211430604

STATUS
Conditions Accepted
SOURCE
WSILL
BORROWER
EUX
LENDERS
NYP, *ANS, WAU, IBT

TYPE
Copy
REQUEST DATE
01/05/2022
RECEIVE DATE

OCLC #
7646576
NEED BEFORE
04/05/2022

DUE DATE

BIBLIOGRAPHIC INFORMATION

LOCAL ID QH7 .S8231
AUTHOR Kungl. Svenska vetenskapsakademien.

TITLE Bihang till Kongl. Svenska vetenskaps-akademiens handlingar.
IMPRINT Stockholm : K. Svenska vetenskaps-akademien, 1872-
ISSN 0284-7280

ARTICLE AUTHOR

ARTICLE TITLE Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens handlingar.
FORMAT Serial
EDITION
VOLUME 21
NUMBER
DATE 1895
PAGES 41

INTERLIBRARY LOAN INFORMATION

ALERT

VERIFIED WorldCat (7646576) Physical Description: 28
MAX COST OCLC IFM - 25.00 USD
LEND CHARGES
LEND RESTRICTIONS

BORROWER NOTES Please send articles by Article Exchange and as PDFs. We are a SHARES library.

LENDER NOTES Conditional - Additional info neededSent an e-mail about this but if you could provide article title or author I should be able to find!

AFFILIATION SHRS
COPYRIGHT UK Fair Dealing

SHIPPED DATE 01/06/2022
FAX NUMBER
EMAIL webill@ed.ac.uk

ODYSSEY
ARIEL FTP
ARIEL EMAIL

BILL TO INTERLIBRARY LOANS
EDINBURGH UNIVERSITY LIBRARY
30 GEORGE SQUARE
EDINBURGH, SCOTLAND, GB EH8 9LJ

SHIPPING INFORMATION

SHIP VIA Article Exchange
SHIP TO INTERLIBRARY LOANS
EDINBURGH UNIVERSITY LIBRARY
30 GEORGE SQUARE
EDINBURGH, SCOTLAND, GB EH8 9LJ

RETURN VIA
RETURN TO
, US

BIHANG TILL K. SVENSKA VET.-AKAD. HANDLINGAR. Band 21. Afd. I. N:o 3

UEBER

DIE ALGEBRAISCHEN CURVEN

VON

DEN GESCHLECHTERN $p = 4$, 5 UND 6,

WELCHE EINDEUTIGE TRANSFORMATIONEN IN SICH BESITZEN.

VON

A. WIMAN.

MITGETHEILT DEN 9. OKTOBER 1895.

GEPRÜFT VON G. MITTAG-LEFFLER UND A. LINDSTEDT.

STOCKHOLM 1895

KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER

Die vorliegende Abhandlung soll eine Fortsetzung einer bereits von mir erschienenen Arbeit[1] bilden, welche unter anderem die eindeutigen Correspondenzen auf den nicht-hyperelliptischen Curven des Geschlechtes $p = 3$ behandelte. Der Bequemlichkeit halber entnehmen wir aus derselben die folgende Gleichung, welche durch Benutzung eines von Hrn. ZEUTHEN gegebenen Satzes gebildet wurde:

$$\text{(A)} \qquad 2(p-1) = 2n(p'-1) + \sum \frac{n}{n_i}(n_i - 1).$$

Hier soll auf einer Curve vom Geschlechte p eine eindeutige Correspondenz von der Periode n bestehen; die Summation erstreckt sich über die Coincidenzen, wo n zusammengehörige Punkte in $\frac{n}{n_i}$ zu je n_i zusammenfallen; endlich bezeichnet p' das Geschlecht einer Curve, deren Punkte in 1—1-deutiger Beziehung zu den Punktgruppen von je n durch die Correspondenz zusammengehörigen Punkten stehen.[2]

Da wir vom hyperelliptischen, übrigens einfach zu erledigenden, Falle absehen, können wir die bezüglichen Gebilde auf die in projectiver Hinsicht invariante im $(p-1)$-dimensionalen Raume befindlichen Normalcurve C_{2p-2} bringen, deren Coordinaten zu den ABEL'schen Integranden erster Gattung proportional sind. Hieraus entspringt für uns der Vortheil, dass die eindeutigen Correspondenzen durch Collineationen der Curve in sich dargestellt werden.[3]

---

[1] Bihang till K. Vet. Akad. Handlingar, Bd. 21, Afd. I. N:r 1.

[2] Es sei hier noch einmal auf eine Arbeit von Hrn. HURWITZ (Math. Ann., Bd. 32, S. 290) verwiesen.

[3] Man sehe die 5. Nummer meiner soeben erwähnten Arbeit.

1. Für $p = 4$ erhält man also eine Normalcurve von der sechsten Ordnung im gewöhnlichen dreidimensionalen Raume. Diese Curve muss auf einer Fläche zweiten Grades F_2 belegen sein, welche indess auch in einen Kegel K_2 degeneriren kann.[1] Die Erzeugenden dieser Fläche werden von den Trisecanten der Curve gebildet.

CAYLEY hat eine allgemeine Theorie für die Singularitäten einer gewundenen Curve gegeben,[2] und wir finden es nicht unangemessen einige seiner Resultate für unseren Fall anzuführen, da ja die charakteristischen Zahlen der invarianten Normalcurve auch Eigenschaften der allgemeinen algebraischen Gebilde des bezüglichen Geschlechts bezeichnen.

Die erwähnte C_6 hat keine wirkliche Doppelpunkte oder Spitzen, da ja solche nimmer auf der φ-Normalkurve auftreten können. Die einzigen möglichen wesentlichen Singularitäten sind *stationäre Tangenten* Θ und doppelt osculirende Ebenen Δ; jene müssen aber Erzeugende der Fläche F_2 sein, weil jede andere Grade höchstens zwei Punkte mit F_2 und somit der Curve gemein hat. Wir werden finden, dass diese Singularitäten in Zusammenhange mit den Collineationen der Curve in sich auftreten.

Ferner seien m *Ordnung* der Curve;

r Ordnung der durch die Tangenten gebildeten abwickelbaren Fläche oder Classe des Perspektivkegels (*Rang* der Curve);

n *Classe* der Curve;

α die Zahl der *stationären Ebenen;*

h Zahl der *apparenten Doppelpunkte;*

g die Zahl der Linien in zwei osculirenden Ebenen, welche in einer gegebenen Ebene liegen;

x Ordnung der *Doppelcurve;*

y die Classe der doppelt berührenden developpabeln Fläche.

Man erhält nun zwei Systeme von Gleichungen, das erste durch Benutzung der PLÜCKER'schen Formeln für einen willkürlichen Perspektivkegel über die gegebene Curve. Für Ordnung, Classe, Doppelpunkte, Spitzen, Inflexionen, Doppeltangenten erhält man die bezüglichen Zahlen: m, r, h, o, $n + \Theta$, y. Also ermittelt man, da im voraus

[1] Bemerkt in einem Aufsatze von Hrn. WEBER, Math. Ann., Bd. 13, S. 35.
[2] Man sehe die bezügliche Darstellung von SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes* II, 3. Auflage, S. 105.

$$m = 6, \; p = 4$$

gegeben sind,

$$r = 18, \; h = 6, \; n = 36 - \Theta, \; y = 96.$$

Man betrachte so die Querschnittcurve der abwickelbaren Fläche. Hier sind die PLÜCKER'schen Charakterzahlen: r, n, x, $m + \Theta$, α, $g + \Delta$. Also

$$x = 126 - \Theta, \; \alpha = 60 - 2\Theta, \; g = 531 - \frac{65}{2}\Theta + \frac{\Theta^2}{2} - \Delta.$$

Die Berührungspunkte der α-Ebenen haben eine besondere Bedeutung als diejenigen Stellen des Gebildes vom Geschlechte p (4), in welchen eine eindeutige algebraische Function von niedrigerer als der $(p+1)^{\text{ten}}$ (5.) Ordnung unendlich wird, ohne noch an anderen Stellen unendlich zu werden. Diese Stellen sind von vielen Verfassern in Betracht gezogen und für ihre Zahl $(p-1)\,p(p+1)$ gegeben, also in unserem Falle 60; dies wird auch bestätigt, wenn nur die Θ-Punkte doppelt gerechnet werden.

Die abwickelbare Fläche von der Ordnung 18 und die Fläche F_2 schneiden einander in eine Curve von der Ordnung 36; diese kann nur aus der Cuspidalcurve doppelt gerechnet und aus einer Anzahl gemeinsamer Erzeugenden bestehen. Jedes Erzeugendensystem von F_2 liefert deren 12, was man auch daraus ersehen kann, dass jede F_2-Erzeugende die Developpable in 18 Punkten schneiden muss, und zwar in drei doppelten Punkten auf der Curve und zwölf gemeinsamen Erzeugenden des anderen Systems. Zwei von diesen 24 gemeinsamen Geraden rücken in eine etwa auftretende stationäre Tangente zusammen, was für Θ den oberen Werth 12 giebt, welcher auch wirklich erreicht wird.

Indess haben wir 2 Punktgruppen mit projektivisch invarianten Eigenschaften gefunden, welche sich somit bei einer Collineation der Curve in sich nur unter einander vertauschen können: die 60 Berührungspunkte der stationären Ebenen und die 24 Berührungspunkte der gemeinsamen Erzeugenden. Dazu könnte man noch die 24 Punkte nehmen, welche die letzteren Geraden noch aus der Curve ausschneiden. Doch giebt dies in zwei wirklich vorkommenden Fällen keine neue Gruppe: wenn alle gemeinsame Erzeugenden stationäre Tangenten sind oder alle Tangenten in den obenerwähnten ausgeschnittenen Punkten Erzeugende des anderen F_2-Systems liefern.

Cayley hat mittelst der Theorie der reciproken Flächen auch andere Singularitäten behandelt.[1] Hier seien nur die folgenden Resultate mitgetheilt. Es seien:

γ' die Zahl osculirender Ebenen, welche ausserdem noch eine Tangente enthalten;

t die Zahl Punkte, durch welche drei Tangenten gehen;

t' die Zahl Ebenen, welche drei Tangenten enthalten.

Die folgenden Formeln gelten hier, wenn von wesentlichen Singularitäten nur Θ und Δ auftreten:

$$\gamma' = rn + 12r - 14n - 6m - 8\Theta - 4\Delta;$$

$$t = \frac{1}{6}(r^3 - 3r^2 - 58r - 3r(n + 3m + 3\Theta) + 42n + 78m + 78\Theta);$$

$$t' = \frac{1}{6}(r^3 - 3r^2 - 58r - 3r(m + 3n + 3\Theta) + 42m + 78n + 78\Theta),$$

oder in unserem Falle:

$$\gamma' = 324 - 12\Theta - 4\Delta;\; t = 480 - 12\Theta;\; t' = 120.$$

Hier haben wir neue invariante Punktgruppen gefunden. Besonders die t' haben in der allgemeinen Theorie der Curven Aufmerksamkeit gefunden, nämlich in der Frage nach den adjungirten φ-Curven, welche die Grundcurve in $p-1$ Punkten je einfach berühren.[2] Für die Zahl der Lösungen hat man $2^{p-1}(2^p-1)$, was für $p=4$ mit der schon erhaltenen übereinstimmt.

2. Die Collineationen von C_6 in sich müssen auch die F_2 in sich überführen. Dabei können die beiden Systeme von Erzeugenden entweder jedes in sich transformirt oder mit einander vertauscht werden. Es kann auch eine solche specielle Transformation auftreten, welche alle Erzeugenden einer Art einzeln fest lässt; zwei Punkte auf jeder werden dabei fest, welche zusammen zwei feste Erzeugenden der anderen Art erfüllen, und die Transformation ist von der Periode drei, weil die Punkte der Curve auf den festen Erzeugenden cyclisch vertauscht werden müssen; die sechs Punkte auf den

[1] Man sehe z. B. das von Salmon-Fiedler (o. a. A. S. 660) gegebene Referat.

[2] Man sehe Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I, S. 847.

beiden erwähnten Erzeugenden der anderen Art bleiben fest und müssen stationäre Tangenten besitzen.

Man ersieht hieraus, dass *in den Transformationsgruppen eines Gebildes vom Geschlechte $p = 4$ keine neue einfache Gruppe auftreten kann. Entweder können die Erzeugenden-systeme vertauscht werden, und dann liefert die Hälfte der Operationen eine ausgezeichnete Untergruppe, welche jedes in sich transformirt, oder, wenn Vertauschung nicht vorkommt, die Gruppe ist mit einer von den bekannten endlichen binären Gruppen holoedrisch isomorph, es sei denn, dass jede Erzeugende einer Art durch eine cyclische G_3 in sich transformirt wird, wo aber eben diese G_3 ausgezeichnete Eigenschaften besitzen muss.* (Letzteres gilt auch für den Fall, wo die Fläche F_2 in einen Kegel übergeht, und also die beiden Systeme zusammenfallen.)

