

# Diskrete Mathematik

Simon Krenger

October 15, 2011

# Chapter 1

## Logik (Boolesche Algebra)

Nach George Bool, 1815 bis 1864, Cork (Irland)

### 1.1 Aussagen

Wir betrachten Aussagen (Sätze), die entweder wahr (1) oder falsch (0) sind.

Heute ist Freitag  $\rightarrow$  wahr

Morgen schneit es in Bern  $\rightarrow$  falsch

Schauen Sie einmal!  $\rightarrow$  keine Aussage

Aussagen bezeichnen wir mit  $a, b, c, d, \dots$

**Definition 1.** Ist  $a$  eine Aussage, somit heisst  $\neg a$  die Negation von  $a$

**Beispiel 1.**  $a$ : *Xaver isst gerne Kuchen*  $\neg a$ : *Xaver isst nicht gerne Kuchen*

### 1.2 Konjunktion

Wir verbinden zwei Aussagen  $a, b$  mit Hilfe von “und” zu einer einzigen Aussage

$$a \wedge b \tag{1.1}$$

**Beispiel 2.** *Morgen ist Sonntag und ich werde ausschlafen*

Die Wahrheitstabelle von  $a \wedge b$  sind abhängig von denjenigen von  $a$  als auch von  $b$ . Dies stellen wir in einer Wahrheitstabelle dar. Wir finden sofort die Regeln

$$a \wedge \neg a = \text{falsch} \tag{1.2}$$

**Definition 2.** Eine Aussage, die immer falsch ist, heisst Kontradiktion.

$$a \wedge 1 = a \quad (1.3)$$

$$a \wedge 0 = 0 \quad (1.4)$$

Weiter finden wir Gesetze

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

$$a \wedge b = b \wedge a \quad (1.5)$$

**Beweis 1.** Wir beweisen mit einer Wahrheitstabelle

| $a$ | $b$ | $a \wedge b$ | $b \wedge a$ |
|-----|-----|--------------|--------------|
| 0   | 0   | 0            | 0            |
| 0   | 1   | 0            | 0            |
| 1   | 0   | 0            | 0            |
| 1   | 1   | 1            | 1            |

Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz)

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \quad (1.6)$$

**Beweis 2.** Wir beweisen mit einer Wahrheitstabelle

| $a$ | $b$ | $c$ | $a \wedge (b \wedge c)$ | $(a \wedge b) \wedge c$ |
|-----|-----|-----|-------------------------|-------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 0                       | 0                       |
| 0   | 0   | 1   | 0                       | 0                       |
| 0   | 1   | 0   | 0                       | 0                       |
| 0   | 1   | 1   | 0                       | 0                       |
| 1   | 0   | 0   | 0                       | 0                       |
| 1   | 0   | 1   | 0                       | 0                       |
| 1   | 1   | 0   | 0                       | 0                       |
| 1   | 1   | 1   | 1                       | 1                       |

Idempotenzgesetz

$$a \wedge a = a \quad (1.7)$$

## 1.3 Disjunktion

Zwei Aussagen  $a$ ,  $b$  werden mit der Disjunktion "oder" zu einer neuen Aussage verbunden. Dafür schreiben wir:

$$a \vee b \quad (1.8)$$

und definieren

| $a$ | $b$ | $a \vee b$ |
|-----|-----|------------|
| 0   | 0   | 0          |
| 0   | 1   | 1          |
| 1   | 0   | 1          |
| 1   | 1   | 1          |

Nicht verwechseln mit "entweder oder" (XOR)! Wir finden die Regeln

$$a \vee 1 = 1 \quad (1.9)$$

$$a \vee 0 = a \quad (1.10)$$

$$a \vee \neg a = 1 \quad (1.11)$$

**Definition 3.** Eine Aussage, die stets wahr ist, heisst Tautologie.

Es gelten die Gesetze

Kommutativgesetz

$$a \vee b = b \vee a \quad (1.12)$$

Assoziativgesetz

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \quad (1.13)$$

Idempotenzgesetz

$$a \vee a = a \quad (1.14)$$

In der Algebra in  $\mathbb{R}$  gilt

$$a(b + c) = ab + ac \quad (1.15)$$

was in der Logik zu

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad (1.16)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (1.17)$$

dem Distributivgesetz (Verteilungsgesetz) führt. Der folgende Beweis zeigt, dass die Gleichung 1.16 gilt.

**Beweis 3.** Wir beweisen mit einer Wahrheitstabelle

| $a$ | $b$ | $c$ | $b \vee c$ | $a \wedge (b \vee c)$ | $a \wedge b$ | $a \wedge c$ | $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ |
|-----|-----|-----|------------|-----------------------|--------------|--------------|----------------------------------|
| 0   | 0   | 0   | 0          | 0                     | 0            | 0            | 0                                |
| 0   | 0   | 1   | 1          | 0                     | 0            | 0            | 0                                |
| 0   | 1   | 0   | 1          | 0                     | 0            | 0            | 0                                |
| 0   | 1   | 1   | 1          | 0                     | 0            | 0            | 0                                |
| 1   | 0   | 0   | 0          | 0                     | 0            | 0            | 0                                |
| 1   | 0   | 1   | 1          | 1                     | 0            | 1            | 1                                |
| 1   | 1   | 0   | 1          | 1                     | 1            | 0            | 1                                |
| 1   | 1   | 1   | 1          | 1                     | 1            | 1            | 1                                |

Das zweite Distributivgesetz kann analog dazu bewiesen werden.

