$ 时，有

$$\tan(\beta_2 d)=\tan(\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{\lambda_2}{2})=\tan\pi=0 \Rightarrow \eta_{\mathrm{ef}}=\eta_2\frac{\eta_3+\mathrm{j}\eta_2\tan(\beta_2 d)}{\eta_2+\mathrm{j}\eta_3\tan(\beta_2 d)}=\eta_3=\eta_1$$

由此得到介质1与介质2的分界面上的反射系数 $\Gamma_1=\dfrac{\eta_{\mathrm{ef}}-\eta_1}{\eta_{\mathrm{ef}}+\eta_1}=0$

同时，$d=\lambda_2/2 \Rightarrow \beta_2 d=\pi \Rightarrow \tau_1=\dfrac{1+\Gamma_1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_2 d}+\Gamma_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 d}}=-\dfrac{1}{1+\Gamma_2}$

$$\Rightarrow \tau_1\tau_2=-1 \Rightarrow E_{3\mathrm{tm}}=-E_{1\mathrm{im}}$$

结论：电磁波可以无损耗地通过厚度为 $\lambda/2$ 的介质层。因此，这种厚度 $d=\lambda/2$ 的介质层又称为半波长介质窗。

应用：雷达天线罩的设计就利用了这个原理。为了使雷达天线免受恶劣环境的影响，通常用天线罩将天线保护起来，若天线罩的介质层厚度设计为该介质中的电磁波的半个波长，就可以消除天线罩对电磁波的反射。

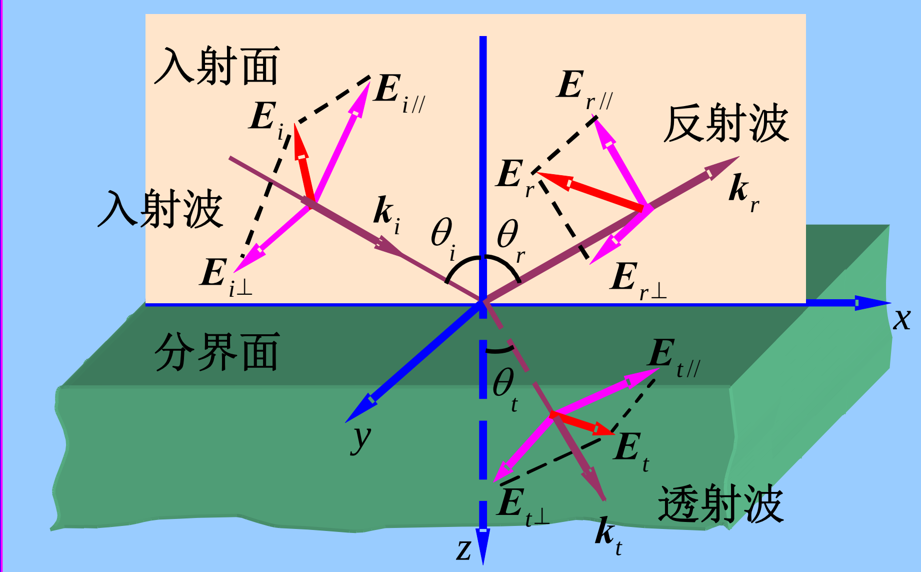
此外，如果夹层媒质的相对介电常数等于相对磁导率，即 $\varepsilon_{\mathrm{r}}=\mu_{\mathrm{r}}$，那么，夹层媒质的波阻抗等于真空的波阻抗。

当这种夹层置于空气中，平面波向其表面正投射时，无论夹层的厚度如何，反射现象均不可能发生。换言之，这种媒质对于电磁波似乎是完全“透明”的。

由此可见，若使用这种媒质制成保护天线的天线罩，其电磁特性十分优越。但是，普通媒质的磁导率很难与介电常数达到同一数量级。近来研发的新型磁性材料可以接近这种需求。

6.3 均匀平面波对理想介质分界平面的斜入射

当平面波向平面边界上以任意角度斜投射时，同样会发生反射与透射现象，而且通常透射波的方向与入射波不同，其传播方向发生弯折。因此，这种透射波又称为折射波。



均匀平面波对理想介质分界面的斜入射

入射面：入射线与边界面法线构成的平面

入射角θ_i：入射线与边界面法线之间的夹角

反射角θ_r：反射线与边界面法线之间的夹角

折射角θ_t：折射线与边界面法线之间的夹角

6.3.1 反射定律与折射定律

设入射面位于 xz 平面内

入射波电场强度 $\vec{E}_{\mathrm{i}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\mathrm{im}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_{\mathrm{i}} + z\cos\theta_{\mathrm{i}})}$

反射波电场强度 $\vec{E}_{\mathrm{r}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\mathrm{rm}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_{\mathrm{r}} - z\cos\theta_{\mathrm{r}})}$

折射波电场强度 $\vec{E}_{\mathrm{t}}(\vec{r}) = \vec{E}_{\mathrm{tm}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_{\mathrm{t}} + z\cos\theta_{\mathrm{t}})}$

由于分界面 ($z = 0$) 上电场切向分量连续，得

$$\vec{e}_z \times [\vec{E}_{\mathrm{im}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_{\mathrm{i}}} + \vec{E}_{\mathrm{rm}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_{\mathrm{r}}}] = \vec{e}_z \times \vec{E}_{\mathrm{tm}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_{\mathrm{t}}}$$

上述等式对于任意 x 均应成立，因此各项指数中对应的系数应该相等，即

$$k_1 \sin\theta_{\mathrm{i}} = k_1 \sin\theta_{\mathrm{r}} = k_2 \sin\theta_{\mathrm{t}} \quad \text{——相位匹配条件。}$$

由 $k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r$，得

$$\theta_r = \theta_i$$ —— 反射角 θ_r 等于入射角 θ_i

（斯耐尔反射定律）

由 $k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t$，得

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{k_2}{k_1}$$ —— 折射角 θ_t 与入射角 θ_i 的关系

（斯耐尔折射定律）

式中 $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$，$k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$。

