ED62A-COM2A
ESTRUTURAS DE DADOS

Aula 09 - Grafos

Prof. Rafael G. Mantovani

07/06/2019

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

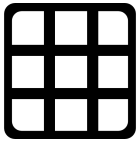
Roteiro

1. Introdução
2. Grafos
3. Definições
4. Representações
5. Referências

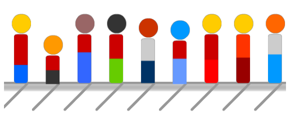
Roteiro

Introdução

Pilhas



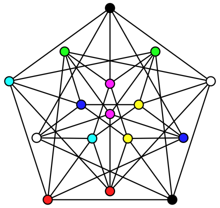
Vetores



Filas

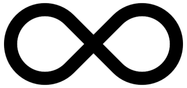
Problema

Grafos

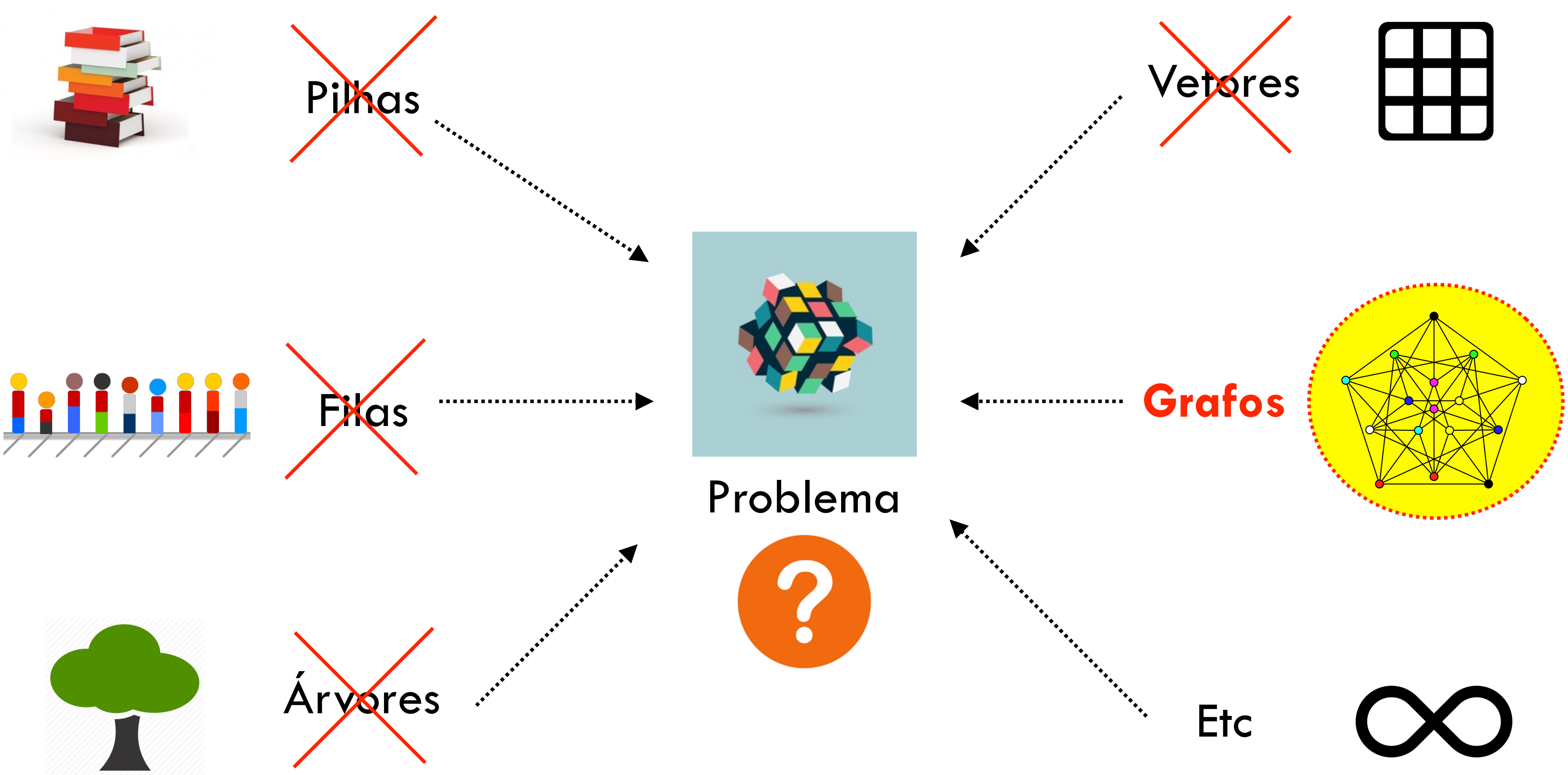


