Lecture 8

Trapezoid Rule（梯形法）

$\int_a^b f(x)dx \approx \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))\Delta x$

> ```
> trapz(X,Y)
> ```
>
> $Error: O(\Delta x^2)$
> Issue:high curvatur is bad

- Composite Rule: $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2}(f(x_k)+f(x_{k+1}))\Delta x = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0)+f(x_N)+2\sum\limits_{k=1}^{N-1} f(x_k)]$

New Perspective

Simpson Rule

近似的本质是利用离散点的信息。用左端右端的方法只用了一个点的信息，梯形法就用了两个点。如果要用三个点的信息，就是计算三个点所成抛物线所围的面积。

- 近似方法：拉格朗日多项式$p(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{(x-x_1)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})...(x-x_n)}{(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})...(x_k-x_n)}$
  在二次情形下有$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\sum\limits_{k=1}^{N}[f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})], where\,[a,b] is\,spilt\,into\,2N\,[x_k,x_{k+1}] with\,width\,\Delta x=\frac{b-a}{2N}, k=0,1,2,...,2N. O(\Delta x^3)$

> 其他算法有$Simpson\frac{3}{8}, Bode's\,role$等
> $Newton-Cotes\,Formula$

Ordinary Differential Equations（常微分方程）

$x'=f(x)$，其中x是一个状态向量

Linear

$x' = Ax,\ \ x(0) = x_0$，线性系统linear system
solution:$x(t) = e^{At}x_0$，其中前者是矩阵，后者是向量

> 由于指数函数可以用级数定义，故前者计算结果是一个矩阵
> 我们实际上想解决的就是解出从$x_0 - x_n$的结果，所以我们可以迭代计算，即使写不出来显性表达式。

数值逼近

$Forward\,Euler$
$\frac{x_{k+1}-x_k}{\Delta t} \approx x_k' = f(x_k)$，故有
$x_{k+1} \approx x_k + \Delta t f(x_k)$
在线性情况中则为$x_{k+1} \approx (I + \Delta t A)x_k$
同样的有$Backward\,Euler(ImplicitEuler)$:$x_{k+1} = x_k + \Delta t f(x_{k+1})$

虽然一般的是隐函数，但在线性条件下有显性解：$x_{k+1} = (I - \Delta t A)^{-1}x_k$

- 后者稳定性更好，意思是适用于更多的问题（不然会发散）

Spring-Mess-Damper system

根据物理场景列方程有$mx'' = -kx - cx'$
即$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$
用降次：令$x' = v$，则有$v' = -\frac{c}{m}v - \frac{k}{m}x$
整理成矩阵形式有$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}$