Wenn man den beiden Erzeugenden-Schaaren die Verhältnisse $x_1 : x_2$ bez. $y_1 : y_2$ eindeutig zuordnet, so ist zunächst einleuchtend, dass man die C_6 durch eine homogene Gleichung $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$, welche in sowohl den x_i als den y_i vom Grade 3 ist, definiren kann. Man erreicht diese Parameterstellung, indem man für die Gleichung der F_2 $xz = yw$ wählt und dann durch

(1) $$x : y : z : w = x_2y_1 : x_1y_1 : x_1y_2 : x_2y_2$$

die Verhältnisse $x_1 : x_2$ und $y_1 : y_2$ bestimmt. Vom Punkte $x = y = z = 0$ oder $x_1 = y_1 = 0$ kann man nun die Fläche und somit die Curve auf die Ebene $w = 0$ projiciren, wobei die Bildcurve die Gleichung $F(y, x, y, z) = 0$ befriedigen muss.[1]

Eine Collineation erster Art kann man, was die Fläche anbelangt, durch zwei binäre Substitutionen ersetzen:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\; x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2;$$
$$y'_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2,\; y'_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2.$$

Dabei gehen zwei Erzeugenden jeder Art in sich über, und ihre 4 Schnittpunkte bleiben fest, doch wenn die eine Substitution identisch ist, bleiben alle Punkte der festen Erzeu-

[1] Man sehe hierzu etwa Salmon-Fiedler o. a. A. S. 521 oder Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie II 1, S. 422.

genden der anderen Art fest. Wählt man die Grundelemente fest, [1] erhält man die einfachere Form:

(2) $x'_1 = a_1 x_1\,,\ x'_2 = a_2 x_2\,,\ y'_1 = b_1 y_1\,,\ y'_2 = b_2 y_2\,.$

Die Collineation im Raume ermittelt sich nun aus (1) und (2):

(3) $x' = a_2 b_1 x_1\,,\ y' = a_1 b_1 y\,,\ z' = a_1 b_2 z\,,\ w' = a_2 b_2 w\,.$

Bei einer Collineation zweiter Art, wo die Erzeugenden-Schaaren vertauscht werden, kann man zunächst von Substitutionen der folgenden Form ausgehen:

$$x'_1 = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2\,,\ x'_2 = \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2\,;$$
$$y'_1 = \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2\,,\ y'_2 = \beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2\,.$$

Man ersieht leicht, dass durch die Forderungen:

$$x'_1 : x'_2 = x_1 : x_2\,,\ y'_1 : y'_2 = y_1 : y_2\,,$$

zwei bei der Collineation auf der Fläche festen Punkte bestimmt werden, sofern nicht diese Bedingungen in unendlich vielen Punkten erfüllt sind. Als Grundelemente wählen wir Erzeugende durch feste Punkte und erhalten dann Collineationen:

(4) $x'_1 = \alpha_1 y_1\,,\ x'_2 = \alpha_2 y_2\,,\ y'_1 = \beta_1 x_1\,,\ y'_2 = \beta_2 x_2\,.$

Aus (1) und (4) ergiebt sich nun die Collineation des Raumes:

(5) $x' = \alpha_2 \beta_1 z\,,\ y' = \alpha_1 \beta_1 y\,,\ z' = \alpha_1 \beta_2 x\,,\ w' = \alpha_2 \beta_2 w\,.$

Wird diese Operation wiederholt, so erhält man eine Collineation erster Art:

(6) $x' = \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 x\,,\ y' = \alpha_1^2 \beta_1^2 y\,,\ z' = \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 z\,,\ w' = \alpha_2^2 \beta_2^2 w\,,$

aber keine beliebige, da ja alle Punkte der Geraden $y = w = 0$ bei derselben fest bleiben.

Wenn wir noch hervorheben, dass die Gleichung (A) für $p = 4$ nur die Primzahllösungen 2, 3, 5 gestattet, so haben wir jetzt die Mittel, um die möglichen Collineationsgruppen eines Gebildes vom Geschlechte $p = 4$ in sich möglichst schnell zu ermitteln.

[1] Zusammenfallende Grundelemente kommen bekanntlich bei endlichen Gruppen nicht vor.

3. Wir wollen nun diese Collineationen aufsuchen. Dabei seien die Gleichungen der betreffenden Gebilde mit möglichst kleiner Constantenzahl geschrieben, womit also auch die willkührlichen Moduln gegeben werden.

Bei einer cyclischen Gruppe von der Periode 2 können entweder die Erzeugenden-Schaaren vertauscht werden oder nicht. Im ersterwähnten Falle erhält man unendlich viele festen Punkte, die Schnittpunkte von je zwei sich vertauschenden Erzeugenden. Diese erfüllen einen Kegelschnitt, wobei der Pol der Ebene des Kegelschnitts in Bezug auf die F_2 das Centrum der Perspectivität liefert. Für die Gleichung der Curve erhält man, indem man für $x_1 = y_1 = 0$ und $x_2 = y_2 = 0$ zwei feste Punkte auf der Curve wählt und auf die gleichzeitige Vertauschbarkeit von x_1, y_1 bez. x_2, y_2 Rücksicht nimmt, die folgende:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &x_1^2 y_1^2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + x_1 y_1 (x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + a x_1 x_2 y_1 y_2) + \\ &+ b(x_1^3 y_2^3 + x_2^3 y_1^3) + c x_1 x_2 y_1 y_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + \\ &+ x_2 y_2 (d(x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2) + e x_1 x_2 y_1 y_2) + f x_2^2 y_2^2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) = 0\,. \end{aligned}$$

Gehen wir zu den Coordinaten des Raumes über, so finden wir (nach Gl. (5) Nr. 2, wo $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$) für die Perspectivebene $x - z = 0$ und für das Perspectivcentrum $y = w = x + z = 0$. Die Curve muss auf einem Kegel und zwar von der 3. Ordnung belegen sein, dessen Scheitel das Centrum ist, so dass je zwei Punkte auf derselben Erzeugenden durch die Collineation vertauscht werden. Die Tangenten der 6 Punkte in der Perspectivebene gehen durch das Centrum, und die zugehörigen Ebenen sind stationär. Die Ebenen der 9 Wende-Erzeugenden des Kegels sind doppelt osculirend, bilden somit 9 Δ-Ebenen.

Mag nun die cyclische G_2 keine Vertauschung der Erzeugenden-Schaaren bewirken. Man kann dieselbe zu der Gestalt:

$$x'_1 = -x_1\,,\ y'_1 = -y_1\,,\ x'_2 = x_2\,,\ y'_2 = y_2$$

bringen. Die Gleichung kann auf zwei gleichberechtigte Weisen geschrieben werden, von welchen wir die folgende wählen:

$$(2)\quad \begin{aligned} &x_1^3 y_1^3 + x_1 y_1 x_2 y_2 (a x_1 y_1 + b x_2 y_2) + c x_2^3 y_2^3 + x_1^3 y_1 y_2^2 + x_1 x_2^2 y_1^3 + \\ &+ d x_2^3 y_1^2 y_2 + e x_1^2 x_2 y_2^3 = 0\,. \end{aligned}$$

Zwei Punkte der Curve werden in sich selbst transformirt: $x_1 = y_2 = 0$ und $x_2 = y_1 = 0$. Nimmt man auf die Gleichungen (2) und (3) der vorigen Nummer Rücksicht, so findet man, dass bei dieser Collineation jeder Punkt der Geraden $x = z = 0$ und $y = w = 0$ fest bleibt. Jede Gerade, welche diese beiden Linien schneidet, muss in sich selbst übergehen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf der Curve bilden somit eine Regelfläche, für welche jene beiden Geraden Leitlinien sind, und zwar ergiebt sich leicht, dass diese Regelfläche von der fünften Ordnung ist und $y = w = 0$ als dreifache $x = z = 0$ als doppelte Leitgerade enthält.

Die etwaige Belegenheit der C_6 auf einem Kegel 3. Ordnung oder einer Regelfläche 5. Ordnung charakterisirt somit die beiden verschiedenen Arten von involutorisch-eindeutigen Correspondenzen auf der Curve. Da in (1) und (2) nur 6 bez. 5 Moduln eingehen, und man für die allgemeine C_6 über 9 Moduln verfügt, so sind dort 3 bez. 4 Bedingungen erfüllt. Der Kegel K_3, bez. die Regelfläche R_5, bezeichnet ein Gebilde vom Geschlechte $p' = 1$, bez. 2, auf welches die C_6 1-2-deutig bezogen ist. Keine andere geradlinigen Flächen können die Curve einfach enthalten, wenn zugleich die Erzeugenden Bisecanten sein sollen.

Im Falle der Gleichung (2) untersuchen wir die Bisecantenregelfläche, deren Leitgerade $y = w = 0$ ist, welche selbst 2 Punkte der Curve enthält. Von jedem Punkte dieser Geraden gehen 5 Bisecanten (ausser $y = w = 0$ selbst) und in jeder Ebene durch dieselbe liegen deren 6, so dass man die Ordnung 11 erhält. Die Regelfläche besteht somit aus der erwähnten R_5 und einer R_6, für welche die C_6 Doppelcurve ist. Die Erzeugenden dieser R_6, welche von einem Punkte der Leitgeraden ausgehen, gehen in einander durch die Transformation G_2 über; weil aber dabei jede Ebene durch die Leitgerade invariant bleibt, müssen jene Erzeugenden auch in derselben Ebene durch diese Gerade liegen. Man kann daher $y = w = 0$ eine doppelte Berührungsleitgerade für die R_6 nennen, weil die Querschnittscurven daselbst Berührungsknoten erhalten.[1] Diese R_6 ist gewöhnlich vom Geschlechte $p' = 2$, zerfällt aber in 2 K_3, wenn

$$(3) \qquad d = c\,.$$

[1] Diese R_6 habe ich in meiner Schrift »Klassifikation af regelytorna af 6. graden» S. 58 (Diss. Lund 1892) behandelt.

Diese Gleichung sagt, dass die beiden Punkte der C_6 auf $y = w = 0$ dieselbe Ebene $y + dw = 0$ besitzen. Die Transformationsgruppe der Curve in sich selbst ist in diesem Falle eine *Vierergruppe*. Zwei die Erzeugenden-Schaaren vertauschende G_2 treten auf:

$$x'_1 = \pm y_1\,,\ y'_1 = \pm x_1\,,\ x'_2 = y_2\,,\ y'_2 = x_2\,.$$

Die zugehörigen Perspectivebenen sind $x \mp z = 0$ und die Perspectivcentra $y = w = x \pm z = 0$.

Man kann aber auch eine *Vierergruppe anderer Art* erhalten, welche die Erzeugenden-Schaaren überhaupt unvertauscht lässt. Wir gehen abermals von der Gleichung (2) aus, denken uns jedoch anfangs die Verhältnisse aller 8 Coefficienten völlig beliebig. Durch die übrigen Operationen der Vierergruppe müssen die beiden bei der G_2 festen Erzeugenden einer Schaar mit einander vertauscht werden. Vermittelst geeigneter Normirung kann man den beiden neuen G_2 die folgende Gestalt geben:

$$x'_1 = \pm x_2\,,\ x'_2 = x_1\,,\ y'_1 = \pm y_2\,,\ y'_2 = y_1\,.$$

Als Gleichung der Curve erhält man:

$$(4)\quad x_1^3y_1^3 + x_2^3y_2^3 + ax_1y_1x_2y_2(x_1y_1 + x_2y_2) + by_1y_2(x_1^3y_2 + x_2^3y_1) + \\ + cx_1x_2(x_1y_2^3 + x_2y_1^3) = 0\,.$$

Eine cyclische G_4 muss als Untergruppe, eine G_2 besitzen, welche die Erzeugenden-Schaaren unvertauscht lässt. Ein Rückblick auf die Gleichung (A) lehrt uns, dass die beiden bei der G_2 festen Punkte der C_6 auch bei der G_4 ihre feste Lage beibehalten müssen. Bei den Collineationen der Periode 4 müssen die Systeme vertauscht werden; dies ist schon daraus ersichtlich, dass es auf den in diesem Falle auftretenden festen Erzeugenden die nöthige Anzahl Punkte behufs cyclischer Vertauschung fehlt. Wir gehen also von der Gleichung (2) unter möglichst allgemeiner Voraussetzung hinsichtlich der Coefficienten aus. Eine Collineation von der Periode 4, welche die Systeme vertauscht und die Punkte $x_1 = y_2 = 0$ und $x_2 = y_1 = 0$ fest lässt, kann man auf die folgende Form bringen:

$$x'_1 = y_2\,,\ y'_2 = -ix_1\,,\ x'_2 = iy_1\,,\ y'_1 = x_2\,.$$

Dabei kann noch die Erzeugende, für welche $x_1 = x_2$, beliebig gewählt werden. Wir können daher feststellen, dass in der gesuchten Gleichung z. B. die Coefficienten für $x_1^3 y_1 y_2^2$ und $x_2^3 y_1^2 y_2$ gleich werden. Dann erhalten wir die Gleichung (4) wieder, nur mit der Specialisirung dass

$$(5) \qquad c = -b\,.$$

Die so bestimmte Curve besitzt aber auch die beiden zu den Fällen (3) und (4) gehörigen Vierergruppen in sich, so dass die vollständige Collineationsgruppe von der Beschaffenheit einer *diedrischen* G_8 ist.

