

ED62A-COM2A

ESTRUTURAS DE DADOS

Aula 07 - Árvores AVL

Prof. Rafael G. Mantovani

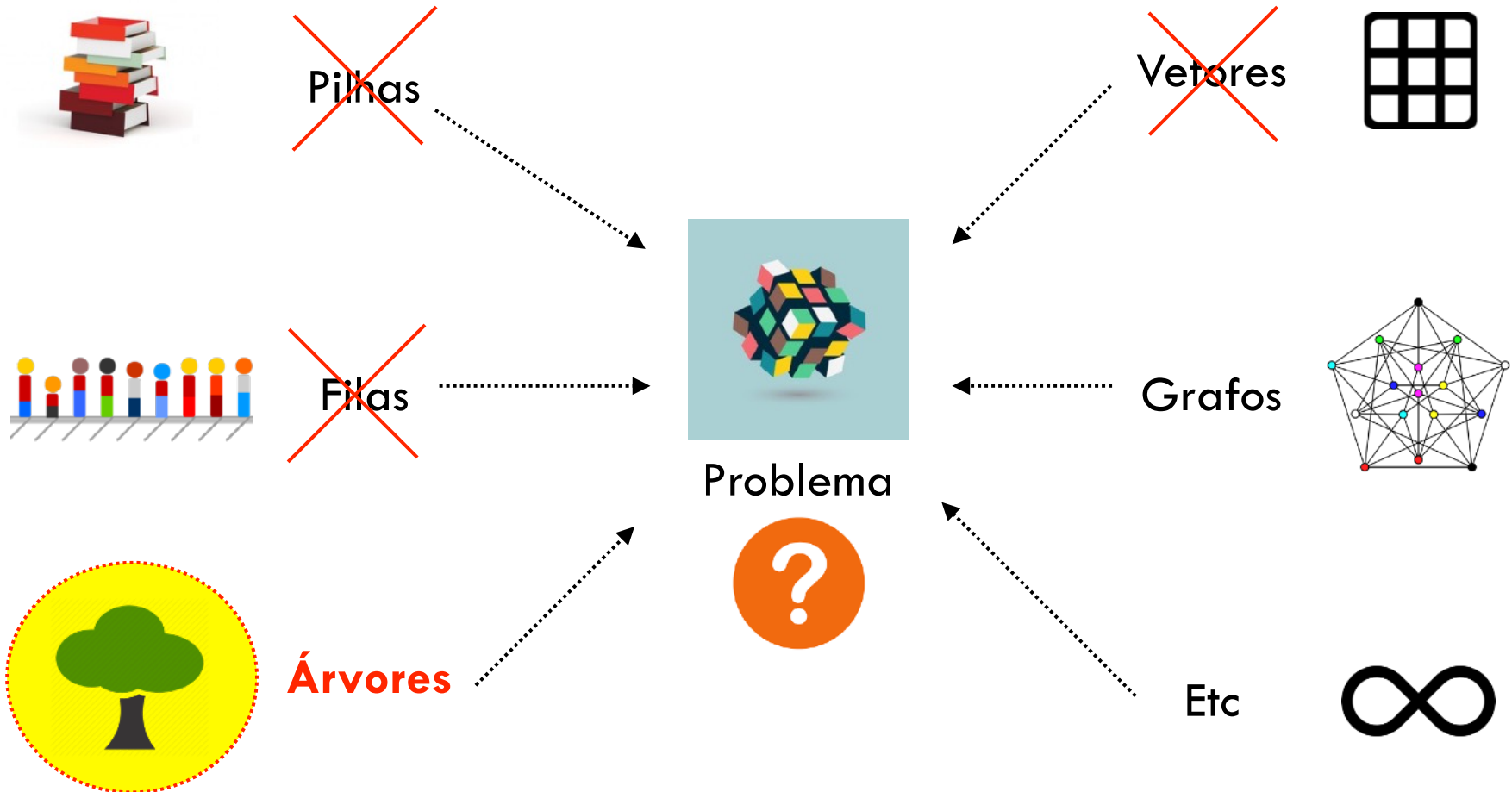
Roteiro

- 1** Introdução
- 2** Árvores AVLs
- 3** Inserção em AVLs
 - A** Rotações simples
 - B** Rotações duplas
- 4** Referências

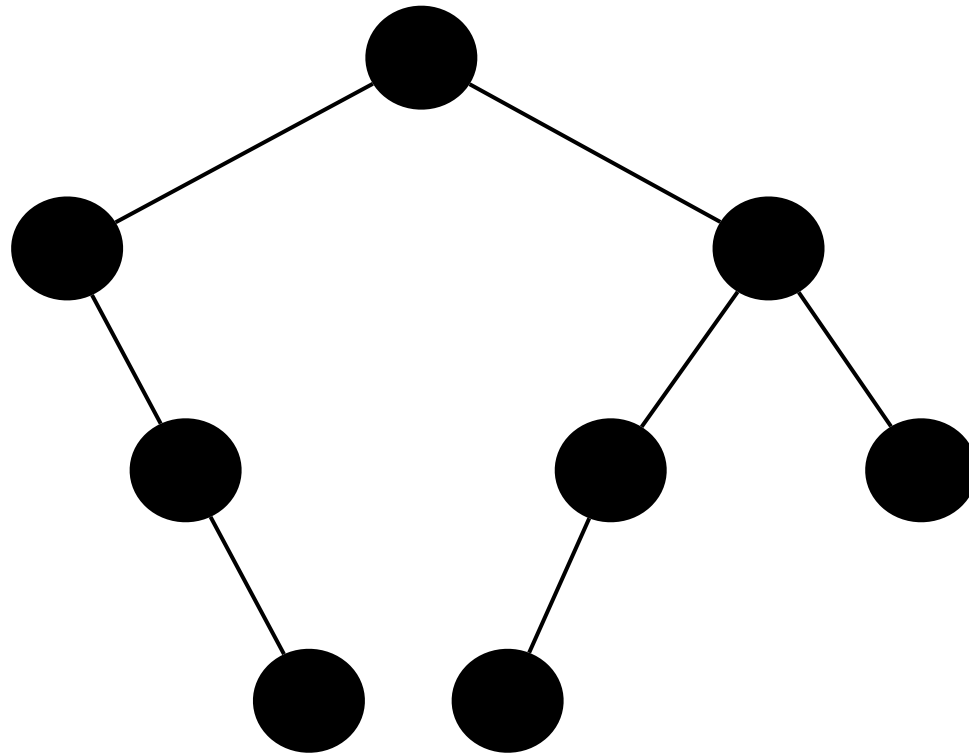
Roteiro

- 1** Introdução
- 2** Árvores AVLs
- 3** Inserção em AVLs
 - A** Rotações simples
 - B** Rotações duplas
- 4** Referências

