Прокопьев Константин Эдуардович, группа 19350

Отчет о выполнении третьего задания по вычислительной аэрогидродинамике.

1. Задание

Найти численное решение начально–краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности в единичном квадрате

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$$

Значение коэффициента теплопроводности k, конкретная неявная разностная схема, которую нужно реализовать, начальные и граничные условия зависят от номера варианта.

- Проверить устойчивость и сходимость схемы на последовательности измельчающихся сеток.
- Сравнить с точным решением.
- Подготовить отчет.

Сдать задание до 25 марта.

Вариант 5

$$k = \frac{1}{2\pi}, 0 \le t \le 1, T(x, y, 0) = \sin \pi x \sin \pi y,$$

$$T(0, y, t) = T(1, y, t) = T(x, 0, t) = T(x, 1, t) = 0.$$

Точное решение:

$$T_* = e^{-\pi t} \sin \pi x \sin \pi y.$$

Реализовать схему *расщепления*:

$$\frac{T_{ij}^{n+1/2} - T_{ij}^{n}}{\Delta t} = k\Lambda_x T_{ij}^{n+1/2}, \qquad \Lambda_x T_{ij}^{m} = \frac{T_{i+1,j}^{m} - 2T_{ij}^{m} + T_{i-1,j}^{m}}{\Delta x^2},$$

$$\frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t} = k\Lambda_y T_{ij}^{n+1}, \qquad \Lambda_y T_{ij}^{m} = \frac{T_{i,j+1}^{m} - 2T_{ij}^{m} + T_{i,j-1}^{m}}{\Delta y^2},$$

$$\Delta x = \frac{1}{N}, \Delta y = \frac{1}{M}, \Delta t = \frac{1}{P}.$$

Выполнить расчеты на последовательности сеток:

$$P = 10, \qquad N = M = 5, \qquad (\Delta t = 0.1, \Delta x = \Delta y = 0.2),$$

$$P = 40, \qquad N = M = 10, \qquad (\Delta t = 0.025, \Delta x = \Delta y = 0.1),$$

$$P = 160, \qquad N = M = 20, \qquad (\Delta t = 0.00625, \Delta x = \Delta y = 0.05).$$

Для исследования сходимости изучить поведение величины

$$\delta^n = \max_{i,j} |T_{ij}^n - T_*(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)|.$$

в моменты времени $t = 0.1, 0.2, ..., 1.0$.

2. Реализация программы

Программа была написана на языке программирования C++ в редакторе VSCode и скомпилирована компилятором g++ с использованием стандарта C++17. Для построения графиков использовалась программа gnuplot.

3. Сходимость и устойчивость

Схема расщепления *[Яненко (1959)]*

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^n}{\Delta t} = \Lambda_x u_{ij}^{n+1/2},$$
$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t} = \Lambda_y u_{ij}^{n+1}, \qquad \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2).$$

$$g = g_x g_y = \frac{1}{1 + \dfrac{4\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\dfrac{\alpha\Delta x}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{4\Delta t}{\Delta y^2}\sin^2\dfrac{\beta\Delta y}{2}}, \qquad |g| < 1.$$

Схема устойчива для любых Δt, Δx, Δy.

В данных расчетах:

$$s = \frac{k\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{k\Delta t}{\Delta y^2} = \frac{5}{\pi}.$$

В ходе численного решения уравнения были получены графики ошибок δ для различных чисел разбиения (рис. 1). На графике видно, что ошибка экспоненциально убывает на больших временах, когда как на малых может расти при малом числе разбиений. Вероятно, это связано с тем, что при малом числе разбиений ошибка копится быстрее, чем убывает значение функции. Экспоненциальный спад показывает, что ошибка пропорциональна значению функции.

При возрастании числа разбиений ошибка спадает примерно, как $1/N$ (рис. 2).