In der Logik gibt es zu jedem Gesetz ein duales Gesetz. Dies entsteht durch wechseln von  $\vee$  zu  $\wedge$  und umgekehrt. Weiter finden wir

Absorbtionsgesetz

$$a \wedge (a \vee b) = a \quad (1.18)$$

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad (1.19)$$

**Beweis 4.** Wir beweisen mit einer Wahrheitstabelle

| $a$ | $b$ | $a \vee b$ | $a \wedge (a \vee b)$ |
|-----|-----|------------|-----------------------|
| 0   | 0   | 0          | 0                     |
| 0   | 1   | 1          | 0                     |
| 1   | 0   | 1          | 1                     |
| 1   | 1   | 1          | 1                     |

Gesetz von de Morgan

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \quad (1.20)$$

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b \quad (1.21)$$

Wir verwenden die Gesetze, um die Aussagen zu vereinfachen.

**Beispiel 3.** Folgende Beispiele zeigen, wie sich Aussagen mittels den oben genannten Gesetzen vereinfachen lassen.

1.  $[a \wedge (b \vee a)] \vee \neg a$   
 $= a \vee \neg a$   
 $= 1$
2.  $[\neg(a \wedge b) \vee \neg b] \wedge a$   
 $= (\neg a \vee \neg b \vee \neg b) \wedge a$   
 $= (\neg a \vee \neg b) \wedge a$   
 $= (\neg a \wedge a) \vee (\neg b \wedge a)$   
 $= 0 \vee (\neg b \wedge a)$   
 $= \neg b \wedge a$
3.  $(a \wedge b) \vee \neg b$   
 $= (a \vee \neg b) \wedge (b \vee \neg b)$   
 $= (a \vee \neg b) \wedge 1$   
 $= (a \vee \neg b)$
4.  $b \wedge [(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b)]$   
 $= b \wedge [b \wedge (a \vee \neg a)]$   
 $= b \wedge (b \wedge 1)$   
 $= b \wedge b = b$

## 1.4 Implikation

Mathematische Lehrsätze haben die Form "Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist mit Hypotenuse  $c$  und Katheten  $a, b$ , dann ist  $c^2 = a^2 + b^2$ ". Sie bestehen also aus Voraussetzung(en):

Das Dreieck ist rechtwinklig

und Behauptung

$$\text{Es ist } a^2 + b^2 = c^2$$

und einem Beweis

*Beweis.* Gemäss "Indischer Beweis":

$$\begin{aligned} c^2 &= 4 \frac{ab}{2} + (a-b)^2 \\ c^2 &= 2ab + a^2 - 2ab + b^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{1.22}$$

□

Im obigen Beispiel haben wir einen direkten Beweis geführt. Von der Voraussetzung durch Rechnung zur Behauptung.

Wenn wir zwei Aussagen a, b mit "wenn a, dann b" oder "wenn a so b" oder "aus a folgt b (a impliziert b)" verknüpfen, so schreiben wir dafür

$$a \rightarrow b \tag{1.23}$$

und definieren

| a | b | $a \rightarrow b$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1                 |
| 0 | 1 | 1                 |
| 1 | 0 | 0                 |
| 1 | 1 | 1                 |

Wir finden sofort, das "aus a folgt b"

$$a \rightarrow b = \neg a \vee b \tag{1.24}$$

**Beispiel 4.** Vereinfache

1.  $(a \rightarrow b) \rightarrow b$   
 $= (\neg a \vee b) \rightarrow b = \neg(\neg a \vee b) \vee b$   
 $= (a \wedge \neg b) \vee b = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee b)$   
 $= (a \vee b) \wedge 1 = (a \vee b)$
2.  $b \rightarrow (a \rightarrow b)$   
 $= b \rightarrow (\neg a \vee b) = \neg b \vee (\neg a \vee b)$   
 $= \neg b \vee b \vee \neg a = 1 \vee \neg a = 1$
3.  $[(a \vee c) \wedge (c \rightarrow a)] \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c) \vee [\neg a \wedge (b \rightarrow c)]$   
 $= [(a \vee c) \wedge (\neg c \vee a)] \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c) \vee [\neg a \wedge (\neg b \vee c)]$   
 $= [(a \vee c) \wedge (\neg c \vee a)] \vee [a \wedge (\neg b \vee c)] \vee [\neg a \wedge (\neg b \vee c)]$   
 $= [a \vee (c \wedge \neg c)] \vee [(\neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg a)]$   
 $= [a \vee 0] \vee [(\neg b \vee c) \wedge 1]$   
 $= a \vee (\neg b \vee c) = a \vee \neg b \vee c$   
 $(= a \vee (b \rightarrow c))$

Ein mathematischer Satz besteht aus Voraussetzung  $a$ , Behauptung  $b$  und Beweis. Der Satz wird als  $a \rightarrow b$  formuliert.

