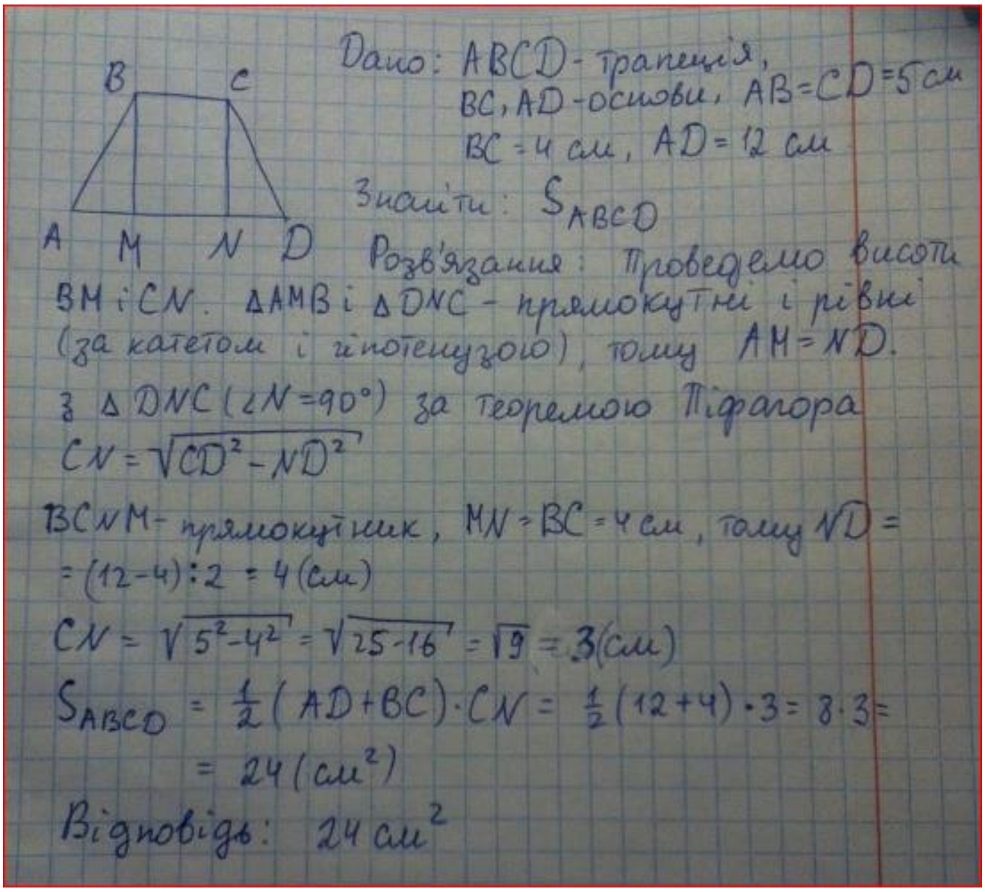
Геометрія КР 30.04

№ 3

Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 5 см, а основи – 4 см і 12 см. Знайти площу трапеції.



Дано: $ABCD$ - трапеція, BC, AD - основи, $AB = CD = 5$ см, $BC = 4$ см, $AD = 12$ см

Знайти: S_{ABCD}

Розв'язання: Проведемо висоти BM і CN. ΔAMB і ΔDNC - прямокутні і рівні (за катетом і гіпотенузою), тому $AM = ND$.

З ΔDNC ($\angle N = 90°$) за теоремою Піфагора

$CN = \sqrt{CD^2 - ND^2}$

$BCNM$ - прямокутник, $MN = BC = 4$ см, тому $ND = (12-4):2 = 4$ (см)

$CN = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ (см)