Man beweist nun leicht, dass die 5 besprochenen Gruppen die einzigen möglichen ohne Collineationen von höherer Primzahlperiode sind.

4. Wir nehmen nun die cyclischen Gruppen der Periode 3 hinzu. Bei einer solchen kann entweder jede Erzeugende einer Schaar in sich übergehen oder nicht. In letzterem Falle lässt sich die Collineation in der folgenden Form herstellen:

$$x'_1 = j^2 x_1\,,\; x'_2 = x_2\,,\; y'_1 = j y_1\,,\; y'_2 = y_2\,,\; \left(j = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

oder in den Coordinaten des Raumes (nach (2) und (3) Nr. 2):

$$x' = jx\,,\; y' = y\,,\; z' = j^2 z\,,\; w' = w\,.$$

Die Gleichung einer durch diese Transformation in sich übergehenden C_6 kan man mit nur 3 Moduln schreiben:

$$(6) \quad x_1^3 y_1^3 + x_2^3 y_2^3 + a(x_1^3 y_2^3 + x_2^3 y_1^3) + b x_1^2 y_1^2 x_2 y_2 + c x_1 y_1 x_2^2 y_2^2 = 0,$$

wobei man natürlich von Gebilden mit Doppelpunkten und somit niedrigerem Geschlechte absieht. Die Curve (6) besitzt aber auch drei perspectivische G_2 in sich:

$$x'_1 = y_1(jy_1,\, j^2 y_1)\,,\; y'_1 = x_1\,,\; x'_2 = y_2\,,\; y'_2 = x_2(jx_2,\, j^2 x_2)\,,$$

oder (nach (4) und (5) Nr. 2):

$$x' = z(j^2 z,\, jz)\,,\; y' = y\,,\; z' = x(jx,\, j^2 x)\,,\; w' = w\,.$$

Die bezüglichen Perspectivebenen sind:

$$x - z = 0\,,\; x - j^2 z = 0\,,\; x - jz = 0\,,$$

und die Perspectivcentra erhält man als Schnittpunkte der Geraden $y = w = 0$ mit $x + z = 0$, $x + j^2 z = 0$ und $x + jz = 0$.

Die Transformationsgruppe der Curve (6) in sich ist somit eine *Diedergruppe* G_6. Je sechs zusammengehörige Punkte liegen in einer Ebene durch $y = w = 0$. Die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte bei den G_2 bilden 3 K_3, deren Scheiteln die obenerwähnten Perspektivcentren sind. Diese K_3 werden durch die G_3 cyclisch vertauscht. Man zieht nun leicht die Folgerung, dass eine Ebene durch $y = w = 0$ entweder alle oder keinen K_3 berühren muss. Jener Art giebt es 6 Ebenen, welche auch die Curve dreifach berühren müssen; die Berührungspunkte gehören zu stationären Ebenen, und ihre Tangenten gehen jede durch je eine der drei Scheiteln.

Wir denken uns nun die G_3 als Untergruppe einer höheren Gruppe, welche die Systeme nicht vertauscht. Diese Gruppe kann keine cyclische G_6 sein, da ja auf den bei einer solchen festen Erzeugenden die nicht festen Punkte sich zu je sechs cyclisch permutiren, und keine Oktaedergruppe, weil die dazu nöthigen cyclischen G_4 nach der vorigen Nummer nicht vorkommen. Die möglichen hier zu besprechenden Fälle sind somit diedrische G_6 und die Tetraedergruppe.

Bei den anderen Collineationen einer linearen Diedergruppe müssen diejenigen Elemente vertauscht werden, welche bei der cyclischen Untergruppe fest bleiben. Damit diese Vertauschung möglich sei, muss in der Gleichung (6) eine Bedingung erfüllt sein, für welche wir

$$(7) \qquad b = c$$

setzen können. Die vollständige Collineationsgruppe der Curve
in sich ist dann vom Typus einer *diedrischen* G_{12}. Als Unter-
gruppen erwähnen wir die diedrische G_6, welche die allge-
meine Curve (6) besitzt, die diedrische G_6, welche die Erzeu-
genden-Schaaren nicht vertauscht, deren drei Collineationen
der Periode 2 die folgenden sind:

$$x'_1 = x_2(jx_2,\, j^2 x_2)\,,\; x'_2 = x_1\,,\; y'_1 = y_2(j^2 y_2,\, jy_2)\,,\; y'_2 = y_1\,,$$

und endlich die cyclische G_6, welche durch Wiederholung der Operation:

$$x'_1 = jy_2\,,\; y'_2 = x_1\,,\; x'_2 = y_1\,,\; y'_1 = j^2 x_2\,,$$

gebildet wird.

Wir nehmen nun an, die Untergruppe, welche die Systeme nicht vertauscht, sei eine Tetraedergruppe. Als ausgezeichnete Untergruppe haben wir hier eine Vierergruppe. Wir suchen somit die weiteren Bedingungen, denen die Coefficienten der Gleichung (4) in diesem Falle genügen müssen. Die festen Elemente bei den einzelnen Operationen der Vierergruppe sollen bei den Collineationen von der Periode 3 der Tetraedergruppe cyclisch vertauscht werden. Diese Collineationen der Periode 3 kann man nun leicht in der folgenden Weise darstellen:

$$x'_1 = \pm i(x_1 \pm x_2),\ x'_2 = x_1 \pm x_2,\ y'_1 = \pm i(y_1 \pm y_2),\ y'_2 = y_1 \pm y_2,$$

und erhält so für die Gleichung der bei denselben in sich übergehenden Curve:

$$(8)\quad (x_1y_1 + x_2y_2)^3 + b(x_1y_1 - x_2y_2)(x_1y_2 - x_2y_1)(x_1y_2 + x_2y_1) = 0.$$

Die vollständige Collineationsgruppe der Curve (8) in sich erweist sich mit einer *Oktaedergruppe* holoedrisch isomorph. Die Ebene $x_1y_1 + x_2y_2 = 0$ oder $y + w = 0$ geht dabei stets in sich über. Der Pol dieser Ebene in Bezug auf die Fläche F_2 muss somit bei allen 24 Collineationen fest bleiben. Die Curve liegt auf 6 Kegeln K_3, deren Scheiteln in der invarianten Ebene belegen sind.

5. Wir nehmen nun an, jede Erzeugende der Schaar y gehe bei einer G_3 in sich über. Die G_3 kann durch die Collineation:

$$x'_1 = jx_1,\ x'_2 = x_2,\ y'_1 = y_1,\ y'_2 = y_2,$$

erzeugt werden, und als Gleichung einer zugehörigen Curve erhält man:

$$(9)\quad x_1^3 f_3(y_1, y_2) + x_2^3 \varphi_3(y_1, y_2) = 0.$$

Diese Curve besitzt 3 unabhängige Moduln.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass f_3 und φ_3 eine gemeinschaftliche Transformationsgruppe in sich besitzen. Dieselbe muss natürlich auch für ihre HESSE'schen Covarianten gelten, und wir nehmen zuerst an, dass diese nicht zusammenfallen. Man hat hier zwei Möglichkeiten: entweder können die Punkte der einen Covariante Grundpunkte einer G_2 sein, welche diejenigen der anderen vertauscht, oder die Punkte beider Covarianten werden durch eine G_2 vertauscht, deren

Grundpunkte durch ihre simultane quadratische Covariante geliefert werden müssen; jener Fall erweist sich aber als unmöglich, denn, damit die drei Punkte $f_3 = 0$ (bez. $\varphi_3 = 0$) durch eine G_2 in sich übergehen, muss einer von ihnen fest bleiben und somit einen Grundpunkt liefern.

Man kommt aber auch zu höheren Gruppen, wenn $f_3 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ mit einander vertauscht werden können. Weil dabei die 6 Punkte $f_3\varphi_3 = 0$ in eine oder mehrere Reihen cyclisch geordnet werden müssen, kann die Periode einer bezüglichen Collineation nur 6 oder 2 sein. Durch dieselbe Schlussweise für die HESSE'schen Covarianten erhält man 2 als die einzige mögliche Periode. Die Gleichung der Curve findet man in der folgenden Form:

$$(10)\quad \begin{aligned} &x_1^3(y_1 - y_2)(y_1 - ay_2)(y_1 - by_2) + \\ &+ x_2^3(y_1 + y_2)(y_1 + ay_2)(y_1 + by_2) = 0. \end{aligned}$$

Die Transformationsgruppe ist *eine diedrische* G_6, deren Collineationen von der Periode 2 die folgenden sind:

$$x'_1 = x_2(jx_2, j^2x_2),\ x'_2 = x_1(j^2x_1, jx_1),\ y'_1 = y_1,\ y'_2 = -y_2.$$

Da die Punkte der HESSE'schen Covarianten auf zwei Weisen gepaart werden können, hat man die Möglichkeit in Betracht zu nehmen, dass auch $f_3 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ in zwei Weisen vertauscht werden. Dann müssen aber auch $f_3 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ eine von der Identität verschiedene Transformation jede in sich besitzen, welche durch die Combination zweier Vertauschungen erhalten werden kann. Die Gleichung der Curve kann man hier in die folgende Gestalt bringen:

$$(11)\quad x_1^3y_1(y_1^2 + ay_2^2) + x_2^3y_2(ay_1^2 + y_2^2) = 0.$$

Die Collineationsgruppe dieser Curve in sich ist eine *diedrische* G_{12}. Eine erzeugende Operation der cyclischen Untergruppe G_6 hat man in:

$$x'_1 = -jx_1,\ x'_2 = x_2,\ y'_1 = -y_1,\ y'_2 = y_2.$$

Die 6 übrigen Collineationen sind die folgenden:

$$x'_1 = \pm x_2(\pm jx_2,\ \pm j^2x_2),\ x'_2 = x_1,\ y'_1 = \pm y_2,\ y'_2 = y_1.$$

Wir untersuchen nun den Fall, dass die HESSE'schen Covarianten von f_3 und φ_3 zusammenfallen. Die Gleichung der Curve bringt man hier leicht in die Gestalt:

$$x_1^3 y_1^3 + x_1^3 y_2^3 + x_2^3 y_1^3 + a^3 x_2^3 y_2^3 = 0 \,. \tag{12}$$

Diese Curve besitzt 12 stationäre Tangenten, deren Berührungspunkte zu je drei von den Erzeugenden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ ausgeschnitten werden. Hier hat man zu jedem System eine G_3, bei welcher jede Erzeugende derselben fest bleibt:

$$x'_1 = jx_1 \,, \; x'_2 = x_2 \,, \; y'_1 = y_1 \,, \; y'_2 = y_2 \,;$$
$$x'_1 = x_1 \,, \; x'_2 = x_2 \,, \; y'_1 = jy_1 \,, \; y'_2 = y_2 \,.$$

Durch die Combination dieser G_3 erhält man eine G_9, welche aus 4 G_3 besteht und in der Gesammtgruppe ausgezeichnet ist. Nimmt man eine die Erzeugenden $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ bez. $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ vertauschende Collineation hinzu:

$$x'_1 = ax_2 \,, \; x'_2 = x_1 \,, \; y'_1 = y_2 \,, \; y'_2 = \frac{1}{a} y_1 \,,$$

und combinirt man diese mit der G_6, so erhält man 9 Collineationen von der Periode 2. Man hat also eine G_{18}, welche jedes Erzeugenden-System in sich überführt und ersichtlich mit der Collineationsgruppe einer allgemeinen ebenen C_3 in sich holoedrisch isomorph ist. Dazu kommen noch 18 Collineationen, welche die Systeme vertauschen. Man erhält diese durch Combination der G_{18} mit einer beliebigen von ihnen, etwa:

$$x'_1 = y_1 \,, \; y'_1 = x_1 \,, \; x'_2 = y_2 \,, \; y'_2 = x_2 \,.$$

Von diesen 18 neuen Collineationen haben 12 die Periode 6 und 6 die Periode 2.