Árvores

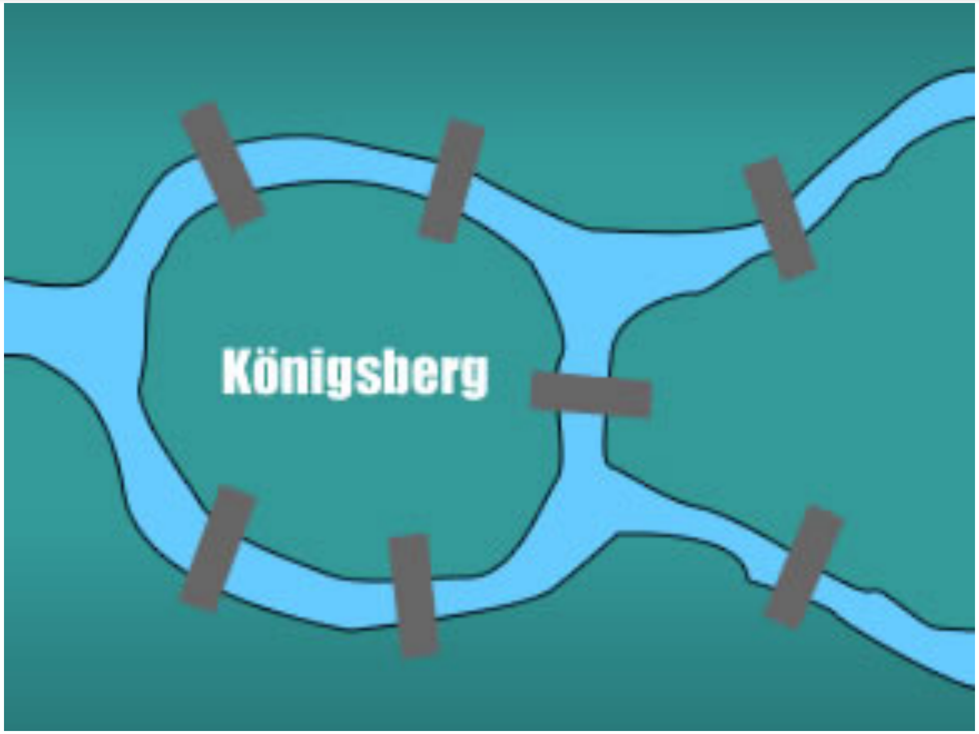
Etc



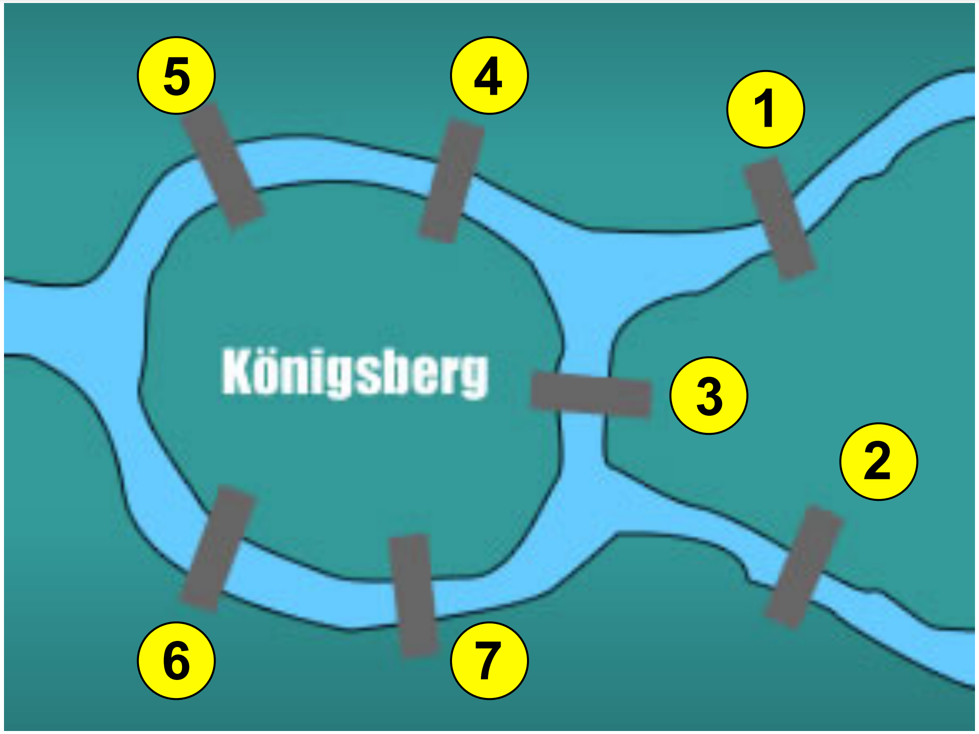
Introdução



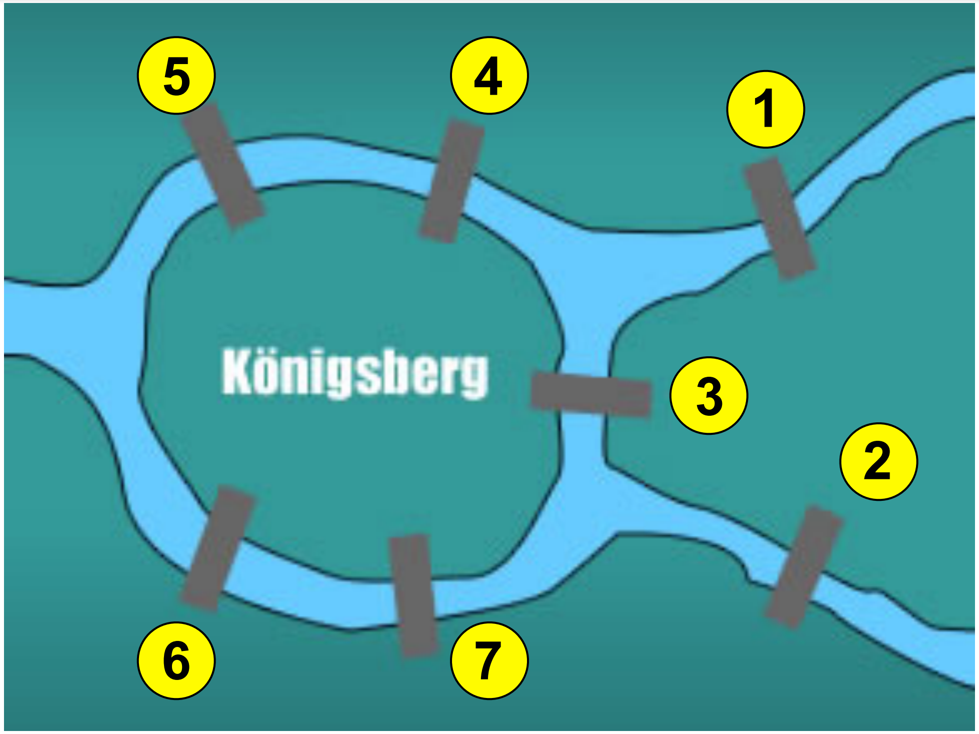
Sete Pontes de Königsberg



Sete Pontes de Königsberg

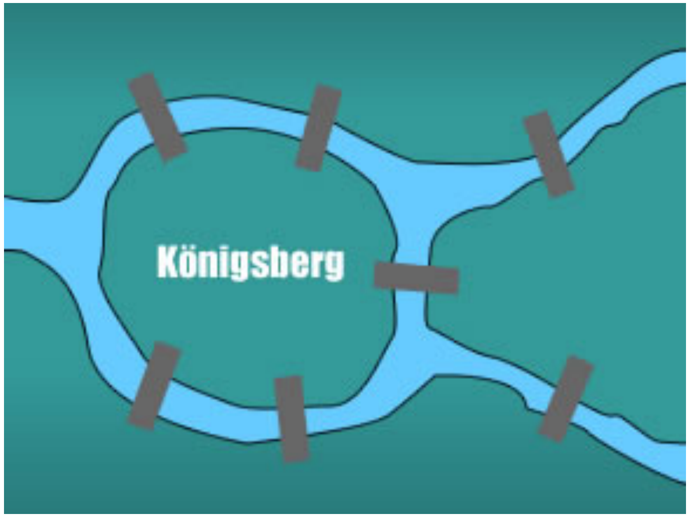


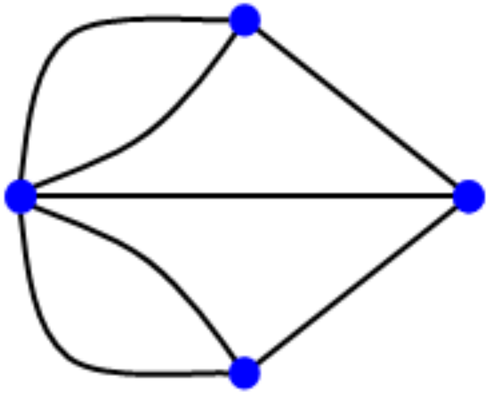
Sete Pontes de Königsberg



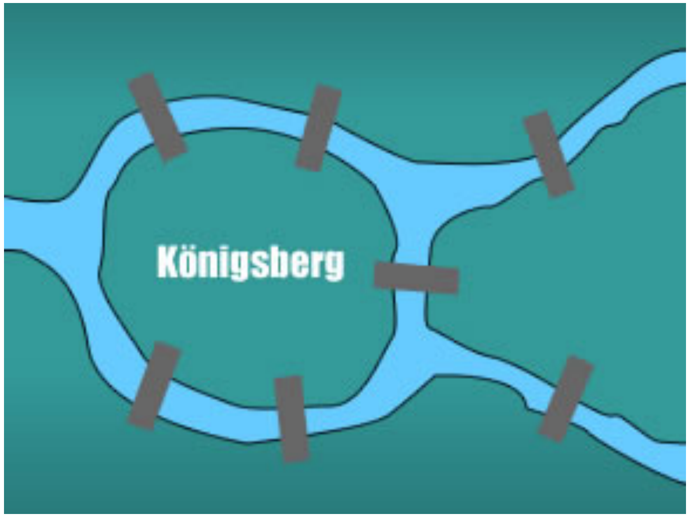
Problema: atravessar as sete pontes durante uma caminhada contínua, sem passar duas vezes por qualquer uma delas

