Chapter 1.2
Análisis y Diseño de Algoritmos (Algorítmica III)
-Repasando las Matemáticas-

Por:
Herminio Paucar.
Luis Guerra.

Contenido

- Repasando las matemáticas
  - Sumatorias
  - Logaritmos
  - Límites

Sumatorias

SUMATORIAS (Σ)

Sumatoria

- Se llama sumatoria de una sucesión a_n , a la forma abreviada de escribir sus términos expresados como sumandos

$$\boxed{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

Ejemplos

- Sean:

1) $$1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

2) $$-3+4-5+6-7+\ldots\ldots\ldots=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(k+2)$$

Propiedades de la Sumatoria

- Sumatoria de una constante (c)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c_k = nc}$$

- Donde

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots\ldots = c_n = c$$

- Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{5} 3 = 3+3+3+3+3 = 5 \cdot 3 = 15$$

Propiedades

- 2.- **Sumatoria del producto de una Constante por los términos de una Sucesión :**

$$\boxed{\sum_{K=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

- Ej.:

$$\sum_{k=1}^{5} 3(k^2+1) = 3\sum_{k=1}^{5} (k^2+1) = 3(2+5+10+17+26) = 3 \cdot 60 = 180$$

Propiedades

- 3.- **Sumatoria de la Suma o Resta de Términos de dos o más Sucesiones:**

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k}$$

EJEMPLO:

$$\sum_{k=1}^{6}(k^2 - 3k + 2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 - 3\sum_{k=1}^{6} k + \sum_{k=1}^{6} 2 = 91 - 3 \cdot 21 + 12 = 40$$

Sumatoria de una Sucesión

- Expresiones generales o fórmulas para encontrar la sumatoria de los términos de una sucesión, lo que simplifica notablemente el cálculo de dicha sumatoria.
- A.- **Sumatoria de los *n* primeros números naturales**

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

- **Ejemplo:**

$$\sum_{k=1}^{50} k = \frac{50(50+1)}{2} = \frac{50 \cdot 51}{2} = 1.275$$

Sumatoria de una Sucesión

- B.- **Sumatoria de los *n* primeros números naturales Impares**

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2}$$

- **Ejemplo:**

$$\sum_{k=1}^{80}(2k-1)=(80)^2=6.400$$

Sumatoria de una Sucesión

- C.-**sumatoria de los cuadrados de los *n* primeros números naturales**

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

- **ejemplo:**

$$\sum_{k=1}^{25} k^2 = \frac{25(25+1)(2\cdot 25+1)}{6} = \frac{25\cdot 26\cdot 51}{6} = 5.525$$

Ejercicio 1

- 1.- Con base en las fórmulas vistas anteriormente, calcule la suma de los cuadrados de los primeros n números impares.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = ?$$

Solución:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 =$$

$$= 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

Ejercicio 2

- 2.- Aplicar la fórmula correspondiente y calcular cada una de las siguientes sumatorias:

a)

b) $$\sum_{k=1}^{30} k =$$

$$\sum_{k=1}^{50} (2k)^2 =$$

Continuación:

c)

$$\sum_{k=1}^{30}(2k-1)=$$

d)

$$\sum_{k=1}^{20}k(k+1)=$$

Ejercicio 3

- Aplicar las fórmulas conocidas y encontrar a su vez otra fórmula para cada una de las siguientes sumatorias:

a)

b) $$\sum_{k=1}^{n} 2k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (3k-2)$$

Logaritmos

LOGARITMOS (Log)

Logaritmación

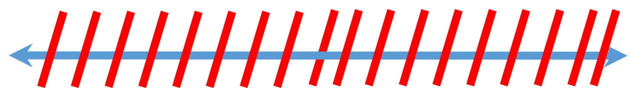
- Logaritmación es una operación inversa de la potenciación, consiste en calcular el exponente cuando se conocen la base b y la potencia N.

Definición de logaritmo

- Logaritmo de un número positivo N en una base b, positiva y diferente de 1, es el exponente x al cual debe elevarse la base para obtener el número N.

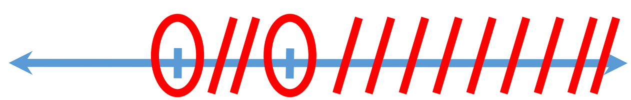
Conceptos sobre logaritmos

- Logaritmos es un exponente y puede se cualquier número real.