Bei den erwähnten 36 Collineationen der Curve (12) in sich bleiben 2 Gerade fest: die Verbindungsgeraden der Punkte $x_1 = y_1 = 0$ und $x_2 = y_2 = 0$ bez. $x_1 = y_2 = 0$ und $x_2 = y_1 = 0$, oder (Gl. (1) Nr. 2) $x = z = 0$ und $y = w = 0$. Die Transformationsgruppen dieser Geraden in sich sind diedrische G_6 und also mit der G_{36} nicht holoedrisch sondern nur meriedrisch isomorph. Man kann auch die G_{36} aus der Combination dieser beiden G_6 erhalten, und durch Combination von Untergruppen der G_6 entspringen Untergruppen der G_{36}. Auf jeder der beiden festen Geraden liegen die Scheiteln je dreier K_3, welche die Curve enthalten. Die erwähnten diedrischen G_6 entstehen durch die Zusammenfassung aller möglichen Vertauschungen dieser Scheiteln. Die G_{36} ist also als eine Untergruppe der Gruppe aller möglichen Vertauschungen von 6 Dingen zu bezeichnen, und zwar erhält man die oberwähnte die Systeme nicht vertauschende G_{18} als diejenige Untergruppe von G_{36}, bei welcher Permutationen in gerader Anzahl auftreten.

Es fragt sich, ob die Curve (12) noch weitere Collineationen in sich besitzen kann. Die Erzeugende $x_1 = 0$ kann nur mit den anderen drei Θ-Punkte enthaltenden Erzeugenden: $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, vertauscht werden. Geht also $x_1 = 0$ bei n Collineationen in sich selbst über, so ist die Ordnung der Gruppe $4n$. Die Zahl n erhält man durch Combination der G_3, welche jeden Punkt der gedachten Erzeugenden unverändert lässt, und der gemeinschaftlichen Transformationsgruppe von f_3 und φ_3 in sich. Letztere Gruppe ist aber, wenn die HESSE'schen Covarianten zusammenfallen, gewöhnlich eine G_3, doch, wenn f_3 und φ_3 gegenseitige Covarianten 3. Grades sind, eine Diedergruppe der Ordnung 6. In diesem Falle, wo $a^3 = -1$ und also die Gleichung der Curve:

$$x_1^3 y_1^3 + x_1^3 y_2^3 + x_2^3 y_1^3 - x_2^3 y_2^3 = 0 \,, \tag{13}$$

treten 36 neue Collineationen auf. Man erhält diese durch Combination der G_{36} mit einer beliebigen neuen, etwa:

$$x'_1 = x_2 \,, \; x'_2 = x_1 \,, \; y'_1 = y_1 \,, \; y'_2 = -y_2 \,.$$

Von den 36 so hinzukommenden Collineationen sind diejenigen, welche die Systeme vertauschen, von der Periode 4; von den übrigen haben 12 die Periode 6 und 6 die Periode 2. Jene bei der G_{36} festen Geraden, werden bei den 36 neuen Collineationen vertauscht, und man kann die G_{72} als eine 6 Dinge vertauschende Gruppe betrachten, bei welcher etwa die drei ersten und drei letzten Dinge stets dieselben 2 vertauschbaren Gruppen bilden. Die G_{72} besitzt drei ausgezeichnete Untergruppen von der Ordnung 36: die Collineationsgruppe der allgemeinen Curve (12), diejenige Untergruppe, welche die Systeme nicht vertauscht, und endlich eine Gruppe von geraden Vertauschungen der 6 K_3-Scheiteln. Letztere ist mit der Collineationsgruppe der ebenen harmonischen C_3 holoedrisch isomorph.

Die Curve (12) liegt, wie erwähnt, auf 6 K_3, deren Scheiteln zu je drei auf den beiden ausgezeichneten Geraden belegen sind. Dieselbe Curve liegt auch auf 9 R_5, deren dreifache Leitgeraden je zwei Kegelscheiteln verbinden. Die specielle Curve (13) liegt ausserdem auf 6 anderen R_5, deren dreifache Leitgeraden je zwei Θ-Punkte verbinden; diese Geraden sind doppelte Berührungsleitgeraden von 6 R_6, für welche (13) Doppelcurve ist.

Im Allgemeinen permutiren sich 72 Punkte der Curve (13) bei der G_{72} als geschlossenes System. Doch permutiren sich die 12 Θ-Punkte nur unter einander, und ein Gleiches gilt vom System der 36 α-Punkte, sowie endlich auch von 18 Punkten in den 9 Verbindungsgeraden je zweier K_3-Scheiteln, welche die Berührungspunkte von 9 doppelt-osculirenden Ebenen bilden. Jeder von diesen Punkten bleibt nämlich bei einer G_6, bez. G_2 oder G_4 fest.

6. Es bleibt noch übrig den Fall zu betrachten, wo die Curve durch eine G_5 in sich übergeführt wird. Bei ungerader Periodenzahl können natürlich die Erzeugendensysteme nicht vertauscht werden. Da die Punkte der Curve auf den 4 festen Erzeugenden nicht cyclisch zu je 5 permutirt werden können, müssen dieselben in den 4 festen Schnittpunkten belegen sein. Dies kann aber nur dadurch bewirkt werden, dass in jedem der 4 Punkte eine Erzeugende die Curve einfach berührt. Man erkennt nun ohne Mühe durch Versuche, dass die Gleichung einer Curve der hier betrachteten Art mit einer Collineation von der Periode 5 in sich in die folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$x_1^3y_1^2y_2 + x_1^2x_2y_2^3 + x_1x_2^2y_1^3 + a^5x_2^3y_1y_2^2 = 0\,, \tag{14}$$

wobei, wenn $\varepsilon^5 = 1$, die Collineationen folgendermassen dargestellt werden:

$$x'_1 = \varepsilon x_1\,,\ x'_2 = \varepsilon^4 x_2\,,\ y'_1 = \varepsilon^2 y_1\,,\ y'_2 = \varepsilon^3 y_2\,.$$

Die Curve (14) besitzt aber auch 5 Collineationen der Periode 2:

$$x'_1 = a^2\varepsilon^4 x_2\,,\ x'_2 = \frac{\varepsilon}{a}x_1\,,\ y'_1 = \varepsilon^3 y_2\,,\ y'_2 = \frac{\varepsilon^2}{a}y_1\,,$$

so dass die vollständige Gruppe ihrer Collineationen eine *diedrische* G_{10} ist.

Man findet leicht, dass keine Collineation von der Periode 10 die Curve (14) in sich transformiren kann; denn entweder würden alle 4 bei der G_5 festen Punkte auch hier fest bleiben, was der Gleichung (A) widerstreitet, oder 2 von denselben würden mit einander vertauscht, was aber geometrisch ungereimt wäre. Aus denselben Gründen sind auch Collineationen höherer Periodenzahl unmöglich. Man hat also nur noch den Fall zu betrachten, dass eine Erzeugenden-Schaar durch eine Ikosaedergruppe in sich übergeführt wird. Weil die hier auftretenden G_3 von der in der 4. Nummer behandelten Art sein müssen, und dort immer Vertauschung der Systeme eintrat, muss also die vollständige Gruppe von der Ordnung 120 sein. Bei einer solchen Curve mit 120 Transformationen in sich, bilden die 24 Tangenten, welche auch Erzeugende der F_2 sind, entsprechend den 6 G_5 innerhalb der Ikosaedergruppe 6 Vierseite, deren Ecken in den Berührungspunkten liegen.

Soll eine Vertauschung der Systeme für die Curve (14) möglich sein, muss der zu Grunde gelegte Vierseit in sich übergeführt werden, wenn man nicht mehrere solche Vierseite, somit auch mehrere G_5 und eine G_{120}, voraussetzen will. Man ermittelt leicht die Bedingung $a^5 = -1$; dann treten 5 cyclische G_4 auf, deren erzeugende Operationen die folgenden sind:

$$x'_1 = \varepsilon^2 y_1\,,\ y'_1 = -\varepsilon^4 x_2\,,\ x'_2 = \varepsilon^3 y_2\,,\ y'_2 = \varepsilon x_1\,,$$

wo ε eine fünfte Wurzel aus der Einheit ist.

Inzwischen hat Hr. GORDAN erkannt,[1] dass eben die so erhaltene Curve:

$$x_1^3y_1^2y_2 + x_1^2x_2y_2^3 + x_1x_2^2y_1^3 - x_2^3y_1y_2^2 = 0 \tag{15}$$

120 Collineationen in sich zulässt. Hr. KLEIN bezeichnet diese Curve mit dem Namen *der Bring'schen Curve* und zwar aus dem folgenden Grunde. Führt man nämlich Pentaedercoordinaten z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 mit der identischen Relation

$$\Sigma z_i = 0$$

---

[1] Man sehe P. GORDAN, *über die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (Math. Ann. Bd. 13) oder F. KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, S. 194 u. f.

ein, so erhält man dieselbe als Schnittcurve zweier Flächen, der Hauptfläche und der Diagonalfläche:

$$\sum z_i^2 = 0\,, \quad \sum z_i^3 = 0\,.^1 \tag{15 a}$$

Aus den Vertauschungen der z_i ergeben sich nun die 120 Collineationen der Curve in sich, und zwar lassen die 60 geraden Vertauschungen die Erzeugenden-Systeme unverändert.

Die Beschaffenheit der einzelnen Collineationen sei hier kurz angedeutet. Durch cyclische Permutation aller z_i erhält man 24 Collineationen von der Periode 5. Zwanzig Collineationen von dem Typus:

$$z'_1 = z_2\,,\ z'_2 = z_3\,,\ z'_3 = z_1\,,\ z'_4 = z_5\,,\ z'_5 = z_4\,,$$

haben die Periode 6. Die so entspringenden 10 cyclischen G_6 besitzen Untergruppen von der Periode 3, welche 20 neue Collineationen liefern, z. B.:

$$z'_1 = z_2\,,\ z'_2 = z_3\,,\ z'_3 = z_1\,,\ z'_4 = z_4\,,\ z'_5 = z_5\,;$$

dazu kommen noch die Untergruppen von der Periode 2:

$$z'_1 = z_1\,,\ z'_2 = z_2\,,\ z'_3 = z_3\,,\ z'_4 = z_5\,,\ z'_5 = z_4\,.$$

Diese 10 Collineationen sind perspectivisch; die Perspectivebene in dem gewälten Beispiel ist $z_4 - z_5 = 0$ und das Perspectivcentrum $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 + z_5 = 0$. In den Perspectivebenen liegen die 60 Berührungspunkte der stationären Ebenen. Die 10 Geraden $z_i = z_k = 0$ gehen jede durch drei Perspectivcentra; so geht die Gerade $z_1 = z_2 = 0$ durch die den Ebenen $z_3 = z_4$, $z_4 = z_5$ und $z_5 = z_3$ zugeordneten Centra und bleibt bei der durch die Vertauschungen von z_3, z_4, z_5 entstandenen diedrischen G_6 fest. Dreissig Collineationen haben die Periode 4; bei diesen bleibt eine Pentaederebene fest und die 4 übrigen cyclisch vertauscht. Durch Wiederholung einer solchen entstehen 15 Collineationen der Periode 2 »mit Axen». Als Beispiel wählen wir:

$$z'_1 = z_2\,,\ z'_2 = z_1\,,\ z'_3 = z_4\,,\ z'_4 = z_3\,,\ z'_5 = z_5\,.$$

[1] Man kann ja so die Coordinaten eines Punktes der Curve als Wurzeln einer Gleichung 5. Grades betrachten, welche durch Tschirnhaus-Transformation in die BRING'sche Normalform gebracht worden ist.

Die eine Axe $z_1 + z_2 = z_3 + z_4 = z_5 = 0$ geht durch 2 von den vorerwähnten Perspectivcentren: $z_1 + z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = 0$ und $z_3 + z_4 = z_1 = z_2 = z_5 = 0$, und in der That ist jede der 15 Verbindungsgeraden eine solche Axe. Nach den Erörterungen bei der Gleichung (2) der 3. Nummer geht jede solche Axe durch die Berührungspunkte einer doppelt osculirenden Ebene.

Die höheren Untergruppen innerhalb der G_{120} sind: die Ikosaedergruppe, welche die Systeme unvertauscht lässt, 5 Oktaedergruppen, bei denen je eine Pentaederebene fest bleibt, 6 G_{20} von vorher besprochener Art, 10 diedrische G_{12}, bei denen sich die Pentaederebenen in 2 Systemen von 2 und 3 permutiren, und endlich Diedergruppen von der Ordnung 10, 8, 6 und 4, welche aber nur Untergruppen von den besprochenen Untergruppen bilden.

Entsprechend den 10 perspectivischen G_2 und den 15 G_2 »mit Axen» liegt die BRING'sche Curve auf 10 K_3 und 15 R_5. Jede Wendeebene dieser K_3 osculirt die Curve doppelt. 15 Wendeerzeugende, die erwähnten Axen, gehören aber zu 2 K_3. Man erhält 60 andere, so dass die vollständige Zahl der die Curve doppelt osculirenden Ebenen 75 ist. Von denjenigen Ebenen γ, welche die Curve in einem Punkte berühren und in einem anderen osculiren, werden (nach einer Formel am Ende der 1. Nummer) 300 von den 75 $\varDelta$-Ebenen absorbirt; die übrigen 24 osculiren in den Punkten, deren Tangenten Erzeugende der F_2 sind, denn die andere Erzeugende durch einen solchen Punkt enthält ja auch eine Tangente der Curve. Mehrere solche merkwürdige Eigenschaften der BRING'schen Curve könnte man leicht hervorziehen.