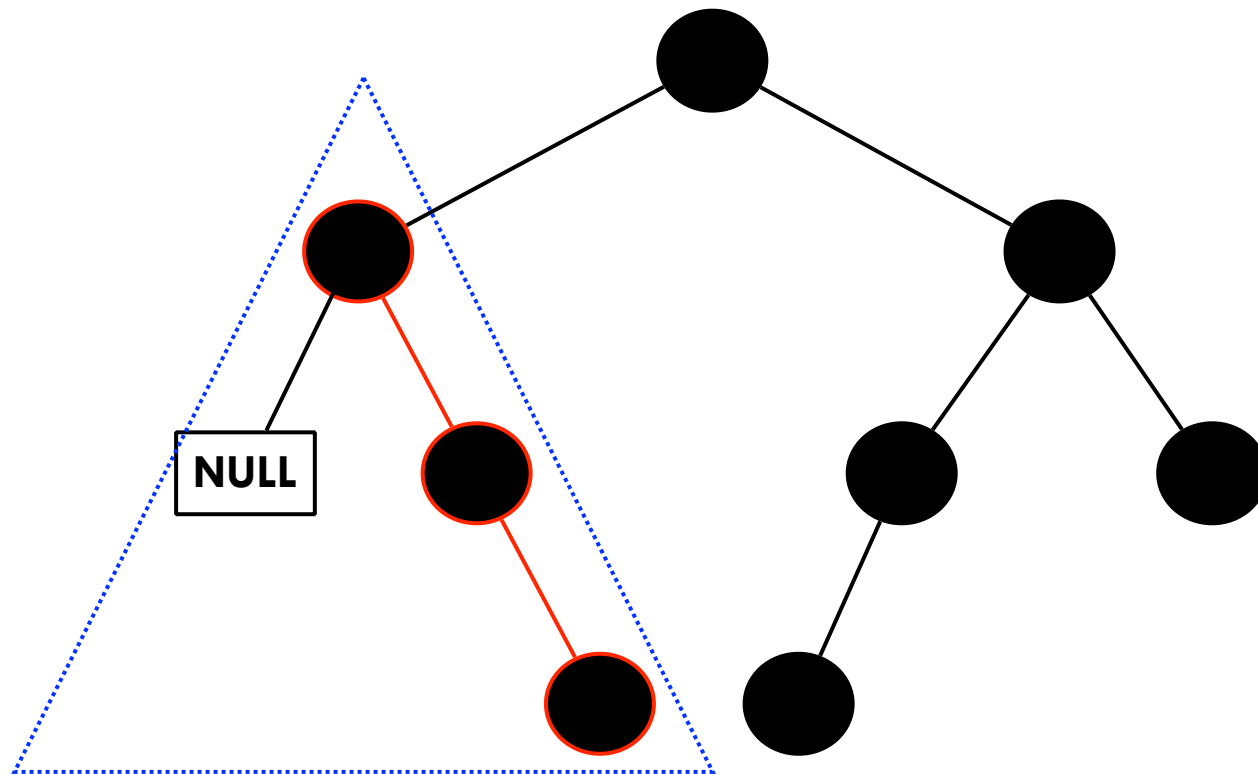
Introdução



Introdução

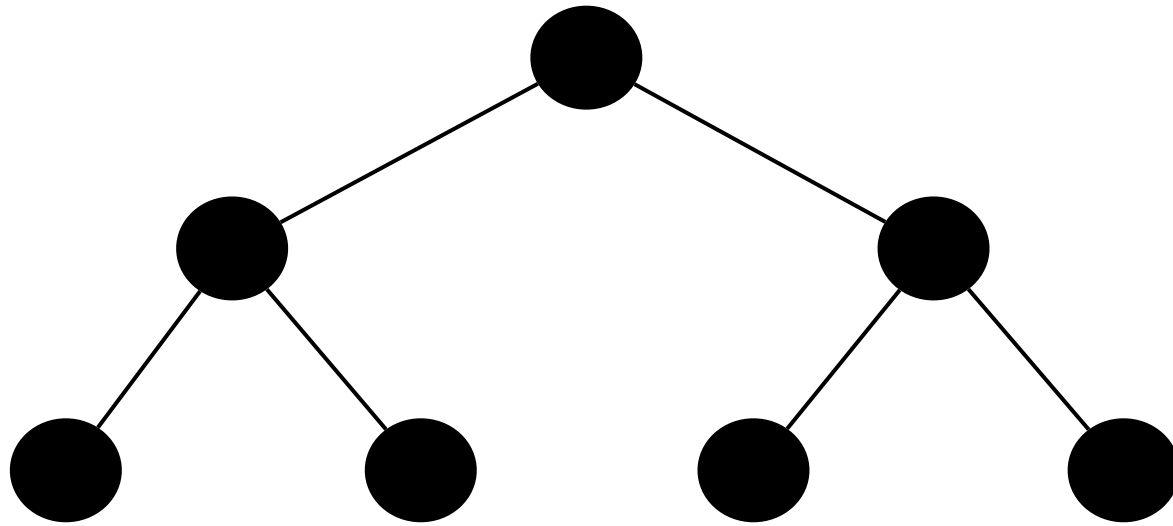


Introdução

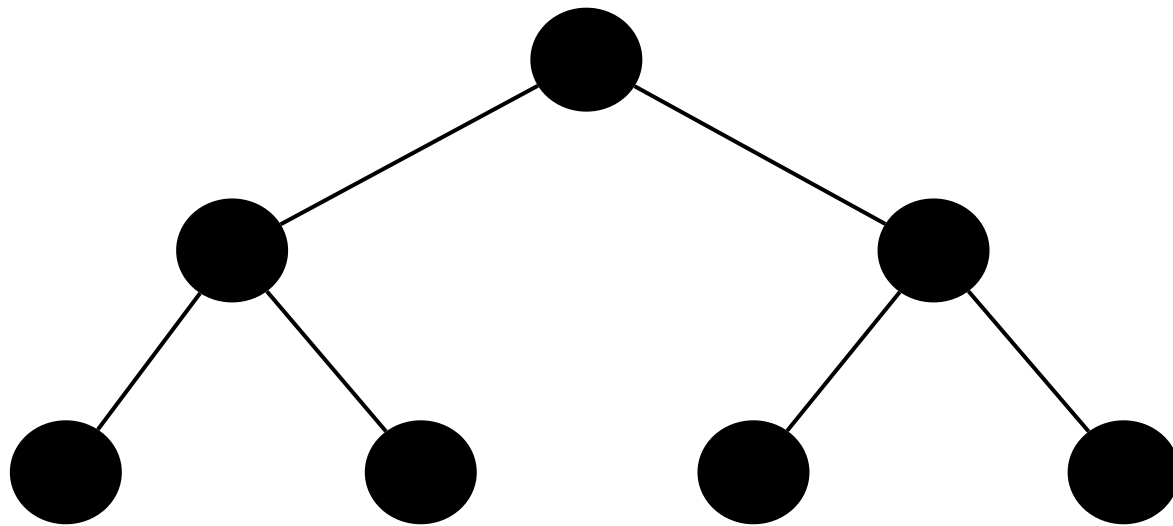


Desbalanceamento

Introdução

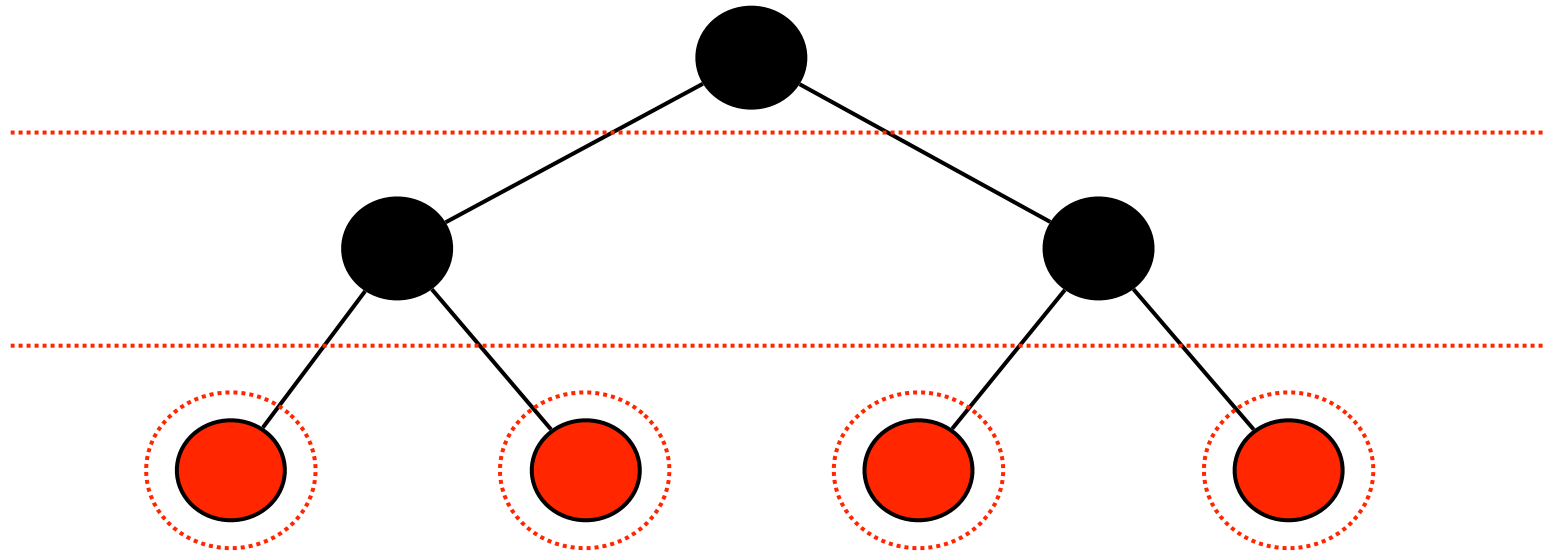


Introdução



Árvore balanceada
(elementos distribuídos homogeneamente)

Introdução



Árvore balanceada
(elementos distribuídos homogeneamente)

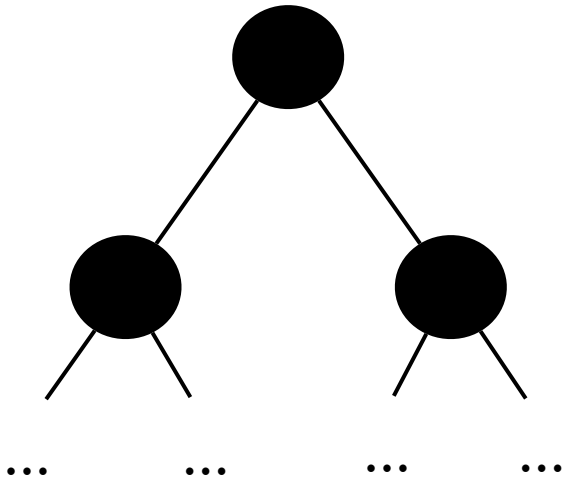
Folhas em no máximo 2 níveis distintos

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores AVLs
- 3 Inserção em AVLs
 - A Rotações simples
 - B Rotações duplas
- 4 Referências

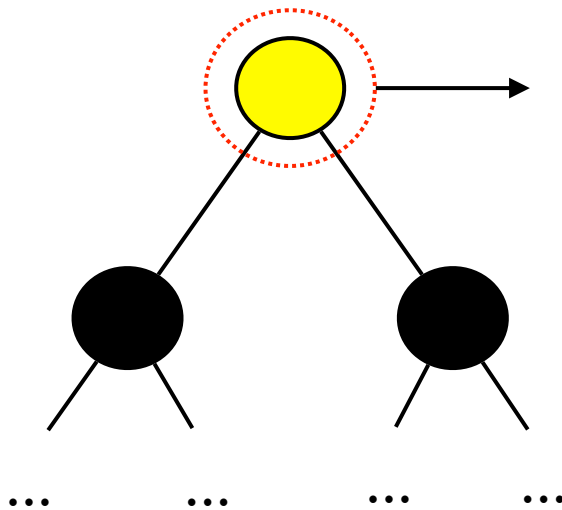
Árvores AVLs

AVL = Gregory **A**delson-**V**elsky, Evgenii **L**andis (1962)



Árvores AVLs

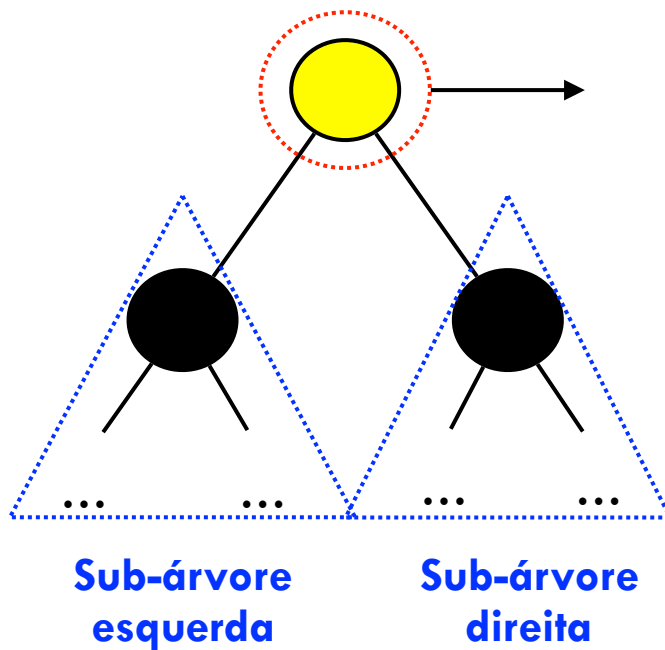
AVL = Gregory **A**delson-**V**elsky, Evgenii **L**andis (1962)



Fator de balanceamento
 $bF = hD - hE$

Árvores AVLs

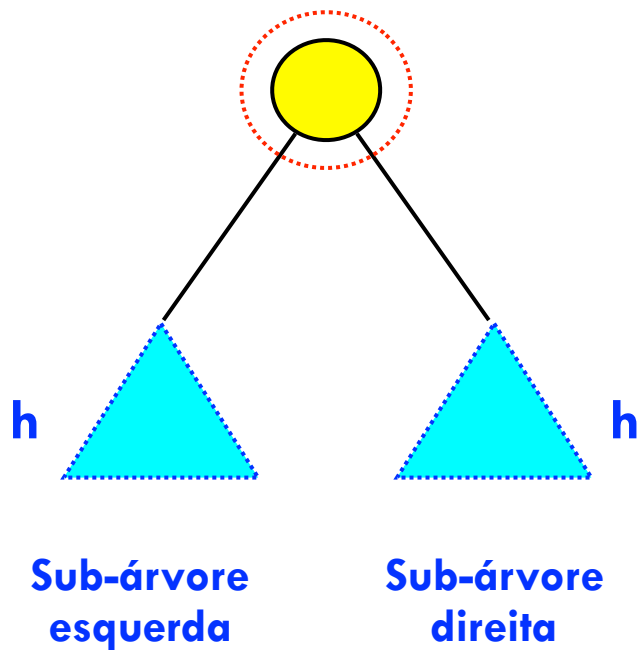
AVL = Gregory **A**delson-**V**elsky, Evgenii **L**andis (1962)



Fator de balanceamento
 $bF = hD - hE$

Árvores AVLs

a) Sub-árvores de mesma altura ($bF = 0$)



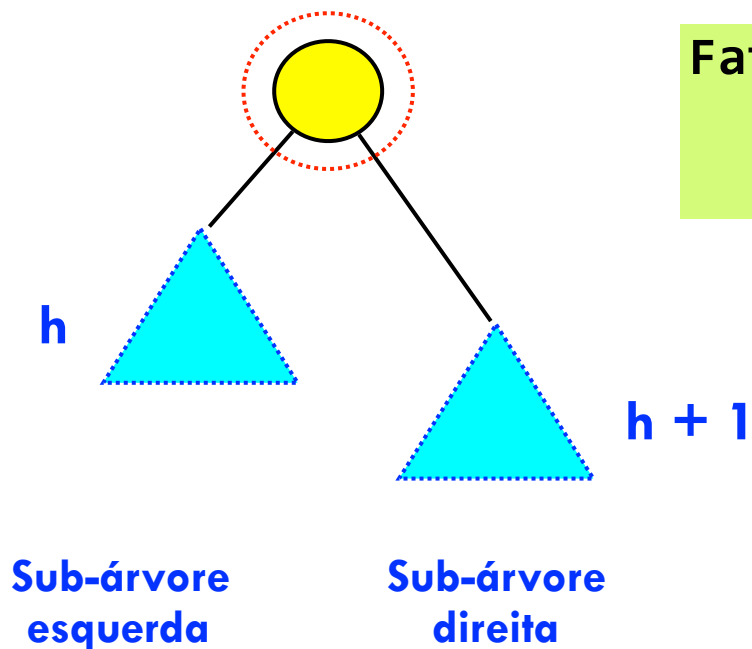
Fator de balanceamento

$$bF = h - h$$

$$bF = 0$$

Árvores AVLs

b) Sub-árvore da direita é maior (bF = +1)



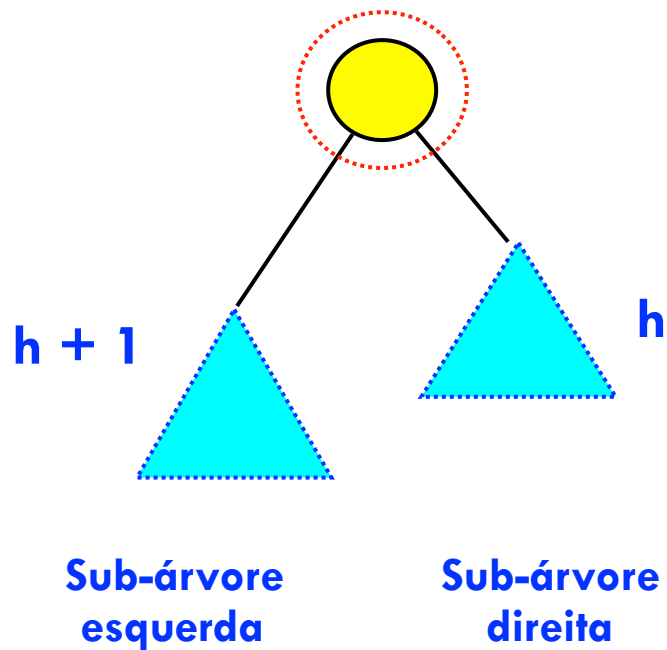
Fator de balanceamento

$$bF = (h+1) - h$$

$$bF = +1$$

Árvores AVLs

c) Sub-árvore da esquerda é maior ($bF = -1$)