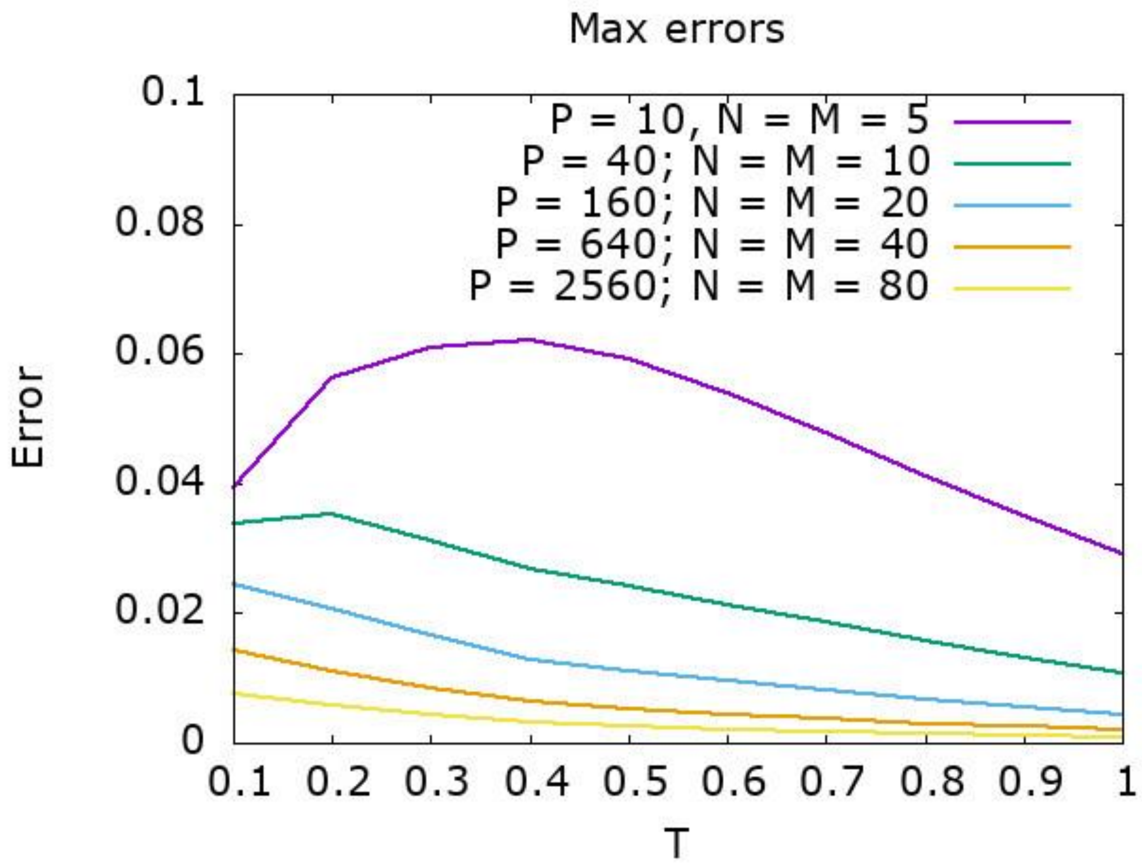


Рис. 1. График зависимости ошибки δ от времени для разных чисел разбиения.