Die 60 α-Punkte, die 30 Berührungspunkte des Systems von 15 $\varDelta$-Ebenen und die 24 Punkte, in denen die Tangenten Erzeugende der F_2 sind, bilden die einzigen Systeme von weniger als 120 Punkte, welche sich bei der G_{120} geschlossen permutiren.

7. Nachdem wir nun alle möglichen Collineationsgruppen eines Gebildes vom Geschlechte $p = 4$ gefunden haben, dessen Normalcurve der 6. Ordnung auf einer wirklichen Fläche 2. Grades liegt, seien hier noch kurz die erhaltenen Resultate zusammengestellt. M bezeichne die Zahl unabhängiger Moduln der betreffenden Gebilde.

a. $M = 6$.

1) G_2, welche die Erzeugenden-Systeme der Fläche F_2 vertauscht. Gleichung (1).

b. $M = 5$.

2) G_2 ohne Vertauschung der Systeme. Gl. (2).

c. $M = 4$.

3) Vierergruppe mit Vertauschung der Systeme. Gl. (3).

d. $M = 3$.

4) Vierergruppe ohne Vertauschung der Systeme. Gl. (4).
5) Diedrische G_6 mit Vertauschung der Systeme. Gl. (6).
6) G_3. Gl. (9).

e. $M = 2$.

7) Diedrische G_8 mit Vertauschung der Systeme. Gl. (5).
8) Diedrische G_{12} mit Vertauschung der Systeme. Gl. (7).
9) Diedrische G_6 ohne Vertauschung der Systeme. Gl. (10).

f. $M = 1$.

10) Oktaedergruppe. Gl. (8).
11) Diedrische G_{12} ohne Vertauschung der Systeme. Gl. (11).
12) Diedergruppe von der Ordnung 10 ohne Vertauschung der Systeme. Gl. (14).
13) Gruppe von der Ordnung 36. Gl. (12).

g. $M = 0$.

14) Gruppe von der Ordnung 72. Gl. (13).
15) Gruppe von der Ordnung 120. Gl. (15).

8. Wir betrachten nun den Fall, dass die Normalcurve eines Gebildes vom Geschlechte $p = 4$ auf einem Kegel 2. Grades K_2 liegt. Dieser specielle Fall hat in der Litteratur besonders die Aufmerksamkeit der Herren NOETHER und SCHOTTKY auf sich gezogen. Als eine merkwürdige Eigenschaft der Curve hat man erkannt, dass dieselbe (in der typischen Gestalt einer C_9 mit 8 dreifachen Punkten) Coincidenzcurve bei einer eindeutigen Transformation der Ebene in sich sein kann. Man hat auch eine allgemeinere Classe von eindeutigen Transformationen der Ebene in sich, diejenige mit 8 Punkten, welche durch eine eindeutige Correspondenz unter den Punkten einer solchen C_9 charakterisirt ist. Aus diesem Grunde hat Hr. S. KANTOR in seinen Untersuchungen über die isolirten Typen von eindeutigen periodischen Transformationen der Ebene die cyclischen Transformationen der obigen Gebilde mit $p = 4$ in sich aufgesucht;[1] nicht aber die vollständigen Gruppen, weil das für das zu lösende Problem nicht nöthig war. Diese allgemeinere Aufgabe soll uns hier beschäftigen. Dabei wollen wir uns einer von der KANTOR'schen etwas abweichenden Methode bedienen.

Projicirt man die Curve auf eine Ebene von einem Punkte des Kegels aus, so erhält man als Bildcurve eine C_6 mit 2 unendlich nahen dreifachen Punkten, welche von den auf der Erzeugenden des Kegels durch den Ausgangspunkt belegenen Zweigen herrühren.[2] Die Gleichung der Bildcurve kann man also zur folgenden Form bringen:

$$z^3y^3 + z^2y^2f_2(x, y) + zyf_4(x, y) + f_6(x, y) = 0,$$

wo $y = x = 0$ einen dreifachen Punkt mit $y = 0$ als gemeinsame Tangente der 3 Zweigen bildet. Die Erzeugenden des Kegels werden durch den Strahlbüschel $x = \lambda y$ abgebildet, und die auf einer Erzeugenden belegenen Punkte der Curve werden durch die Gleichung:

$$z^3 + z^2f_2(\lambda, 1) + zf_4(\lambda, 1) + f_6(\lambda, 1) = 0 = \varphi_3(z)$$

dargestellt, wo $z = \infty$ die Kegelspitze oder den gemeinsamen Punkt aller Erzeugenden bezeichnet. Die Polaren des Poles $z = \infty$ für $\varphi_3(z)$ stellen natürlich invariante Gebilde dar. Wir betrachten hier die lineare Polare $3z + f_2(\lambda, 1) = 0$, deren Ort den Kegelschnitt $3zy + f_2(x, y) = 0$ erfüllt. Dieser Kegelschnitt ist aber das Bild eines Querschnitts des Kegels. Wir wählen fortan das Projectionscentrum auf diesem Querschnitte; der Kegelschnitt geht dann in eine Gerade über, welche wir durch $z = 0$ bezeichnen können, und für die allgemeine Form der Gleichung der Bildcurve erhalten wir:

$$z^3y^3 + zyf_4(x, y) + f_6(x, y) = 0. \tag{I}$$

Die Collineationsgruppe der auf dem Kegel belegenen Normalcurve muss also von der Beschaffenheit sein, dass sowohl

[1] Acta Mathematica, Bd. 19, S. 164.
[2] Vgl. hiezu CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen* II, S. 431.

ein Punkt, die Kegelspitze, fest bleibt als auch eine Ebene, der Ort der erwähnten linearen Polaren. Es fragt sich, ob bei einer hieher gehörenden Collineation jede Erzeugende fest bleiben kann; dabei müssen die 3 Punkte der Curve auf einer Erzeugenden cyclisch permutirt werden, so dass die einzige Möglichkeit eine G_3 ist. Wir können also den Satz aussprechen:

Die Collineationsgruppe einer auf einem Kegel K_2 belegenen Normalcurve vom Geschlechte $p = 4$ ist entweder eine lineare Gruppe oder auch eine Combination einer linearen Gruppe mit einer G_3.

Wenn wir nun von der projicirten Curve (I) ausgehen, haben wir statt einer Collineationsgruppe eine Gruppe von quadratischen Transformationen zu betrachten. Dabei muss aber stets die ausgezeichnete Gerade $z = 0$ in sich übergehen, sowie auch 2 Fundamentalpunkte in den unendlich benachbarten dreifachen Punkten liegen. Die Gleichung einer bezüglichen Transformation kann man also zur Gestalt bringen:

$$(a) \qquad x' : y' : z' = (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) : (a_2x + b_2y)^2 : zy\,.$$

Es ist aber hier ersichtlich, dass die Substitution:

$$x' : y' = (a_1x + b_1y) : (a_2x + b_2y)$$

die Functionen f_6 und f_4 in sich überführen muss. Man hat also zuerst die gemeinschaftliche Transformationsgruppe dieser beiden Functionen aufzusuchen.

Die bei einer einzelnen räumlichen Collineation festen Erzeugenden des Kegels kann man für $x = 0$ und $y = 0$ wählen. Die 4 festen Punkte bei der Collineation sind die Kegelspitze und 3 Punkte in der vorerwähnten festen Ebene, von denen 2 auf jenen festen Erzeugenden liegen, und der dritte der Pol ihrer Verbindungsgerade in Bezug auf den Querschnitt des Kegels ist. Doch giebt es Fälle, dass auch alle Punkte einer Verbindungslinie zweier von diesen Punkten oder einer Ebene durch drei von ihnen fest bleiben. Die ebene Transformation (a) geht hier in eine Collineation über:

$$(a') \qquad x' : y' : z' = \alpha x : \beta y : \gamma z\,.$$

Durch diese Collineation gehe $f_6(x', y')$ in $k \cdot f_6(x, y)$ und $f_4(x', y')$ in $l \cdot f_4(x, y)$ über. Die einzelnen Glieder von (I) sollen durch dieselbe Zahl k vervielfältigt werden. Daraus erhält man die Bedingungen:

$$(b) \qquad \beta^3\gamma^3 = \beta\gamma l = k\,;\ \gamma = \frac{k}{\beta l}\,;\ k^2 = l^3.$$

Projicirt man die Curve vom festen Punkte auf der Erzeugenden $x = 0$, ist die Gleichung der Bildcurve:

$$z^3x^3 + zxf_4(x, y) + f_6(x, y) = 0\,,$$

und die Collineation wird in die folgende ebene übergeführt:

$$(a'_1) \qquad x' : y' : z = \alpha x : \beta y : \gamma_1 z\,;\ \gamma_1 = \frac{k}{\alpha l} = \frac{\beta}{\alpha}\gamma\,.$$

Setzt man in (a') $\alpha = \beta$, geht jede Erzeugende in sich über; man erhält $k = \alpha^6$, $l = \alpha^4$ und $\gamma = \alpha$. Die Collineation ist somit eine identische. Doch treten andere Verhältnisse ein, wenn f_4 identisch verschwindet, was jedoch zunächst ausgeschlossen sei.

Ist $\beta = \gamma$, geht jeder Punkt der Erzeugenden $x = 0$ in sich selbst über. Dasselbe gilt für die Erzeugende $y = 0$, falls $\alpha = \gamma_1$. Gelten diese Relationen gleichzeitig, erhält man $\alpha^2 = \beta^2$ oder $\alpha = -\beta$. Die räumliche Collineation ist dann eine harmonische Perspectivität, deren Perspectivebene durch die festen Erzeugenden geht.

Nimmt man $\alpha = \gamma$, ist auch $\beta = \gamma_1$. Die Gerade mit lauter festen Punkten bei der räumlichen Collineation ist hier die Polgerade der Ebene durch die festen Erzeugenden.

Vermittelst der obigen Andeutungen erschliesst man durch Betrachtungen in der Ebene die Eigenschaften der räumlichen Collineationen.

9. Wir nehmen erstens an, f_4 verschwinde nicht identisch. Die Collineationsgruppe der Normalcurve in sich erhält man aus der gemeinschaftlichen Gruppe von f_4 und f_6, welche der Bedingung (b) $k^2 = l^3$ genügt. Die Curve wird von den 12 Erzeugenden, $27f_6^2 + 4f_4^3 = 0$, des Kegels berührt. Damit die Curve keinen Doppelpunkt besitze, dürfen von jenen 12 Geraden keine 2 zusammenfallen; es sei denn, dass f_6 und f_4 gemeinsame Factoren besitzen, zu denen stationäre Tangenten gehören; doch darf f_6 keinen doppelten oder mehrfachen Factor enthalten, welcher auch in f_4 eingeht. Hier folgt nun eine kurze Aufzählung der verschiedenen Arten.

1) Perspectivische Collineation von der Periode 2:
$x' : y' : z' = -x : y : z$.

(1) $z^3y^3 + zy(ax^4 + bx^2y^2 + cy^4) + dx^6 + ex^4y^2 + fx^2y^4 + gy^6 = 0$.

2) Collineation »mit Axen» von der Periode 2:
$x' : y' : z' = x : -y : z$.

(2) $z^3y^2 + z(ax^4 + bx^2y^2 + cy^4) + x(dx^4 + ex^2y^2 + fy^4) = 0$.

Hier wird die Ordnung der Bildcurve reducirt, weil das Projectionscentrum ein Punkt der Curve ist. Die Axen sind die Verbindungsgerade zweier festen Punkte der Curve in der invarianten Ebene und deren Polgerade.

3) Vierergruppe, welche aus 2 Operationen von der Art (1) und einer von der Art (2) besteht. Man erhält als Gleichung:

(3) $z^3y^2 + z[a(x^4 + y^4) + bx^2y^2] + x[c(x^4 + y^4) + dx^2y^2] = 0$.

Hier gehen f_6 und f_4 in sich selbst über, wenn x und y vertauscht werden.

4) Vierergruppe, welche aus lauter Operationen von der Art (2) besteht. Da bei jeder Substitution 2 Punkte von $f_6 = 0$ fest bleiben, muss f_6 die JAKOBI'sche Covariante von f_4 sein.

(4) $z^3y^2 + z[a(x^4 + y^4) + bx^2y^2] + x(x^4 - y^4) = 0$.

5) Diedrische G_8, welche als Untergruppen eine Vierergruppe von jeder der beiden vorhergehenden Arten enthält.

(5) $z^3y^2 + azx^2y^2 + x(x^4 + y^4) = 0$.

Die ausgezeichnete cyclische Untergruppe geht aus der Wiederholung der Operation, $x' : y' : z' = x : iy : -z$, hervor.

Die so erhaltenen 5 Arten entsprechen der Reihe nach vollständig den 5 in der 3. Nummer gegebenen. Die folgende Art ist aber eine wesentlich neue

6) cyclische G_4, welche eine G_2 von der Art (1) als Untergruppe enthält.