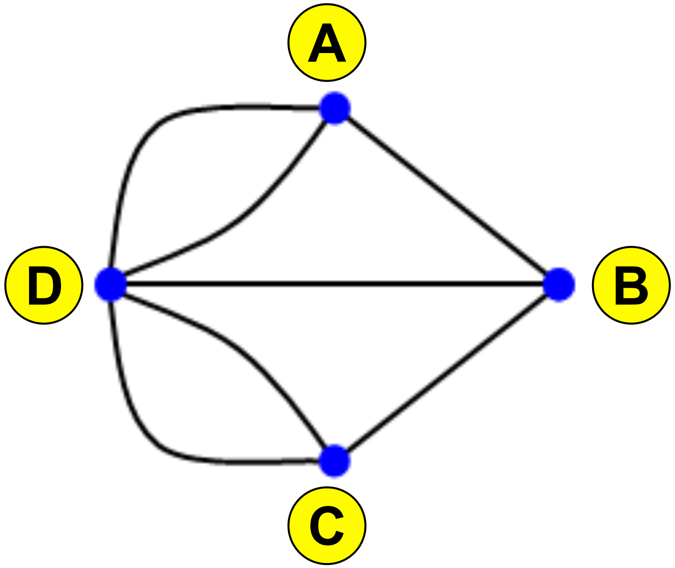
Sete Pontes de Königsberg





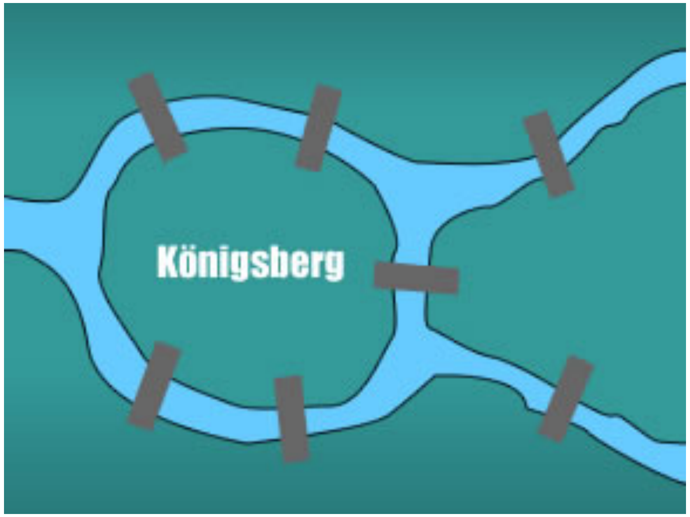
Sete Pontes de Königsberg



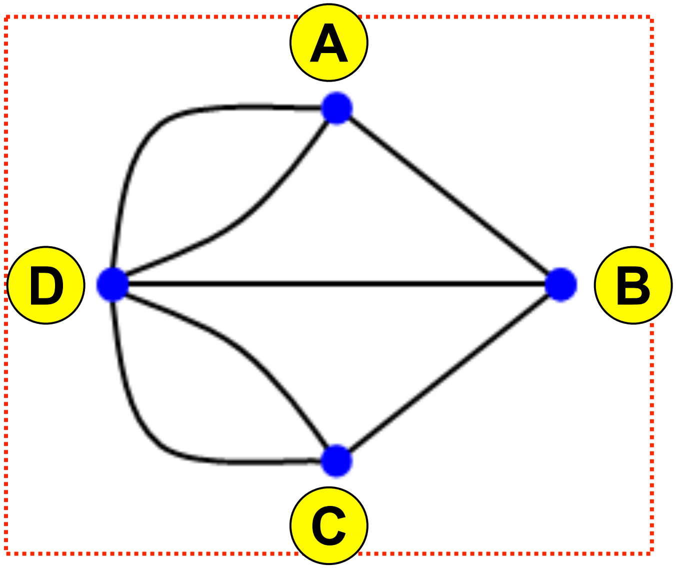


* Solução ?

Sete Pontes de Königsberg



Grafo = (V, E)



- Caminhos: linhas (arestas - E)
- Lugares: pontos (vértices - V)

Sete Pontes de Königsberg

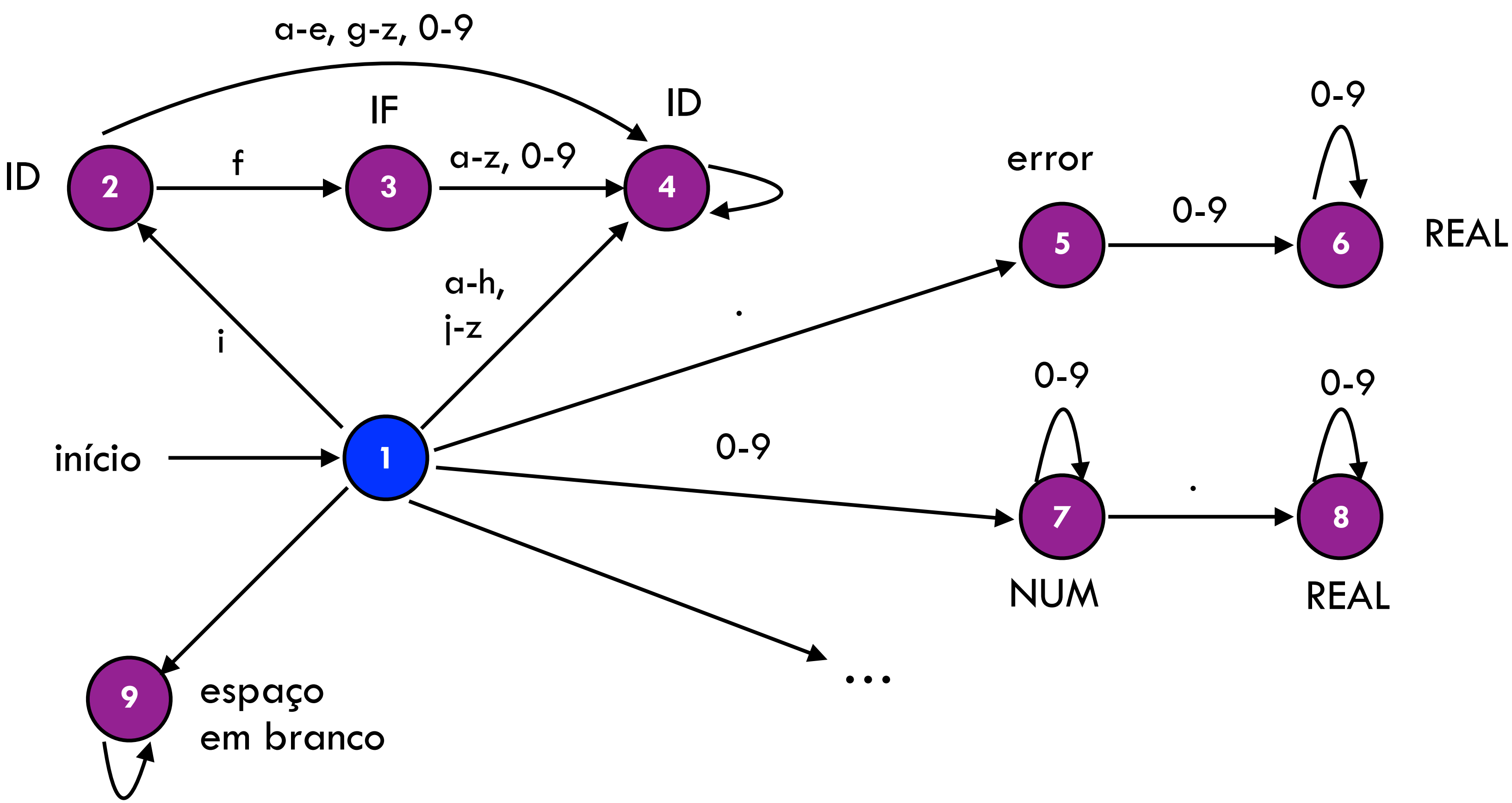
- **Euler**: mostrou que **não** existe solução que satisfaça tais restrições.
  - Teoria dos grafos

- Existe solução **apenas** se:
  - houvessem dois vértices com número ímpar de arestas;
  - demais vértices com número par de arestas;

Contextualização

- Diversos problemas podem usar **Grafos** para encontrar uma solução:
  - Análise de circuitos elétricos;
  - Identificação de caminhos mais curtos, rotas, etc;
  - Modelagem de redes pluviais, esgoto, etc;
  - Identificação de compostos químicos;
  - Análise sintática;
  - etc.