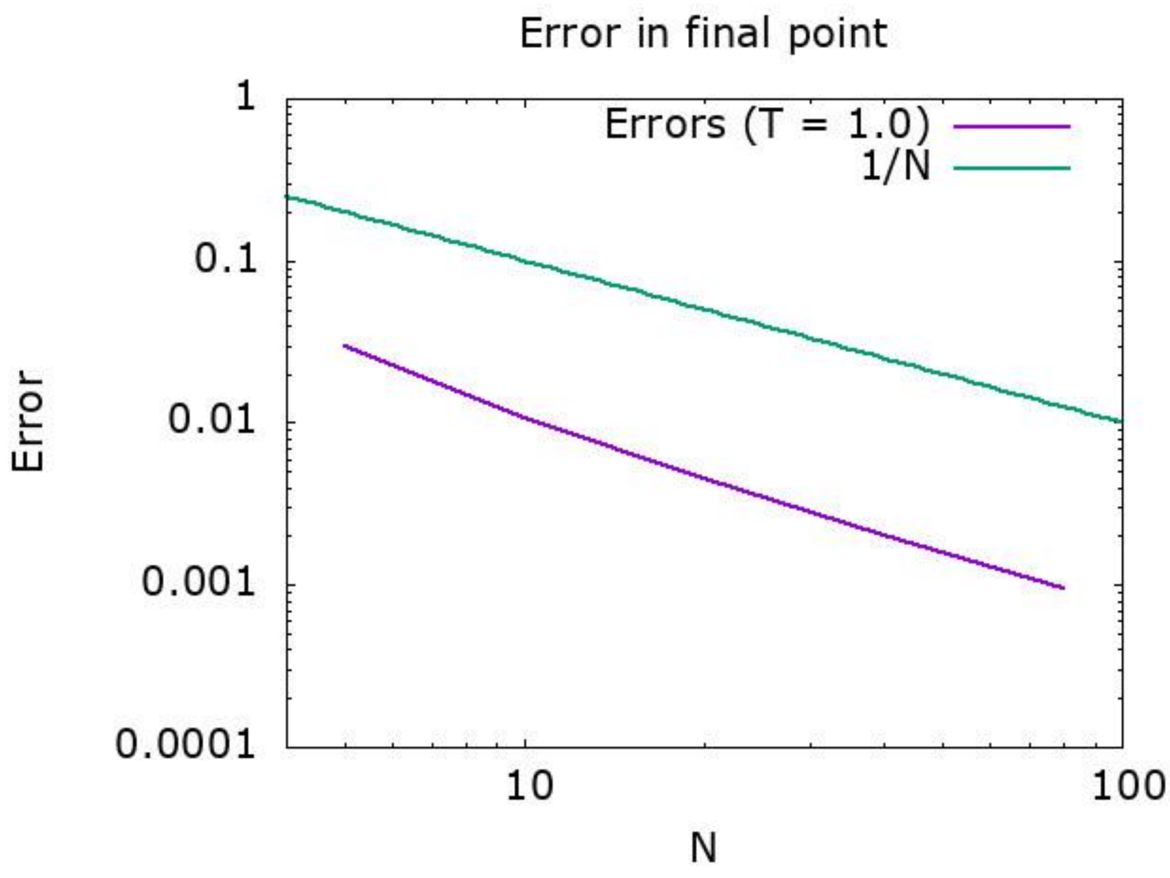


Рис. 2. График зависимости ошибки δ от числа разбиений при T = 1,0.