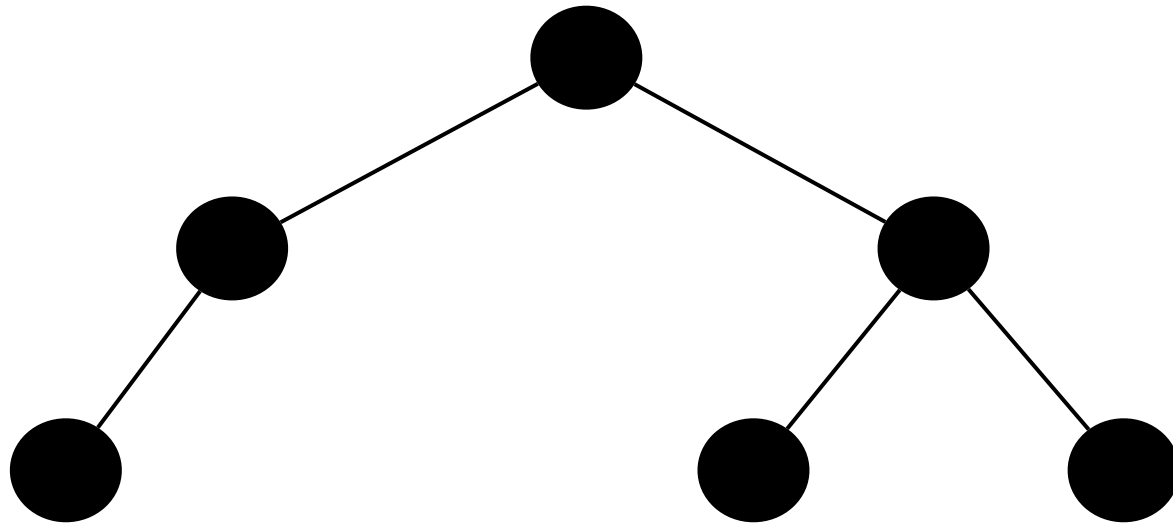


Fator de balanceamento

$$bF = h - (h + 1)$$

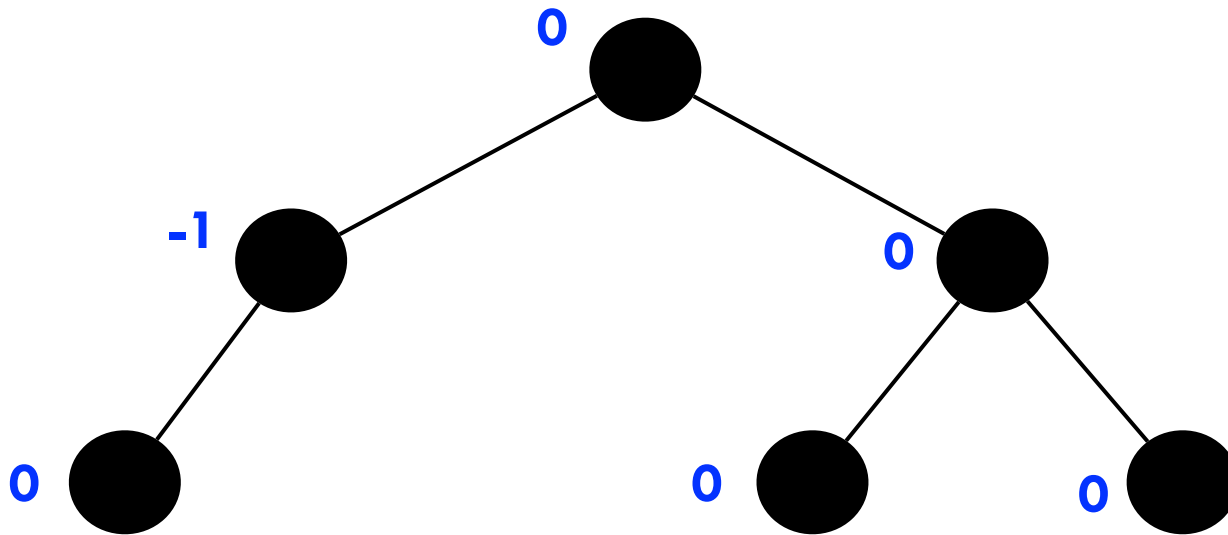
$$bF = -1$$

Árvores AVLs



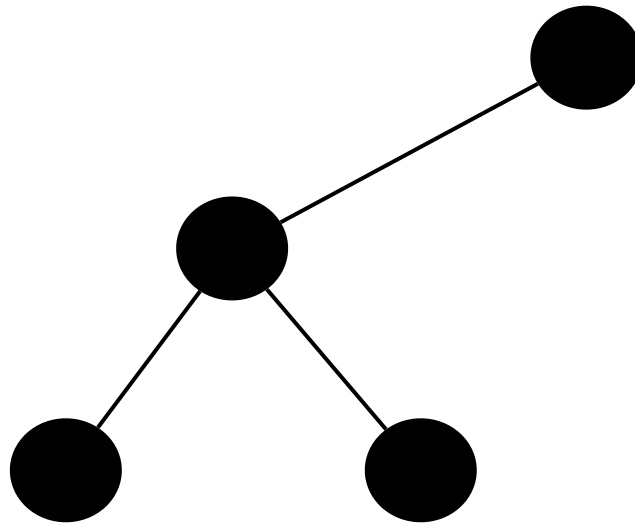
Todos os nós possuem fator de balanceamento $\{-1, 0, +1\}$

Árvores AVLs



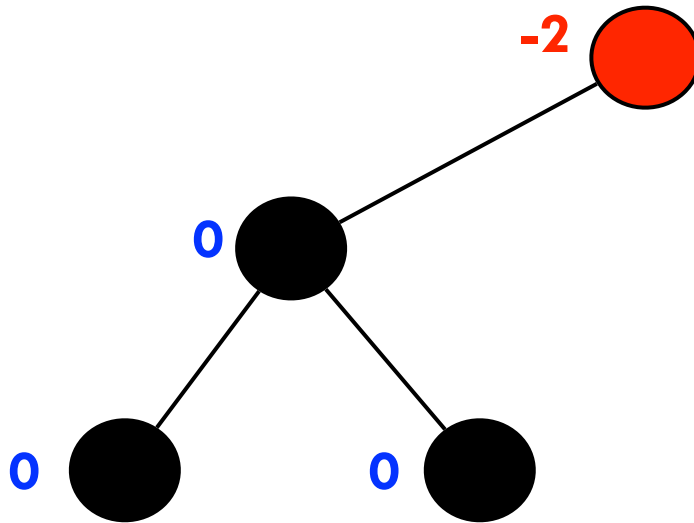
Todos os nós possuem fator de balanceamento $\{-1, 0, +1\}$

Árvores AVLs



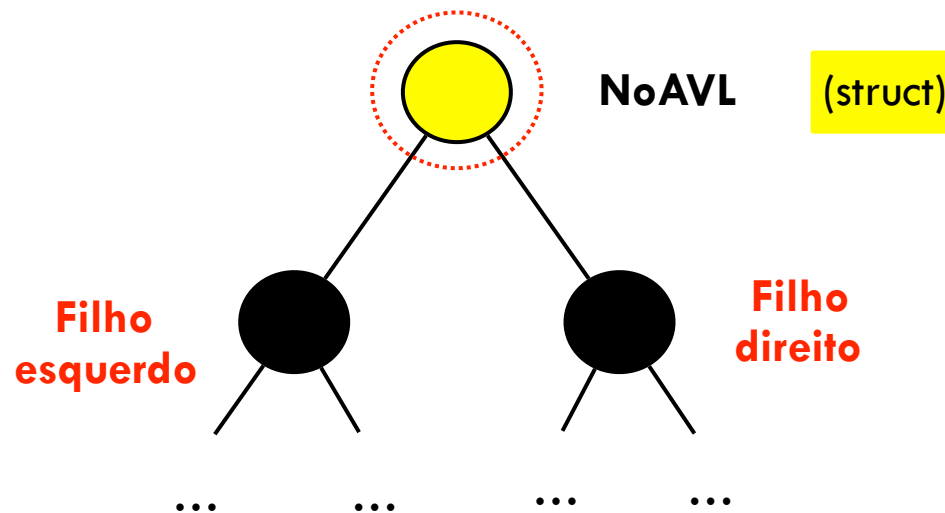
Se (algum fator $> +1$ ou < -1) :
Desbalanceamento

Árvores AVLs



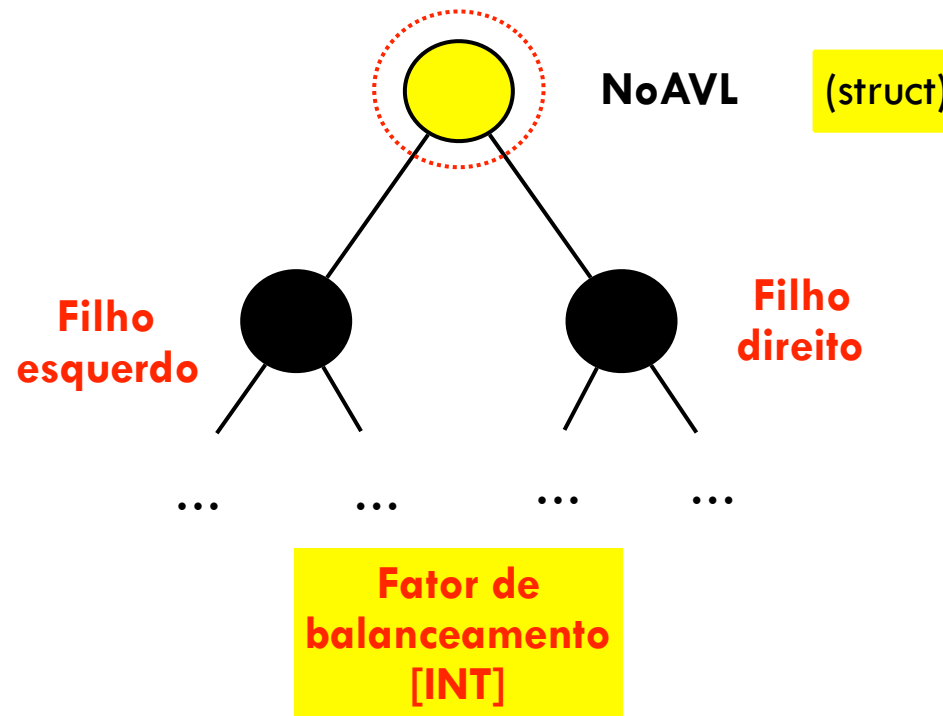
Se (algum fator $> +1$ ou < -1) :
Desbalanceamento

Árvores AVLs



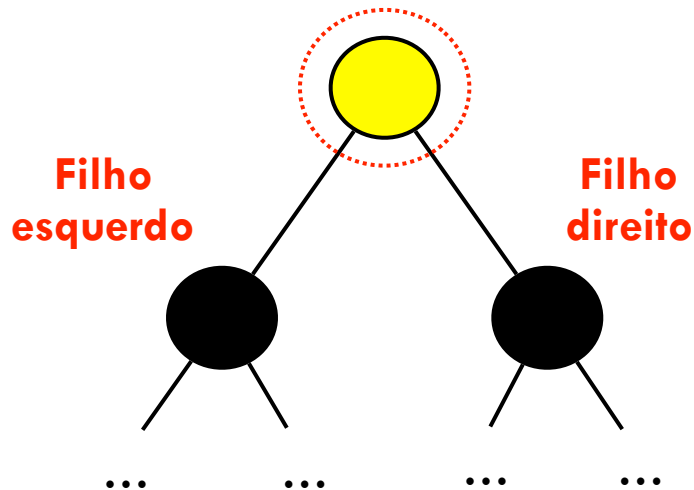
Árvores AVLs

Sentido
verificação



Árvores AVLs

NoAVL



**Fator de
balanceamento
[INT]**

NoAVL

1. **inteiro** chave
2. NoAVL* filho à direita
3. NoAVL* filho à esquerda
4. NoAVL* pai [opcional]
5. **inteiro** fatorBalanceamento

Exercício 01

- Implementar Tipos Abstratos necessários para Árvores AVL

Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores AVLs
- 3 Inserção em AVLs
 - A Rotações simples
 - B Rotações duplas
- 4 Referências