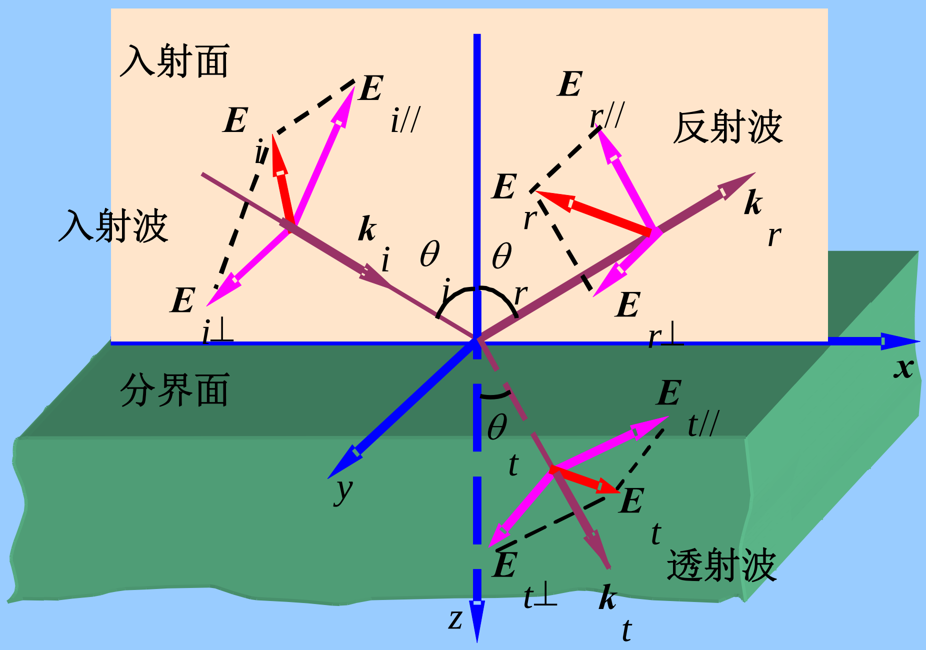
上述两条结论总称为斯耐尔定律。

斯耐尔定律描述了电磁波的反射和折射规律，具有广泛应用。

6.3.2 反射系数与折射系数

斜入射时的反射系数及透射系数与平面波的极化特性有关。

- 定义（如图所示）
- 垂直极化波:电场方向与入射面垂直的平面波;
- 平行极化波:电场方向与入射面平行的平面波。

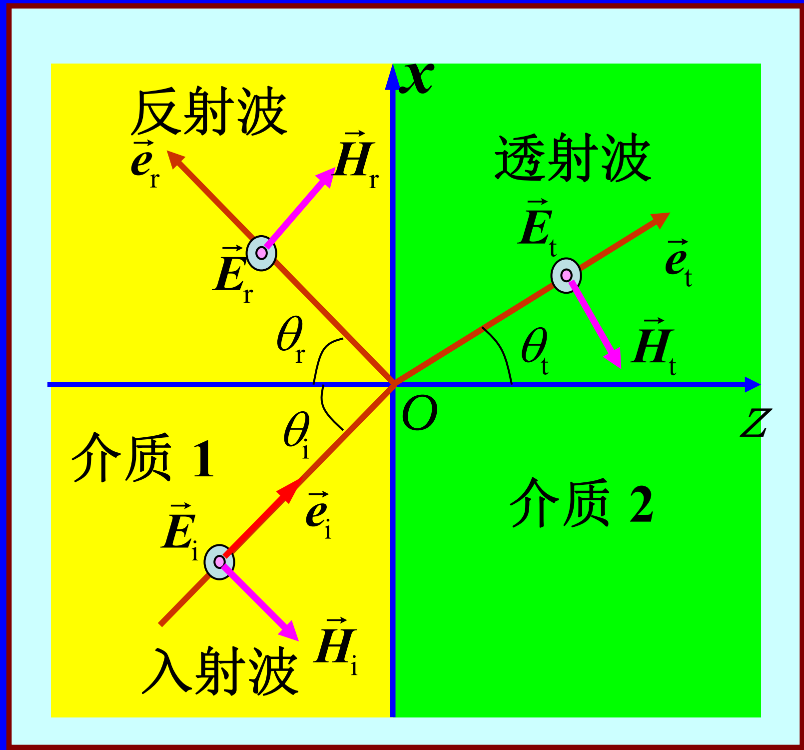


均匀平面波对理想介质分界面的斜入射

任意极化波 = 平行极化波 + 垂直极化波

1. 垂直极化波的反射系数与透射系数

媒质1中的入射波:



由于　$\vec{k}_\mathrm{i} = \vec{e}_\mathrm{i} k_1, \quad k_1 = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$

$$\vec{e}_\mathrm{i} = \vec{e}_x \sin\theta_\mathrm{i} + \vec{e}_z \cos\theta_\mathrm{i}$$

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$$

故　$\vec{E}_\mathrm{i}(\vec{r}) = \vec{e}_y E_\mathrm{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_\mathrm{i} + z\cos\theta_\mathrm{i})}$

$$\vec{H}_\mathrm{i}(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_1}\vec{e}_\mathrm{i} \times \vec{E}_\mathrm{i}(\vec{r})$$

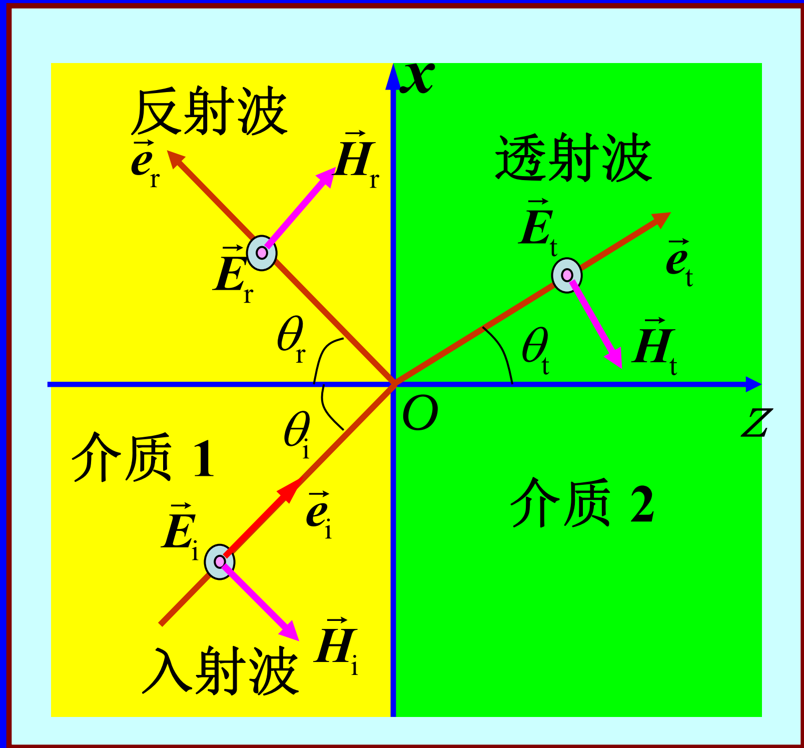
$$= \frac{1}{\eta_1}(\vec{e}_x \sin\theta_\mathrm{i} + \vec{e}_z \cos\theta_\mathrm{i}) \times \vec{e}_y E_\mathrm{im} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_\mathrm{i} + z\cos\theta_\mathrm{i})}$$

$$= (\vec{e}_z \sin\theta_\mathrm{i} - \vec{e}_x \cos\theta_\mathrm{i}) \frac{E_\mathrm{im}}{\eta_1} \mathrm{e}^{-jk_1(x\sin\theta_\mathrm{i} + z\cos\theta_\mathrm{i})}$$