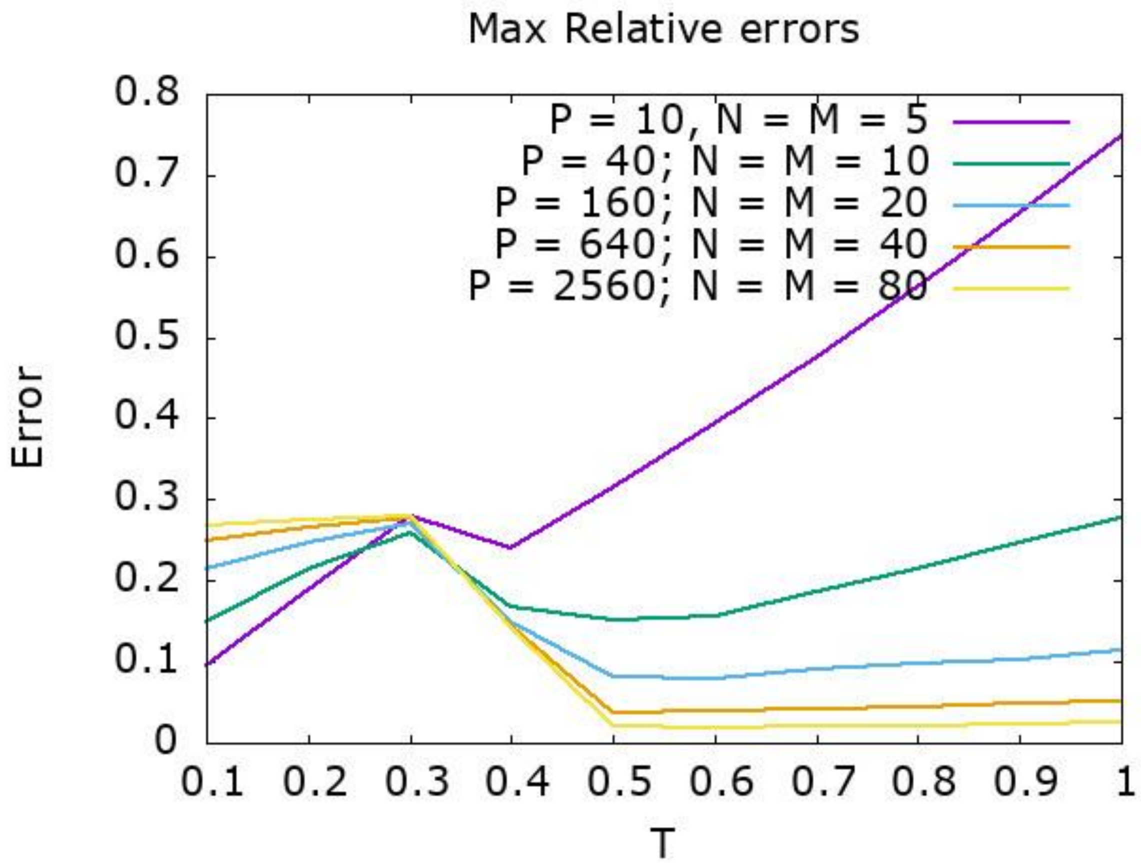


Рис. 3. График зависимости относительной ошибки от времени для разных чисел разбиения.

4. Сравнение численного решения с точным

На графиках (рис. 4-6) видно, что решение постепенно убывает со временем. Для сравнения численных решений с точным можно посмотреть на график ошибки (рис.1), из которого видно, что решение становится точнее при увеличении числа разбиений. Так же себя ведет и относительная ошибка (рис. 3).

Для наглядного сравнения точного и численных решений были построены графики сечения функции при T = 0.5, Y = 0.5 (рис.7). Из этих графиков хорошо видно на сколько решения для каждого числа разбиений близки к точному.

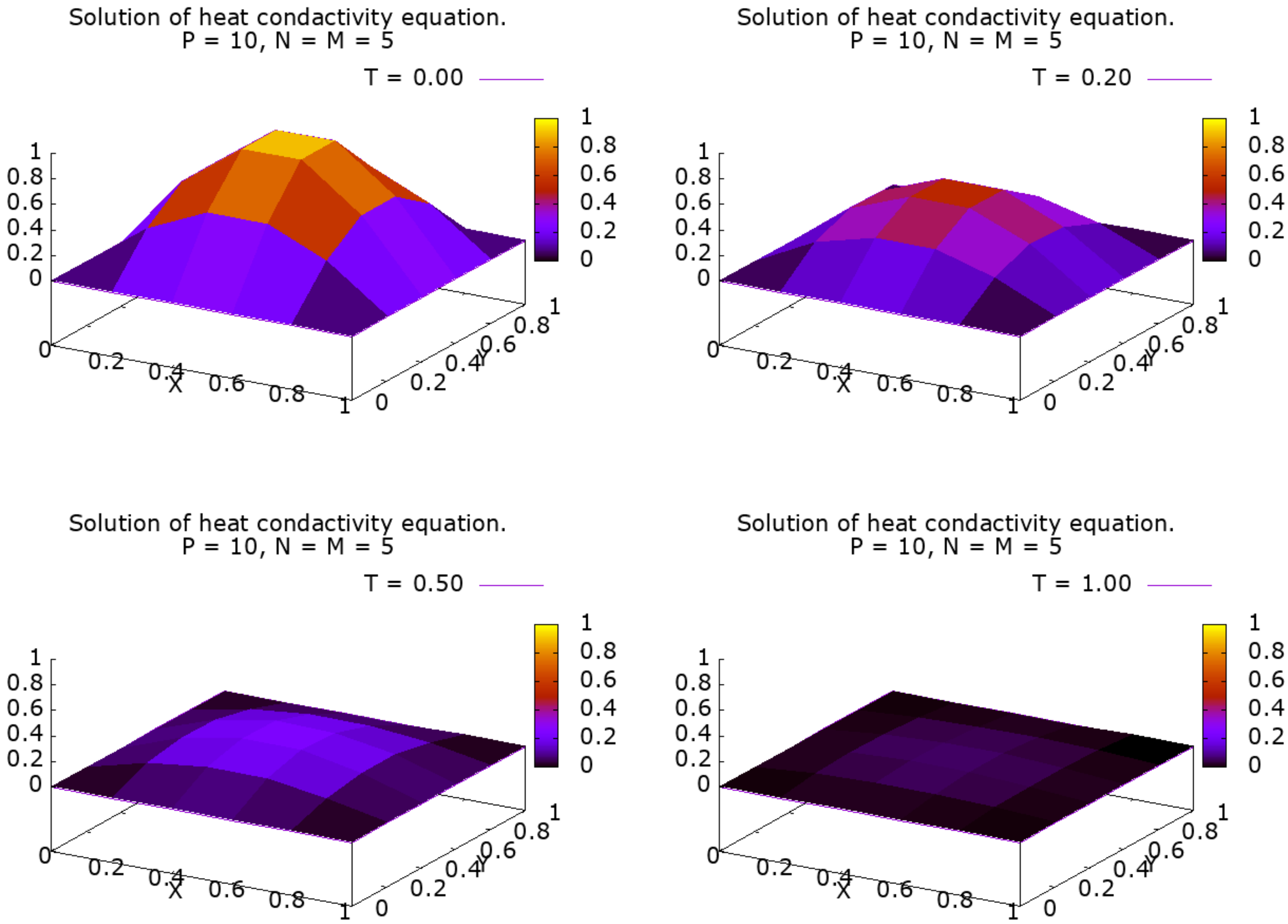
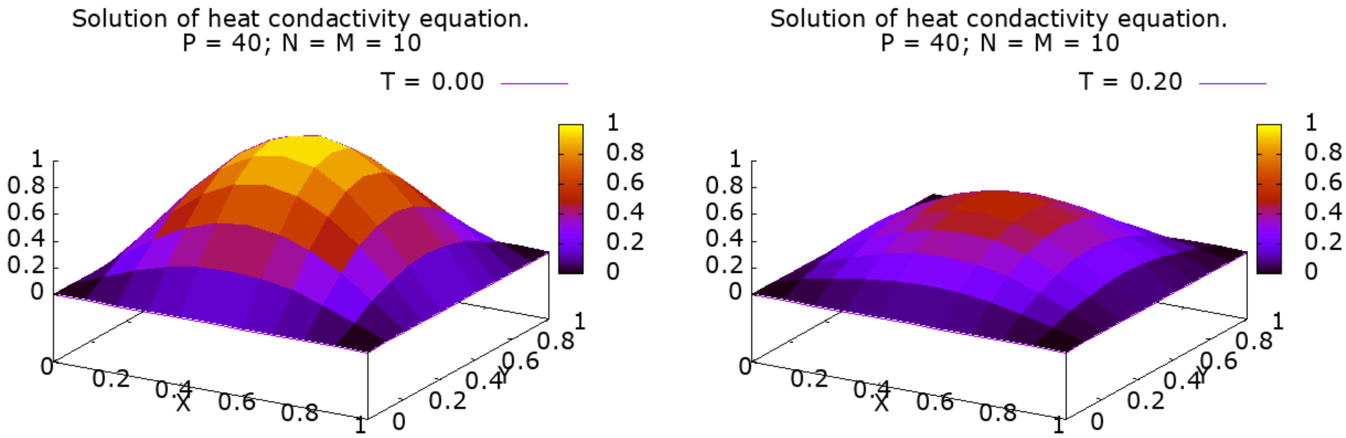