(6) $z^3y^2 + z(x^4 + ay^4) + y(bx^4 + cy^4) = 0$.

$x' : y' : z' = ix : y : z$.

Die Erzeugende $x = 0$ bleibt in jedem Punkte fest. Zudem rückt in das Projectionscentrum auf $y = 0$ ein Punkt der Curve hinein, was die Erniedrigung der Ordnung der Bildcurve verursacht. Der Fall geht aus (1) hervor, wenn dort $b = d = f = 0$.

7) Diedrische G_6.

(7) $z^3y^3 + azy^3x^2 + x^6 + bx^3y^3 + y^6 = 0$.

Die erzeugende Operation der cyclischen G_3 ist die folgende: $x' : y' : z' = x : jy : z$. Bei dieser G_3 bleibt jeder Punkt der Polgeraden fest. Die $3G_2$ sind von der Art (1) und werden durch die Vertauschung von x und y erhalten. Hat man in (7) $b = 0$, ist die Transformationsgruppe eine

8) diedrische G_{12}.

(8) $z^3y^3 + azy^3x^2 + x^6 + y^6 = 0$.

Die erzeugende Operation der cyclischen Untergruppe G_6 ist: $x' : y' : z' = -x : jy : z$. Die Fälle (7) und (8) sind den Fällen (6) und (7) der 4. Nummer völlig entsprechend.

9) Cyclische G_3, bei der die Punkte einer Erzeugenden fest bleiben.

(9) $z^3y^3 + zy^2(ax^3 + by^3) + x^6 + cx^3y^3 + dy^6 = 0$.

$x' : y' : z' = jx : y : z$.

Die Punkte von $x = 0$ bleiben hier fest. Ist ausserdem f_6 die JAKOBI'sche Covariante von f_4, besteht die Transformationsgruppe aus 4 solchen G_3 und einer Vierergruppe von der Art (4), welche zusammen eine

10) Tetraedergruppe bilden.

(10) $z^3y^3 + azy^2(x^3 + y^3) + x^6 + 20x^3y^3 - 8y^6 = 0$.

Man erhält auch die Gleichung unter der Form (4), wenn nur $b = 2ai\sqrt{3}$, durch welche Bedingung die äqvianharmonische Invariante von f_4 verschwindet. Specialfall von sowohl (1) als (9) ist der folgende.

11) Cyclische G_6.

(11) $z^3y^3 + azy^5 + x^6 + by^6 = 0$.

$x' : y' : z' = -jx : y : z$.

Auch bei dieser G_6 bleiben alle Punkte der Erzeugenden $x=0$ fest. Hat man hier $b=0$, ist die Gruppe eine

12) cyclische G_{12}.

(12) $$z^3y^3 + zy^5 + x^6 = 0\,.$$

$x' : y' : z' = -jx : iy : -iz\,.$

13) Cyclische G_5.

(13) $$z^3y^2 + azy^4 + x^5 + by^5 = 0\,.$$

$x' : y' : z' = \varepsilon x : y : z\,.$

Die Punkte von $x=0$ bleiben fest. Wenn $b=0$, ist die Gruppe eine

14) cyclische G_{10}. $x' : y' : z' = \varepsilon x : -y : z\,.$

(14) $$z^3y^2 + zy^4 + x^5 = 0\,.$$

Die Untergruppe G_2 ist hier von der Art (2).

In den noch übrigen Fällen verschwindet f_4 identisch. Die Normalcurve geht immer durch eine perspectivische G_3 in sich über, welche jede Erzeugende unverändert lässt. Im Allgemeinen ist auch

15) diese G_3, $x' : y' : z' = x : y : jz$, die vollständige Gruppe der Curve

(15) $$z^3y^3 = f_6(x,\, y)\,.$$

Besitzt aber f_6 eine lineare Transformationsgruppe in sich selbst von der Ordnung μ, erhält man die Gruppe der Curve durch Combination dieser G_μ mit der G_3, woraus sich für die Ordnung 3μ ergiebt. Innerhalb dieser $G_{3\mu}$ ist die perspectivische G_3 ausgezeichnet

Die möglichen Gruppen von f_6 in sich sind schon in unserer früheren Abhandlung zusammengestellt.[1] Wir haben dort in der 4. Nummer gefunden, dass dieselben die folgenden sind: G_2, Vierergruppe, diedrische G_6, G_5, diedrische G_{12} und Oktaedergruppe. Wir können sonach unmittelbar die folgenden Normalgleichungen aufschreiben:

(16) $$z^3y^3 = x^6 + ax^4y^2 + bx^2y^4 + y^6\,;$$

(17) $$z^3y^2 = x(x^4 + ax^2y^2 + y^4)\,;$$

(18) $$z^3y^3 = x^6 + ax^3y^3 + y^6\,;$$

[1] Bihang till K. Sv. Vet.-Akad. Handl., Band 21, Afd. I, N:o 1

(19) $$z^3y^2 = x^5 + y^5\,;$$

(20) $$z^3y^3 = x^6 + y^6\,;$$

(21) $$z^3y^2 = x(x^4 + y^4)\,.$$

Die Gruppe von (16) ist eine cyclische G_6: $x' : y' : z' = -x : y : jz$, und diejenige von (19) eine cyclische G_{15}: $x':y':z' = \varepsilon x : y : jz$. Die Gruppe von (17) ist von der Ordnung 12 und besteht aus 3 cyclischen G_6, welche alle die perspectivische G_3 als Untergruppe besitzen. Von diesen G_6 sind 2 von derselben Beschaffenheit wie diejenige der Curve (16); die dritte aber, $x' : y' : z' = x : -y : jz$, hat als Untergruppe eine G_2 »mit Axen». Bei den Gruppen der Curven (18) und (20) von den bezüglichen Ordnungen 18 und 36 verweilen wir nicht. Die Gruppe von der Ordnung 72 der Curve (21) besitzt 3 cyclische G_{12}, welche den cyclischen G_4 einer Oktaedergruppe zugeordnet sind. Die eine G_{12} ist in die ebene Collineation, $x' : y' : z' = x : iy : -jz$, übergeführt.

Betreffend die cyclischen Gruppen weichen unsere Resultate in einigen Punkten von den von Hrn. KANTOR gegebenen ab.[1] So hat Hr. KANTOR der G_2 »mit Axen» (unseren Fall 2) und der zur Curve (17) gehörigen cyclischen G_6, welche als Untergruppen eine perspectivische G_3 und eine G_2 »mit Axen» besitzt, nicht erwähnt. Von cyclischen G_{12} haben wir hier 2 Arten gefunden: die eine gehört zur Curve (12) und enthält als Untergruppen eine perspectivische G_2 und eine G_3 mit einer in jedem Punkte festen Erzeugenden, die andere zur Curve (21) und enthält eine perspectivische G_3 und eine G_2 »mit Axen». Hr. KANTOR betrachtet diese beiden Fälle (in seiner Darstellung mit 12 und 16 bezeichnet) als äquivalent, was nicht richtig sein muss. Dagegen sind KANTORS Formen 6 und 15, 9 und 10 mit einander (und mit unseren Fällen 6 und 9) äquivalent, wobei jedoch zu beachten ist, dass die Formen 6, 15 und 10 bei KANTOR nicht mit der vollständigen Gliederzahl gegeben sind.

10. Wir gehen jetzt zur Behandlung der Gebilde vom Geschlechte $p=5$ über. Die ebene Curve niedrigster Ordnung, in welche ein allgemeines Gebilde dieses Geschlechts eindeutig transformirt werden kann, ist bekanntlich eine C_6 mit 5 Doppelpunkten; besitzt aber das Gebilde eine Specialschaar g_3^1, kann dasselbe in eine C_5 mit einem Doppelpunkte

[1] a. o. O., S. 166.

übergeführt werden.[1] In letzterem Falle schneidet der Strahlbüschel durch den Doppelpunkt die g^1_3 aus, und die adjungirten φ-Curven sind Kegelschnitte durch denselben Punkt. Geht man nun zur φ-Normalcurve im 4-dimensionalen Raume über, so findet man, dass dieselbe auf einer Regelfläche dritter Ordnung liegen muss, welche das Bild unserer ursprünglichen Ebene ist, wobei die Strahlen vom Doppelpunkte in Erzeugende und der Doppelpunkt selbst in eine einfache Leitgerade der Regelfläche transformirt werden. Jede Erzeugende ist somit eine Trisecante und die Leitgerade eine Bisecante der Normalcurve. Hieraus ist ersichtlich, dass die Regelfläche oder die Ebene der C_5 eine ausgezeichnete Rolle spielen. Mithin müssen die eindeutigen Transformationen der C_5 in sich birational sein, und zwar, weil deren keine quadratische oder höhere möglich sind, Collineationen. Letzteres schliesst man daraus, dass das System der adjungirten Kegelschnitte bei einer solchen birationalen Transformation auch in sich übergehen muss; innerhalb dieses Systems befindet sich aber eine ausgezeichnete zerfallende Unterabtheilung, und die zugehörigen Kegelschnitte bestehen aus je einer Geraden durch den Doppelpunkt und einer beliebigen Geraden; das System der Geraden muss also in sich übergeführt werden, was nur bei einer Collineation eintrifft. Die möglichen Collineationsgruppen der C_5 in sich müssen von sehr trivialer Natur sein. Man steigt von der Gesammtgruppe zur ausgezeichneten Untergruppe hinab, bei welcher die beiden Zweige im Doppelpunkte unvertauscht bleiben, und von dieser zu einer (cyclischen) ausgezeichneten Untergruppe, bei welcher jede Gerade durch den Doppelpunkt in sich übergeht. Doch können diese ausgezeichneten Gruppen aus der Gesammtgruppe oder auch nur aus der Identität bestehen.

Nach einem Satze von Hrn. WEBER ist ein algebraisches Gebilde mit beliebigem p durch $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ linearunabhängige quadratische Relationen zwischen den φ-Functionen charakterisirt.[2] Diese Relationen reichen aber nicht aus, um das Gebilde zu definiren, wenn eine g^1_3 existirt.[3] Also haben

[1] Man sehe CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, I, S. 709.

[2] Math. Ann., Bd. 13.

[3] Nach einem Satze von L. KRAUS, Math. Ann., Bd. 16. Es sei hier bemerkt, dass die Relationen $\Phi^{(2)} = 0$ auch in einem Falle ohne g^1_3 nicht ausreichen, um das Gebilde zu definiren, nämlich für die ebene C_6 ohne Doppelpunkte.

wir für $p = 5$ drei quadratische Relationen, $\Phi^{(2)}_1 = 0$, $\Phi^{(2)}_2 = 0$, $\Phi^{(2)}_3 = 0$, als deren Schnittcurve man im allgemeinen Falle die Normalcurve C_8 betrachten kann;[1] doch besitzen die $\Phi^{(2)} = 0$ im Falle der g^1_3 eine gemeinschaftliche Fläche, nämlich die vorhin erwähnte Regelfläche dritter Ordnung.

11. Von nun an halten wir uns an den allgemeinen Fall. Die Normalcurve sei im 4-dimensionalen Raume durch die drei quadratischen Relationen:

$$(1) \qquad F_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0, \; F_2 = 0, \; F_3 = 0,$$

bestimmt. Wir nehmen eine beliebige lineare Combination der F_i:

$$(2) \qquad \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$$

und suchen ihre Discriminante:

$$(3) \qquad \Delta_5(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,$$

welche in bekannter Weise in Form einer Determinante mit 5 Reihen und 5 Zeilen aufgeschrieben werden kann. *Die Beschaffenheit der covarianten Curve $\Delta_5 = 0$ in der λ-Ebene ist für unsere Normalcurve von grundwesentlicher Bedeutung.* Die Gleichung (3) bestimmt diejenigen Combinationen der λ_i, für welche das linke Glied von (2) als eine Funktion von nur 4 Veränderlichen, etwa x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, geschrieben werden kann. Der Ort der Scheiteln $x'_1 = x'_2 = x'_3 = x'_4 = 0$ entspricht eindeutig der Curve Δ_5. Diesen Ort bestimmt man aber durch die Determinantengruppe

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} F^1_1, & F^2_1, & F^3_1, & F^4_1, & F^5_1 \\ F^1_2, & F^2_2, & F^3_2, & F^4_2, & F^5_2 \\ F^1_3, & F^2_3, & F^3_3, & F^4_3, & F^5_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wo $F^k_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_k}$. Das System (4) stellt eine Curve von der Ordnung 10 im 4-dimensionalen Raume dar,[2] welche wir mit D_{10} bezeichnen wollen. Die Normalcurve kann keinen Doppelpunkt besitzen, weil dann ihr Geschlecht erniedrigt wird.

[1] Vgl. hiezu eine Abhandlung von Hrn. NŒTHER, Math. Ann., Bd. 26.

[2] Man sehe SALMON-FIEDLER, *Algebra der linearen Transformationen*, 2 Auflage (1877), S. 368.