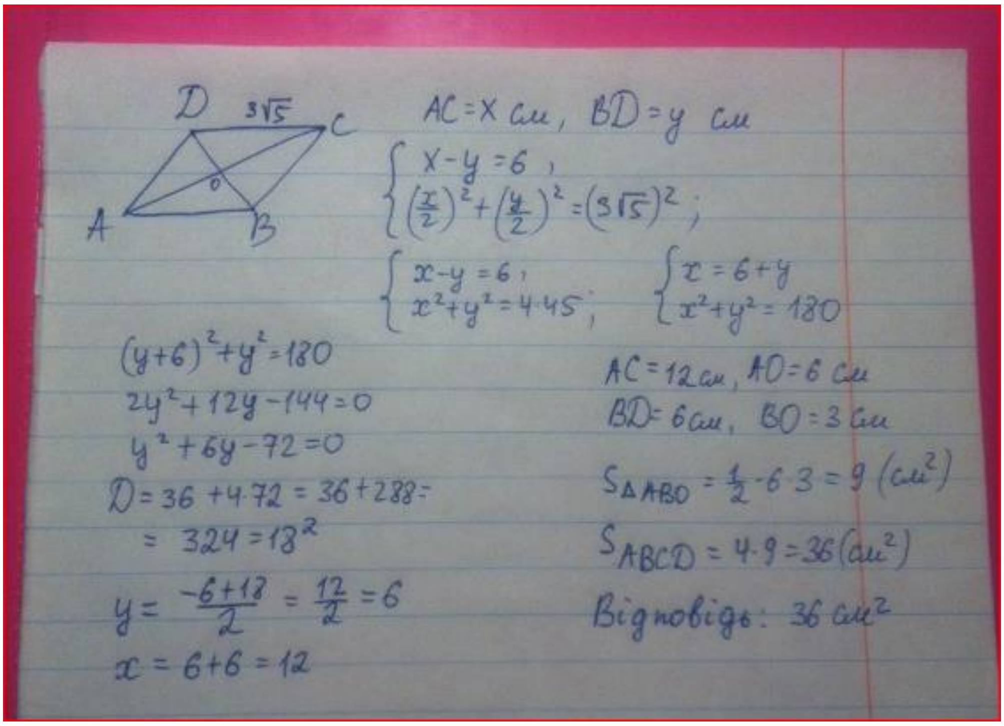
$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC) \cdot CN = \frac{1}{2}(12+4) \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24$ (см^2)

Відповідь: 24 см^2

№ 4

Чому дорівнює площа ромба, сторона якого дорівнює $3\sqrt{5}$ см, а різниця діагоналей - 6 см?

Схема розв'язання:



$AC = x$ см, $BD = y$ см

$\begin{cases} x - y = 6, \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = (3\sqrt{5})^2; \end{cases}$

$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^2 + y^2 = 4 \cdot 45; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 + y \\ x^2 + y^2 = 180 \end{cases}$

$(y+6)^2 + y^2 = 180$

$2y^2 + 12y - 144 = 0$

$y^2 + 6y - 72 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 72 = 36 + 288 = 324 = 18^2$

$y = \frac{-6+18}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$x = 6 + 6 = 12$

$AC = 12$ см, $AO = 6$ см

$BD = 6$ см, $BO = 3$ см

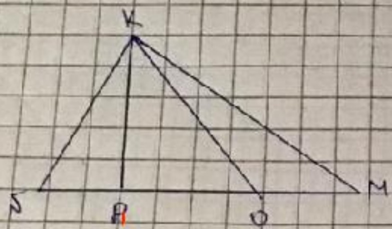
$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ (см^2)

$S_{ABCD} = 4 \cdot 9 = 36$ (см^2)

Відповідь: 36 см^2

№ 5

У трикутнику MNK відомо, що $MK = 18$ см і $KN = 12$ см. KO - бісектриса трикутника. Знайдіть відношення площ трикутників MKO і NKO.



Дано: ΔMNK, $MK = 25$ см, $KN = 15$ см, KO - бісектриса

Знайти: $\frac{S_{\Delta MKO}}{S_{\Delta NKO}}$

Розв'язання

Опустимо висоту KA. Нехай KA= h см

$\frac{MO}{ON} = \frac{MK}{KN}$ (за властивістю бісектриси Δ),

нехай $MO = x$ см, $ON = y$ см, тоді:

$\frac{x}{y} = \frac{25}{15}$

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot h$

$$\frac{S_{\Delta MKO}}{S_{\Delta NKO}} = \frac{\frac{1}{2}(MO \cdot KA)}{\frac{1}{2}(ON \cdot KA)} = \frac{MO}{ON} = \frac{x}{y} = \frac{25}{15} =$$

$$= \frac{5}{3}$$

Відповідь: $\frac{S_{\Delta MKO}}{S_{\Delta NKO}} = \frac{5}{3}$

45

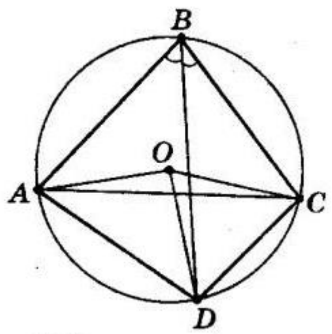
45. Див. рис. до №43. 1) Нехай $ABCD$ — паралелограм, один з кутів у 2 рази більший за другий. Знайдемо кути. Дані кути не можуть бути протилежними, так як протилежні кути рівні. Отже, дані кути сусідні ($\angle B = 2\angle A$). Нехай $\angle A = x$, тоді $\angle B = 2x$. Сума сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°, складемо рівняння: $x + 2x = 180$; $3x = 180$; $x = 60$.

$\angle A = 60°$, $\angle B = 2 \cdot 60° = 120°$, $\left.\begin{matrix}\angle A = \angle C = 60° \\ \angle B = \angle D = 120°\end{matrix}\right\}$ як протилежні кути паралелограма.

2) Нехай $ABCD$ — паралелограм, один з кутів на 24° менший від другого. Знайдемо кути. Дані кути не можуть бути протилежними, так як протилежні кути рівні. Отже, дані кути сусідні. Нехай $\angle A = x$, тоді $\angle B = x + 24$. Сума сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°, складемо рівняння: $x + x + 24 = 180$; $2x + 24 = 180$; $2x = 156$; $x = 78$.
$\angle A = 78°$, $\angle B = 78° + 24° = 102°$. $\angle A = \angle C = 78°$, $\angle B = \angle D = 102°$ (як протилежні кути паралелограма). *Відповідь:* $\angle A = \angle C = 78°$, $\angle B = \angle D = 102°$.

300

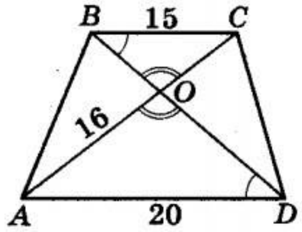
300. За умовою BD — бісектриса $\angle ABC$. За означенням бісектриси кута маємо: $\angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 80° : 2 = 40°$.



$\angle ABD$ — вписаний кут, який опирається на хорду AD.
$\angle ACD$ — вписаний кут, який опирається на хорду AD.
За наслідком з теореми про вписані кути маємо: $\angle ABD = \angle ACD = 40°$.
$\angle DBC$ — вписаний кут, який опирається на хорду DC.
$\angle DAC$ — вписаний кут, який опирається на хорду DC.
$\angle DBC = \angle DAC = 40°$. Розглянемо ΔADC. За теоремою про суму кутів трикутника маємо: $\angle DAC + \angle DCA + \angle ADC = 180°$; $\angle ADC = 180° - (\angle DAC + \angle DCA)$; $\angle ADC = 180° - (40° + 40°) = 180° - 80° = 100°$. *Відповідь:* 40°, 40°, 100°.

455

455. За умовою $ABCD$ — трапеція ($AD \parallel BC$), BD — січна. За ознакою паралельних прямих маємо: $\angle CBO = \angle ODA$ (внутрішні різносторонні), $\angle BOC = \angle AOD$ (вертикальні). За I ознакою подібності трикутників маємо: $\Delta BOC \sim \Delta DOA$. За означенням подібних фігур маємо:

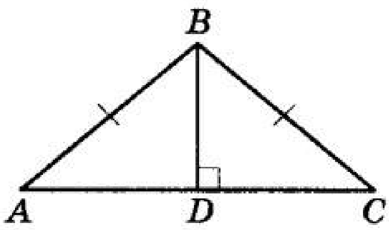


$$\frac{BC}{AD} = \frac{OC}{AO};\quad \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{20}_{4}} = \frac{OC}{16};\quad OC = \frac{{}^{4}\cancel{16} \cdot 3}{\cancel{4}} = 12 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $OC = 12$ см.