媒质1中的反射波：

由于 $\vec{k}_r = \vec{e}_r k_1, \quad k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin\theta_i - \vec{e}_z \cos\theta_i$$



故 $\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{e}_y \Gamma_\perp E_{im} e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}}$

$$= \vec{e}_y \Gamma_\perp E_{im} e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = \frac{1}{\eta_1}\vec{e}_r \times \vec{E}_r(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{\eta_1}(\vec{e}_x \sin\theta_i - \vec{e}_z \cos\theta_i) \times \vec{e}_y \Gamma_\perp E_{im} e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

$$= (\vec{e}_z \sin\theta_i + \vec{e}_x \cos\theta_i)\frac{\Gamma_\perp E_{im}}{\eta_1} e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

媒质1中的合成波：

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + \vec{E}_r(\vec{r})$$

$$= \vec{e}_y E_{im}[e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \Gamma_\perp e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}]$$

$$= \vec{e}_y E_{im}(e^{-jk_1 z\cos\theta_i} + \Gamma_\perp e^{jk_1 z\cos\theta_i})e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$$

$$\vec{H}_1(\vec{r}) = \vec{H}_i(\vec{r}) + \vec{H}_r(\vec{r})$$

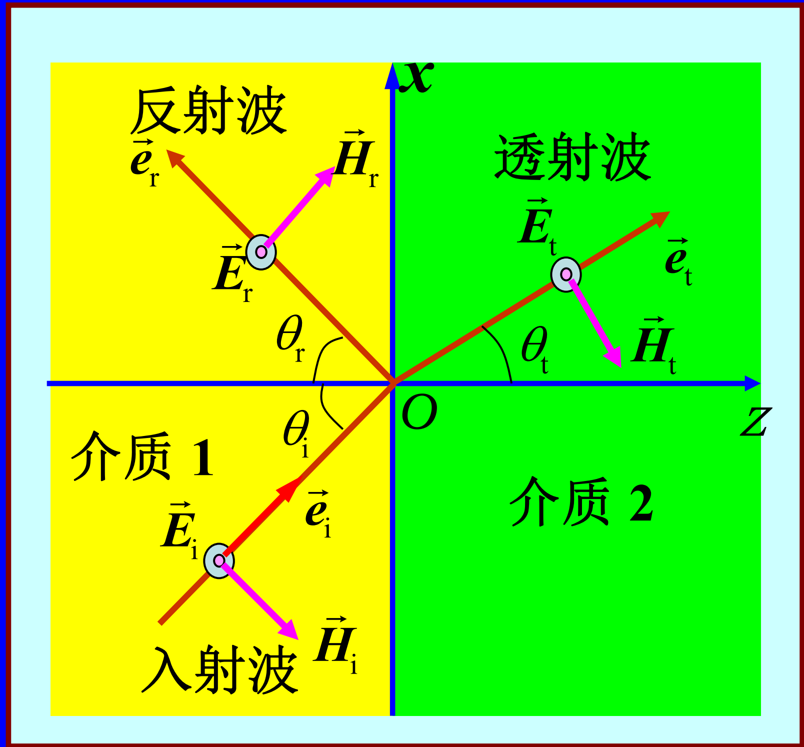
$$= \vec{e}_z \frac{E_{im}}{\eta_1}\sin\theta_i[e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} + \Gamma_\perp e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}]$$

$$-\vec{e}_x \frac{E_{im}}{\eta_1}\cos\theta_i[e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} - \Gamma_\perp e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}]$$

$$= \vec{e}_z \frac{E_{im}}{\eta_1}\sin\theta_i[e^{-jk_1 z\cos\theta_i} + \Gamma_\perp e^{jk_1 z\cos\theta_i}]e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$$

$$-\vec{e}_x \frac{E_{im}}{\eta_1}\cos\theta_i[e^{-jk_1 z\cos\theta_i} - \Gamma_\perp e^{jk_1 z\cos\theta_i}]e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$$

媒质2中的透射波：



由于 $\vec{k}_\mathrm{t}=k_2\vec{e}_\mathrm{t}$， $k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$

$$\vec{e}_\mathrm{t}=\vec{e}_x\sin\theta_\mathrm{t}+\vec{e}_z\cos\theta_\mathrm{t}$$

$$\vec{r}=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$$

故 $\vec{E}_2(\vec{r})=\vec{E}_\mathrm{t}(\vec{r})$

$$=\vec{e}_y\tau_\perp E_\mathrm{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_\mathrm{t}+z\cos\theta_\mathrm{t})}$$

$$\vec{H}_2(\vec{r})=\vec{H}_\mathrm{t}(\vec{r})=\frac{1}{\eta_2}\vec{e}_\mathrm{t}\times\vec{E}_\mathrm{t}(\vec{r})$$

$$=\frac{1}{\eta_2}(\vec{e}_x\sin\theta_\mathrm{t}+\vec{e}_z\cos\theta_\mathrm{t})\times\vec{e}_y\tau_\perp E_\mathrm{im}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vec{k}_\mathrm{t}\cdot\vec{r}}$$

$$=(\vec{e}_z\sin\theta_\mathrm{t}-\vec{e}_x\cos\theta_\mathrm{t})\frac{\tau_\perp E_\mathrm{im}}{\eta_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_\mathrm{t}+z\cos\theta_\mathrm{t})}$$

分界面上电场强度和磁场强度的切向分量连续，有

$$E_{1y}(x,0)=E_{2y}(x,0) \Rightarrow 1+\Gamma_{\perp}=\tau_{\perp}$$

$$H_{1x}(x,0)=H_{2x}(x,0) \Rightarrow \frac{\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_1}(1-\Gamma_{\perp})=\frac{\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\eta_2}\tau_{\perp}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\perp}=\dfrac{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}-\eta_1\cos\theta_{\mathrm{t}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{t}}} \\ \tau_{\perp}=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{t}}} \end{cases}$$