Für einen Doppelpunkt sollen aber, wie man leicht findet, sowohl die Gleichungen (1) als (4) gelten. Es folgt die nothwendige Bedingung, dass die Curve D_{10} die Normalcurve nicht schneiden darf. Somit können auch keine Doppelpunkte von D_{10} und $\varDelta_5$ aus solchen Schnittpunkten herrühren. Doch kann die Curve $\varDelta_5$ Doppelpunkte besitzen, nämlich in denjenigen Punkten der λ-Ebene, für welche das linke Glied von (2) als Function von nur 3 Veränderlichen, x'_1, x'_2, x'_3, geschrieben werden kann; einem solchen Doppelpunkte entspricht aber auf D_{10} eine Gerade, $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$. Den Relationen $F_i = 0$ zwischen 3 Variablen entsprechen eben so viele Systeme von *unendlich vielen Abel'schen Wurzelformen*. L. KRAUS hat nun zeigen wollen, dass höchst 3 solche Systeme vorkommen;[1] sein Beweis ist aber unrichtig, und wir werden finden, dass sogar 10 solche Systeme vorkommen können. In diesem Falle hat $\varDelta_5$ 10 Doppelpunkte, was nur, wenn dieselbe aus 5 Geraden besteht, möglich ist, und D_{10} besteht aus 10 Geraden, welche sich zu je 4 in 5 Punkten schneiden, wobei diese Geraden und vielfachen Punkte von D_{10} den Doppelpunkten und Geraden von $\varDelta_5$ entsprechen. Wir werden aber nachher auf diesen Fall zurückkommen.

Die Specialschaaren g_4^1 der Gebilde vom Geschlechte $p = 5$ sind nach dem BRILL-NŒTHER'schen Reciprocitätssatze zu je 2 einander zugeordnet. Mit dem System der g_4^1 steht die Curve D_{10} in einem einfachen Zusammenhange. Projicirt man nämlich die Normalcurve von einem Punkte der D_{10}, so erhält man als ihr Bild im 3-dimensionalen Raume eine Curve C_8, welche auf eine Fläche 2. Grades $F(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = 0$ liegt, wo $F = 0$ die zugehörige Relation mit nur 4 Variablen abgiebt. Die Erzeugenden-Systeme dieser Fläche schneiden 2 zu einander reciproke g_4^1 aus. Wenn aber jene Relation zwischen nur 3 Veränderlichen bestände, liegt die projicirte Curve auf einem Kegel 2. Grades, so dass die beiden Schaaren g_4^1 zusammenfallen, und die einzige g_4^1 ihre eigene Reciproke ist; die unendlich vielen zugehörigen ABEL'schen Wurzelformen sind die Tangentenebenen des Kegels zugeordnet. Somit ist das System der g_4^1 1-2-deutig auf die Curve D_{10} bezogen, wie wir späterhin noch in anderer Weise geometrisch veranschaulichen wollen.

[1] a. o. O.

Bei einer Collineation der Normalcurve in sich muss natürlich auch das System der Relationen $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$ in sich übergeführt werden. Die λ_i erfahren also lineare Substitutionen, bei denen nothwendig die covariante Curve $\varDelta_5$ in sich übergeht. Dem widerspricht nicht, dass eine Collineation der $\varDelta_5$ nicht immer Folge einer Collineation der Normalcurve ist. Dagegen kann die Normalcurve eindeutige Transformationen in sich erfahren, bei denen jeder Punkt der $\varDelta_5$ fest bleibt, und also auch jede Relation (2) unverändert beibehalten wird. Bei einer solchen Collineation muss auch die Curve D_{10}, Punkt für Punkt, in sich übergehen, wenn man von solchen Geraden absieht, denen Doppelpunkte der $\varDelta_5$ entsprechen; die übrig bleibende Curve D_{10} kann folglich keine eigentliche 4-dimensionale Curve sein, sondern entweder aus einem Punkte und einer 3-dimensionalen Curve oder auch aus einer Geraden und einer ebenen Curve zusammengesetzt sein, je nachdem bei der Collineation ein Punkt und die Punkte eines Raumes oder die Punkte einer Geraden und einer Ebene fest bleiben. Als nothwendige Bedingung hiefür erhält man unmittelbar, dass jede Relation (1) $F_i = 0$ entweder in der Form

$$(a) \qquad a_i x_1^2 + f_i(x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

oder auch in der Form

$$(b) \qquad \varphi_i(x_1, x_2) + \psi_i(x_3, x_4, x_5) = 0$$

geschrieben werden kann. Im ersteren Falle hat man die Collineation:

$$(\alpha) \qquad x'_1 = -x_1, \; x'_i = x_i \quad (i = 2, 3, 4, 5)$$

mit 8 festen Punkten der Curve im Raume $x_1 = 0$; im letzteren Falle die Collineation:

$$(\beta) \qquad x'_1 = -x_1, \; x'_2 = -x_2, \; x'_i = x_i \quad (i = 3, 4, 5)$$

ohne feste Punkte der Curve. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte in den Fällen (a) und (b) bilden somit (nach der Gl. (A) Einleitung) eine Regelfläche vom Geschlechte $p' = 1$ bez. $p' = 3$. Doch können auch symmetrische Transformationen mit dem zugeordneten Geschlechte $p' = 2$ vorkommen, aber ohne jeden Punkt der Curve $\varDelta_5$ in sich selbst überzuführen. Die Discriminante der Gleichung (2) zerfällt im Falle (a) in einen linearen und einen biquadratischen

Factor und im Falle (b) in einen quadratischen und einen cubischen, so dass die Curve Δ_5 aus einer Geraden und einer C_4 bez. einem Kegelschnitte und einer C_3 besteht. Doch können auch diese Curven zerfallen, so dass man die folgenden 7 typischen Fälle erhält.

1) Δ_5 ist eine eigentliche C_5.

2) Δ_5 zerfällt in eine Gerade und eine C_4. Den Schnittpunkten der Geraden mit der C_4 entsprechenden 4 Systeme von unendlich vielen ABEL'schen Wurzelformen. Doch können hier wie im vorigen Falle noch andere solche Systeme auftreten, den etwaigen Doppelpunkten der C_4 bez. C_5 entsprechend.

3) Δ_5 zerfällt in einen Kegelschnitt und eine C_3. Den 6 Schnittpunkten dieser Curven entsprechen 6 Systeme ABEL'scher Wurzelformen.

4) Δ_5 zerfällt in 2 Gerade und eine C_3. Eine beliebige Relation $F_i = 0$ hat die Gestalt

$$(c) \qquad a_i x_1^2 + b_i x_2^2 + \psi_i(x_3, x_4, x_5) = 0 .$$

Hier hat man 2 Collineationen vom Typus (α) und eine vom Typus (β). Sieben Systeme ABEL'scher Wurzelformen treten stets auf.

5) Δ_5 zerfällt in eine Gerade und 2 Kegelschnitte.

$$(d) \qquad F_i = a_i x_1^2 + \varphi_i(x_2, x_3) + \psi_i(x_4, x_5) = 0 .$$

Eine Collineation vom Typus (α) und 2 vom Typus (β). Acht Systeme ABEL'scher Wurzelformen.

6) Δ_5 zerfällt in 3 Gerade und einen Kegelschnitt.

$$(e) \qquad F_i = a_i x_1^2 + b_i x_2^2 + c_i x_3^2 + \psi_i(x_4, x_5) = 0 .$$

Man hat hier 3 Collineationen vom Typus (α) und 4 vom Typus (β). Neun Systeme ABEL'scher Wurzelformen.

7) Δ_5 zerfällt in 5 Gerade.

$$(f) \qquad F_i = a_i x_1^2 + b_i x_2^2 + c_i x_3^2 + d_i x_4^2 + e_i x_5^2 = 0 .$$

In diesem Falle hat man 5 Collineationen vom Typus (α) und 10 vom Typus (β). Aus den 3 unabhängigen Relationen $F_i = 0$ kann man jedwedes Paar x_k^2 und x_l^2 eliminiren und erhält so 10 Relationen zwischen 3 Veränderlichen, welche eben so vielen Systemen von ABEL'schen Wurzelformen entsprechen.

Die Frage kann nun aufgeworfen werden, wie man bei gegebener Δ_5 zum Gebilde im 4-dimensionalen Raume kommen kann. Zuerst sei hervorgehoben, dass sowohl eine allgemeine C_5 als ein Gebilde vom Geschlechte $p = 5$ zwölf durch eindeutige Transformation unzerstörbare Moduln besitzen, so dass man eine endliche Zahl Lösungen zu erwarten hat. Es ergab sich

$$\Delta_5(\lambda) = \sum \pm u_{11} u_{22} u_{33} u_{44} u_{55}$$

in Determinantenform, wo die $u_{ik} = u_{ki}$ lineare Functionen der λ sind. Die eindeutige Transformation, welche die Curven Δ_5 und D_{10} verbindet, hat die Form

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = U_{i1} : U_{i2} : U_{i3} : U_{i4} : U_{i5}$$

oder

$$x_i x_k = \varrho U_{ik} ,$$

wo U_{ik} Unterdeterminante von Δ_5 nach u_{ik} ist. Aus diesen Gleichungen kann man die $\lambda_1^4, \lambda_1^3\lambda_2, \ldots$ als lineare Functionen der $x_1^2, x_1 x_2, \ldots$ herstellen. Hiernach entsprechen den Schnitten von Δ_5 mit allen Curven vierter Ordnung die Schnitte von D_{10} mit den durch die quadratischen Relationen dargestellten Mannigfaltigkeiten; *insbesondere entsprechen den Schnitten von D_{10} mit den doppelt gezählten 3-dimensionalen Räumen ein vierfach unendliches System von Berührungscurven vierter Ordnung an Δ_5.* Dieses System ergiebt sich aus der Ränderung der Determinante Δ_5. Man würde also diejenige Classe von Berührungssystemen aufzusuchen haben, durch welche Δ_5 in der Form einer symmetrischen Determinante geschrieben werden kann.[1] Die von verschiedenen Berührungssystemen herrührenden Gebilde im 4-dimensionalen Raume sind im Allgemeinen nicht collinear verwandt, denn dazu wäre erforderlich, dass auch die Systeme in solcher Verwandtschaft ständen. Auch hat man zu bemerken, dass eine Collineation der Δ_5 in sich ebenfalls das zu Grunde gelegte Berührungssystem in sich überführen muss, damit für die Normalcurve mit $p = 5$ eine entsprechende Collineation existire. Die fraglichen Berührungssysteme müssen sich adjungirt verhalten

[1] Vgl. HESSE's Untersuchungen über die Berührungskegelschnitte einer C_3 und über die Systeme *erster* Art von berührenden C_3 einer C_4, CRELLE's Journal, Bd. 36,49.

und durch die Doppelpunkte von Δ_5 gehen, was daraus ersichtlich ist, das den Doppelpunkten der Δ_5 gerade Linien von D_{10} entsprechen.

12. Eine C_7 im gewöhnlichen 3-dimensionalen Raume und eine ebene C_6 können immer, falls ihr Geschlecht $p = 5$, als Projectionen der Normalcurve ausgehen werden, denn die ∞^3 Ebenen bez. ∞^2 Geraden schneiden in den beiden erwähnten Fällen Specialschaaren aus. Es fragt sich nun, wie man, wenn eine ebene C_6 mit 5 Doppelpunkten gegeben ist, die beiden Punkte der Curve bestimmen kann, welche als successive Projectionscentren zu betrachten sind. Diese Punkte sollen zusammen mit einem beliebigen in einem Doppelpunkte vereinigten Paare eine Gruppe G_4 bilden, welche einer Specialschaar g_4^1 angehört. Dieser Bedingung genügen aber nur die Punkte, welche von einem durch die 5 Doppelpunkte gelegten Kegelschnitte noch ausgeschnitten werden.

Die von den verschiedenen Punkten der Normalcurve projicirten C_7 lassen jede durch ihre *Trisecantenregelfläche* die Besonderheiten des Systems der Specialschaaren g_4^1 erkennen. Die 3 Punkte, welche nebst dem Projectionscentrum eine Gruppe G_4 einer solchen Specialschaar bilden, müssen nämlich in gerader Linie projicirt werden. *Folglich entsprechen die Erzeugenden der Regelfläche und die Schaaren g_4^1 einander eindeutig.* Die Punktgruppen der reciproken g_4^1 werden von den Ebenen durch die Trisecante ausgeschnitten, welche der gegebenen g_4^1 zugeordnet ist, und insbesondere schneiden 2 Erzeugende einander, welche reciproken g_4^1 entsprechen, wobei ihre gemeinschaftliche Ebene durch den Bildpunkt des Projectionscentrums geht. Der Ort der Schnittpunkte zweier solchen reciproken Erzeugenden ist das projicirte Bild der Curve D_{10}. Wenn eine g_4^1 und folglich die entsprechende Trisecante zu sich selbst reciprok ist, muss die Trisecante eine doppelte Torsale sein, so dass die Torsalebene die Tangenten der 3 auf der Torsale liegenden Punkte der C_7 enthält. Die C_7 ist fünffache Curve und die D_{10} Doppelcurve der Trisecantenregelfläche. Eine Erzeugende schneidet somit 12 andere in den 3 Punkten der C_7 und eine im Punkte der D_{10}, und der Grad der Regelfläche ist folglich 15. Für das Geschlecht P eines Querschnitts erhält man nach den PLÜCKER'schen Formeln:

$$P = 11 - \delta,$$

wo δ die Zahl der oberwähnten doppelten Torsalen mit derselben Ebene bedeutet. Je nach der Beschaffenheit von Δ_5 und D_{10} hat man (den typischen Fällen der vorigen Nummer entsprechend) die folgenden 7 Fälle.