619

619. Нехай дано ΔABC, $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$, BD — висота, $BD = 3\sqrt{3}$ см. Знайдемо AB, BC, AC. Оскільки в рівнобедреному ΔABC до основи проведено висоту BD, то BD — медіана і бісектриса. $\angle ABD = \angle DBC = 120° : 2 = 60°$; $AD = DC$. Розглянемо ΔABD, $\angle D = 90°$.



$\cos \angle ABD = \dfrac{BD}{AB}$; $\cos 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{AB}$; $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{AB}$; $AB = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ см;

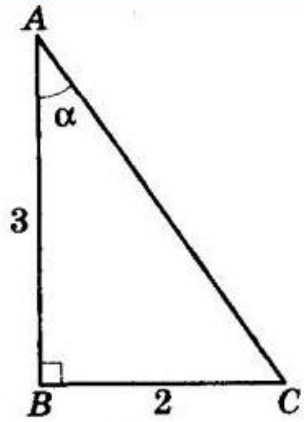
$AB = BC = 6\sqrt{3}$ см. $\sin \angle ABD = \dfrac{AD}{AB}$; $\sin 60° = \dfrac{AD}{6\sqrt{3}}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AD}{6\sqrt{3}}$;

$AD = \dfrac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$; $AD = 9$ см. $AC = 2 \cdot AD$; $AC = 2 \cdot 9 = 18$ см.

Відповідь: $AB = BC = 6\sqrt{3}$ см, $AC = 18$ см.

582 1)-3)

582. За теоремою Піфагора маємо: $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AC^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$; $AC = \sqrt{13}$ см. За умовою $AB > BC$, отже, BC — менший катет, AB — більший катет. За означенням тригонометричних функцій гострого кута маємо:



1) $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{BC}{AB}$; $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2}{3}$;

2) $\sin \alpha = \dfrac{BC}{AC}$; $\sin \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$;

3) $\cos \alpha = \dfrac{AB}{AC}$; $\cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{AB}{BC}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{3}{2}$.

Відповідь: $\sin \alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos \alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2}{3}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{3}{2}$.

584

584. 1) $\cos^2 30° - \sin^2 45° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$;

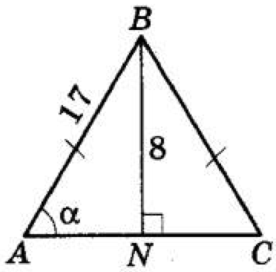
2) $3\,\mathrm{tg}^2 30° + 4\,\mathrm{tg}\,45° + \cos 30°\,\mathrm{ctg}\,30° = 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4 \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} =$

$= \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} + 4 + \frac{3}{2} = 5 + 1\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$.

А

591

591. Розглянемо ΔANB — прямокутний ($\angle N = 90°$). За теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = BN^2 + AN^2$; $AN^2 = AB^2 - BN^2$; $AN^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, $AN = 15$ см. За означенням тригонометричних функцій гострого кута маємо: $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$; $\cos\alpha = \frac{AN}{AB}$;



$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BN}{AN}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{AN}{BN}$. $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; $\cos\alpha = \frac{15}{17}$;

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8}{15}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{15}{8}$.

Відповідь: $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8}{15}$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{15}{8}$.

В

607 1)2)3)

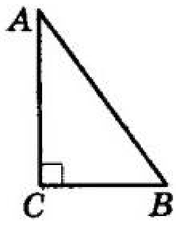
607. 1) $AB = 12$ см, $\sin\angle A = \frac{3}{4}$. $\sin\angle A = \frac{CB}{AB}$; $\frac{3}{4} = \frac{CB}{12}$; $CB = \frac{3 \cdot 12}{4} = 9$ (см).

2) $AB = 21$ см, $\cos\angle A = 0{,}4$. $\cos\angle A = \frac{AC}{AB}$; $0{,}4 = \frac{AC}{21}$;

$AC = 0{,}4 \cdot 21$; $AC = 8{,}4$ см.