Análise sintática



Contextualização

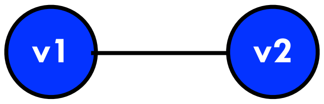
- Diversos problemas podem usar **Grafos** para encontrar uma solução:
  - Análise de circuitos elétricos;
  - Identificação de caminhos mais curtos, rotas, etc;
  - Modelagem de redes pluviais, esgoto, etc;
  - Identificação de compostos químicos;
  - Análise léxica;
  - Pode-se dizer que, de todas as estruturas matemáticas, os grafos são as que se encontram em mais amplo uso.

Roteiro

1. Introdução
2. Grafos
3. Definições
4. Representações
5. Referências

Grafo

- Um grafo $G = (V, E)$ é definido por:
  - um conjunto de vértices (nós), V
  - um conjunto de arestas (arcos), E
  - cada aresta é especificada por um par de vértices. Ex: (v1, v2)



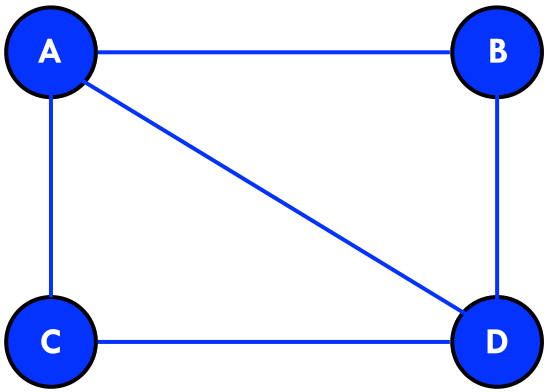
- A análise de complexidade dos algoritmos de grafos é feita com base:
  - tamanho dos conjuntos de vértices $|V|$ e arestas $|E|$
  - $O(V+E) = O(|V|+|E|)$

Grafos não dirigidos

- Um grafo não dirigido (ou não orientado) é um grafo cujas arestas não são dirigidas:
  - (A, B) = (B, A)
  - Ex: G = (V, E)
    - V = {A, B, C, D}
    - E = {(A,B), (A,C), (B,D), (C,D), (A,D)}

Grafos não dirigidos

- Um grafo não dirigido (ou não orientado) é um grafo cujas arestas não são dirigidas:
  - (A, B) = (B, A)
  - Ex: G = (V, E)
    - V = {A, B, C, D}
    - E = {(A,B), (A,C), (B,D), (C,D), (A,D)}

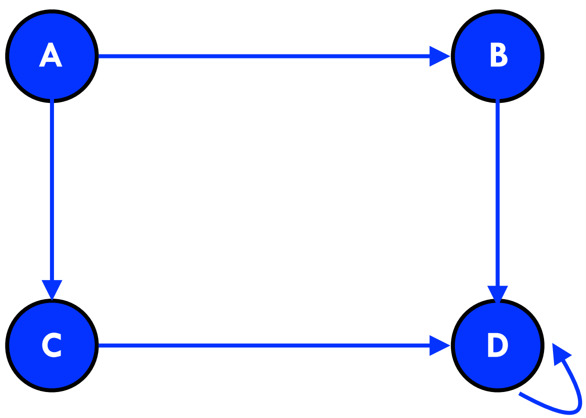


Grafos dirigidos

- Se as arestas do grafo são dirigidas, as arestas são representadas por pares ordenados de vértices, e o grafo é dito dirigido (dígrafo)
  - Aresta: <A, B>, A é o vértice de origem, B é o vértice de destino
  - <A, B> != <B, A>
  - Ex: G=(V,E), V = {A, B, C, D}, E = {<A,B>, <A,C>, <B,D>, <C,D>, <D,D>}

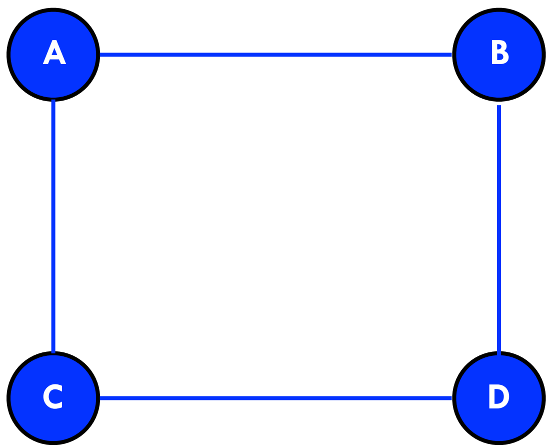
Grafos dirigidos

- Se as arestas do grafo são dirigidas, as arestas são representadas por pares ordenados de vértices, e o grafo é dito dirigido (dígrafo)
  - Aresta: <A, B>, A é o vértice de origem, B é o vértice de destino
  - <A, B> != <B, A>
  - Ex: G=(V,E), V = {A, B, C, D}, E = {<A,B>, <A,C>, <B,D>, <C,D>, <D,D>}



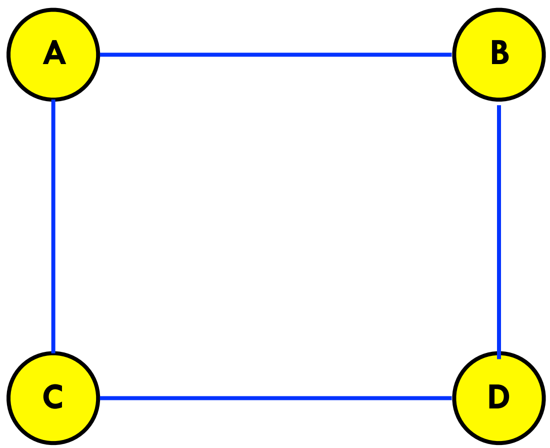
Grafos rotulados e ponderados

- Um grafo é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando cada vértice (aresta) estiver associado a um rótulo
- Em um grafo ponderado, cada aresta possui um peso associado



Grafos rotulados e ponderados

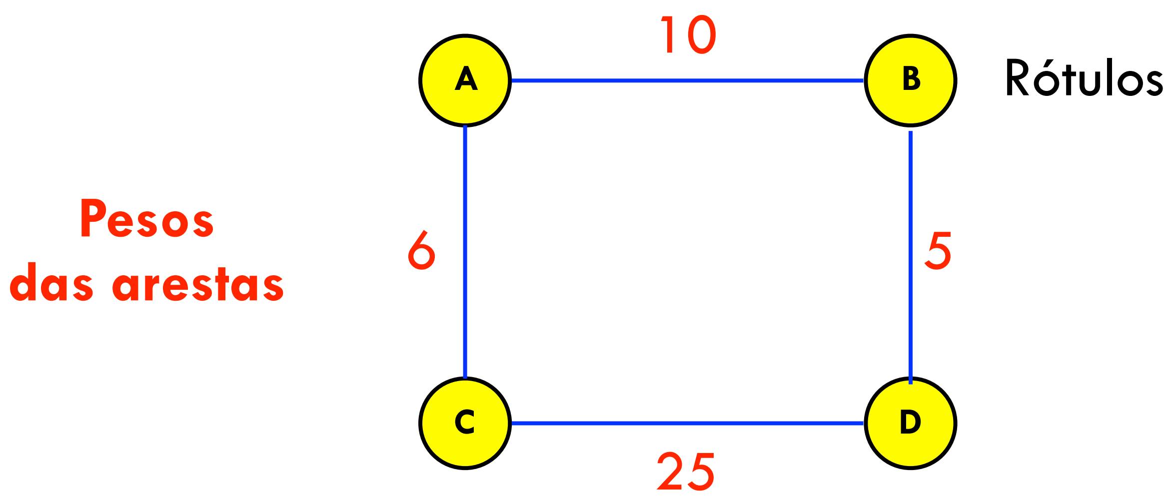
- Um grafo é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando cada vértice (aresta) estiver associado a um rótulo
- Em um grafo ponderado, cada aresta possui um peso associado