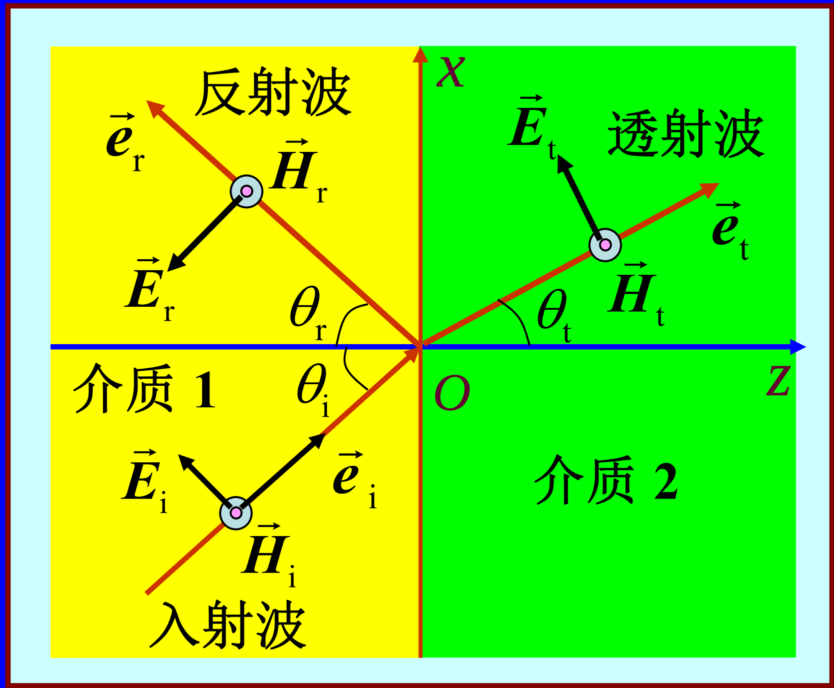
菲涅尔公式

对于非磁性介质，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，则

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}},\quad \sin\theta_{\mathrm{t}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_{\mathrm{i}} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{\perp}=\dfrac{\cos\theta_{\mathrm{i}}-\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}} \\ \tau_{\perp}=\dfrac{2\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\cos\theta_{\mathrm{i}}+\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1-\sin^2\theta_{\mathrm{i}}}} \end{cases}$$

2. 平行极化波的反射系数与透射系数

■ 媒质1中的入射波



由于 $\vec{k}_{\rm i}=\vec{e}_{\rm i}k_1=\vec{e}_{\rm i}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$,

$$\vec{e}_{\rm i}=\vec{e}_x\sin\theta_{\rm i}+\vec{e}_z\cos\theta_{\rm i}$$

故

$$\vec{H}_{\rm i}(\vec{r})=\vec{e}_y\frac{E_{\rm im}}{\eta_1}{\rm e}^{-{\rm j}k_1(x\sin\theta_{\rm i}+z\cos\theta_{\rm i})}$$

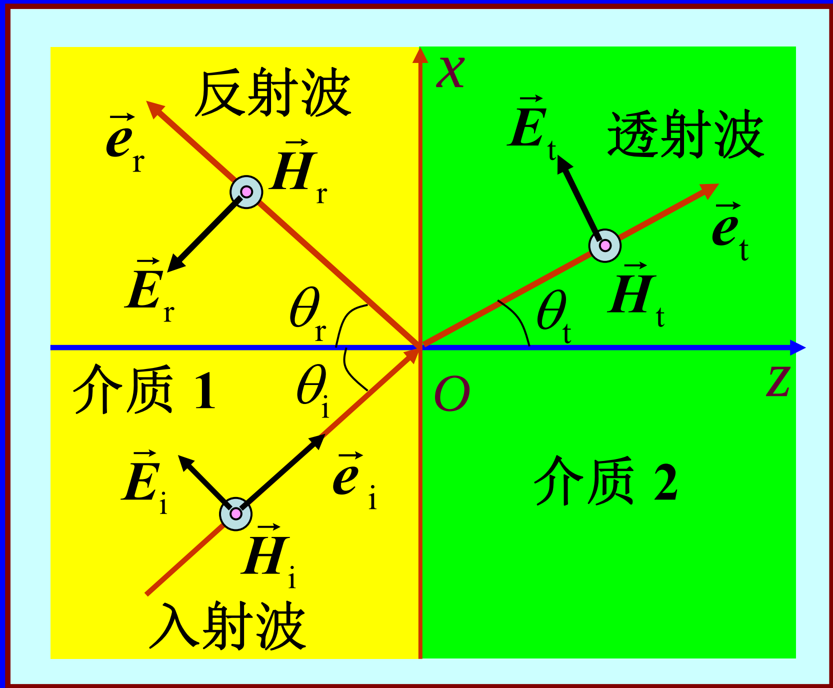
$$\vec{E}_{\rm i}(\vec{r})=\eta_1\vec{H}_{\rm i}(\vec{r})\times\vec{e}_{\rm i}$$

$$=(\vec{e}_x\cos\theta_{\rm i}-\vec{e}_z\sin\theta_{\rm i})E_{\rm im}{\rm e}^{-{\rm j}k_1(x\sin\theta_{\rm i}+z\cos\theta_{\rm i})}$$

媒质1中的反射波

由于 $\vec{k}_{\mathrm{r}} = \vec{e}_{\mathrm{r}} k_1, \quad k_1 = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1},$

故 $\vec{e}_{\mathrm{r}} = \vec{e}_x \sin\theta_{\mathrm{i}} - \vec{e}_z \cos\theta_{\mathrm{i}}$



$$\vec{H}_{\mathrm{r}}(\vec{r}) = \vec{e}_y \frac{\Gamma_{//} E_{\mathrm{im}}}{\eta_1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_{\mathrm{i}} - z\cos\theta_{\mathrm{i}})}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{r}}(\vec{r}) = \eta_1 \vec{H}_{\mathrm{r}}(\vec{r}) \times \vec{e}_{\mathrm{r}}$$

$$= (-\vec{e}_x \cos\theta_{\mathrm{i}} - \vec{e}_z \sin\theta_{\mathrm{i}}) \Gamma_{//} E_{\mathrm{im}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_{\mathrm{i}} - z\cos\theta_{\mathrm{i}})}$$

其中 $\Gamma_{//} = \dfrac{E_{\mathrm{rm}}}{E_{\mathrm{im}}}$

- 媒质1中的合成波

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_i(\vec{r}) + \vec{E}_r(\vec{r})$$

$$= \vec{e}_z E_{im} \sin\theta_i (-e^{-jk_1 z\cos\theta_i} - \Gamma_{//} e^{jk_1 z\cos\theta_i}) e^{-jk_1 x\sin\theta_i} +$$

$$\vec{e}_x E_{im} \cos\theta_i (e^{-jk_1 z\cos\theta_i} - \Gamma_{//} e^{jk_1 z\cos\theta_i}) e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$$

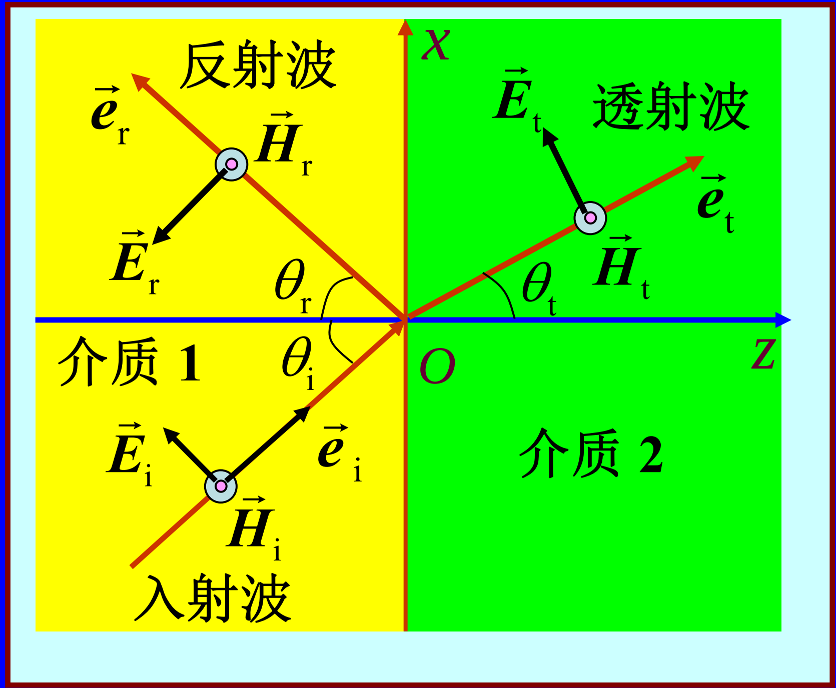
$$\vec{H}_1(\vec{r}) = \vec{H}_i(\vec{r}) + \vec{H}_r(\vec{r})$$

