Задание 4

Найти численное решение задачи Дирихле для двумерного уравнения Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y), \qquad 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi,$$
$$u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,0) = u(x,\pi) = 0.$$

с помощью нескольких итерационных методов. Построить график полученного решения. Правая часть $f(x,y)$ зависит от номера варианта.

- Для простейшей 5-точечной аппроксимации на сетке с одинаковым числом узлов в обоих направлениях

  $$\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}}{h^2} = f_{ij}, \qquad h = \Delta x = \Delta y, \;\; N_x = N_y = 32$$

  провести расчеты с помощью следующих методов, описанных в Лекции 18: 1) метод Якоби; 2) метод Гаусса–Зейделя; 3) метод последовательной верхней релаксации.

- Для одной и той же пространственной сетки определить количество итераций, требуемое в каждом методе для достижения сходимости:

  $$\max_{i,j} |u_{ij}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n)}| \le \varepsilon, \qquad \varepsilon = 10^{-6}.$$

  Для метода последовательной верхней релаксации путем численных экспериментов определить оптимальное значение параметра релаксации $1 \le \omega < 2$, при котором сходимость достигается за наименьшее число итераций. Построить график зависимости необходимого числа итераций от значения параметра релаксации.

- Для метода Гаусса–Зейделя, сравнивая решение с точным и измельчая сетку, продемонстрировать, что точность полученного решения $\mathcal{O}(h^2)$, для чего построить в логарифмическом масштабе график зависимости ошибки от числа узлов сетки в одном направлении $N_x = N_y$. Рекомендуемое значение критерия сходимости в данном расчете $\varepsilon = 10^{-9}$, число узлов сетки $N_x = N_y$ рекомендуется изменять в пределах от 8 до 128. В некоторых вариантах, возможно, эти значения придется изменить.

- Выполнить задание предыдущего пункта для 9-точечной схемы

  $$\frac{u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1} + 4\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}\right) - 20u_{ij}}{6h^2} =$$
  $$= \frac{f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1} + 8f_{i,j}}{12},$$

  показать, что в данном случае погрешность решения $\mathcal{O}(h^4)$.

- Подготовить отчет.

Сдать задание до 20 апреля.

Прежде, чем выполнять задание, проверьте, что $\Delta\bar{u}(x,y)$ действительно равняется $f(x,y)$! Хочется надеяться, что ошибок нет, но безусловно правильным является только выражение для $\Delta\bar{u}(x,y)$!

Вариант 1

$$f(x,y) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)\sin y - (e^{\sin x} - 1)\sin y,$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = (e^{\sin x} - 1)\sin y.$$

Вариант 2

$$f(x,y) = (6x - 2\pi)(e^{\sin y} - 1) + x^2(x-\pi)(\cos^2 y - \sin y)e^{\sin y},$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = x^2(x-\pi)(e^{\sin y} - 1).$$

Вариант 3

$$f(x,y) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)\sin\left(\frac{y^2}{\pi}\right) + (e^{\sin x} - 1)\left[\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{y^2}{\pi}\right) - \frac{4y^2}{\pi^2}\sin\left(\frac{y^2}{\pi}\right)\right],$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = (e^{\sin x} - 1)\sin\left(\frac{y^2}{\pi}\right).$$

Вариант 4

$$f(x,y) = -4\sin(2x)(e^y - 1)(e^y - e^\pi) + \sin(2x)\left[4e^{2y} - e^y(e^\pi + 1)\right],$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = \sin(2x)(e^y - 1)(e^y - e^\pi).$$

Вариант 5

$$f(x,y) = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)y(y-\pi)^2 + (e^{\sin x} - 1)(6y - 4\pi),$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = (e^{\sin x} - 1)y(y-\pi)^2.$$

Вариант 6

$$f(x,y) = \left[\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{x^2}{\pi}\right) - \frac{4x^2}{\pi^2}\sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)\right]\sin^2 y + 2\sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)\left(\cos^2 y - \sin^2 y\right),$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = \sin\left(\frac{x^2}{\pi}\right)\sin^2 y.$$

Вариант 7

$$f(x,y) = -\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\; y\sin(y) + x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[2\cos y - (y-\pi)\sin y\right],$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\; y\sin(y).$$

Вариант 8

$$f(x,y) = \left[\frac{2}{x+1} - \frac{x-\pi}{(x+1)^2}\right]\sin(2y) - 4(x-\pi)\ln(x+1)\sin(2y),$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = (x-\pi)\ln(x+1)\sin(2y).$$

Вариант 9

$$f(x,y) = -\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right](y-\pi)\ln(y+1) + x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left[\frac{2}{y+1} - \frac{y-\pi}{(y+1)^2}\right],$$

точное решение

$$\bar{u}(x,y) = x\cos\left(\frac{x}{2}\right)(y-\pi)\ln(y+1).$$