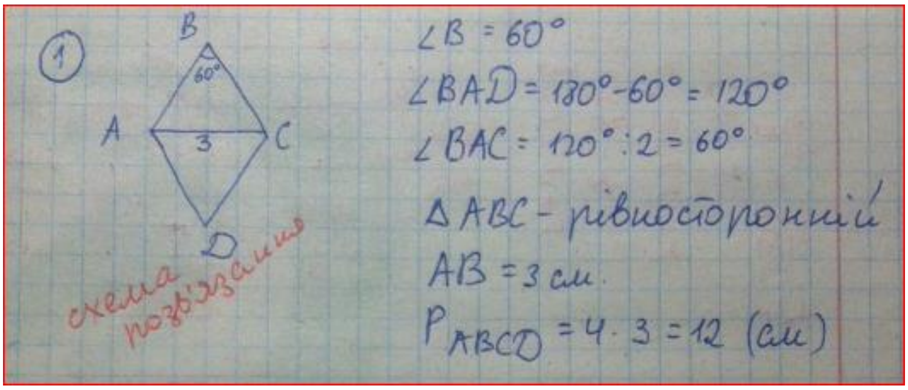
3) $BC = 4$ с, $\mathrm{tg}\,\angle A = 1{,}6$.

$\mathrm{tg}\,\angle A = \frac{CB}{AC}$; $1{,}6 = \frac{4}{AC}$; $AC = \frac{4 \cdot 1}{1{,}6} = \frac{1}{0{,}4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ см.

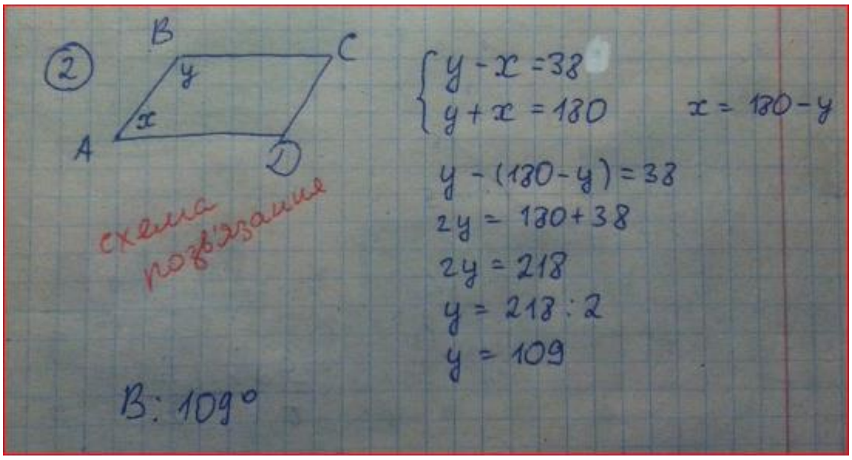


Геометрія ДЗ 04.05

1. Знайдіть периметр ромба, якщо один з його кутів дорівнює 60°, а найменша діагональ – 3 см.