Рис. 4. График решения для P = 10, N = M = 5.



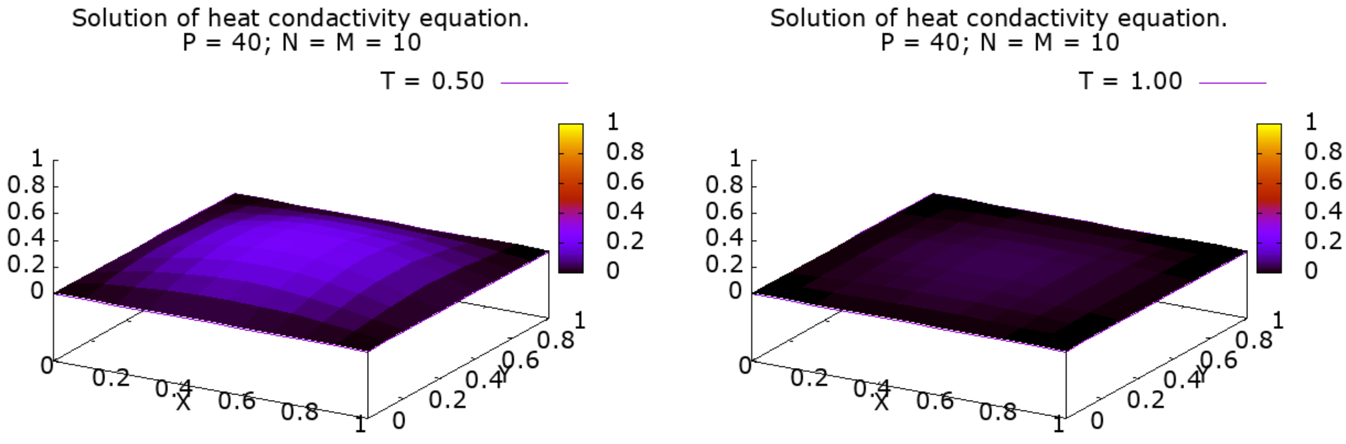


Рис. 5. График решения для P = 40, N = M = 10.