Der direkte Beweis ist eine Folge von Implikationen

$$a \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow b \quad (1.25)$$

**Beispiel 5.** Vereinfache

1. *Voraussetzung:* Ein Dreieck  $ABC$  mit Innenwinkel  $\alpha, \beta, \gamma$

*Behauptung:* Die Innenwinkelsumme ist  $180^\circ$ , d.h.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (1.26)$$

*Beweis.* Wir beweisen mit einer Zeichnung:



Wähle  $p \parallel c$  durch C. Dann ist  $\epsilon + \delta + \gamma = 180^\circ$ . Es ist  $\alpha_1 = \alpha_2$ : Stufenwinkel an Parallelen und  $\alpha_1 = \alpha_3$ : Wechselwinkel an Parallelen, eine weitere Voraussetzung.

Also ist  $\alpha = \epsilon$  und  $\beta = \delta$  und somit

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad (1.27)$$

□

2. *Voraussetzung:* Es ist mit  $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$

$$a^n := a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (n Faktoren)}$$

die Potenz definiert. *Behauptung:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1.28)$$

*Beweis.* Wir zeigen auf, dass  $m$  Faktoren mit  $n$  Faktoren multipliziert werden. Durch die grundlegenden Rechengesetze können wir die Klammern wegfallen lassen

$$\begin{aligned} & a^m \cdot a^n \\ &= (a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a)(a \cdot a \cdot \dots \cdot a) \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (m+n Faktoren)} \end{aligned}$$

$$= a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad (1.29)$$

□

3. *Voraussetzung:*  $x, y \in \mathbb{R}$

*Behauptung:*

$$x^y = y^x \rightarrow x = y \quad (1.30)$$

*Die Behauptung ist falsch. Wollen wir zeigen, dass ein Satz falsch ist, so genügt ein einziges Beispiel, dass wir Gegenbeispiel nennen, um die Behauptung zu widerlegen.*

*Gegenbeispiel: Für 3 ist das Gegenbeispiel  $x = 2, y = 4$ , denn  $2^4 = 4^2 = 16$ , aber  $x \neq y$ .*

### 1.4.1 Umkehrung, Kontraposition

**Definition 4.** *Hat eine Aussage die Form*

$$a \rightarrow b \quad (1.31)$$

*so heisst*

$$b \rightarrow a \quad (1.32)$$

*die Umkehrung.*

Ist eine Aussage, ein Satz wahr, so muss die Umkehrung nicht wahr sein, wie zum Beispiel:

”Wenn ich Geburtstag habe, so esse ich einen Kuchen”

”Wenn ein Mensch glücklich ist, so trinkt er Sinalco”

Wir finden aber, dass

$$\begin{aligned} \neg b \rightarrow \neg a &= \neg(\neg b) \vee \neg a \\ &= b \vee \neg a = \neg a \vee b = a \rightarrow b \end{aligned} \quad (1.33)$$

**Definition 5.** *Wir nennen*

$$\neg b \rightarrow \neg a \quad (1.34)$$

*die Kontraposition von*

$$a \rightarrow b \quad (1.35)$$

Wir haben gezeigt, dass  $\neg b \rightarrow \neg a = a \rightarrow b$  ist, was bedeutet, dass bei einem wahren Satz auch dessen Kontraposition wahr ist.

Satz: ”Wenn es heute Freitag ist, so gehe ich ein Bier trinken.”

Kontraposition: ”Wenn ich nicht ein Bier trinken gehe, so ist heute Freitag”



Manchmal ist der direkte Beweis eines Satzes zu schwierig oder nicht möglich, dann beweisen wir die Kontraposition.

Satz: Ist  $n \in \mathbb{N}$  und  $n^2$  eine gerade Zahl, so ist  $n$  auch eine gerade Zahl.

**Beweis 5.** *Der direkte Beweis*

$$\begin{aligned} n^2 &= 2p \wedge p \in \mathbb{N} \\ \rightarrow n &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{p} \end{aligned} \quad (1.36)$$

*gelingt nicht. Grund dafür ist, dass eine irrationale Zahl ( $\sqrt{2}$ ) per Definition ein nichtperiodischer, nichtendlicher Dezimalbruch ist.*

Also beweisen wir die Kontraposition:

Kontraposition: "Ist  $n \in \mathbb{N}$  und  $n$  ungerade, so ist auch  $n^2$  ungerade"

**Beweis 6.**

$$\begin{aligned} n &= 2p + 1 \quad \wedge p \in \mathbb{N}_0 \\ \rightarrow n^2 &= (2p + 1)^2 \\ n^2 &= 4p^2 + 4p + 1 \\ n^2 &= 2(2p^2 + 2p) + 1 \end{aligned} \quad (1.37)$$