$$= \vec{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1} (e^{-jk_1 z\cos\theta_i} + \Gamma_{//} e^{jk_1 z\cos\theta_i}) e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$$

■ 媒质2中的透射波

$$\vec{k}_t = k_2\vec{e}_t, \quad k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2},$$

$$\vec{e}_t = \vec{e}_x \sin\theta_t + \vec{e}_z \cos\theta_t$$



$$\vec{H}_2(\vec{r}) = \vec{H}_t(\vec{r})$$

$$= \vec{e}_y \frac{\tau_{//}E_{im}}{\eta_2} e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \vec{E}_t(\vec{r}) = \eta_2\vec{H}_t(\vec{r})\times\vec{e}_t$$

$$= (-\vec{e}_z \sin\theta_t + \vec{e}_x \cos\theta_t)\tau_{//}E_{im}e^{-jk_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)}$$

其中 $\tau_{//} = \dfrac{E_{tm}}{E_{im}}$

分界面上电场强度和磁场强度切向分量连续，即

$$E_{1x}(\vec{r})|_{z=0}=E_{2x}(\vec{r})|_{z=0} \Rightarrow (1-\Gamma_{//})\cos\theta_i=\tau_{//}\cos\theta_t$$

$$H_{1y}(\vec{r})|_{z=0}=H_{2y}(\vec{r})|_{z=0} \Rightarrow \frac{1}{\eta_1}(1+\Gamma_{//})=\frac{1}{\eta_2}\tau_{//}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{//}=\dfrac{\eta_1\cos\theta_i-\eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t} \\ \tau_{//}=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t} \end{cases}$$

菲涅尔公式

对于非磁性介质，$\mu_1=\mu_2=\mu_0$，则

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}},\quad \sin\theta_t=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{//}=\dfrac{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i-\sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)-\sin^2\theta_i}}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i+\sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)-\sin^2\theta_i}} \\ \tau_{//}=\dfrac{2\sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}\cos\theta_i}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i+\sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)-\sin^2\theta_i}} \end{cases}$$

小结

- 分界面上的相位匹配关系

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r = k_2 \sin\theta_t$$

- 反射定律 $\theta_i = \theta_r$

- 折射定律 $k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t$ 或 $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$

- 反射系数、折射系数与两种媒质性质、入射角大小以及入射波的极化方式有关，由菲涅尔公式确定。

反射系数、折射系数

$$\begin{cases} \Gamma_{\perp} = \dfrac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \\ \tau_{\perp} = \dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{\perp} = \dfrac{\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}} \\ \tau_{\perp} = \dfrac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{//} = \dfrac{\eta_1\cos\theta_i - \eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \\ \tau_{//} = \dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i + \eta_2\cos\theta_t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{//} = \dfrac{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i - \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i + \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}} \\ \tau_{//} = \dfrac{2\sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)}\cos\theta_i}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i + \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1) - \sin^2\theta_i}} \end{cases}$$

6.3.3 全反射与全透射

1. 全反射与临界角

问题：电磁波在理想导体表面会产生全反射，在理想介质表面也会产生全反射吗？

概念：反射系数的模等于 1 的电磁现象称为全反射。

条件：（非磁性媒质，即 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ）

由于

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}}$$

$$\Gamma_{//} = \frac{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}}{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2\theta_i}}$$

当 $\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_i \le 0 \Longrightarrow \sin\theta_i \ge \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \Longrightarrow |\Gamma_\perp| = |\Gamma_{//}| = 1$

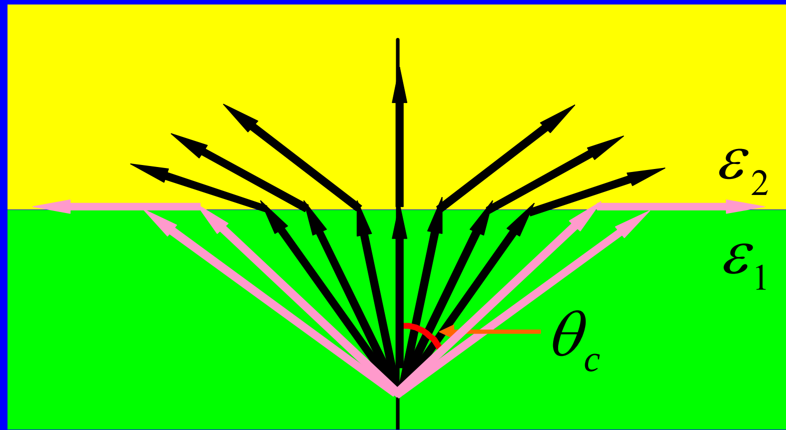
因此得到，产生全反射的条件为：

- 电磁波由稠密媒质入射到稀疏媒质中，即$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$；
- 入射角不小于 $\theta_c = \arcsin\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$，$\theta_c$ 称为全反射的临界角。

对全反射的进一步讨论

- $\theta_i < \theta_c$ 时，不产生全反射。
- $\theta_i = \theta_c$ 时， $\sin\theta_t = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta_c = 1$

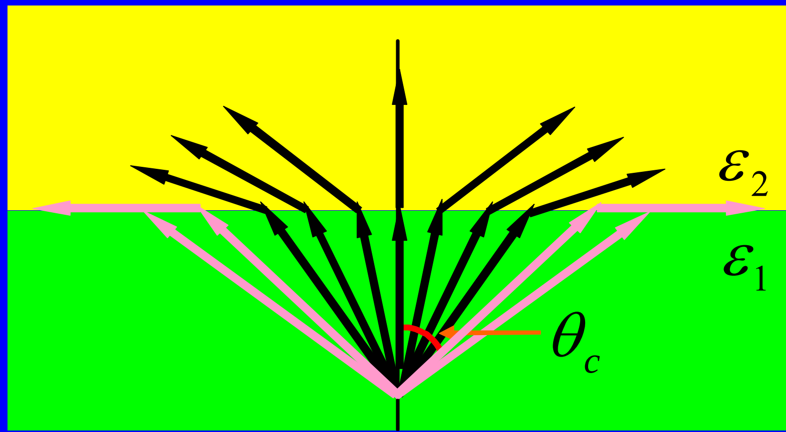
$$\Rightarrow \theta_t = 90^\circ \Rightarrow \Gamma_\perp = \Gamma_{/\!/} = 1$$