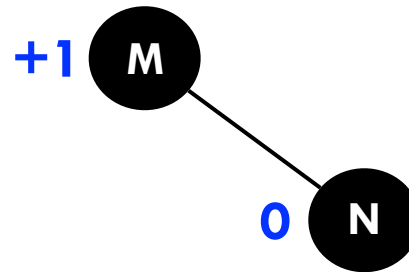
Inserções em AVL

- Sequência de inserções
 - {M, N, O, L, K, Q, P, H, I, A}

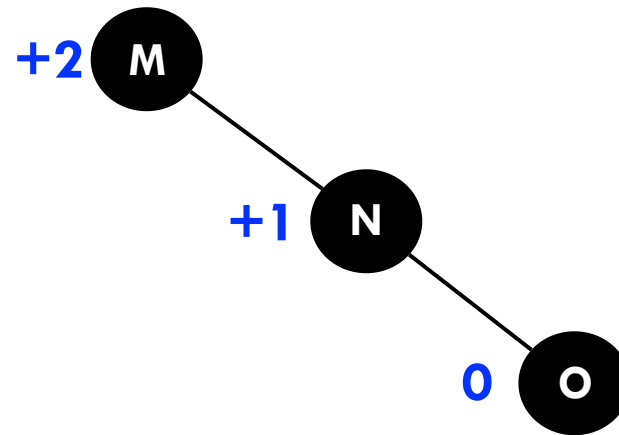
Inserções em AVL



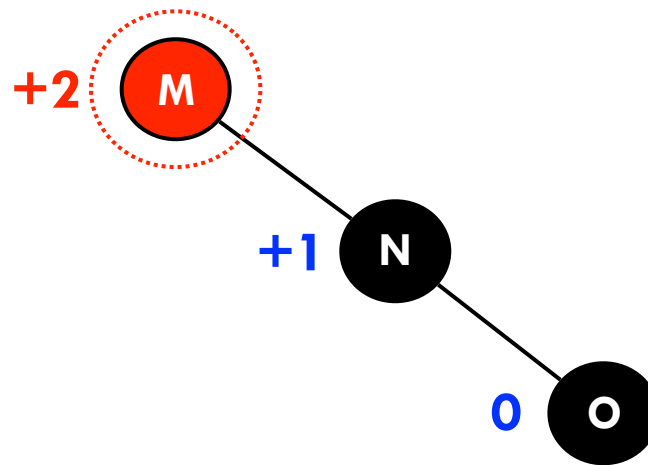
Inserções em AVL



Inserções em AVL



Inserções em AVL

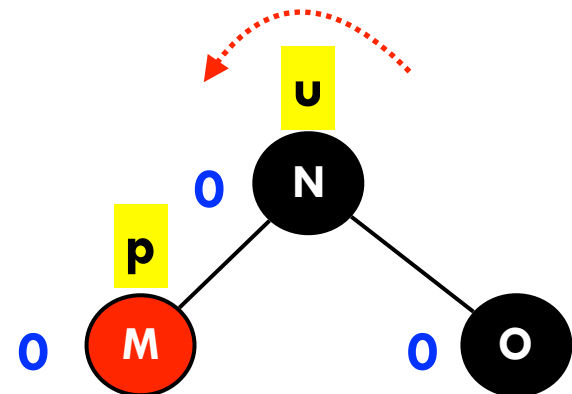
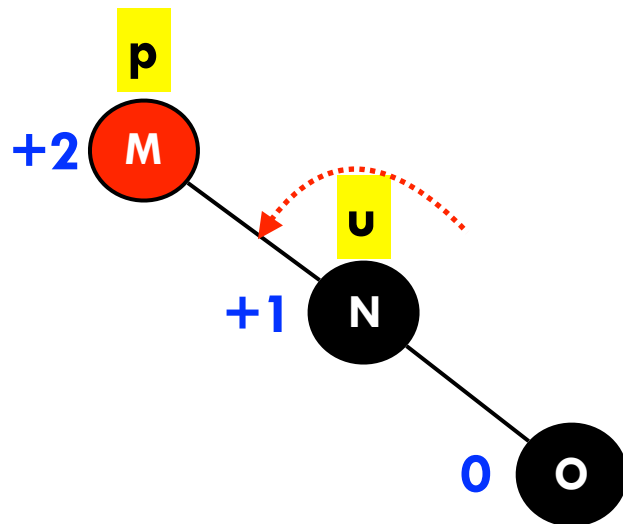


Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores AVLs
- 3 Inserção em AVLs
 - A Rotações simples
 - B Rotações duplas
- 4 Referências

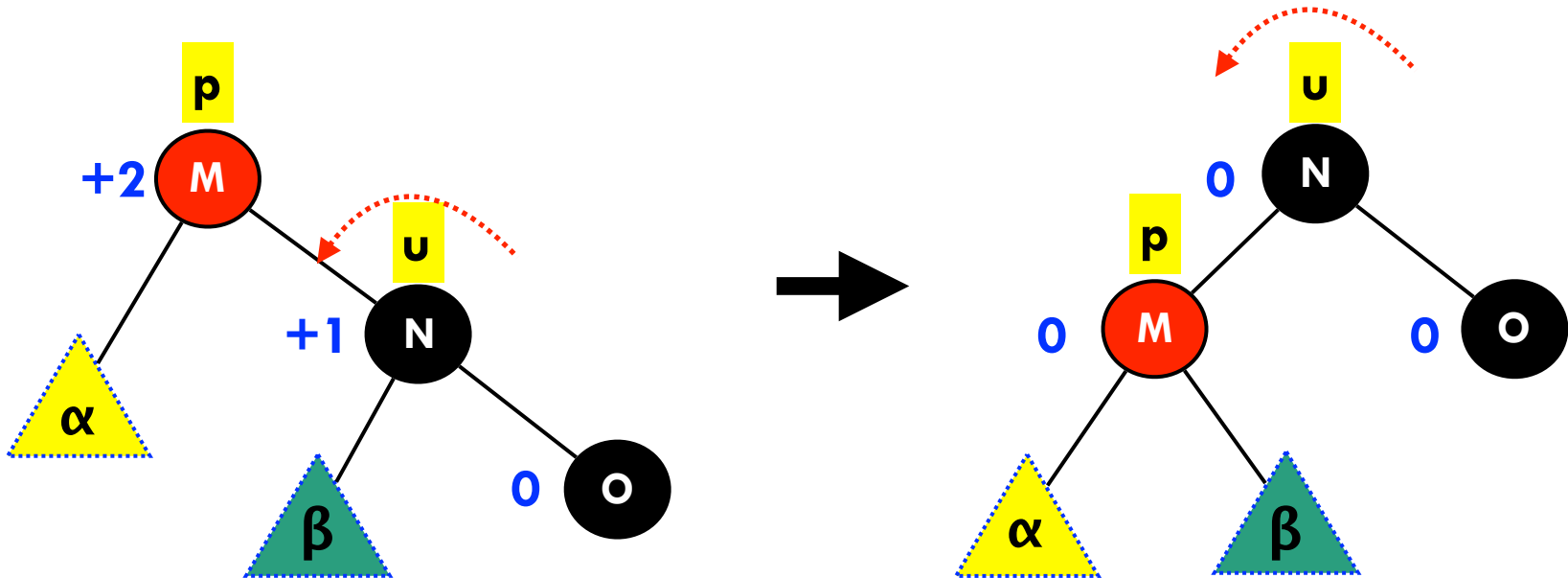
Inserções em AVL

1) Rotação simples p esquerda

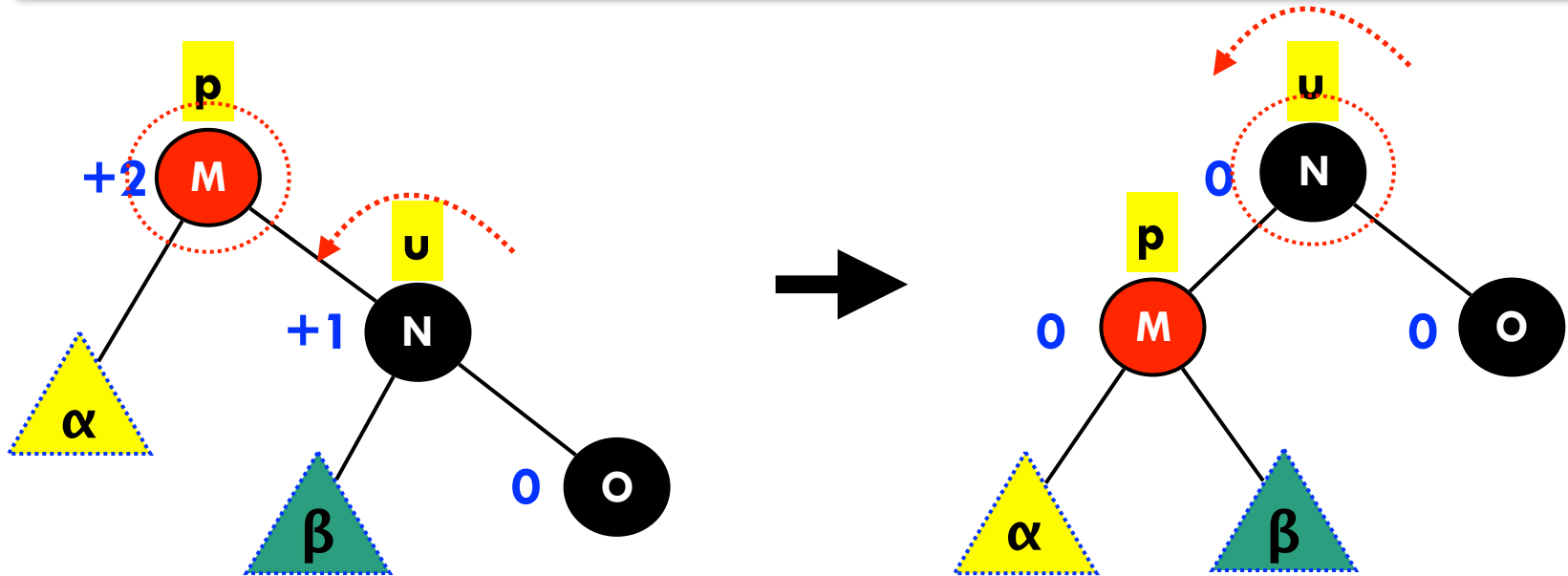


Inserções em AVL

1) Rotação simples p esquerda



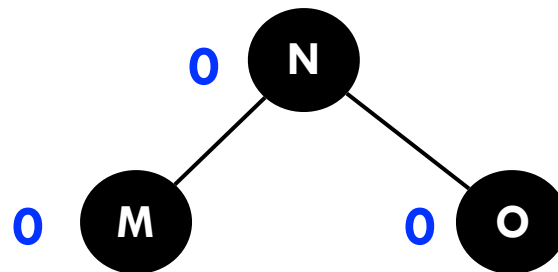
Inserções em AVL



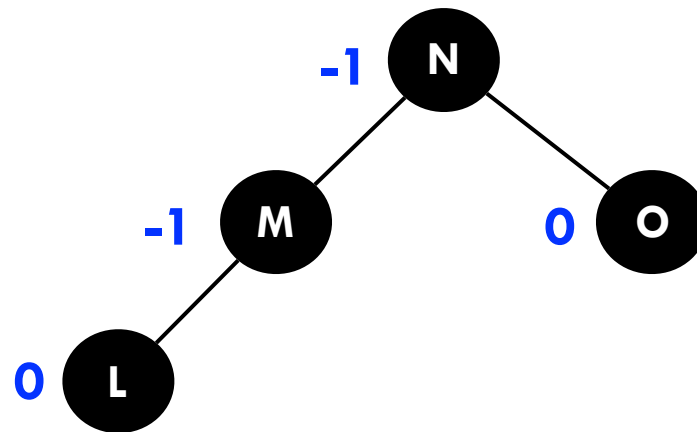
Rotação simples p esquerda

1. $u = p \rightarrow \text{direita}$
2. $p \rightarrow \text{direita} = u \rightarrow \text{esquerda}$
3. $u \rightarrow \text{esquerda} = p$
4. $p \rightarrow \text{balance} = 0$
5. $p = u$