Rótulos

Grafos rotulados e ponderados

- Um grafo é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando cada vértice (aresta) estiver associado a um rótulo
- Em um grafo ponderado, cada aresta possui um peso associado

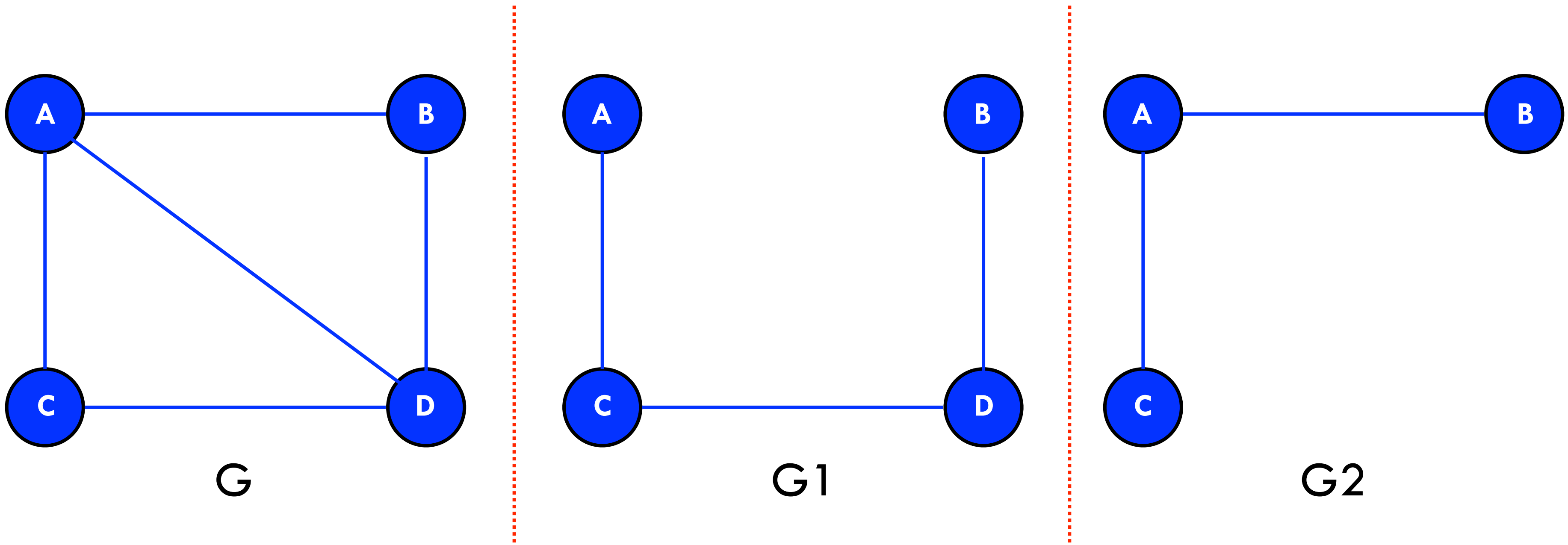


Roteiro

1. Introdução
2. Grafos
3. Definições
4. Representações
5. Referências

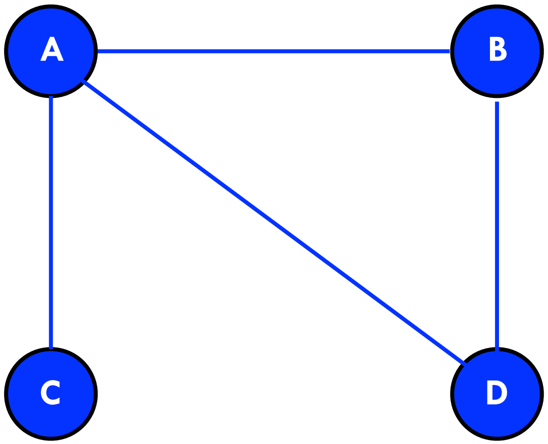
Subgrafo

- Um subgrafo G'=(V', E') de um grafo G=(V, E), se:
  - $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$
  - Ex: G1 e G2 são subgrupos de G

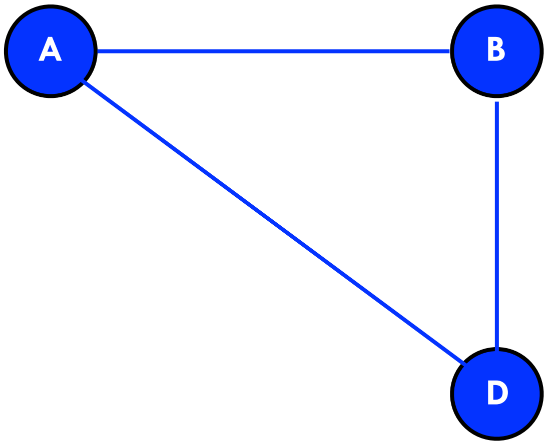


Ordem

- **Ordem:** a ordem de um grafo G=(V, E) é dada pelo número de vértices, isto é, |V|



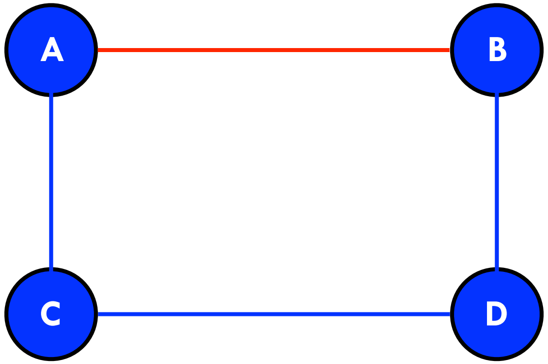
G1
ordem = 4



G2
ordem = 3

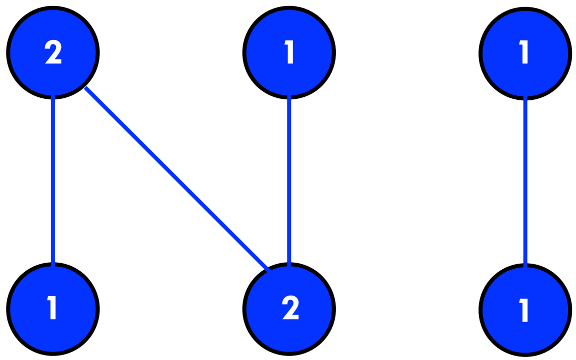
Adjacência

- **Adjacência:**
  - dois vértices A e B são adjacentes se existe uma aresta (A,B) no conjunto E
  - A é “antecessor" de B, se há uma aresta (A,B), que sai de A e chega em B
    - B é “sucessor" de A



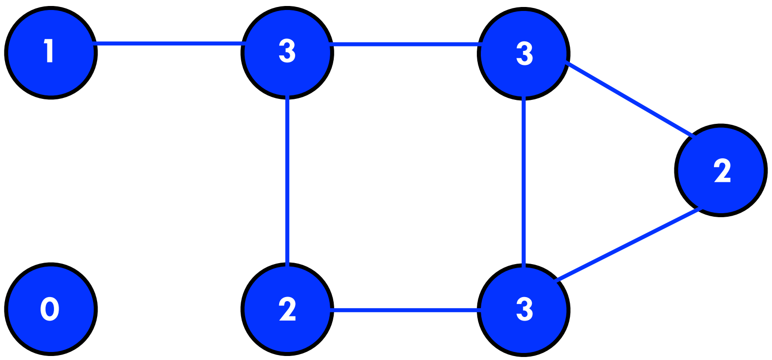
Grau de vértice

- **Grau(vértice):** é o número de arestas que incidem nele
  - grau de entrada: número de arestas que saem de V
  - grau de saída: número de arestas que chegam de C