Also ist  $n^2$  eine ungerade Zahl. □

## 1.5 Aequivalenz

Wenn zwei Aussagen gleichwertig (aequivalent) sind, wenn also

$$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \quad (1.38)$$

so schreiben wir dafür

$$a \iff b \quad (1.39)$$

und finden die Wahrheitswerte

| a | b | $a \iff b$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 1          |
| 0 | 1 | 0          |
| 1 | 0 | 0          |
| 1 | 1 | 1          |

Wir finden die Umformung

$$\begin{aligned} a \iff b &= (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \\ &= (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a) \\ &= (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \\ &= (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Ausserdem ist

$$a \iff b = \neg(a \vee b) \quad (1.41)$$

also

$$\begin{aligned} a \vee b &= [(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)] \\ &= \neg(a \wedge b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b) \\ &= (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) \end{aligned} \quad (1.42)$$

**Beispiel 6.** Vereinfache

1.  $(\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b)$   
 $= a \vee b$  nach obiger Herleitung
2.  $(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$   
 $= a \wedge [(\neg b \wedge \neg c) \vee (b \wedge c)]$   
 $= a \wedge (b \iff c)$

Wenn wir in der Mathematik einen Satz finden, dessen Umkehrung auch wahr ist, so wählen wir die Formulierung mit

”dann und nur dann” oder ”genau dann”

im Englischen

”if and only if” oder ”iff”

**Beispiel 7.** Folgende Beispiele zeigen solche Sätze

1. Zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  sind genau dann ähnlich, wenn zwei Winkel gleich sind. *TODO*
2. Sind  $a, b$  reelle Zahlen, so ist das Produkt dann und nur dann 0, wenn  $a$  oder  $b$  Null ist.

Voraussetzung:  $a, b \in \mathbb{R}$

Satz:  $(a \cdot b = 0) \iff (a = 0 \vee b = 0)$

Anwendung:

$$\begin{aligned} a^2 - 7x + 12 &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \\ (x - 3)(x - 4) &= 0 \\ \rightarrow x - 3 = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0 \\ x_1 &= 3 \quad x_2 = 4 \end{aligned} \quad (1.43)$$

Wie zeigen wir, dass zwei Terme gleich sind?

Behauptung:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.44)$$

Wir wählen die linke Seite und formen diese so lange um, bis die rechte Seite entsteht (oder umgekehrt).

Es ist falsch

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (1.45)$$

so lange umzuformen, bis eine Identität wie z.B.  $1 = 1$  entsteht!

**Beispiel 8.** *Richtig ist*

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin \alpha + \alpha \\ \text{denn } \sin \alpha + \beta &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \alpha + \alpha &= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.46)$$

□

Manchmal gelingt es nicht, die linke Seite in die rechte Seite umzuformen. Dann verwenden wir die Eigenschaft

”Wenn  $l = x$  und  $r = x$ , so ist  $l = r$ ”

Wir formen also die linke Seite zuerst einmal um und dann unabhängig davon die rechte Seite und hoffen, dass wir beide Male das gleiche Resultat ( $x$ ) erhalten.

**Beispiel 9.** *Wir versuchen, dieses Konzept anzuwenden:*

*Voraussetzung:*

$$\tan \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} \quad \text{und} \quad \cot \delta = \frac{1}{\tan \delta} \quad (1.47)$$

*Behauptung:*

$$\tan \delta + \cot \delta = \frac{2}{\sin 2\delta} \quad (1.48)$$

*Beweis:*

1.

$$\begin{aligned} \tan \delta + \frac{1}{\tan \delta} &= \frac{\sin \delta}{\cos \delta} + \frac{\cos \delta}{\sin \delta} \\ &= \frac{\sin^2 \delta + \cos^2 \delta}{\sin \delta \cdot \cos \delta} = \frac{1}{\sin \delta \cdot \cos \delta} \end{aligned} \quad (1.49)$$

2.

$$\frac{2}{\sin 2\delta} = \frac{2}{2 \sin \delta \cdot \cos \delta} = \frac{1}{\sin \delta \cdot \cos \delta} \quad (1.50)$$

□

Genau gleich behandeln wir Behauptungen der Logik wenn es um die Äquivalenz zweier Aussagen geht.

**Beispiel 10.** 1. *Behauptung:*

$$[\neg(a \vee b) \wedge a] \iff [\neg(a \vee b) \wedge b] \quad (1.51)$$

*Beweis:*

(a)

$$\begin{aligned} \neg(a \vee b) \wedge a &= \neg a \wedge \neg b \wedge a \\ &= \neg a \wedge a \wedge \neg b = 0 \wedge \neg b = 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

(b)

$$\begin{aligned} \neg(a \vee b) \wedge b &= \neg a \wedge \neg b \wedge b \\ &= \neg a \wedge b \wedge \neg b = \neg a \wedge b = 0 \end{aligned} \quad (1.53)$$

Beide Terme sind äquivalent □

2. *Behauptung:*

$$a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \quad (1.54)$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \neg a \vee (b \wedge c) &= (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \\ &= (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \end{aligned} \quad (1.55)$$

## 1.6 Logische Schlüsse

Wir gehen aus von verschiedenen Prämissen wie

$$\begin{array}{ll} \text{Prämisse 1} & p_1 = a \wedge b \\ \text{Prämisse 2} & p_2 = \neg a \\ \text{Prämisse 3} & p_3 = a \wedge \neg b \end{array} \quad (1.56)$$

und ziehen daraus eine Konklusion  $k : a \vee b$ . Nun fragen wir uns, ob die Konklusion bei diesen Prämissen richtig ist. Ist dies der Fall, so sprechen wir von einem logischen Schluss (wenn also das die richtige Konklusion ist).