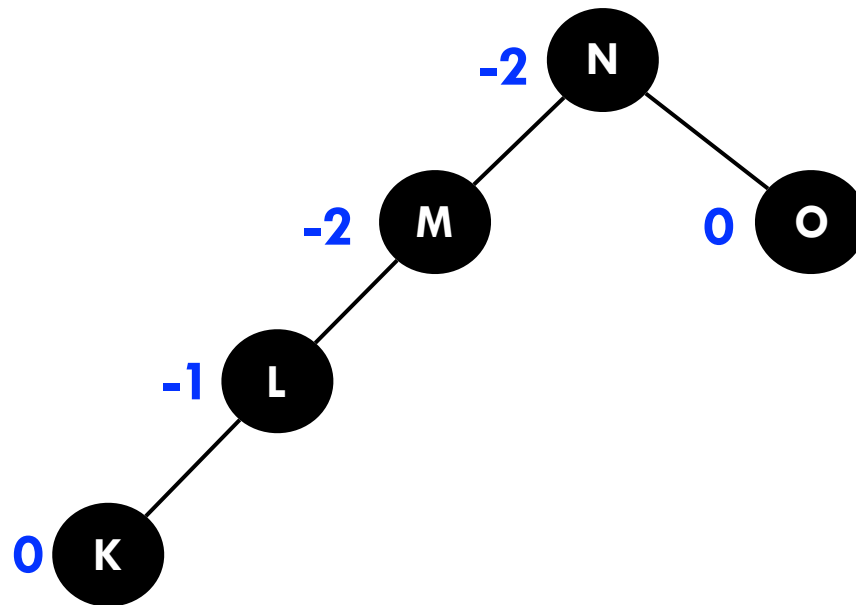
Inserções em AVL



Inserções em AVL

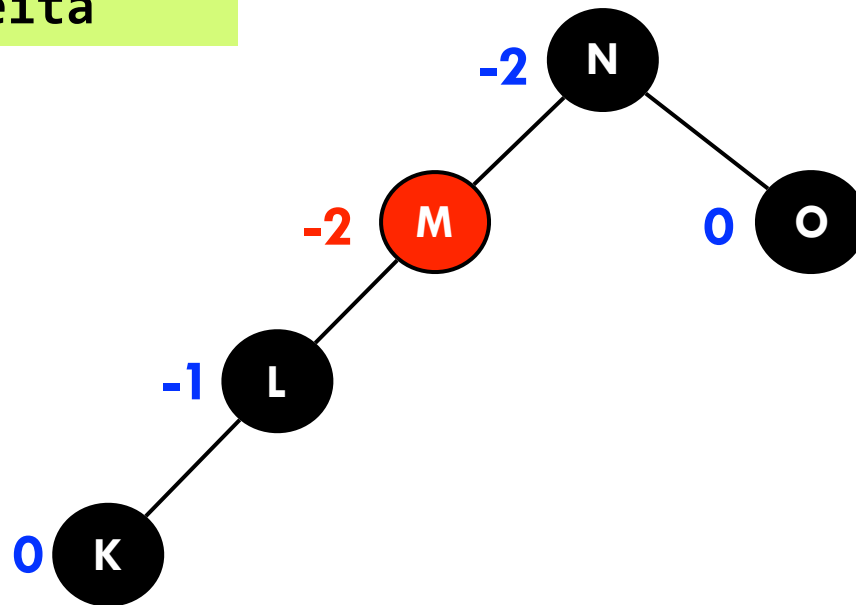


Inserções em AVL



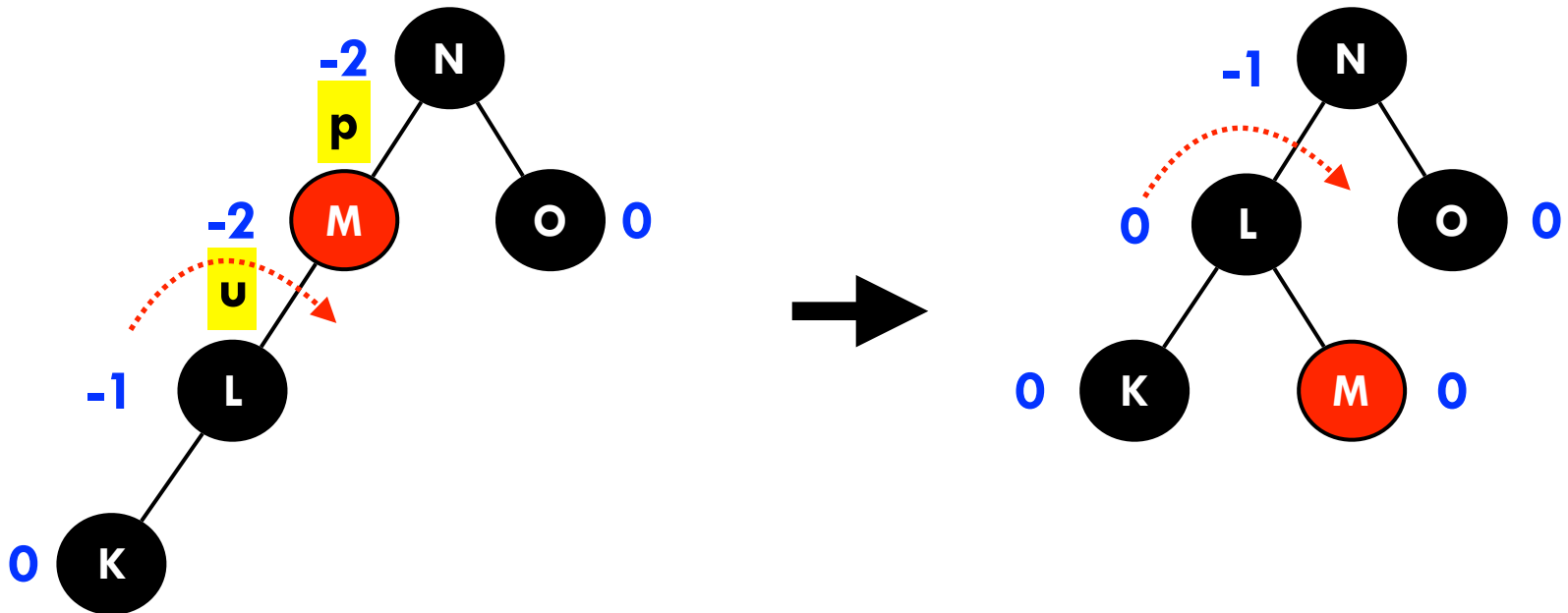
Inserções em AVL

2) Rotação simples p direita



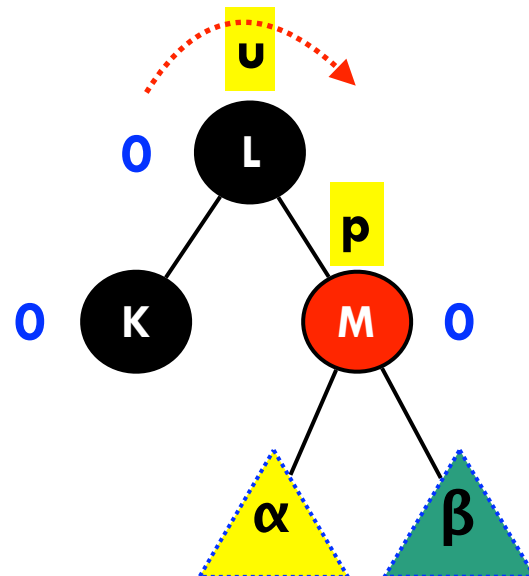
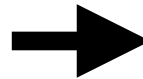
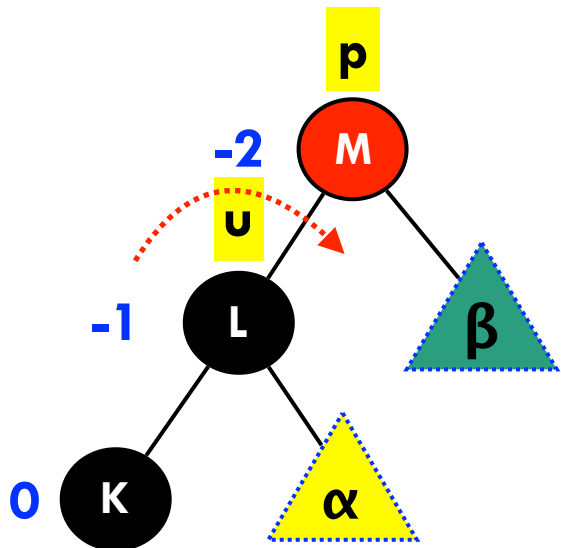
Inserções em AVL

2) Rotação simples p direita



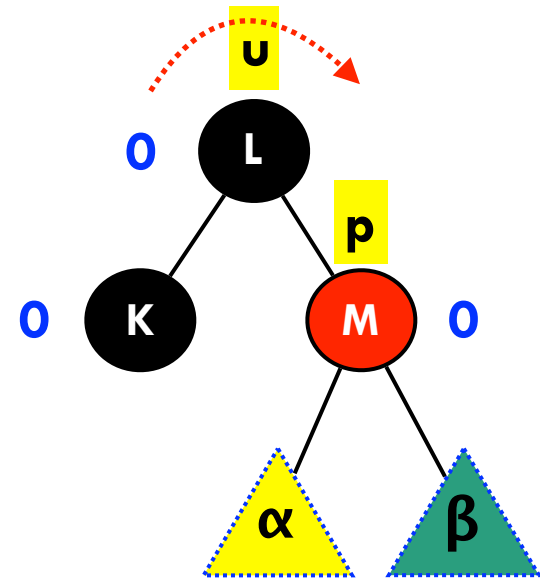
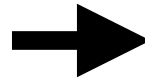
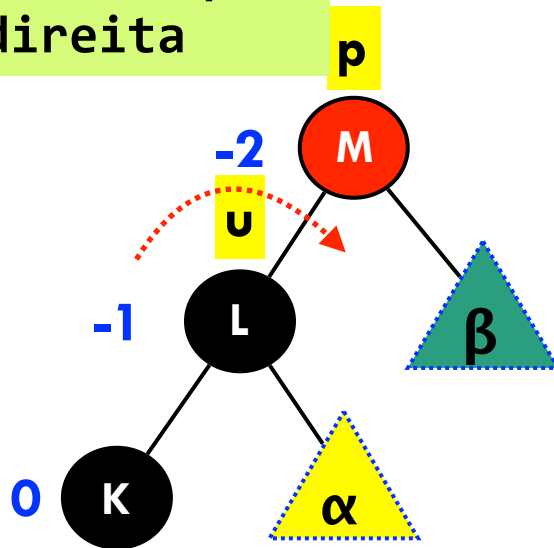
Inserções em AVL

2) Rotação simples p direita



Inserções em AVL

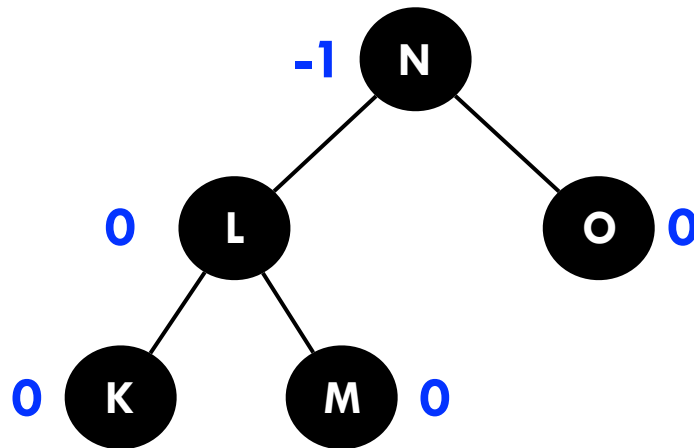
2) Rotação simples p direita



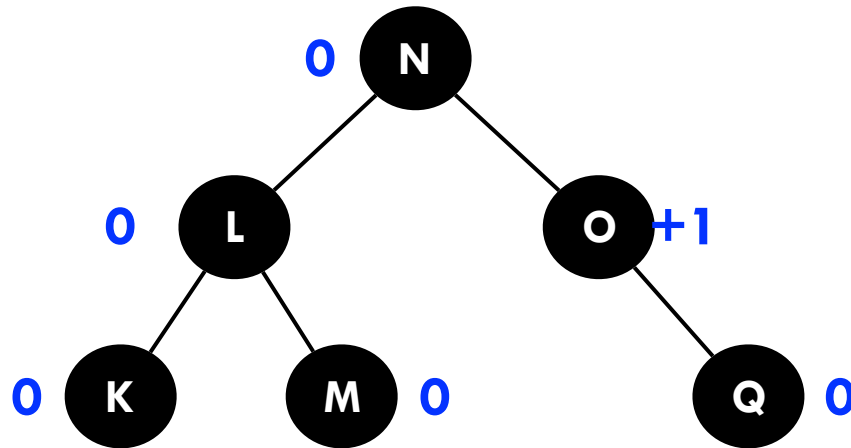
Rotação simples p direita

1. $u = p \rightarrow \text{esquerda}$
2. $p \rightarrow \text{esquerda} = u \rightarrow \text{direita}$
3. $u \rightarrow \text{direita} = p$
4. $p \rightarrow \text{balance} = 0$
5. $p = u$