透射波沿分界面方向传播，没有沿z 方向传播的功率，并且反射功率密度将等于入射功率密度。

- $\theta_i > \theta_c$ 时，$\sin\theta_i > \sin\theta_c = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \dfrac{n_2}{n_1}$

$$\Rightarrow \quad |\Gamma_\perp| = |\Gamma_{//}| = 1$$



$$\Rightarrow \quad k_{tz} = k_2\cos\theta_t = k_2\sqrt{1-\sin^2\theta_t}$$

$$= -\mathrm{j}k_2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sin^2\theta_i - 1} = -\mathrm{j}k_2\alpha$$

透射波电场为 $\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{tm}e^{-\mathrm{j}k_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} = \vec{E}_{tm}e^{-k_2\alpha z}e^{-\mathrm{j}k_2 x\sin\theta_t}$

透射波仍然是沿分界面方向传播，但振幅在垂直于分界面的方向上按指数规律衰减。这种波称为表面波。

例6.3.1 下图为光纤的剖面示意图，如果要求光波从空气进入光纤芯线后，在芯线和包层的分界面上发生全反射，从一端传至另一端，确定入射角的最大值。

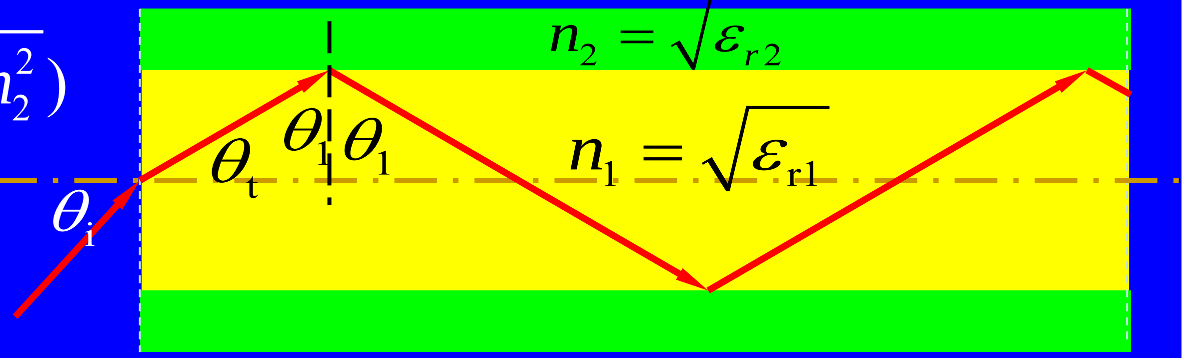
解：在芯线和包层的分界面上发生全反射的条件为

$$\theta_1 \geq \theta_c = \arcsin\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} = \arcsin(n_2/n_1) \Rightarrow \sin\theta_1 \geq \sin\theta_c = n_2/n_1$$

由于 $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2} - \theta_t \Rightarrow \sin\theta_1 = \sin(\dfrac{\pi}{2} - \theta_t) = \cos\theta_t \Rightarrow \cos\theta_t \geq \sin\theta_c = \dfrac{n_2}{n_1}$

所以 $\sin\theta_i = n_1\sin\theta_t = n_1\sqrt{1-\cos^2\theta_t} \leq n_1\sqrt{1-(n_2/n_1)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

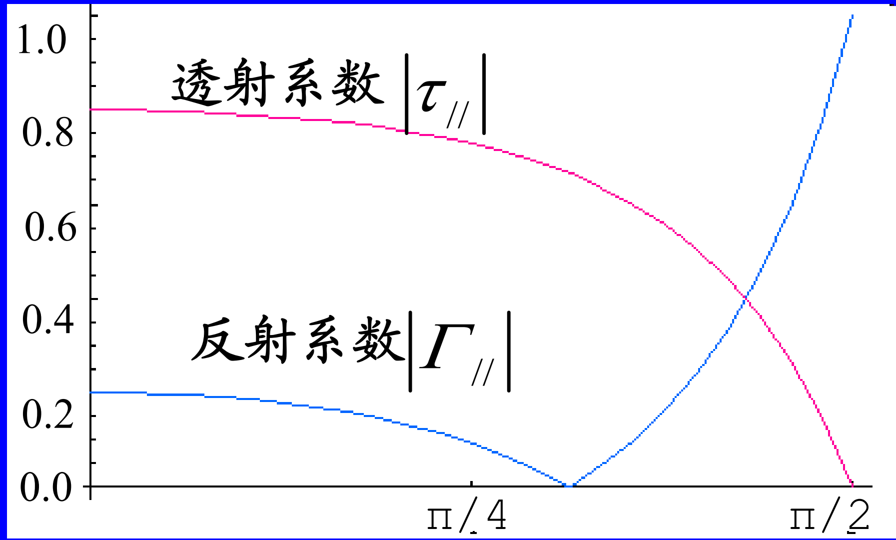
故 $\theta_{i\max} = \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2})$



2. 全透射和布儒斯特角

- 全透射现象：反射系数为0 ——无反射波。

$$\Gamma_{/\!/} = \frac{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_i}}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \sin^2\theta_i}} = 0$$



平行极化波

$$\Rightarrow \theta_i = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \triangleq \theta_b$$

布儒斯特角

当 $\theta_i = \theta_b$ 时，$\Gamma_{/\!/} = 0$ ——平行极化波发生全透射。

θ_b的推证

$$\Gamma_{//}=\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}}=0 \Rightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\theta_i-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2\cos^2\theta_i=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}-\sin^2\theta_i$$

$$\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sec^2\theta_i-\tan^2\theta_i=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(\tan^2\theta_i+1)-\tan^2\theta_i$$

$$\tan\theta_i=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \Rightarrow \theta_b=\arctan(\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1})$$

讨论

- 产生全透射时，$\theta_{\mathrm{b}}+\theta_{\mathrm{t}}=\dfrac{\pi}{2}$。
- 在非磁性媒质中，垂直极化入射的波不会产生全透射。
- 任意极化波以$\theta_{\mathrm{i}}=\theta_{\mathrm{b}}$入射时，反射波中只有垂直极化分量—— 极化滤波。

例6.3.2 一平面波从介质1 斜入射到介质与空气的分界面，试计算：（1）当介质1分别为水$\varepsilon_r = 81$、玻璃$\varepsilon_r = 9$和聚苯乙烯$\varepsilon_r = 1.56$时的临界角θ_c；（2）若入射角$\theta_i = \theta_b$，则波全部透射入空气。上述三种介质的$\theta_i = ?$

解：

介质	临界角 $\theta_c = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1})$	布儒斯特角 $\theta_b = \arctan(\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1})$
水	6.38°	6.34°
玻璃	19.47°	18.43°
聚苯乙烯	38.68°	32°