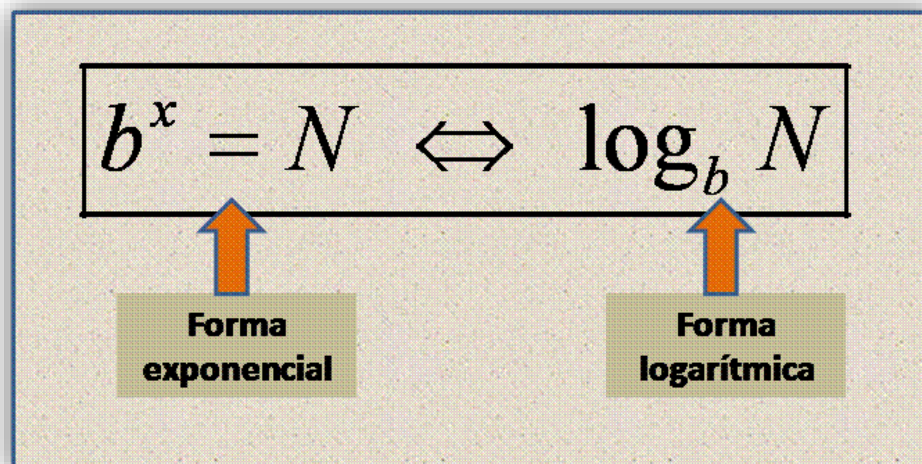
- Sólo tienen logaritmo los números reales positivos.

- La base de los logaritmos es un número real positivo y diferente de 1.



Expresión de los logaritmos

- Los logaritmos se expresan de dos formas: Forma exponencial y forma logarítmica. Estas expresiones son convertibles de la una a la otra.



Identidad fundamental de los logaritmos

- Si el logaritmo de un número es exponente de su propia base, entonces es igual número N.

Ejemplos.

$$1)\ 4^{\log_4 6} = 6$$

$$2)\ 2008^{\log_{2008} 1500} = 1500$$

Propiedades generales de los logaritmos

- **1) El logaritmo de 1, en cualquier base, es igual a cero.**

Ejemplos:

$$1)\log_5 1 = 0$$

$$2)\log_7 1 = 0$$

Propiedades generales de los logaritmos

- 2) El logaritmo de la base es igual a la unidad.

- Ejemplos:

$$1)\ \log_6 6 = 1$$

$$2)\ \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$$

Propiedades generales de los logaritmos

- 3) El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

- Ejemplos:

$$1)\ \log_2 7\times 5=\log_2 7+\log_2 5$$

$$2)\ \log_5 25\times 4=\log_5 25+\log_5 4$$

Propiedades generales de los logaritmos

- 4) El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

- Ejemplos:

$$1)\ \log_2\left(\frac{1}{6}\right)=\log_2 1-\log_2 6$$

$$2)\ \log_5\left(\frac{10}{5}\right)=\log_5 10-\log_5 5$$

Propiedades generales de los logaritmos

- 5) El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

- Ejemplos:

$$1)\ \log_2 6^3 = 3\log_2 6$$

$$2)\ \log_5 5^4 = 4\log_5 5$$

Propiedades generales de los logaritmos

- 6) El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice.

- Ejemplos:

$$1)\ \log_3 \sqrt{12} = \frac{\log_3 12}{2}$$

$$2)\ \log_5 \sqrt[4]{6} = \frac{\log_5 6}{4}$$

Propiedades generales de los logaritmos

7) El producto de dos logaritmos recíprocos es igual a la unidad.

Ejemplos:

$$1)\ \log_2 5\ .\ \log_5 2 = 1$$

$$2)\ \log_{\sqrt{2}} 3\ .\ \log_3 \sqrt{2} = 1$$

Propiedades generales de los logaritmos

- 8) Si el número y la base son potencias indicadas con una base común, el logaritmo está determinado por el cociente de los exponentes.

- Ejemplos:

1) $\log_{2^4} 2^6 = \frac{6}{4}$

2) $\log_{3^5} 3^2 = \frac{2}{5}$

Propiedades generales de los logaritmos

- 9) Si al número y a la base de un logaritmo se eleva a una misma potencia o se extrae radicales del mismo grado, el logaritmo no varía.

- Ejemplos:

$$\boxed{\log_{b^n} a^n = \log_b a}$$

1) $\log_{3^4} 5^4 = \log_3 5$

2) $\log_{\sqrt{12}} \sqrt{6} = \log_{12} 6$

Propiedades complementarias de los logaritmos

- 1) Reducción de potencias.

- Ejemplos.

$$1)\ \log_{2^5} 3^4 = \frac{4}{5}\log_2 3$$

$$2)\ \log_{6^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_6 5$$

Propiedades complementarias de los logaritmos

2) Inversos base y número.

Ejemplos.

$$1)\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{13}\right)=\log_2 13$$

$$2)\ \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8}\right)=\log_4 8$$

Propiedades complementarias de los logaritmos

3) Cambio de base.