Es muss also

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow k = 1 \quad (1.57)$$

eine Tautologie sein. Im Beispiel ist also

$$[(a \wedge b) \wedge \neg a \wedge (a \wedge \neg b)] \rightarrow (a \vee b) \quad (1.58)$$

so lange umgeformt werden, bis erkenntlich ist, ob eine Tautologie vorliegt oder nicht.

$$\begin{aligned}
& [(a \wedge b) \wedge \neg a \wedge (a \wedge \neg b)] \rightarrow (a \vee b) \\
& = (a \wedge b \wedge \neg a \wedge a \wedge \neg b) \rightarrow (a \vee b) \\
& = 0 \rightarrow (a \vee b) \\
& = \neg 0 \vee (a \vee b) = 1 \vee (a \vee b) = 1
\end{aligned} \tag{1.59}$$

und damit liegt ein logischer Schluss vor.

In der Logik schreiben wir Prämissen und Konklusion untereinander wie zum Beispiel

$$\frac{a \rightarrow b \quad a \wedge b \rightarrow c \quad c}{a} \tag{1.60}$$

**Beispiel 11.** *Handelt es sich hierbei um einen logischen Schluss?*

$$\begin{aligned}
& [(a \rightarrow b) \wedge \{(a \wedge b) \rightarrow c\} \wedge c] \rightarrow a \\
& = [(\neg a \vee b) \wedge \{\neg(a \wedge b) \vee c\} \wedge c] \rightarrow a \\
& = \neg[(\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge c] \vee a \\
& = \neg[(\neg a \vee b) \wedge c] \vee a \\
& = \neg[(\neg a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \vee a \\
& = [\neg(\neg a \wedge c) \wedge \neg(b \wedge c)] \vee a \\
& = [(a \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg c)] \vee a \\
& = (a \vee \neg c \vee a) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \\
& = (\neg c \vee a) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee a) \\
& = (\neg c \vee a) \wedge \neg b
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Also kein logischer Schluss □

Verschiedene bekannte logische Schlüsse besitzen einen Namen, wie zum Beispiel die Folgenden:

1. modus ponens (Abtrennungsregel)

$$\frac{a \rightarrow b \quad a}{b} \tag{1.62}$$

ist ein logischer Schluss, denn

$$\begin{aligned}
& [(a \rightarrow b) \wedge a] \rightarrow b \\
& = [(\neg a \vee b) \wedge a] \rightarrow b \\
& = (a \wedge b) \rightarrow b \\
& = \neg(a \wedge b) \vee b \\
& = \neg a \vee \neg b \vee b = \neg a \vee 1 = 1
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Es ist die Art und Weise, wie wir einen mathematischen Satz  $a \rightarrow b$  anwenden.

**Beispiel 12.** *Beispielsweise Kosinussatz:*

$a \rightarrow b$ : In einem Dreieck  $ABC$  gilt  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$

$a$ :  $a = 10, b = 7, \gamma = 70$

dann tritt  $b$  ein, d.h.  $c$  kann nun berechnet werden.

2. modus tollens (Aufhebende Schlussweise)

$$\frac{a \rightarrow b \quad \neg b}{\neg a} \quad (1.64)$$

ist ein logischer Schluss, denn

$$\begin{aligned} & [(a \rightarrow b) \wedge \neg b] \rightarrow \neg a \\ = & [(\neg a \vee b) \wedge \neg b] \rightarrow \neg a \\ = & [(b \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge \neg b)] \rightarrow \neg a \\ = & (\neg a \wedge \neg b) \rightarrow \neg a \\ = & \neg(\neg a \wedge \neg b) \vee \neg a \\ = & a \vee b \vee \neg a = 1 \vee b = 1 \end{aligned} \quad (1.65)$$

3. reductio ad absurdum (zurückführen auf einen Widerspruch)

$$\frac{a \rightarrow (b \wedge \neg b)}{\neg a} \quad (1.66)$$

ist ein logischer Schluss, denn

$$\begin{aligned} & [a \rightarrow (b \wedge \neg b)] \rightarrow \neg a \\ = & [a \rightarrow 0] \rightarrow \neg a \\ = & [\neg a \vee 0] \rightarrow \neg a \\ = & \neg a \rightarrow \neg a = a \vee \neg a = 1 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Dieser logische Schluss führt uns zum Beweis mit Gegenannahme.