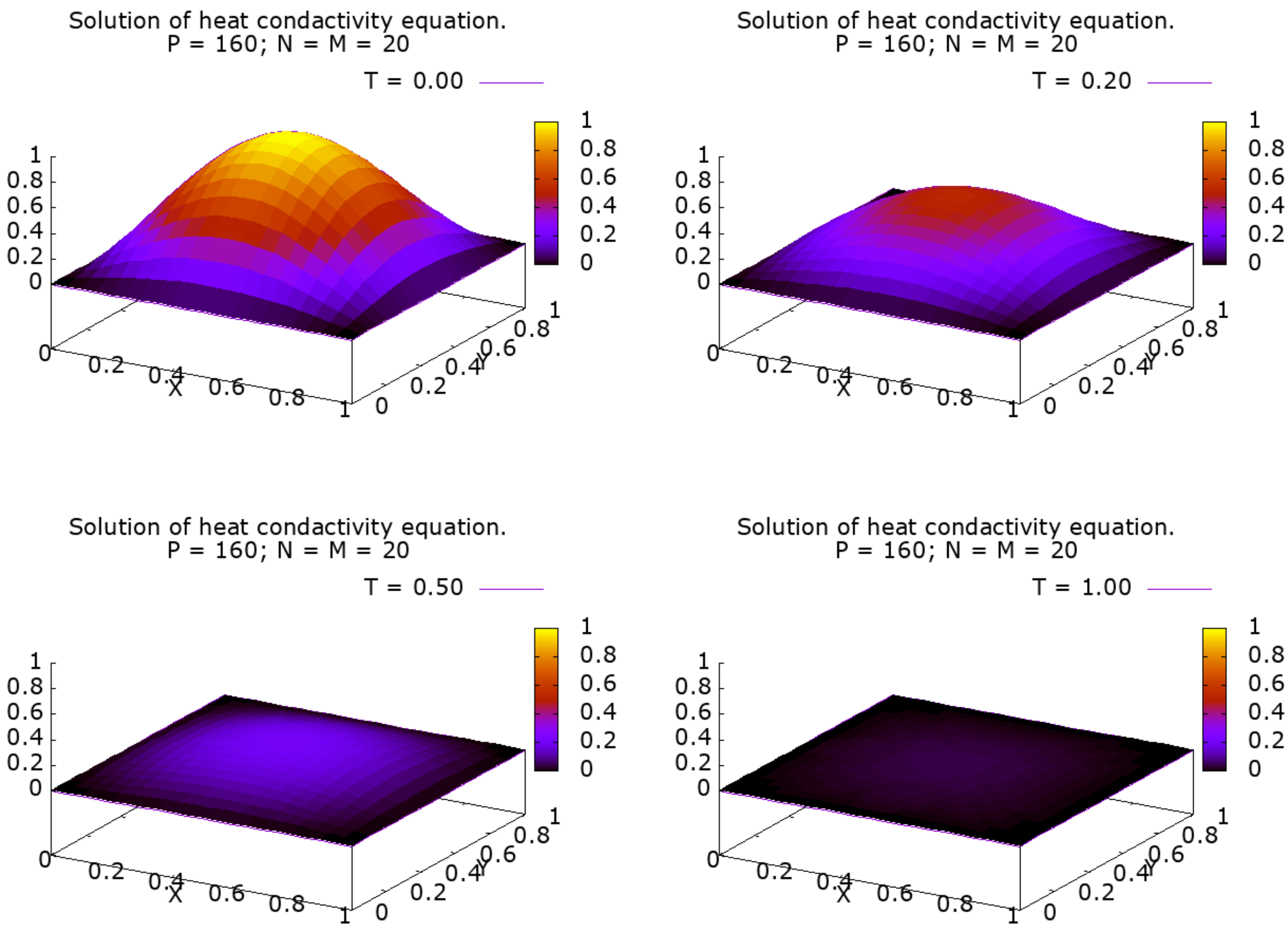


Рис. 6. График решения для P = 160, N = M = 20.