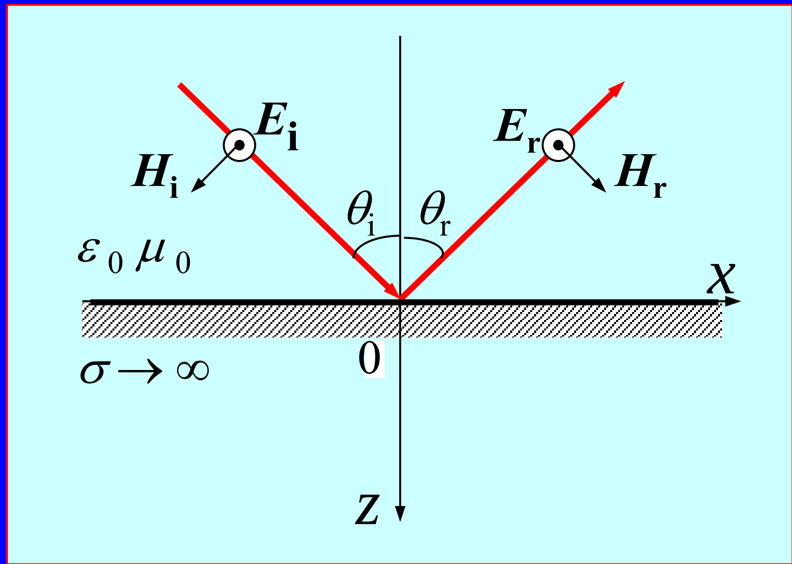
6.4 均匀平面波对理想导体表面的斜入射

6.4.1 垂直极化波对理想导体表面的斜入射

设媒质1为理想介质，媒质2 为理想导电体，即 $\sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = \infty$

则媒质 2 的波阻抗为 $\eta_{2c} = \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_{2c}} = \sqrt{\mu_2 / (\varepsilon_2 - \mathrm{j}\dfrac{\sigma_2}{\omega})} \to 0$

$$\begin{cases} \varGamma_\perp = \dfrac{\eta_2 \cos\theta_\mathrm{i} - \eta_1 \cos\theta_\mathrm{t}}{\eta_2 \cos\theta_\mathrm{i} + \eta_1 \cos\theta_\mathrm{t}} \\ \tau_\perp = \dfrac{2\eta_2 \cos\theta_\mathrm{i}}{\eta_2 \cos\theta_\mathrm{i} + \eta_1 \cos\theta_\mathrm{t}} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \varGamma_\perp = -1 \\ \tau_\perp = 0 \end{cases}$$

媒质1中的合成波

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{e}_y[E_{\mathrm{im}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_\mathrm{i}+z\cos\theta_\mathrm{i})} - E_{\mathrm{im}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1(x\sin\theta_\mathrm{r}-z\cos\theta_\mathrm{r})}]$$

$$= -\vec{e}_y\mathrm{j}2E_{\mathrm{im}}\sin(k_1 z\cos\theta_\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_\mathrm{i}}$$

$$\vec{H}_1(\vec{r}) = -\vec{e}_z\frac{\mathrm{j}2E_{\mathrm{im}}\sin\theta_\mathrm{i}}{\eta_1}\sin(k_1 z\cos\theta_\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_\mathrm{i}} -$$

$$\vec{e}_x\frac{2E_{\mathrm{im}}\sin\theta_\mathrm{i}}{\eta_1}\cos(k_1 z\cos\theta_\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_\mathrm{i}}$$

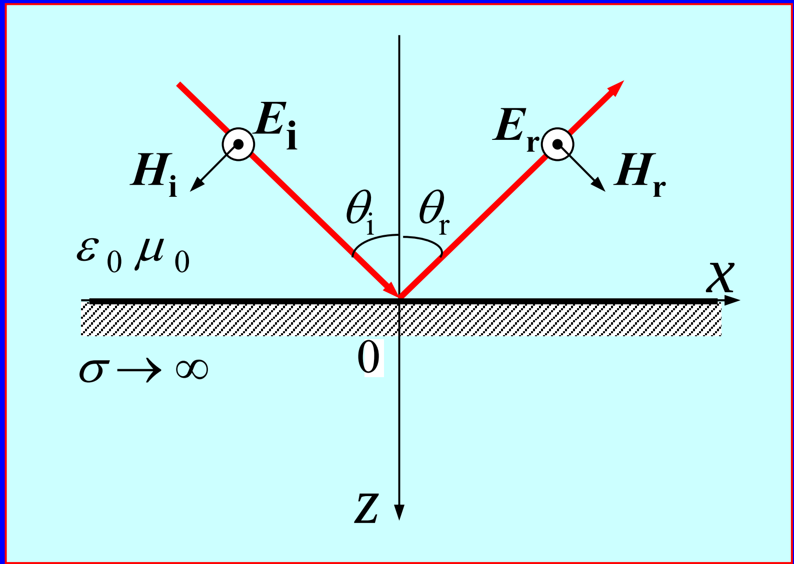
- 合成波的特点:
  - 合成波是沿 x 方向的行波，其振幅沿 z 方向成驻波分布，是非均匀平面波;
  - 合成波电场垂直于传播方向，而磁场则存在 x 分量，这种波称为横电波，即TE 波;
  - 在 $z = -n\lambda_1/(2\cos\theta_\mathrm{i})$ 处，合成波电场E_1= 0。

■ 合成波的平均能流密度矢量

$$\vec{S}_{1\mathrm{av}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}_1(\vec{r}) \times \vec{H}_1^*(\vec{r})] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[(E_i + E_r) \times (H_i + H_r)^*]$$

$$= \vec{e}_x \frac{2\mathrm{E}_{\mathrm{im}}^2}{\eta_1} \sin\theta_{\mathrm{i}} \sin^2(k_1 z \cos\theta_{\mathrm{i}})$$

例6.4.1 当垂直极化的平面波以角度θ_i由空气向无限大的理想导电平面投射时，若入射波电场振幅为E_{im}，试求理想导电平面上的表面电流密度及空气中的能流密度的平均值。



解 令理想导电平面为 $z=0$ 平面，如图所示。那么，表面电流J_S为

$$\vec{J}_S=\vec{e}_n\times\vec{H}=-\vec{e}_z\times\vec{H}\Big|_{z=0}$$

已知磁场的 x 分量为

$$\vec{H}_x=-\vec{e}_x 2\frac{E_{im}}{\eta_1}\cos\theta_i\cos(k_1 z\cos\theta_i)e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$$

求得
$$\vec{J}_S=\vec{e}_y\frac{2E_{im}}{\eta_0}\cos\theta_i e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$$

能流密度的平均值

$$\vec{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\vec{E}\times\vec{H}^{*})=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}_{y}\times(\vec{H}_{x}^{*}+\vec{H}_{z}^{*})]$$