Ejemplos.

$$1)\ \log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

$$2)\ \log_6 21 = \frac{\log_3 21}{\log_3 6}$$

Propiedades complementarias de los logaritmos

3) Regla de la cadena.

Ejemplos.

$$1)\ \log_2 3.\log_4 2.\log_3 4 = \log_3 3$$

$$2)\ \log_6 2.\log_3 6.\log_5 4.\log_8 5 = \log_8 2$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

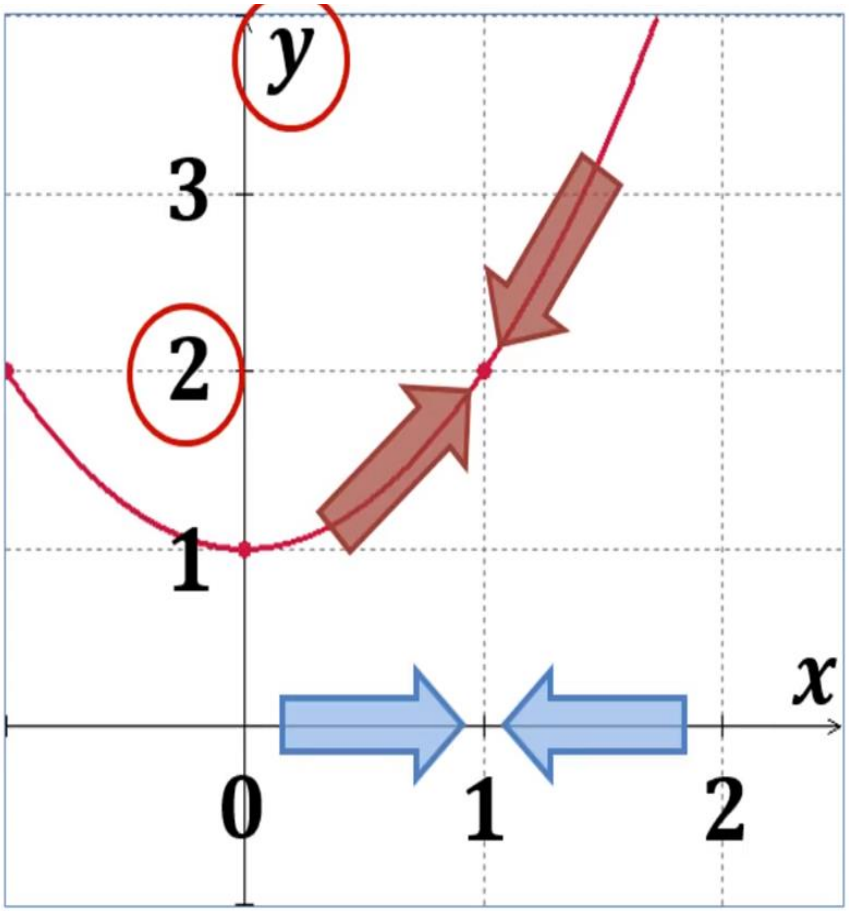
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Límite de una función

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \to 1} (1)^2 + 1 = 2$$



Teoremas de los límites

Teorema 1: Límite de una función lineal.

Si m y b son dos constantes cualesquiera, entonces:

$$\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b$$

Si nos piden evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} 2x + 4$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x \to 3} 2x + 4 = 2(3) + 4 = 10$$

Teoremas de los límites

Teorema 2: Límite de una función constante.

Si c es una constante cualesquiera, entonces:

$$\lim_{x \to a} (c) = c$$

Si nos piden evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} 5$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x \to 2} 5 = 5$$

Teoremas de los límites

Teorema 3: Límite de una función identidad.

Recordando que una función identidad es f(x)=x entonces:

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Si nos piden evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -3} x$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x \to -3} x = -3$$

Teoremas de los límites

Teorema 4: Límite de suma o diferencia de funciones

Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} g(x) = M$ entonces:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

Si nos piden evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x)$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 3x = 4 + 6 = 10$$

Teoremas de los límites

Teorema 5: Límite del producto de funciones.

Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = M$ *entonces:*

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

Si nos piden evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} (4x^2)$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x \to 3} 4 \cdot \lim_{x \to 3} x^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

Teoremas de los límites

Teorema 6: Límite de una n-ésima potencia.

Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = L^n$$

Si nos piden evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 4} (3x)^2$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x \to 4} (3x)^2 = (12)^2 = 144$$

Teoremas de los límites

Teorema 7: Límite del cociente de funciones.

Sea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ *entonces:*

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M} \quad si \quad M \neq 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{3x}$$

Entonces tenemos:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{3x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} x+2}{\lim\limits_{x\to 1} 3x} = \frac{3}{3} = 1$$

Teoremas de los límites

Teorema 8: Límite de raíz n-ésima de una función.