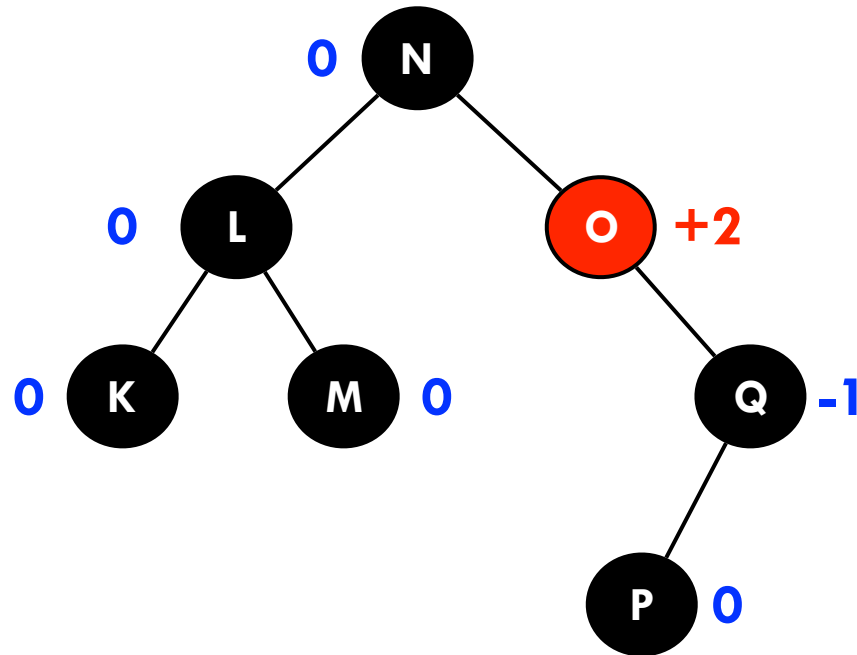
Inserções em AVL



Inserções em AVL



Inserções em AVL

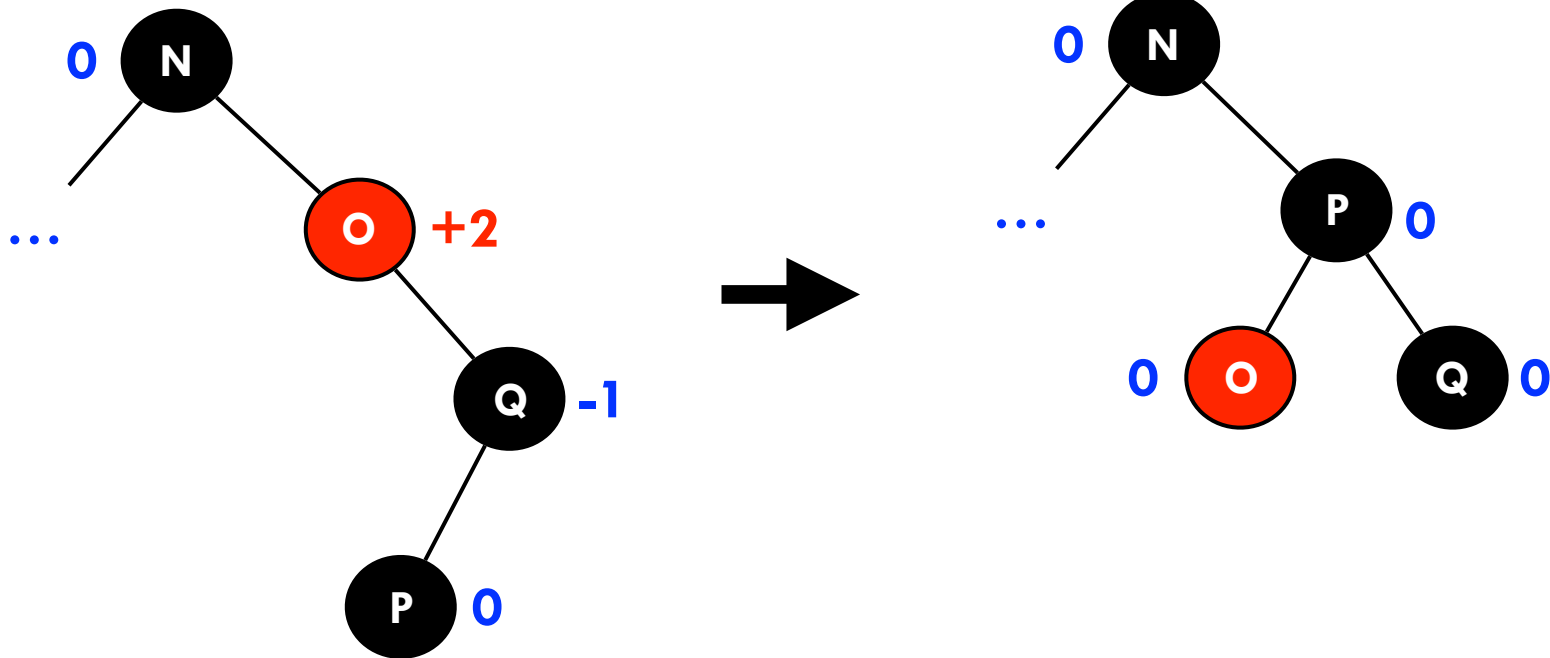


Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores AVLs
- 3 Inserção em AVLs
 - A Rotações simples
 - B Rotações duplas**
- 4 Referências

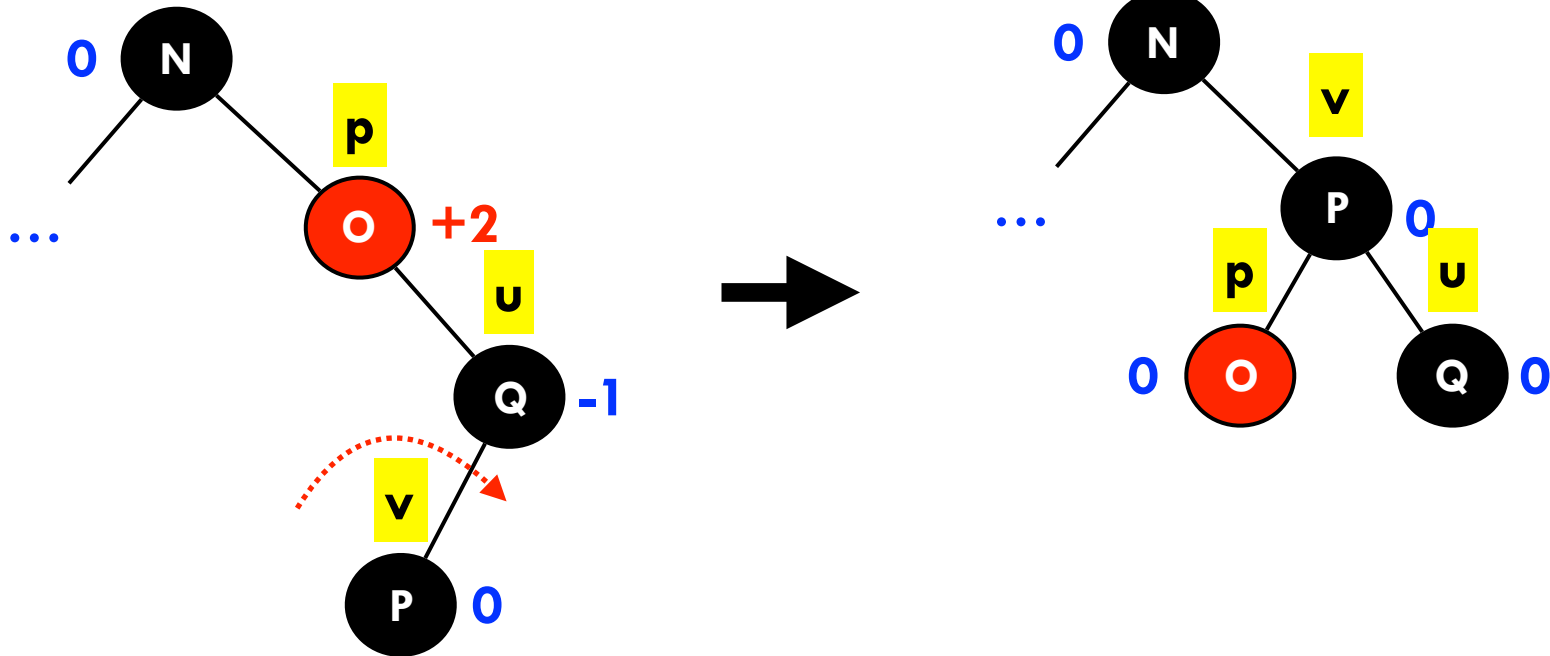
Inserções em AVL

3) Rotação dupla p esquerda



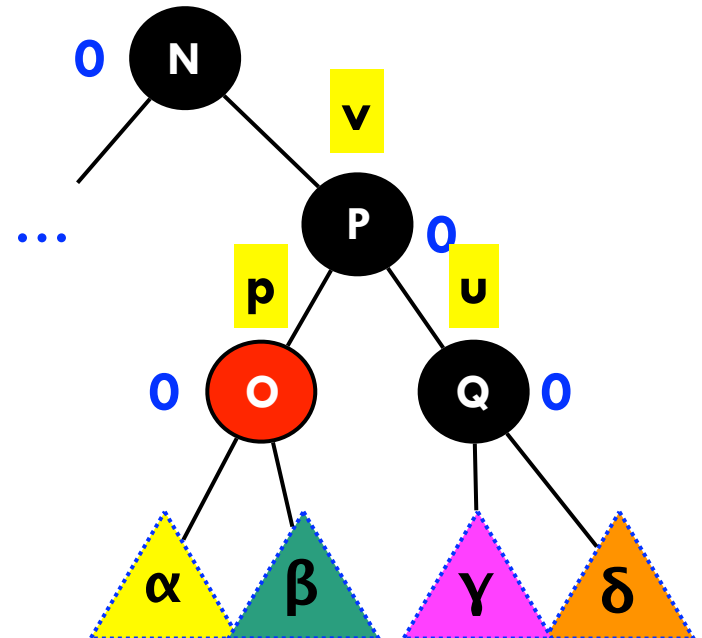
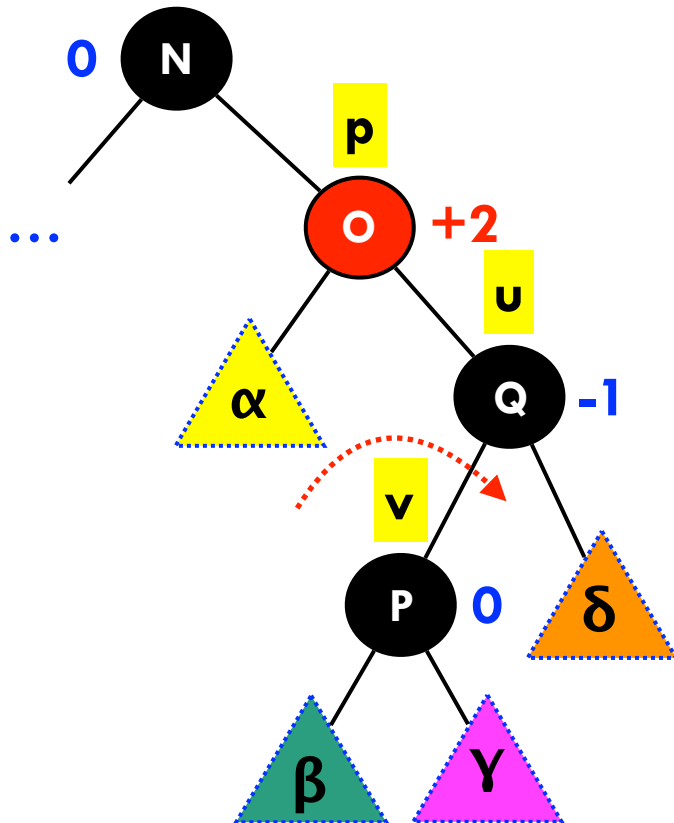
Inserções em AVL