已知垂直极化平面波的各分量分别为

$$\vec{E}_{y}=-\vec{e}_{y}\mathrm{j}2E_{\mathrm{im}}\sin(k_{1}z\cos\theta_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1}x\sin\theta_{\mathrm{i}}}$$

$$\vec{H}_{x}=-\vec{e}_{x}2\frac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_{0}}\cos\theta_{\mathrm{i}}\cos(k_{1}z\cos\theta_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1}x\sin\theta_{\mathrm{i}}}$$

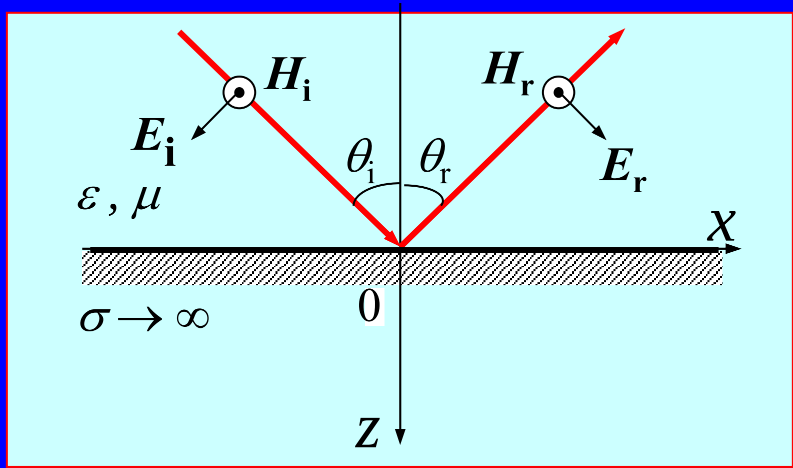
$$\vec{H}_{z}=-\vec{e}_{z}\mathrm{j}2\frac{E_{\mathrm{im}}}{\eta_{0}}\sin\theta_{\mathrm{i}}\sin(k_{1}z\cos\theta_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1}x\sin\theta_{\mathrm{i}}}$$

求得

$$\vec{S}_{\mathrm{av}}=\vec{e}_{x}4\frac{E_{\mathrm{im}}^{2}}{\eta_{0}}\sin\theta_{\mathrm{i}}\sin^{2}(k_{1}z\cos\theta_{\mathrm{i}})$$

6.4.2 平行极化波对理想导体表面的斜入射

由于 $\eta_{2c}=\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_{2c}}}\to 0$



则

$$\begin{cases}\Gamma_{//}=\dfrac{\eta_1\cos\theta_i-\eta_2\cos\theta_t}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t}\\[2ex] \tau_{//}=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_1\cos\theta_i+\eta_2\cos\theta_t}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Gamma_{//}=1\\ \tau_{//}=0\end{cases}$$

媒质1中的合成波

$$\vec{H}_1(\vec{r}) = \vec{e}_y \frac{2E_{\mathrm{im}}}{\eta_1}\cos(k_1 z\cos\theta_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_{\mathrm{i}}}$$

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = -\vec{e}_x \mathrm{j}2E_{\mathrm{im}}\cos\theta_{\mathrm{i}}\sin(k_1 z\cos\theta_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_{\mathrm{i}}} - \vec{e}_z 2E_{\mathrm{im}}\sin\theta_{\mathrm{i}}\cos(k_1 z\cos\theta_{\mathrm{i}})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 x\sin\theta_{\mathrm{i}}}$$

- 合成波的特点
  - 合成波是沿 x 方向的行波，其振幅沿 z 方向成驻波分布，是非均匀平面波;
  - 合成波磁场垂直于传播方向，而电场则存在x分量，这种波 称为横磁波，即**T M** 波;
  - 在 $z = -n\lambda_1/(2\cos\theta_{\mathrm{i}})$处，合成波电场的$E_{1x} = 0$。

例6.4.2 已知空气中磁场强度为 $\vec{H}_i = -\vec{e}_y \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(x+z)}$ A/m 的均匀平面波，向位于$z=0$处的理想导体斜入射。求：（1）入射角；（2）入射波电场；（3）反射波电场和磁场；（4）合成波的电场和磁场；（5）导体表面上的感应电流密度和电荷密度。

解：（1）由题意可知，$k_{ix} = k_{iz} = \sqrt{2}\pi$，所以

$$\vec{k}_i = \vec{e}_x k_{ix} + \vec{e}_z k_{iz} = (\vec{e}_x + \vec{e}_z)\sqrt{2}\pi, \quad k = \left|\vec{k}_i\right| = 2\pi$$

故入射角为 $$\theta_i = \arctan\frac{k_{ix}}{k_{iz}} = \frac{\pi}{4}$$

（2）入射波电场为

$$\vec{E}_i = \eta_0 \vec{H}_i \times \vec{e}_i = \frac{\eta_0}{k}\vec{H}_i \times \vec{k}_i = (-\vec{e}_x + \vec{e}_z)\frac{120\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(x+z)}$$

（3）反射波矢量为 $\vec{k}_{\mathrm{r}}=\vec{e}_x k_{\mathrm{i}x}-\vec{e}_z k_{\mathrm{i}z}=(\vec{e}_x-\vec{e}_z)\sqrt{2}\pi$

故反射波磁场和电场分别为

$$\vec{H}_{\mathrm{r}}=-\vec{e}_y \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(x-z)}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{r}}=\eta_0\vec{H}_{\mathrm{r}}\times\vec{e}_{\mathrm{r}}=\frac{\eta_0}{k}\vec{H}_{\mathrm{r}}\times\vec{k}_{\mathrm{r}}=(\vec{e}_x+\vec{e}_z)\frac{120\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi(x-z)}$$

（4）合成波的电场为

$$\vec{E}_1=\vec{E}_{\mathrm{i}}+\vec{E}_{\mathrm{r}}$$

$$=[\vec{e}_x(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z})+\vec{e}_z(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z})]\frac{120\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}$$

$$=[\vec{e}_x\mathrm{j}\sin(\sqrt{2}\pi z)+\vec{e}_z\cos(\sqrt{2}\pi z)]120\sqrt{2}\pi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}$$

合成波的磁场为

$$\vec{H}_1=\vec{H}_i+\vec{H}_r=-\vec{e}_y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi z})]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}$$

$$=-\vec{e}_y 2\cos(\sqrt{2}\pi z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}$$

（5）导体表面上的感应电流密度和电荷密度分别为

$$\vec{J}_S=\vec{e}_n\times\vec{H}_1\Big|_{z=0}=(-\vec{e}_z)\times(-\vec{e}_y)2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}=-\vec{e}_x 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}$$

$$\rho_S=\varepsilon_0\vec{e}_n\cdot\vec{E}_1\Big|_{z=0}=-\varepsilon_0\vec{e}_z\cdot\vec{E}_1\Big|_{z=0}$$

$$=-120\sqrt{2}\pi\varepsilon_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}\pi x}$$

习 题

1，4