Wollen wir beweisen, dass ein Satz  $s$  wahr ist und gelingt uns dies nicht mit einem direkten Beweis oder mit einem Beweis mit Kontraposition, so wählen wir die Gegenannahme:

$\neg s$  ist wahr

und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt wie  $\neg b \wedge b$  oder  $1 = 2$  oder ähnlich.

Dann sagt uns die "reductio ad absurdum", dass meine Gegenannahme falsch ist und damit die Aussage  $s$  wahr ist.

**Beispiel 13.** 1. Satz: "Es gibt unendlich viele Primzahlen"  
Beweis mit Gegenannahme (Euklid, ca. 300 v.Chr., Alexandria):

*"Es gibt nur endlich viele Primzahlen"*

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_{n-1} < p_n \quad (1.68)$$

wobei  $p_n$  die Grösste sei.

Nun bilden wir eine neue Zahl

$$z = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1 \quad (1.69)$$

die sicher keine der Zahlen  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  als Primfaktoren besitzt.

Nun ist  $z$  entweder

(a) eine Primzahl, dann ist dies ein Widerspruch

(b) keine Primzahl und damit in Primfaktoren zerlegbar. Es muss also neben  $p_1, p_2, \dots, p_n$  einen weiteren Primfaktor geben, dies ist ein Widerspruch

zur Gegenannahme.

Also ist die Gegenannahme falsch und damit die ursprüngliche Behauptung wahr.  $\square$

2. Behauptung:  $\sqrt{2}$  ist irrational

Beweis mit Gegenannahme:

$\sqrt{2}$  ist rational

also ist  $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \wedge p, q \in \mathbb{N}$  und vollständig gekürzt. Somit

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ p^2 &= 2q^2 \end{aligned} \quad (1.70)$$

Also ist  $p^2$  eine gerade Zahl und damit auch  $p$  (Beweis siehe 1.37). Somit ist  $p = 2x \wedge p \in \mathbb{N}$ , was eingesetzt in 1.70 zu

$$(2x)^2 = 2q^2 \quad (1.71)$$

führt. Weiter ist

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 2q^2 \\ 2x^2 &= q^2 \end{aligned} \quad (1.72)$$

Also ist  $q^2$  gerade und damit auch  $q$ . Somit ist

$$q = 2y \wedge y \in \mathbb{N} \quad (1.73)$$

Wir haben also gefunden

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2x}{2y} \quad (1.74)$$

und damit erhalten wir einen Widerspruch zu "vollständig gekürzt". Somit ist die Gegenannahme falsch und damit die Behauptung richtig.

Einen Beweis mit Gegenannahme nennen wir auch einen indirekten Beweis. Dieses Beweisverfahren können wir auch für logische Schlüsse anwenden.

Ist

$$\frac{a \wedge \neg b \quad a \rightarrow b}{a \vee b} \quad (1.75)$$

ein logischer Schluss?

Gegenannahme: Es ist liegt kein logischer Schluss vor und damit ist

$$[(a \wedge \neg b) \wedge (a \rightarrow b)] \rightarrow (a \vee b) = 0 \quad (1.76)$$

Nun zeigen wir, dass die Gegenannahme zu einem Widerspruch führt. Wir haben die Aussage

$$x \rightarrow y = 0$$

Also muss  $x = 1$  und  $y = 0$  sein.

Es ist  $x = p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n$  (Alle Prämissen und damit muss auch

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$$

sein. Um den Widerspruch zu sehen, machen wir eine Tabelle:

|    | $a \wedge \neg b$                  | $a \rightarrow b$ | $\rightarrow$ | $a \vee b$     |
|----|------------------------------------|-------------------|---------------|----------------|
| 1) | <u>1</u>                           | 1                 |               | 0              |
| 2) |                                    |                   |               | $a = 0, b = 0$ |
| 3) | <u><math>0 \wedge 1 = 0</math></u> |                   |               |                |

(1.77)

Bei den unterstrichenen Werten haben wir einen Widerspruch hergeführt. Die Gegenannahme ist falsch, also liegt ein logischer Schluss vor.

**Beispiel 14.** 1. Ist

$$\frac{a \wedge \neg d \quad \neg a \vee c \quad (b \wedge \neg c) \rightarrow a}{a \vee c \vee d} \quad (1.78)$$

ein logischer Schluss?

Gegenannahme:

$$\{(a \wedge \neg d) \wedge (\neg a \vee c) \wedge [(b \wedge \neg c) \rightarrow a]\} \rightarrow (b \vee c \vee d) = 0 \quad (1.79)$$

also

|    | $a \wedge \neg d$ | $\neg a \vee c$                  | $(b \wedge \neg c) \rightarrow a$ | $\rightarrow$ | $b \vee c \vee d$     |
|----|-------------------|----------------------------------|-----------------------------------|---------------|-----------------------|
| 1) | 1                 | <u>1</u>                         | 1                                 |               | 0                     |
| 2) |                   |                                  |                                   |               | $b = 0, c = 0, d = 0$ |
| 3) | $a = 1$           |                                  |                                   |               |                       |
| 4) |                   | <u><math>0 \vee 0 = 0</math></u> |                                   |               |                       |

(1.80)

Bei den unterstrichenen Werten haben wir einen Widerspruch hergeführt. Die Gegenannahme ist falsch, also liegt ein logischer Schluss vor.