Sea $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es cualquier número entero positivo:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Si n es par entonces L>0

Si nos piden evaluar el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x}$$

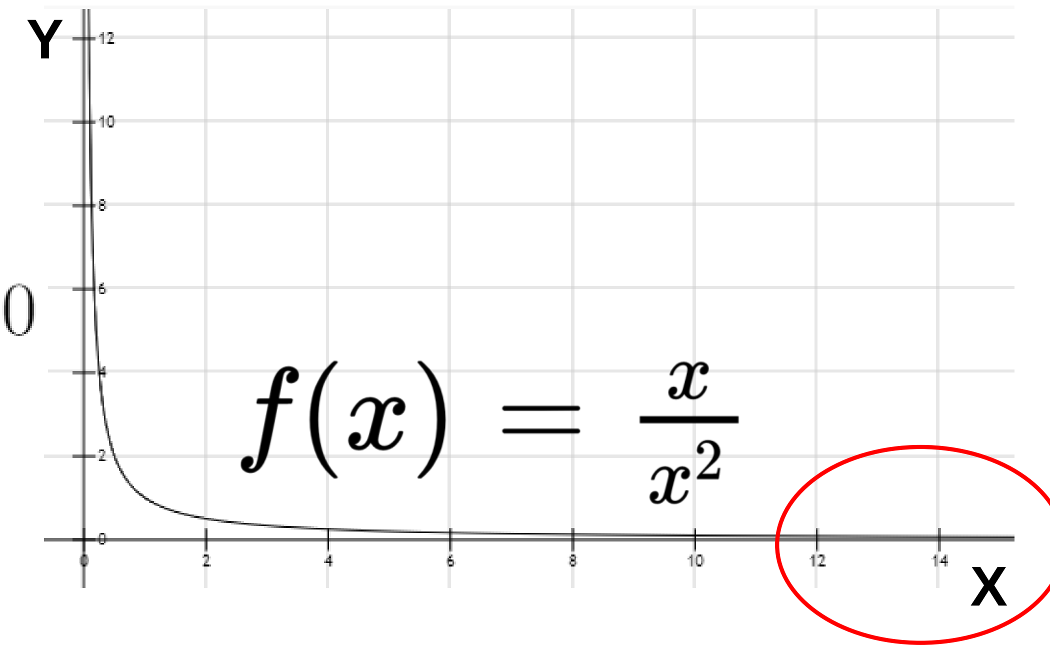
Entonces tenemos:

$$\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Límite de una función cuando $x \to +\infty$

Calcular el límite de la función:

$$\lim_{x \to \infty} x/x^2 = \lim_{x \to \infty} 1/x = 0$$



Propiedades de los Limites.

Para cuando x tiende al infinito $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ +\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

Propiedades de los Límites.

Sea $f(x)$ un polinomio, $\lim_{x \to +\infty} \frac{k}{f(x)} = 0$

Propiedades de los Limites.

Sea $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}$

- **Si n>m:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ **El signo depende de** a_n , b_n **y de si** $x\to+\infty$ **ó** $x\to-\infty$
- **Si n<m:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$
- **Si n=m:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{a_n}{b_m}$

Propiedades de los Limites.

Si $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty,\ a > 1$

Si $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0,\ -1 < a < 1$

Si $\lim_{x \to +\infty} a^x = \nexists,\ a < -1$

Ejercicios

Si $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si\ x < 1 \\ -4x + 3 & si\ x \geq 1 \end{cases}$, ¿cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$?

- **Reemplazando para x = 1**

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -4 \cdot 1 + 3 = -1,$$

por lo que no existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Ejercicios

- Para las siguientes funciones calcular el límite cuando: $\mathbf{x} \longrightarrow \infty$

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-1}$$

Para f(x):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-4}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{0} - \overbrace{\frac{4}{x^2}}^{0}}{\underbrace{1}_{1} - \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ejercicios

Para las siguientes funciones calcular el límite cuando: $x \longrightarrow \infty$

$$g(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x - 2}$$

Para g(x):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 3}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{1 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}}^{1}}{\underbrace{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}_{0}} = \infty$$

Ejercicios

- Para las siguientes funciones calcular el límite cuando: $\mathbf{x} \longrightarrow \infty$

$$h(x) = \frac{2x^3 - x}{3x^3 - 1}$$

Para h(x):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x}{3x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^3} \cdot \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^3} \cdot \left(3 - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overset{2}{2} - \overset{0}{\frac{1}{x^2}}}{\underset{3}{3} - \underset{0}{\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{3}$$