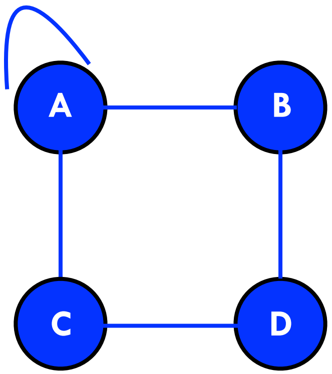
Grau de vértice

- **Grau(vértice):** é o número de arestas que incidem nele
  - grau de entrada: número de arestas que saem de V
  - grau de saída: número de arestas que chegam de C



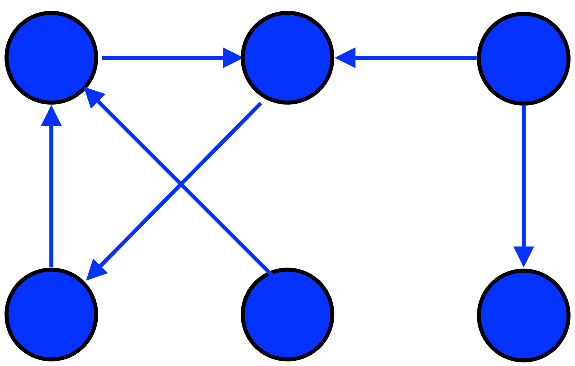
Laço

- **Laço**: é uma aresta ligando um vértice a ele próprio
  - (A, A)

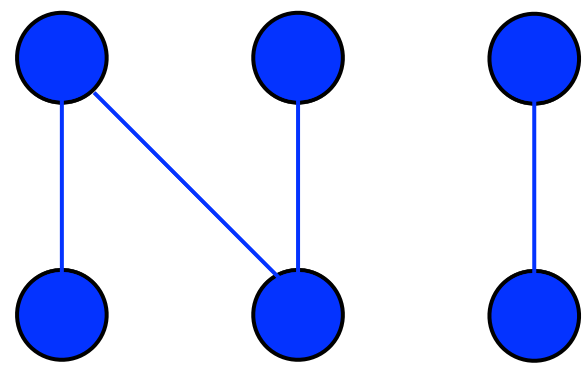


Conectividade

- Um grafo é **conexo** se existe uma sequência de arestas adjacentes que ligam todos os pares de vértices do grafo.
    - Caso contrário, o grafo é dito **desconexo**



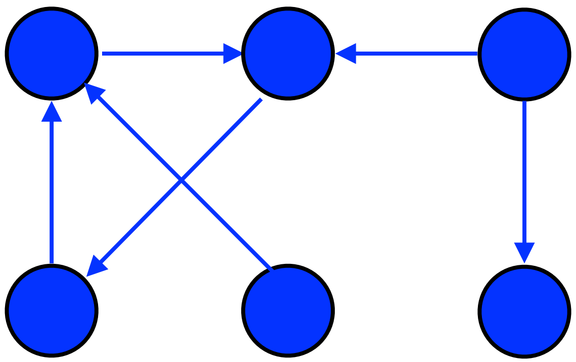
Grafo conexo



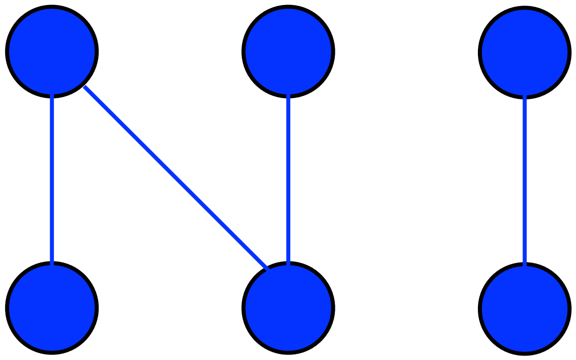
Grafo desconexo

Conectividade

- Uma **componente conexa** de um grafo desconexo é um subgrafo conexo do grafo
- Uma **ponte** é uma aresta que, se retirada, torna desconexo um grafo conexo



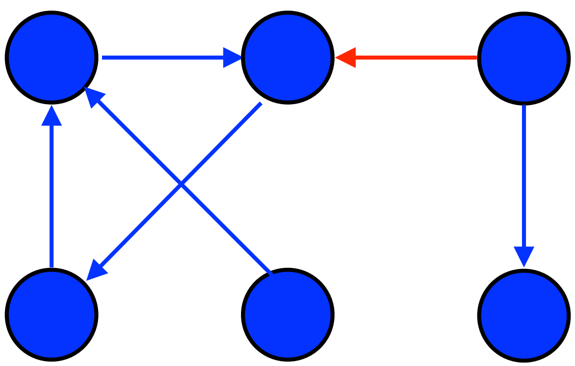
Grafo conexo



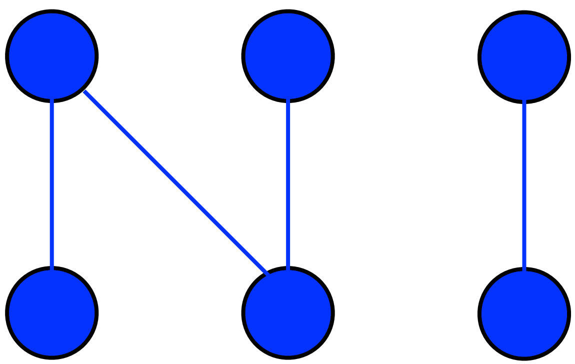
Grafo desconexo

Conectividade

- Uma **componente conexa** de um grafo desconexo é um subgrafo conexo do grafo
- Uma **ponte** é uma aresta que, se retirada, torna desconexo um grafo conexo



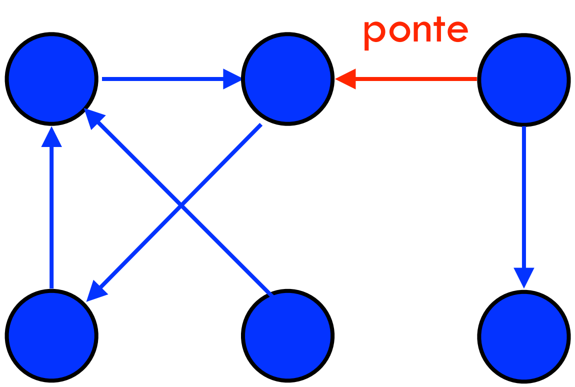
Grafo conexo



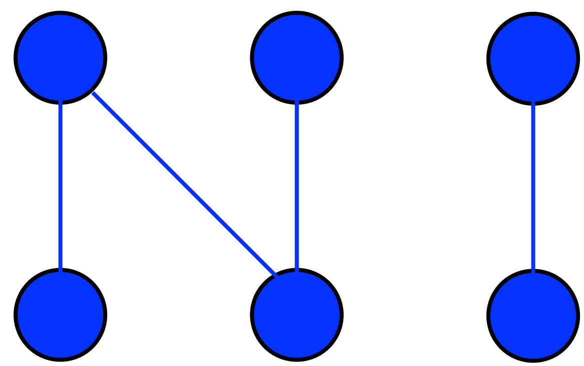
Grafo desconexo

Conectividade

- Uma **componente conexa** de um grafo desconexo é um subgrafo conexo do grafo
- Uma **ponte** é uma aresta que, se retirada, torna desconexo um grafo conexo