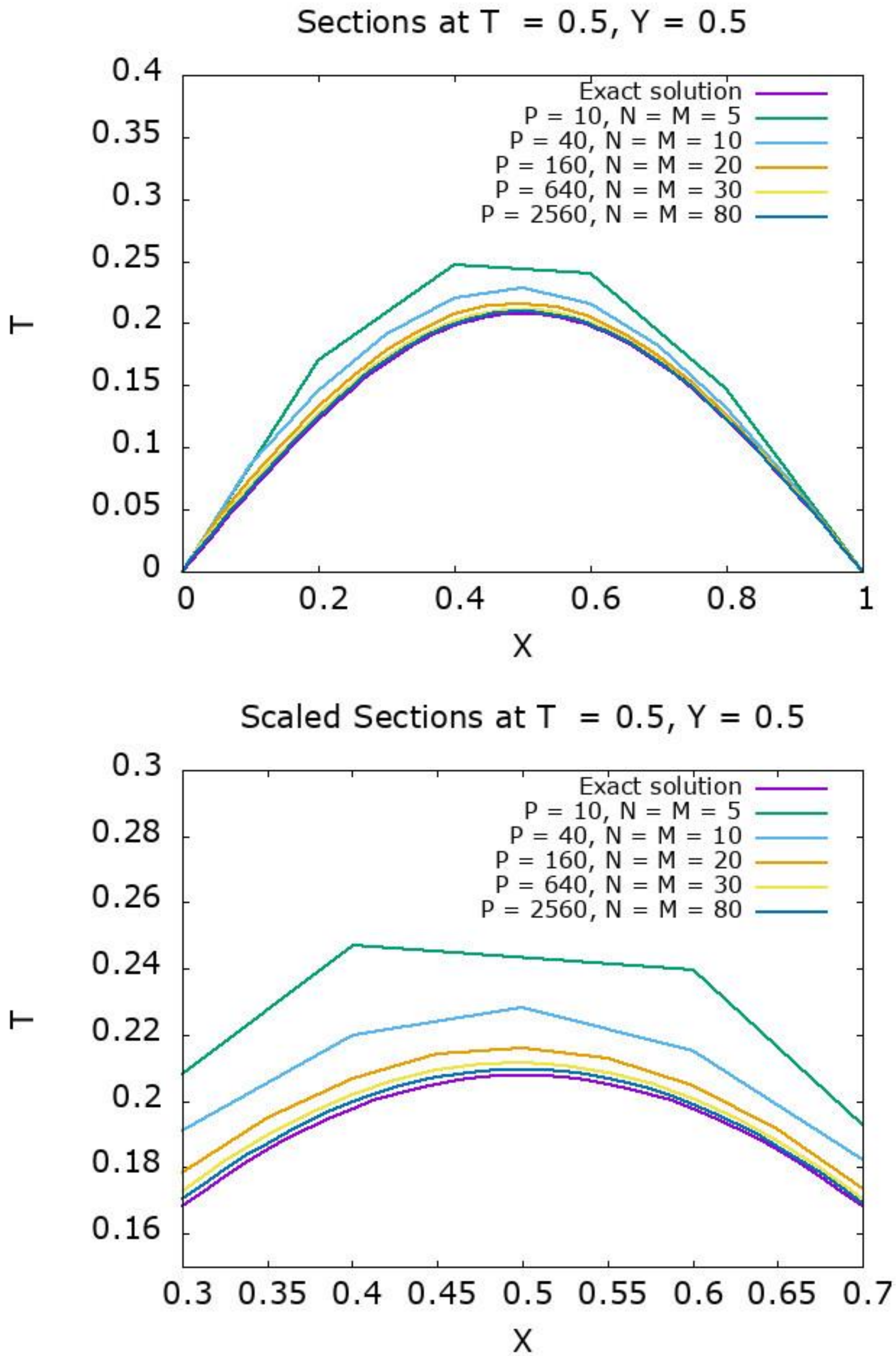


Рис. 7. Графики сечений решений для различных чисел разбиений.

5. Вывод

Схема расщепления является абсолютно устойчивой схемой 2 (в теории) порядка точности по координате и 1 по времени. Численное решение полученное по этой схеме сходится к точному при увеличении числа разбиений, однако максимальная ошибка убывает как 1/N, что не соответствует теории.