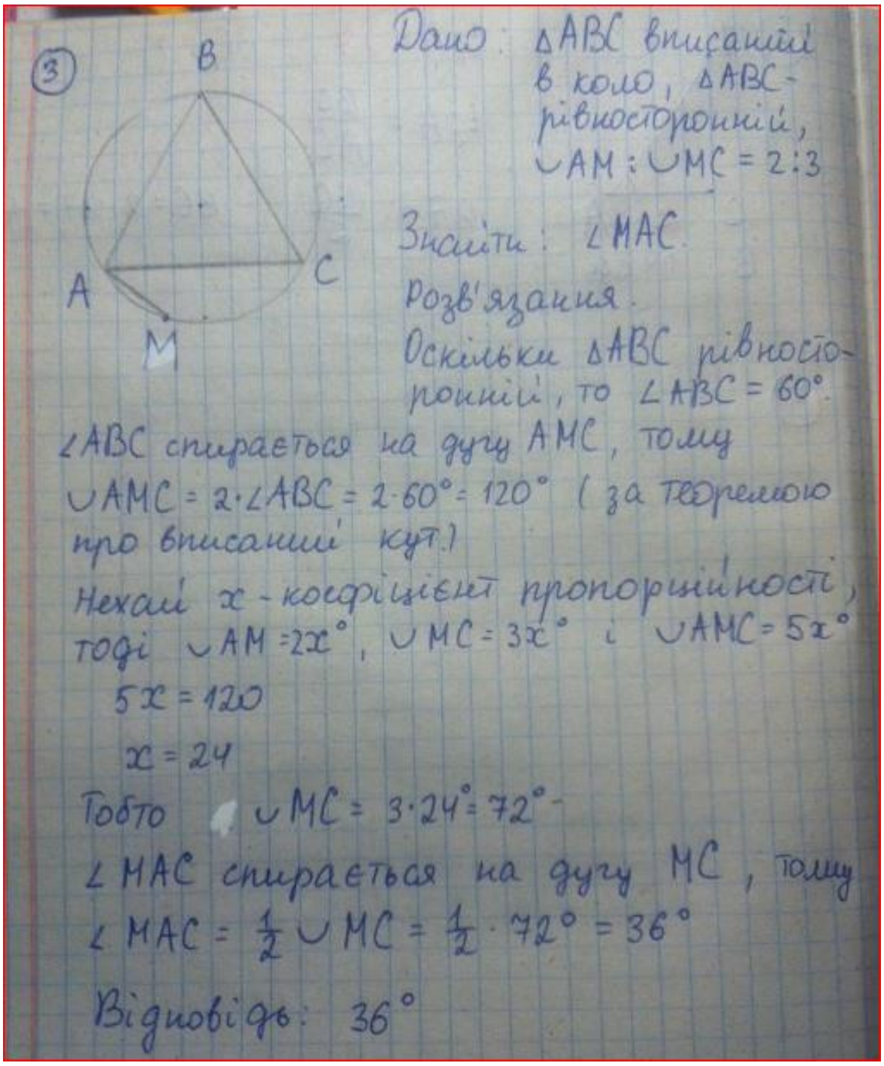


2. Знайдіть найбільший кут паралелограма, якщо різниця двох його кутів дорівнює 38°.



3. На дузі AC коло, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, позначено точку M так, що дуги

AM і MC відносяться як 2:3 рахуючи від точки A. Знайдіть кут MAC.



(3)

Дано: $\triangle ABC$ вписаний в коло, $\triangle ABC$ - рівносторонній, $\smile AM : \smile MC = 2:3$

Знайти: $\angle MAC$

Розв'язання.

Оскільки $\triangle ABC$ рівносторонній, то $\angle ABC = 60^\circ$.

$\angle ABC$ спирається на дугу AMC, тому $\smile AMC = 2\cdot\angle ABC = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$ (за теоремою про вписаний кут)

Нехай x - коефіцієнт пропорційності, тоді $\smile AM = 2x^\circ$, $\smile MC = 3x^\circ$ і $\smile AMC = 5x^\circ$

$5x = 120$

$x = 24$

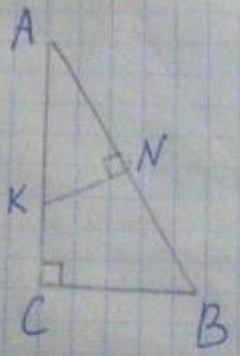
Тобто $\smile MC = 3\cdot 24^\circ = 72^\circ$.

$\angle MAC$ спирається на дугу MC, тому $\angle MAC = \frac{1}{2}\smile MC = \frac{1}{2}\cdot 72^\circ = 36^\circ$

Відповідь: 36°

4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 40 см, а більший катет - 32 см. Знайдіть відрізки, на які

серединний перпендикуляр гіпотенузи ділить більший катет



Дано: $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$),

$AB = 40$ см

$AC = 32$ см

KN - серединний перпендикуляр AB.

Знайти: AK, CK.

Розв'язання.

Розглянемо $\triangle ABC$ і $\triangle AKN$. В них $\angle A$ - спільний, $\angle ANK = \angle ACB = 90°$. Тому $\triangle ABC \sim \triangle AKN$ за першою ознакою подібності трикутників (за двома кутами) Тоді

Нехай $AK = x$ см, $CK = 32 - x$ см

Крім того, $AN = \frac{1}{2} AB = 20$ см.

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AN}$$

$$\frac{40}{x} = \frac{32}{20}$$

$$x = \frac{40 \cdot 20}{32}$$

$x = 25$, $AK = 25$ см,

$CK = 32 - 25 = 7$ (см)

Відповідь: 7 см, 25 см.