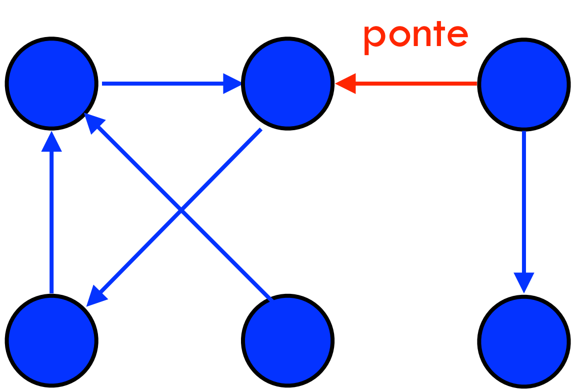
Grafo conexo



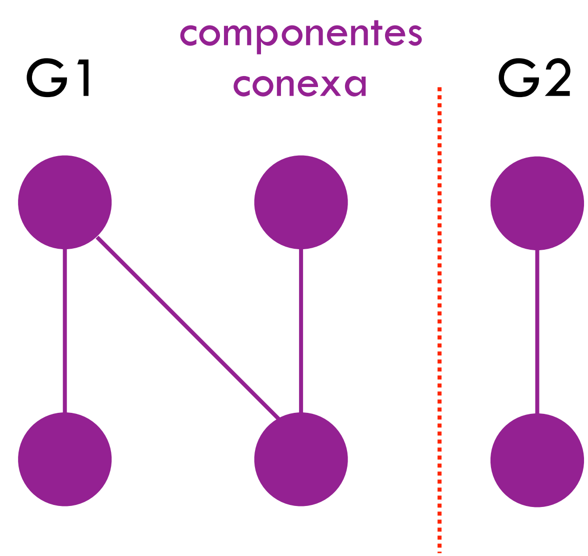
Grafo desconexo

Conectividade

- Uma **componente conexa** de um grafo desconexo é um subgrafo conexo do grafo
- Uma **ponte** é uma aresta que, se retirada, torna desconexo um grafo conexo



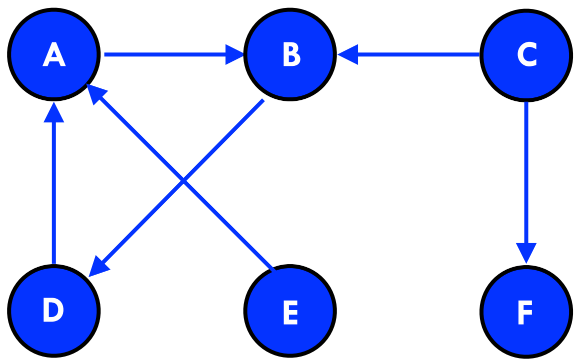
Grafo conexo



Grafo desconexo

Caminhos

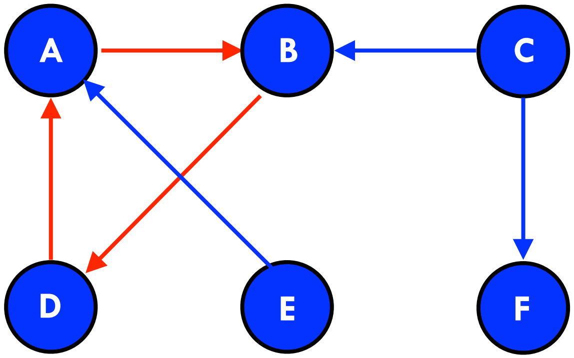
- Um **caminho** é uma sequência de vértices ligados por arestas do grafo



C1: {A, B, D}
C2: {C, B}
C3: {C, F}
C4: {E, A, B, D}
...

Ciclo

- Um **ciclo** é uma sequência de vértices ligados por arestas do grafo



Ciclo: {A, B, D, A}

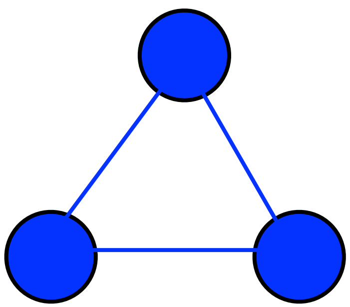
Grafos completos

- Um grafo é **completo** se possui uma aresta para cada par de vértices

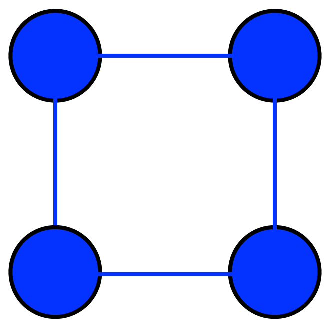
K0 K1 K2

Grafos completos

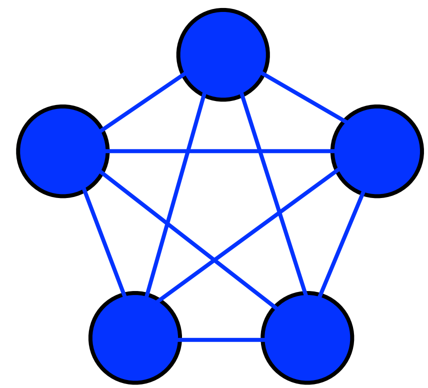
- Um grafo é **completo** se possui uma aresta para cada par de vértices



K3



K4



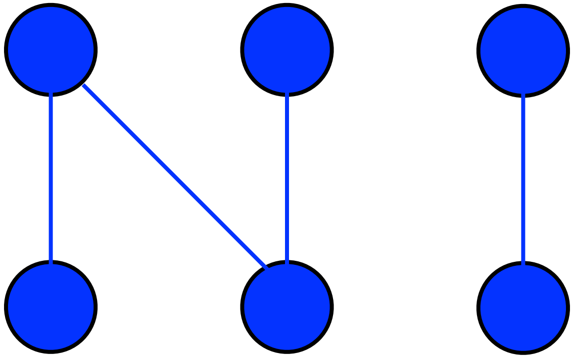
K5

Grafos completos

- K6, K7?

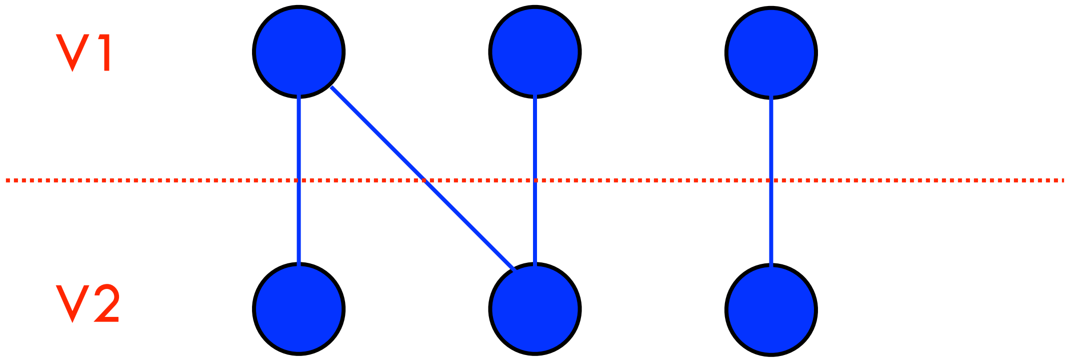
Grafos bipartido

- Um grafo é dito ser **bipartido** quando o conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos V1 e V2, tais que toda aresta do grafo liga um vértice de V1 a um vértice de V2



Grafos bipartido

- Um grafo é dito ser **bipartido** quando o conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos V1 e V2, tais que toda aresta do grafo liga um vértice de V1 a um vértice de V2