1) Δ_5 ist eine eigentliche C_5, welche höchst 6 Doppelpunkte besitzen kann. Das Geschlecht von R_{15} ist gewöhnlich 11, kann jedoch durch δ bis auf 5 erniedrigt werden.

2) $\Delta_5 = C_4 + C_1$. $R_{15} = R_{12} + K_3$. Das Geschlecht von R_{12} wechselt zwischen 7 und 4, wobei die Erniedrigung durch Doppelpunkte der C_4 bewirkt wird. K_3 ist vom Geschlechte 1, und die Spitze enthält denjenigen Punkt der C_7, welcher bei der Transformation (α) der vorigen Nummer dem Projectionscentrum entspricht. Die Erzeugenden des Kegels verbinden eben die bei dieser Transformation entsprechenden Punkte. K_3 und R_{12} schneiden einander in C_7, vierfach gezählt, und berühren einander längs den 4 Doppeltorsalen, welche den Schnittpunkten der Bestandtheile von Δ_5 entsprechen. Auch in den folgenden Fällen, in denen R_{15} zerfällt, bestehen die Schnittcurven nur aus C_7 und Doppeltorsalen.

3) $\Delta_5 = C_3 + C_2$. $R_{15} = R_9 + R_6$. R_9 hat das Geschlecht 4 oder (durch einen Doppelpunkt der C_3) 3. R_6 ist immer vom Geschlechte $P = 2$.[1]

4) $\Delta_5 = C_3 + 2C_1$. $R_{15} = R_9 + 2K_3$.

5) $\Delta_5 = 2C_2 + C_1$. $R_{15} = 2R_6 + K_3$.

6) $\Delta_5 = C_2 + 3C_1$. $R_{15} = R_6 + 3K_3$.

7) $\Delta_5 = 5C_1$. $R_{15} = 5K_3$. Die C_7 liegt hier auf $5K_3$, von denen jedes Paar einander längs der Verbindungsgeraden der Spitzen berührt.

13. Um nun die vollständige Collineationsgruppe einer gegebenen Normalcurve zu bestimmen, hat man zuerst die covariante Curve Δ_5 zu betrachten. Man reiht diese in einen der 7 Fälle der 11. Nummer ein und sucht sodann ihre Collineationsgruppe. Aus dieser Gruppe hat man diejenige Untergruppe herauszunehmen, zu welcher auch Collineationen der Normalcurve gehören. Einer gegebenen linearen Substitution in den λ_i entspricht auf Grund der Gleichung $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0$ die transponirte Substitution in den F_i. Man kann folglich von vornherein im 4-dimensionalen Raume die typischen periodischen Collineationen aufsuchen, durch welche unter

[1] Betreffend diese R_6 sehe man meine Schrift, *Klassifikation af regelytorna af 6. graden* S. 57 (Lund 1892. Diss.).

3 quadratischen Relationen, deren Schnittcurve *ohne Doppelpunkte* ist, eine lineare Transformation bewirkt wird. Wenn wir das Resultat einer solchen Untersuchung auf die λ-Ebene übertragen, so erfolgt, dass nur die Collineationen von der Periode 2 sowie die nicht perspectivischen G_3, G_4 und G_5 in Betracht zu nehmen sind. Im 4-dimensionalen Raume ergeben sich zwar auch cyclische G_6 und G_8; die zugehörigen Untergruppen G_2 lassen aber jede quadratische Relation unverändert.

Die endlichen ebenen und *einfachen* Collineationsgruppen sind (ausser den cyclischen mit Primzahlperiode) die Ikosaedergruppe, die aus der Theorie einer besonderen C_4 bekannte G_{168} und eine G_{360}.[1] Von den beiden ersteren ist es bekannt, dass sie keine invariante Form von der 5. Ordnung besitzen; dasselbe muss auch für die G_{360} gelten, weil dieselbe Ikosaedergruppen enthält. Nimmt man dann auch auf die Resultate der 10. Nummer bezüglich der Gebilde mit einer g_3^1 Rücksicht, so haben wir den folgenden Satz:

Alle innerhalb der nicht-hyperelliptischen Gebilde vom Geschlechte $p = 5$ auftretenden Gruppen lassen sich in eine Reihenfolge bloss cyclischer Gruppen zerlegen.

Besitzt nun Δ_5 eine Gruppe von der Ordnung μ, zu welcher auch Collineationen der Normalcurve gehören, so hat man für die Ordnung der Gesammtgruppe der letzteren je nach dem zugehörigen typischen Falle von Δ_5 die folgenden Zahlen: μ, 2μ, 2μ, 4μ, 4μ, 8μ, 16μ.

Hier seien endlich diejenigen Curven in ihren Normalgleichungen angeführt, deren Moduln durch die Bedingung gewisse Collineationsgruppen zuzulassen völlig bestimmt sind.

1) *Gruppe von der Ordnung 192.*

$$F_1 = x_1^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$
$$F_2 = x_2^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0,$$
$$F_3 = x_3^2 + x_4 x_5 = 0.$$

Man hat (mit der Identität) 8 Collineationen durch Zeichenänderungen von den x_i, bei denen jede F_i ungeändert wird. Sodann hat man zu bemerken, dass die Form $x_4 x_5 \cdot (x_4^2 + x_5^2) \cdot (x_4^2 - x_5^2)$ eine in ihre 3 ausgezeichnete quadratischen Factoren

[1] Diese G_{360} wurde von Hrn. VALENTINER entdeckt (Kong. Dansk. Vid. Selsk. Skrift. (6) V, 1889), scheint aber sonst unbekannt zu sein.

zerlegte Octaederform ist. Man zieht die Gruppe dieser binären Form bei geeigneten Vertauschungen und Substitutionen von x_1, x_2, x_3 heran und erhält dann durch Combination derselben mit der G_8 die vollständige G_{192}.[1] Eliminirt man x_5, ergeben sich die Gleichungen:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_4^2 = 0, \quad x_4^2(x_2^2 + x_4^2) - x_3^4 = 0.$$

Die Curve Δ_5 besteht hier aus einem Kegelschnitt und 3 Geraden, welche in Bezug auf den Kegelschnitt ein Polardreieck bilden. In den 3 folgenden Fällen besteht Δ_5 aus 5 Geraden, welche überdies in specieller Lage sich befinden.

2) *Gruppe von der Ordnung 64.*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$
$$x_1^2 + ix_2^2 - x_3^2 - ix_4^2 = 0, \qquad (i^2 = -1.)$$
$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Die G_{64} entsteht durch die Combination der Zeichenänderungen mit der cyclischen Permutation von x_1, x_2, x_3, x_4.

3) *Gruppe von der Ordnung 96.*

$$x_1^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$
$$x_2^2 + jx_4^2 + j^2x_5^2 = 0, \qquad (j^3 = 1.)$$
$$x_3^2 + j^2x_4^2 + jx_5^2 = 0.$$

Die G_{96} erhält man durch die Combination der Zeichenänderungen und der Vertauschungen von x_1, x_2 und x_3 einerseits, von x_4 und x_5 andererseits.

4) *Gruppe von der Ordnung 160.*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$
$$x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon^2 x_3^2 + \varepsilon^3 x_4^2 + \varepsilon^4 x_5^2 = 0, \qquad (\varepsilon^5 = 1.)$$
$$\varepsilon^4 x_1^2 + \varepsilon^3 x_2^2 + \varepsilon^2 x_3^2 + \varepsilon x_4^2 + x_5^2 = 0.$$

[1] Diese G_{192} gehört in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen zur Hauptcongruenzgruppe achter Stufe. Man sehe KLEIN-FRICKE, *Modulfunctionen* I, S. 338 u. f.

Hier bilden die zulässigen Vertauschungen der x_i eine diedrische G_{10}. Die Reihe $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5)$ kann nämlich sowohl cyclisch in sich selbst verschiebt werden als auch in die Reihe $(x_5\ x_4\ x_3\ x_2\ x_1)$ umgekehrt werden. Durch die Combination dieser G_{10} mit den Zeichenänderungen entsteht die G_{160}.

14. Zum Schlusse seien noch einige Andeutungen über die Gebilde vom Geschlechte $p = 6$ gestattet. Ausser dem hyperelliptischen Falle existiren noch 3 wesentlich verschiedene Arten, welche wir hier in Reihe behandeln wollen.

1) Die Curve besitzt eine Specialschaar g^2_5, d. h. kann in eine ebene C_5 transformirt werden. Bei einer eindeutigen Transformation der C_5 in sich müssen die Punktgruppen G_5 der g^2_5 ein geschlossenes invariantes System bilden. Eine solche Transformation muss folglich eine Collineation sein, und zwar nach einem Satze der vorigen Nummer aus lauter cyclischen Gruppen zusammengesetzt.

2) Die Curve besitzt eine Specialschaar g^1_3. Eine solche Curve führt man leicht eindeutig in eine C_6 mit einem dreifachen und einem Doppelpunkte über. Bei einer Gruppe von eindeutigen Transformationen der Curve in sich müssen die Punktgruppen G_3 der Specialschaar geschlossen permutirt werden, was natürlich nur durch eine von den endlichen linearen Gruppen bewirkt werden kann; doch nicht durch eine Ikosaedergruppe, weil die Zahl der G_3, welche 2 zusammenfallende Punkte enthalten, 16 ist, und keine 16 Punkte bei dieser Gruppe ein geschlossenes System bilden. Ausserdem kann die Transformationsgruppe noch durch eine cyclische Gruppe der Periode 3 zusammengesetzt sein, welche die Punkte jeder G_3 cyclisch vertauscht.

3) Im allgemeinen Falle besitzt die Curve 5 g^1_4 und kann in eine C_6 mit 4 Doppelpunkten eindeutig übergeführt werden, wobei die Punktgruppen der g^1_4 von den Geradenbüscheln durch je einen Doppelpunkt und dem Kegelschnittbüschel durch alle 4 δ ausgeschnitten werden. Bei einer eindeutigen Transformation der Curve in sich können diese g^1_4 entweder jede in sich oder in irgend einer Weise permutirt werden. Ersteres ist, wenn keine 3 Doppelpunkte in gerader Linie liegen, nicht möglich. Jede Permutation der g^1_4 kann durch Collineationen und successive quadratischen Transformationen bewirkt werden. Man erhält auch einen Fall, wo alle 120 Vertauschungen der 5 g^1_4 die Curve in sich selbst überführen:

$$2\Sigma(x^4yz + y^3z^3) - 2\Sigma x^4y^2 + \Sigma x^3y^2z - 6x^2y^2z^2 = 0\,.$$

Die Doppelpunkte liegen hier in den Coordinatenecken und im Punkte $x = y = z$.

Wir können endlich als Resultat unserer Untersuchungen die folgenden allgemeinen Sätze anführen, welche Hr. DYCK schon für die Geschlechter $p = 0, 1, 2, 3$ gegeben hat.[1]

Die einzigen einfachen und endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen einer Curve in sich innerhalb der Geschlechter $p = 0-6$ sind die cyclischen Gruppen von Primzahlordnung, die Ikosaedergruppe und eine G_{168} (bei $p = 3$). Die zusammengesetzten Gruppen innerhalb unserer Geschlechter lassen sich mit 3 Ausnahmen in eine Reihenfolge bloss cyclischer Gruppen zerlegen. Die Ausnahmen sind: die Bring'sche Curve ($p = 4$) und die soeben erwähnte Curve mit $p = 6$, deren Gruppen mit der Gruppe der 120 Vertauschungen von 5 Dingen holoedrisch isomorph sind, sowie eine hyperelliptische Curve[2] *vom Geschlechte $p = 5$, deren Gruppe auch von der Ordnung 120 ist; innerhalb dieser Gruppen ist nämlich eine Ikosaedergruppe ausgezeichnet.*

---

[1] *Über reguläre Riemann'sche Flächen*, Math. Ann., Bd. 17, S. 474.

[2] Die Gleichung dieser Curve ist $y^2 = x(x^{10} + 11x^5 - 1)$. Dieselbe liefert in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen die zu einer ausgezeichneten Congruenzuntergruppe 10. Stufe gehörigen Moduln. Man sehe KLEIN-FRICKE, *Modulfunctionen* I, S. 651.