3) Rotação dupla p esquerda

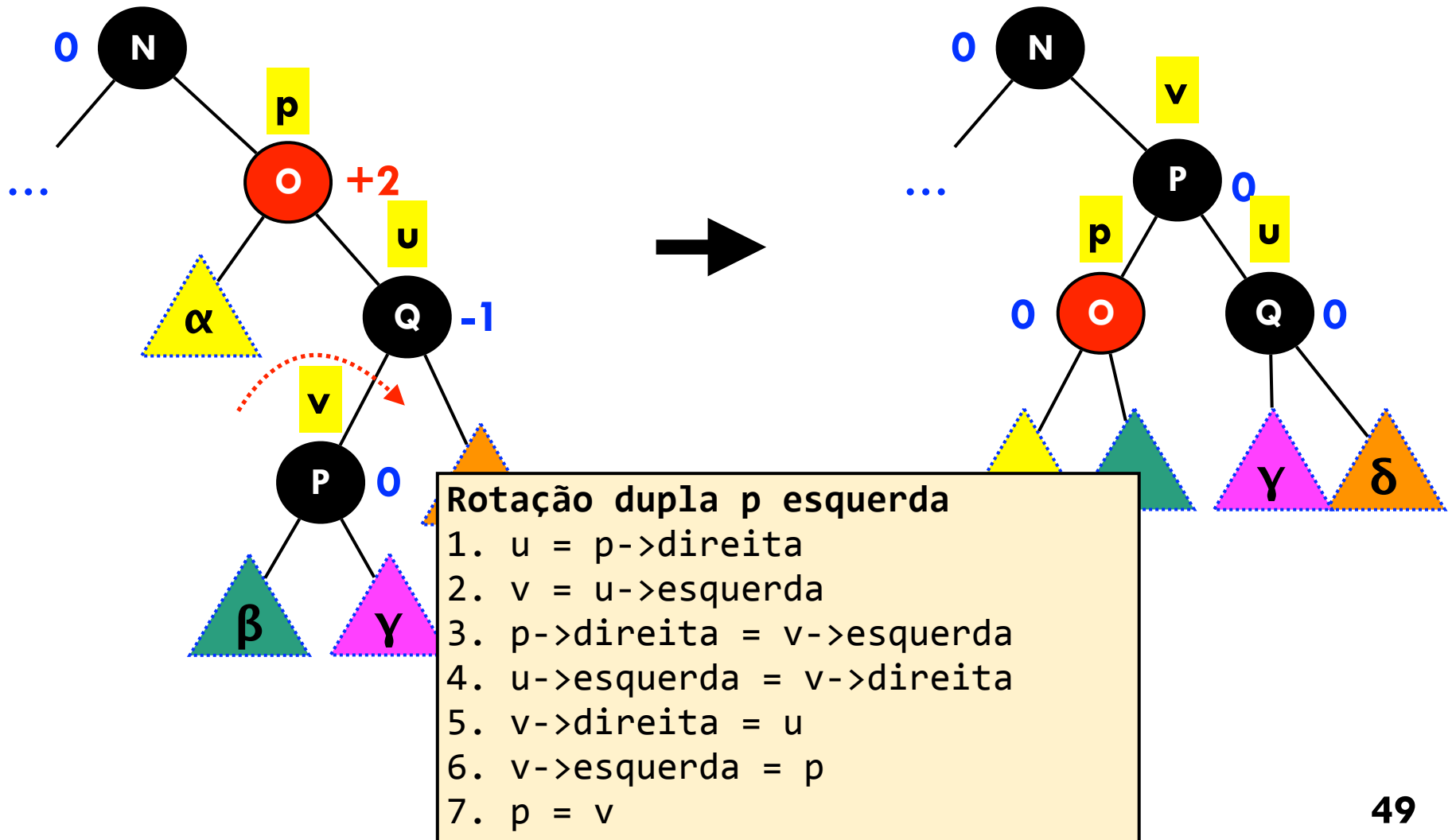


Inserções em AVL

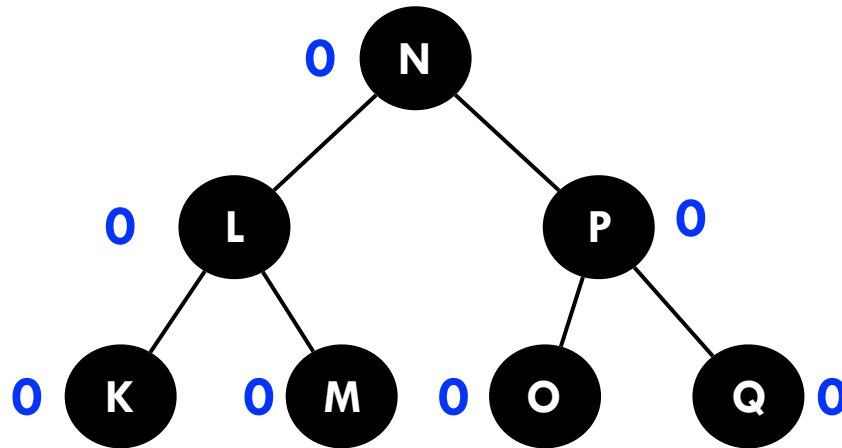
3) Rotação dupla p esquerda



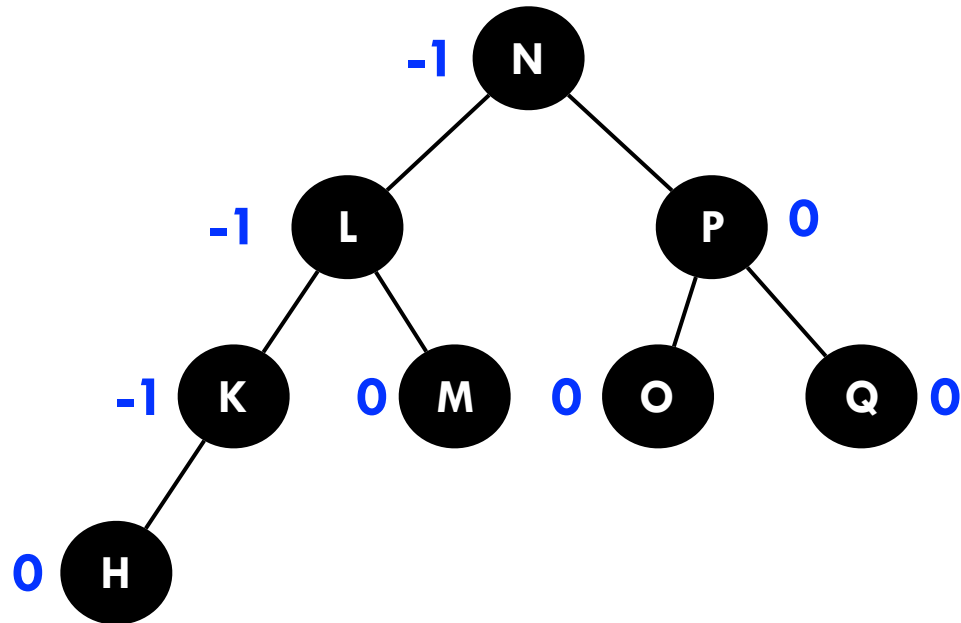
Inserções em AVL



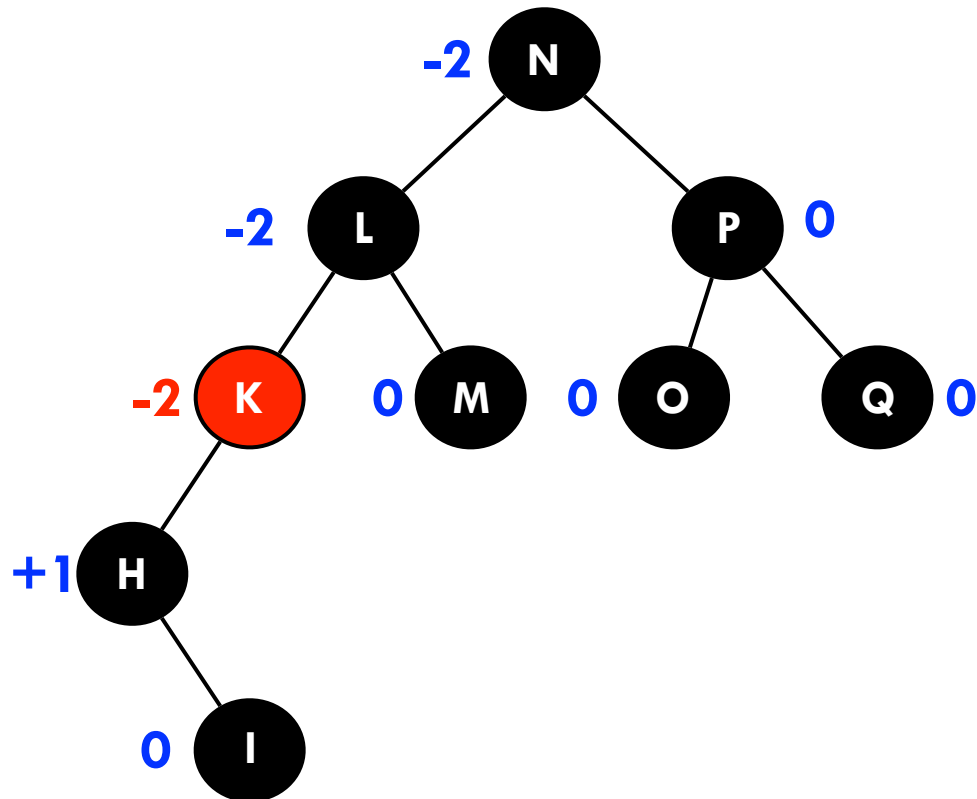
Inserções em AVL



Inserções em AVL

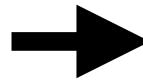
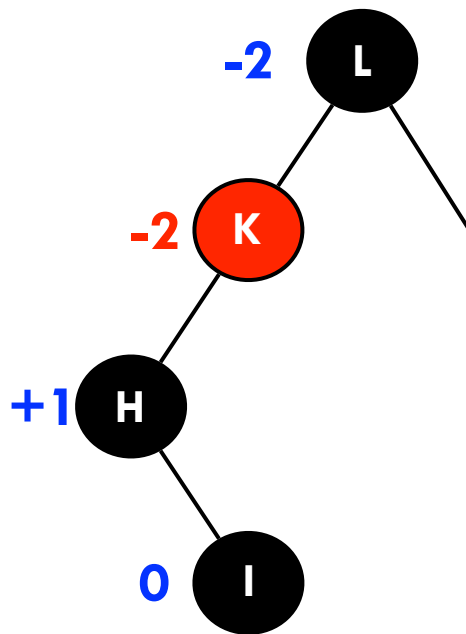


Inserções em AVL



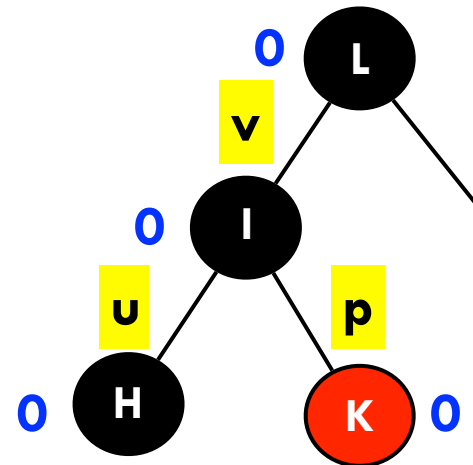
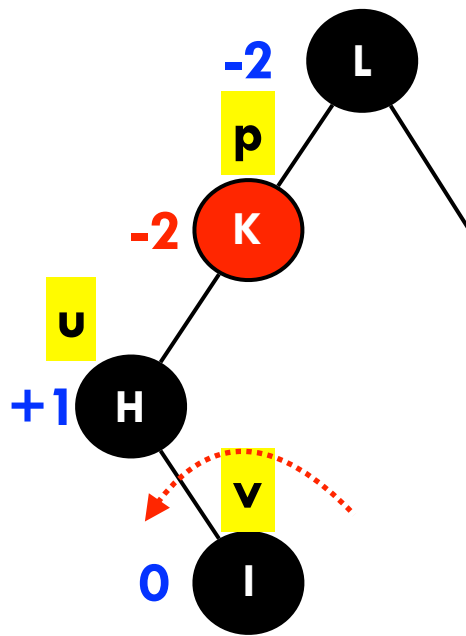
Inserções em AVL

4) Rotação dupla p direita



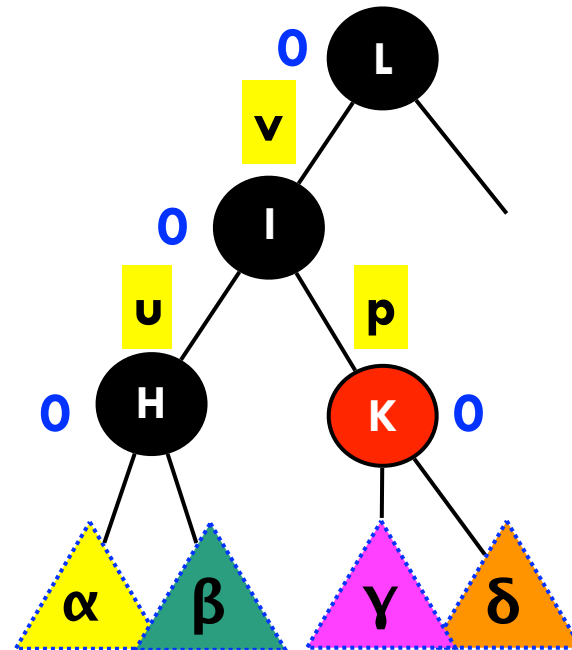
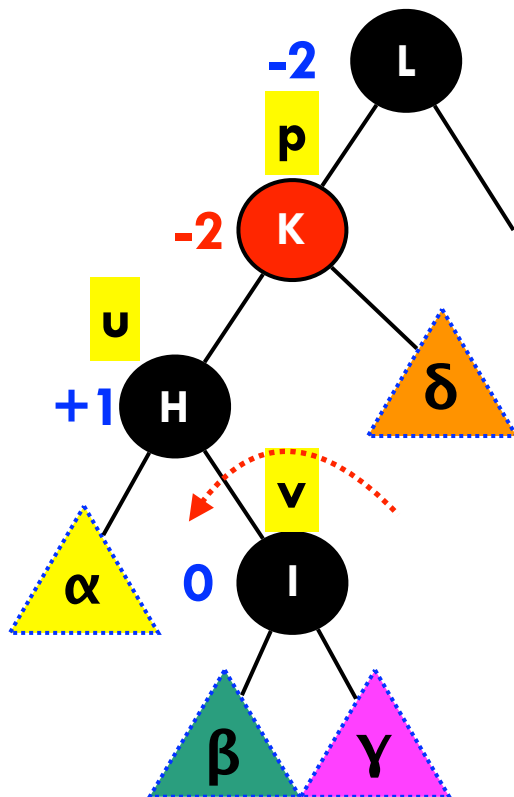
Inserções em AVL