Roteiro

Representações de grafos

- Lista de adjacência
- Matriz de adjacência

Representações de grafos

- Matriz de Adjacência
  - forma mais simples

- Propriedades:
  - representa grafo sem ambiguidade
  - é simétrica para grafo não direcionado
  - Armazenamento: $O(n^2)$

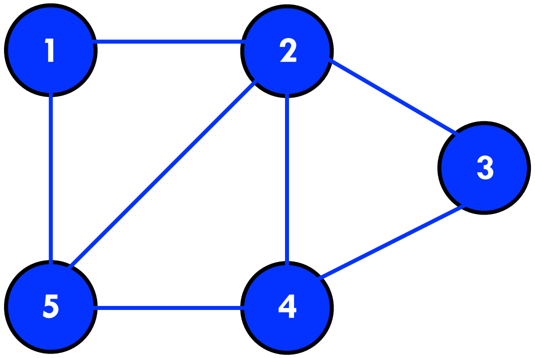
Representações de grafos

- Lista de Adjacência
    - forma encadeada

- Propriedades:
    - conjunto de listas para cada vértice
    - vetor de listas lineares

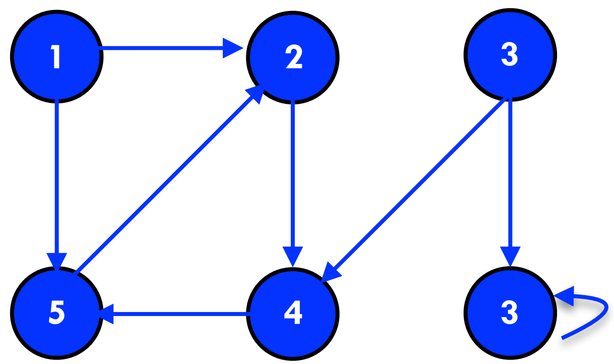
Exemplo 01

- Qual a lista e matriz de adjacência do grafo abaixo?



Exemplo 02

- Qual a lista e matriz de adjacência do grafo abaixo?



Algoritmos de grafos

- **Percursos**
  - Busca em largura (Breath-First Search - BFS)
  - Busca em profundidade (Depth-First Search - DFS)
- **Ordenação Topológica** (Topological sort)
- **Caminhos mínimos** (Shortest paths)
  - Dijkstra
- **Árvore geradora mínima** (Minimum Spanning Trees - MST)
  - Prim
  - Kruskal
- **Fluxo máximo** (Maximum flow)

Exercício 03

entrada.txt

Linha 1:	[M | L]	Tipo de representação
Linha 2:	[V]	Número de vértices
Linha 3:	(X,Y)(Y, Z)(Z,K) … (A,B)	Arestas

- **Objetivo:**
  - *Parsear* entrada e criar um grafo

Exercício 03

- Exemplo:

entrada.txt

```
M
4
(1,2)(1,3)(1,4)(2,1)(2,3)(4,3)
```

TAD Grafo

1. Criar um grafo vazio
2. Inserir uma aresta no grafo
3. Verifica se existe determinada aresta no grafo
4. Obter a lista de vértices adjacentes a determinado vértice
5. Retirar uma aresta do grafo
6. Imprimir um grafo
7. Obter o número de vértice do grafo
8. Obter a aresta de menor peso de um grafo

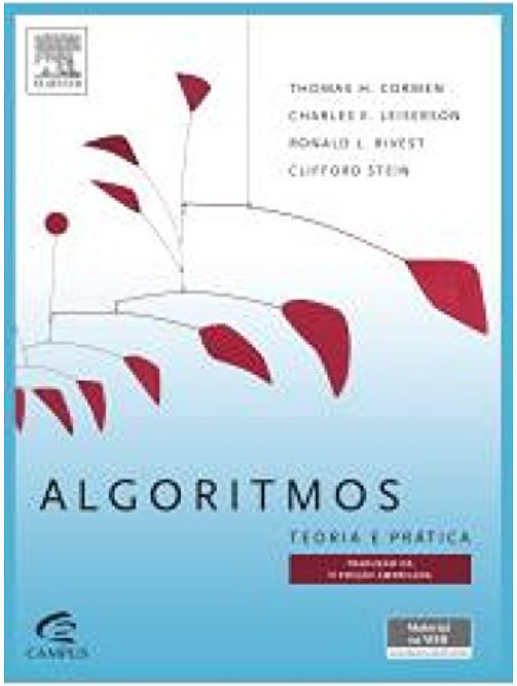
TAD Grafo

1. Criar um grafo vazio
2. Inserir uma aresta no grafo
3. Verifica se existe determinada aresta no grafo
4. Obter a lista de vértices adjacentes a determinado vértice
5. Retirar uma aresta do grafo
6. Imprimir um grafo
7. Obter o número de vértice do grafo
8. Obter a aresta de menor peso de um grafo

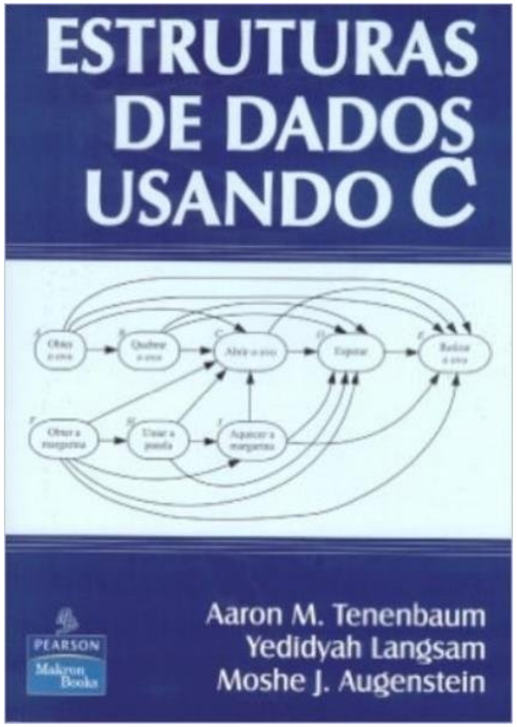
Roteiro

1. Introdução
2. Grafos
3. Definições
4. Representações
5. Referências

Referências sugeridas

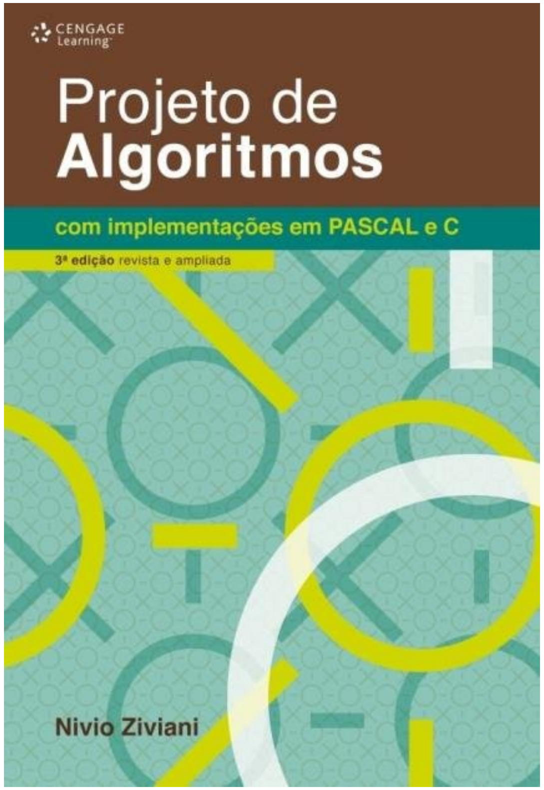


[Cormen et al, 2018]



[Tenenbaum et al, 1995]

Referências sugeridas



[Ziviani, 2010]

[Drozdek, 2017]

Perguntas?

Prof. Rafael G. **Mantovani**

rafaelmantovani@utfpr.edu.br