2. Wir untersuchen, ob

$$\frac{a \rightarrow \neg b \quad \neg c \rightarrow d \quad c \rightarrow a \quad e \rightarrow b}{b \rightarrow (d \vee c)} \quad (1.81)$$

ein logischer Schluss ist. Gegenannahme:

$$[(a \rightarrow \neg b) \wedge (\neg c \rightarrow d) \wedge (c \rightarrow a) \wedge (e \rightarrow b)] \rightarrow [b \rightarrow (d \vee e)] = 0 \quad (1.82)$$

also

|    | $a \rightarrow \neg b$ | $\neg c \rightarrow d$                                  | $c \rightarrow a$ | $e \rightarrow b$ | $\rightarrow$ | $b \rightarrow (d \vee e)$                                   |
|----|------------------------|---|-------------------|-------------------|---------------|--|
| 1) | 1                      | <u>1</u>  | 1                 | 1                 |               | 0  |
| 2) |                        |   |                   |                   |               | 1 $\rightarrow$ 0,<br>b = 1,<br>d $\vee$ e = 0,<br>d = e = 0 |
| 3) | a = 0                  |   | c = 0             |                   |               |  |
| 4) |                        | <u>1 <math>\rightarrow</math> 0 <math>\neq</math> 1</u> |                   |                   |               |  |

Also liegt ein logischer Schluss vor.

## 1.7 Prädikatenlogik

Einige Aussagen wie

- Informatiker(innen) besitzen einen Laptop
- Katzen schnurren
- Hunde bellen
- $a \cdot b = b \cdot a$

verlangen eine Präzisierung wie

- Nicht alle Informatiker(innen) besitzen einen Laptop
- Einige Katzen schnurren
- Alle Hunde bellen
- Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  ist  $a \cdot b = b \cdot a$

Wir brauchen also ein Prädikat (Aussage) über Größen aus einer bestimmten Menge und einen Quantor. Wir nennen  $\forall$  den Allquantor. Damit bedeutet

$$x \in M : \forall x (P(x))$$

(Für alle  $x$  gilt  $P(x)$ )

dass alle Elemente der Menge  $M$  das Prädikat  $P$  besitzen.

**Beispiel 15.** *Prädikatenlogik*

$$\begin{aligned} M &= \{x \mid x \text{ ist ein Hund}\} \\ B(x) &: x \text{ bellt} \end{aligned}$$

und es ist  $x \in M : \forall x(B(x))$

Wählen wir

$$\begin{aligned} M &= \{s \mid s \text{ ist Student(in)}\} \\ q(s) &: s \text{ ist in der Klasse I1q} \end{aligned}$$

so können wir formulieren

$$s \in M : \forall s(q(s)) \quad (1.84)$$

was natürlich falsch ist. Korrekt ist

$$\neg \forall s(q(s)) \quad \text{oder auch} \quad \neg s(q(s)) \quad (1.85)$$

geschrieben. Dieses "nicht alle" ist gleichbedeutend mit

"Es gibt (mindestens) ein(e)"

was wir mit dem Existenzquantor  $\exists$  so schreiben:

$$\exists s(\neg q(s)) \quad (1.86)$$

Wir haben also

$$\neg \forall x(P(x)) = \exists x(\neg P(x)) \quad (1.87)$$

Betrachten wir

$$\begin{aligned} K &= \{k \mid k \text{ Ist eine Katze}\} \\ s(k) &: k \text{ schnurrt} \end{aligned}$$

und

$$k \in K : \exists k(s(k)) \quad (1.88)$$

was "es gibt mindestens eine Katze, die schnurrt" bedeutet. Verneinen wir die Aussage

$$\neg \exists k(s(k)) \quad \text{oder} \quad \neg k(s(k)) \quad (1.89)$$

so bedeutet dies: "Es gibt keine Katze, die schnurrt.", was gleichbedeutend ist mit "Alle Katzen schnurren nicht", also

$$\neg \exists k(s(k)) = \forall k(\neg s(k)) \quad (1.90)$$

Auch in der Mathematik werden die Quantoren verwendet wie zum Beispiel

1.

$$a, b \in \mathbb{R} : \forall a \forall b(ab = ba) \quad (1.91)$$

oder auch

$$a, b \in \mathbb{R} : \forall a, b(ab = ba) \quad (1.92)$$

2.

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R} : \forall a \exists x(ax = 1) \quad (1.93)$$

Wir nennen  $x = a^{-1}$  das zu  $a$  inverse Element.