4) Rotação dupla p direita



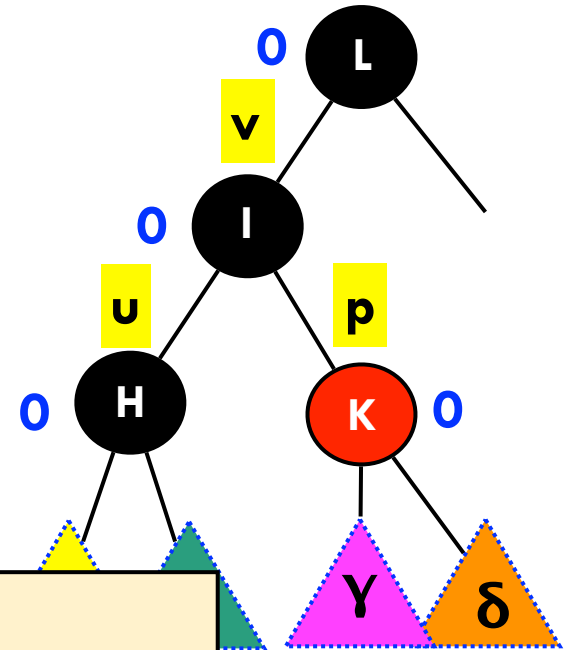
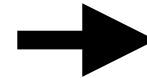
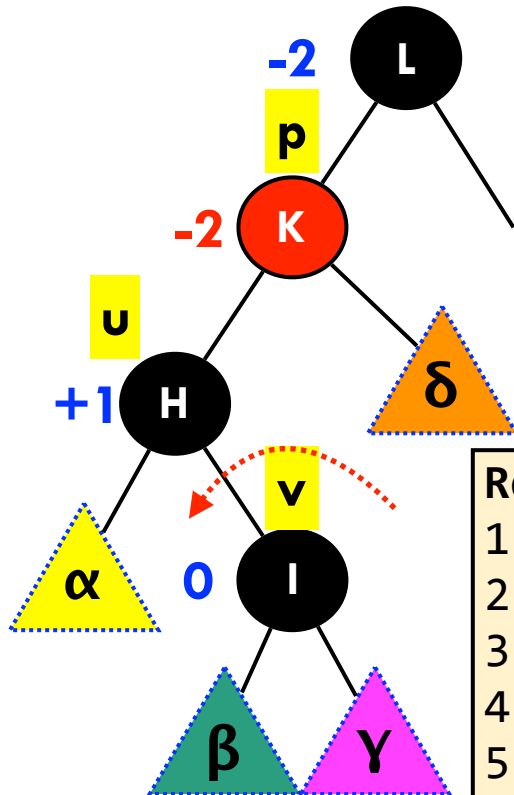
Inserções em AVL

4) Rotação dupla p direita



Inserções em AVL

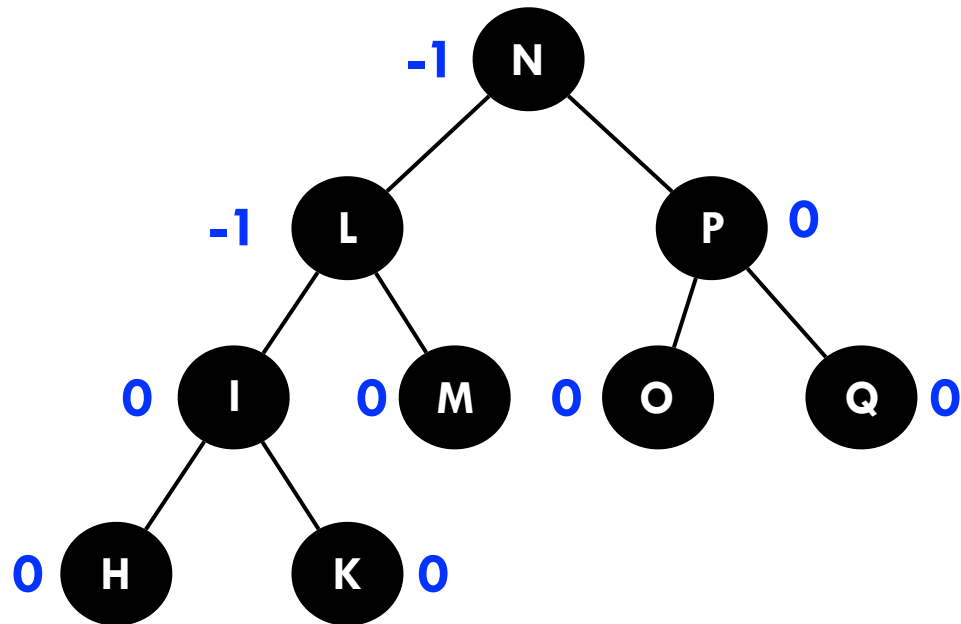
4) Rotação dupla p direita



Rotação dupla p direita

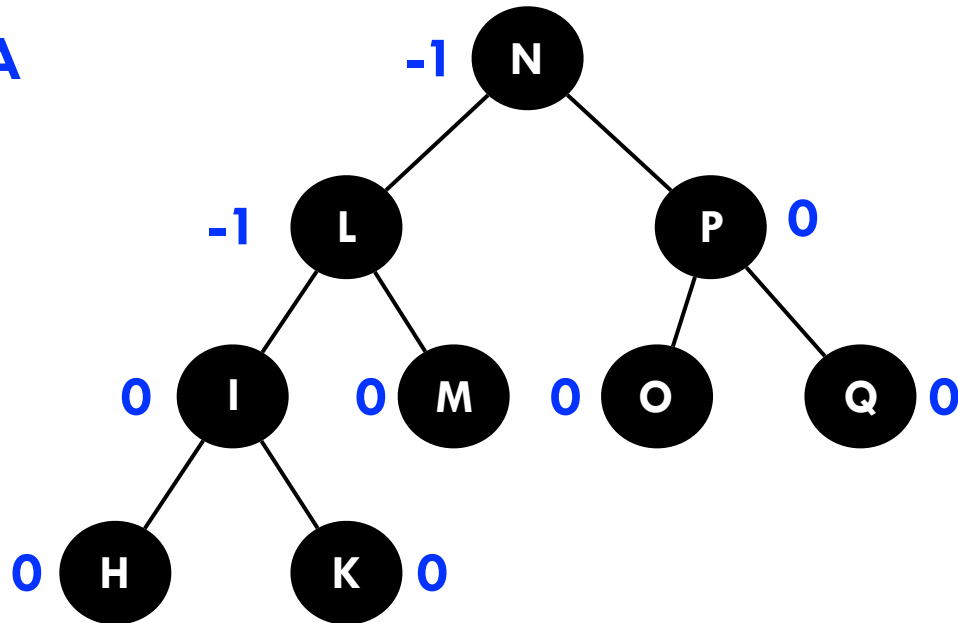
1. $u = p \rightarrow \text{esquerda}$
2. $v = u \rightarrow \text{direita}$
3. $p \rightarrow \text{esquerda} = v \rightarrow \text{direita}$
4. $u \rightarrow \text{direita} = v \rightarrow \text{esquerda}$
5. $v \rightarrow \text{direita} = p$
6. $v \rightarrow \text{esquerda} = u$
7. $p = v$

Inserções em AVL



Inserções em AVL

Inserir = A



Exercício 02

- Desenhe os passos de inserção para árvores AVLs em cada uma das seguintes sequências de números. Lembre-se de indicar as todas rotações realizadas:
 - a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 - b) 50, 25, 10, 5, 7, 3, 30, 20, 8, 15
 - c) 5 40 35 41 79 42 36 18 50 12

Exercício 03

- Descreva em pseudocódigo um algoritmo para inserção em árvores AVL

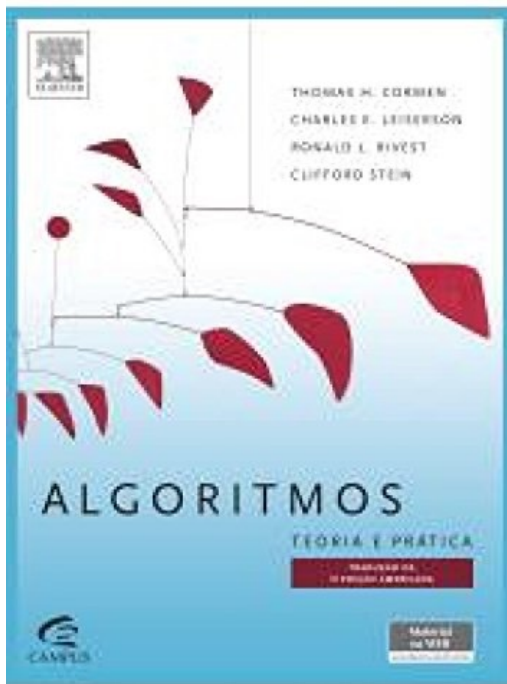
Exercício 04

- Implemente o algoritmo para inserção em árvores AVL. Se necessário, implemente funções adicionais para auxiliar no processo.

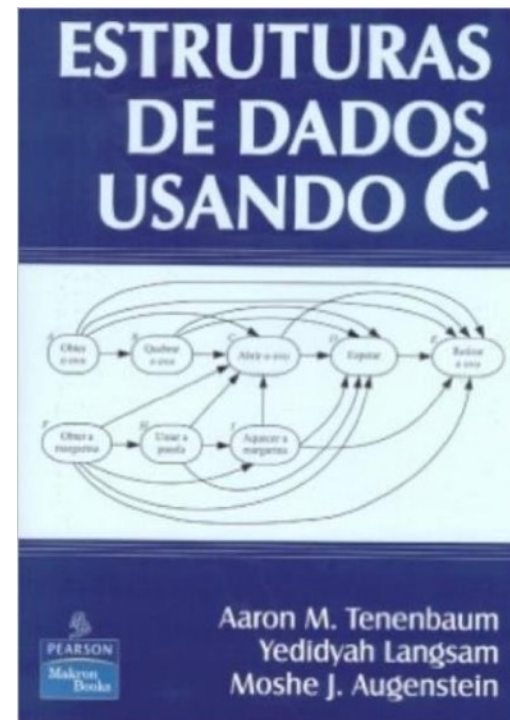
Roteiro

- 1 Introdução
- 2 Árvores AVLs
- 3 Inserção em AVLs
 - A Rotações simples
 - B Rotações duplas
- 4 Referências

Referências sugeridas

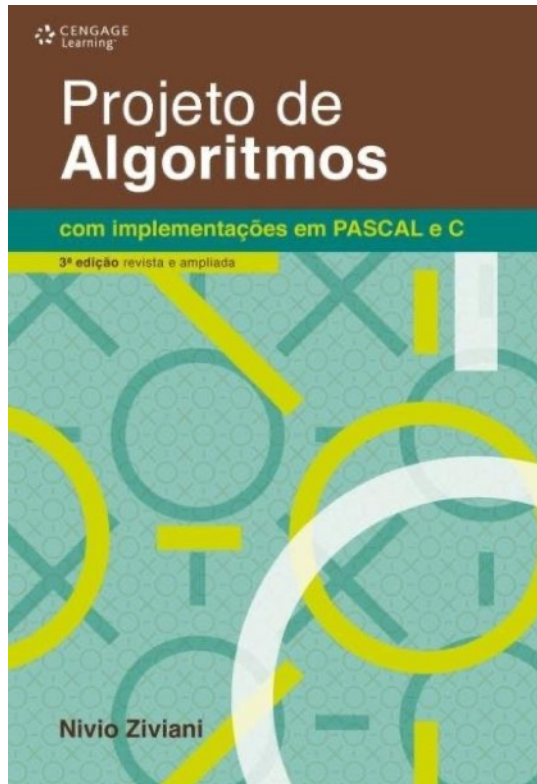


[Cormen et al, 2018]



[Tenenbaum et al, 1995]

Referências sugeridas



[Ziviani, 2010]



[Drozdek, 2017]

Perguntas?

Prof. Rafael G. **Mantovani**

rafaelmantovani@utfpr.edu.br