### 1.7.1 Zwei Prädikate

Oft ist es einfacher, wenn eine Aussage mit Hilfe von zwei Prädikaten formuliert wird. Für

”Alle Informatik-Studierenden besitzen ein iPhone”

wählen wir

$s = \{s \mid s \text{ ist Student(in)}\}$   
 $i(s) : s \text{ studiert Informatik}$   
 $p(s) : s \text{ besitzt ein iPhone}$

und schreiben

$$s \in S : \forall s(i(s) \rightarrow p(s)) \quad (1.94)$$

ist die Aussage falsch, weil nicht alle Informatik-Studierenden ein iPhone besitzen, so schreiben wir

$$\neg \forall s(i(s) \rightarrow p(s)) \quad (1.95)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\exists s(\neg[i(s) \rightarrow p(s)]) \quad (1.96)$$

Dies kann mit Hilfe der Gesetze der Logik umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} & \exists s(\neg[\neg i(s) \vee p(s)]) \\ &= \exists s(i(s) \wedge \neg p(s)) \end{aligned} \quad (1.97)$$

Wir sehen also, dass der Existenzquantor eine Verbindung der Prädikate mit ”und” verlangt. Wollen wir ”Grosskatzen jagen und fressen Fleisch” formulieren, so wählen wir

$G = \{g \mid g \text{ ist eine Grosskatze}\}$   
 $j(g) : g \text{ jagt}$   
 $f(g) : g \text{ frisst Fleisch}$

und erhalten

$$g \in G : \exists g(j(g) \wedge f(g)) \quad (1.98)$$

weil wir nicht genau wissen, ob es vegetarische Grosskatzen gibt. Negation ergibt

$$\begin{aligned} \neg \exists g(j(g) \wedge f(g)) &= \forall g(\neg[j(g) \wedge f(g)]) \\ &= \forall g(\neg j(g) \vee \neg f(g)) \\ &= \forall g(j(g) \rightarrow [\neg f(g)]) \end{aligned} \quad (1.99)$$

Wir beachten also, dass

1.  $\forall$  verlangt Implikation ( $\rightarrow$ )

2.  $\exists$  verlangt Konjunktion ( $\wedge$ )

Bei

”Es gibt Leute, die beim Torten-Essen gerne einen Kaffee dazu trinken”

schreiben wir

$M = \{m \mid m \text{ ist ein Mensch} \}$

$T(m) : m$  isst ein Stück Torte

$K(m) : m$  trinkt Kaffee

$$m \in M : \exists m(T(m) \wedge K(m)) \quad (1.100)$$

und die Negation

$$\begin{aligned} & \neg \exists m(T(m) \wedge K(m)) \\ = & \forall m(\neg(T(m) \wedge K(m))) \\ = & \forall m(\neg T(m) \vee \neg K(m)) \\ = & \forall m(T(m) \rightarrow \neg K(m)) \quad \text{oder} \quad \forall m(K(m) \rightarrow \neg T(m)) \end{aligned} \quad (1.101)$$

### 1.7.2 Zweiwertige Prädikate

Sei

$M = \{x \mid x \text{ ist ein Mensch}\}$

so lassen sich für  $x, y \in M$  z.B. die zweistelligen Prädikate

$L(x, y) : x$  liebt  $y$

$K(x, y) : x$  kennt  $y$

$S(x, y) : x$  streitet mit  $y$

formulieren. Beachte, dass

$$\begin{aligned} K(x, y) & \neq K(y, x) \\ L(x, y) & \neq L(y, x) \end{aligned} \quad (1.102)$$

so bedeutet

$$x, y \in M : \forall x \exists y(K(x, y)) \quad (1.103)$$

dass alle Leute die Person  $y$  kennen. Und

$$x, y \in M : \exists x \forall y(K(y, x)) \quad (1.104)$$

bedeutet ”Es gibt einen Menschen  $x$ , der allen  $y$  bekannt ist”.

## Chapter 2

# Mengen

### 2.1 Mächtigkeit

Die Mengenlehre geht zurück auf Georg Cantor, 1845 bis 1918, in Halle. Heute definieren wir eine Menge, in dem wir ihre Element angeben.

#### 2.1.1 Aufzählung

$$A = \{-3, a, \diamond, \sqrt{3}, x\}$$

$B = \{2, 2, 3, 4, 5\}$  ist nicht möglich: Jedes Element genau einmal, also ist

$$B = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$C = \{10, 14, 18, 22, \dots\}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  heisst Menge der natürlichen Zahlen.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  heisst Menge der ganzen Zahlen.

#### 2.1.2 Charakterisierung

$$M = \{m | m \in \mathbb{N} \wedge 8 < m < 21\}$$

$$N = \{x | x \in 2^{2^{-n}} \wedge n \in \mathbb{N}\} \text{ also ist } N = \{2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

$A = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -1\}$ ,  $A$  hat keine Elemente, die leere Menge  $\emptyset$ .

$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b} \wedge a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$  ist die Menge der rationalen Zahlen.

$\mathbb{R} = \{x | x \text{ ist als Dezimalbruch darstellbar}\}$  ist die Menge der reellen Zahlen.