UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática

E.A.P. Sistemas

SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Juan Luna Valdez

Junio 2020

Contenido

- Sitemas lineales homogéneos

Contenido

- Sitemas lineales homogéneos
- Autovalores y autovectores

Contenido

- Sitemas lineales homogéneos
- Autovalores y autovectores
- Autovalores repetidos (multiplicidad 2 y 3)

Contenido

- Sitemas lineales homogéneos
- Autovalores y autovectores
- Autovalores repetidos (multiplicidad 2 y 3)
- Autovalores complejos

SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS

Sea el sistema lineal homogéneo

$$X' = AX \tag{1}$$

donde A es un matriz de orden $n \times n$
y la solución de (1) es de la forma

$$X = Ke^{\lambda t} \tag{2}$$

donde

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}; \quad \lambda,\ k_i, \quad i = 1, 2, ..., n \text{ son escalares}$$

Si (2) es un vector solución del sistema homogéneo lineal (1), entonces $X' = K\lambda e^{\lambda t}$, por lo que el sistema se convierte en $K\lambda e^{\lambda t} = AKe^{\lambda t}$, entonces $AK = \lambda K$ o $AK - \lambda K = 0$. Luego, se tiene

$$(A - \lambda I)\, K = 0 \tag{3}$$

La ecuación matricial (3) es equivalente a las ecuaciones algebraicas simultáneas.

$$\begin{array}{ccccccc}
(a_{11} - \lambda)\, k_1 & + & a_{12} k_2 & + \ldots + & a_{1n} k_n & = & 0 \\
a_{21} k_1 & + & (a_{22} - \lambda)\, k_2 & + \ldots + & a_{2n} k_n & = & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} k_1 & + & a_{n2} k_2 & + \ldots + & (a_{nn} - \lambda)\, k_n & = & 0
\end{array}$$

Para encontrar soluciones X de (1), necesitamos primero encontrar una solución no trivial del sistema anterior; es decir, debemos encontrar un vector no trivial K que satisfaga a (3).

Pero para que (3) tenga soluciones que no sean la solución obvia $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$, se debe tener

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Esta ecuación polinomial en λ se llama ecuación característica de la matriz A.

Pero para que (3) tenga soluciones que no sean la solución obvia $k_1 = k_2 = ... = k_n = 0$, se debe tener

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Esta ecuación polinomial en λ se llama ecuación característica de la matriz A.

Sus soluciones son los autovalores de A. Una solución $K \neq 0$ de (3) correspondiente a un autovalor λ se llama autovector de A. Entonces una solución del sistema homogéneo (1) es

$$X = Ke^{\lambda t}$$

AUTOVALORES REALES DISTINTOS

Cuando la matriz $A_{n\times n}$ tiene n autovalores reales y distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ entonces siempre se puede encontrar un conjunto de n autovectores linealmente independientes $K_1, K_2, ..., K_n$ y

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, \ ..., \ \ X_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (1) en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

AUTOVALORES REALES DISTINTOS

Cuando la matriz $A_{n\times n}$ tiene n autovalores reales y distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ entonces siempre se puede encontrar un conjunto de n autovectores linealmente independientes $K_1, K_2, ..., K_n$ y

$$X_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, \quad X_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, \; ..., \; X_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (1) en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Theorem (Solución general: Sistemas homogéneos)

Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *n autovalores reales y distintos de la matriz de coeficientes A del sistema homogéneo (1) y sean* $K_1, K_2, ..., K_n$ *los autovectores correspondientes. Entonces la solución general de (1) en el intervalo* $(-\infty, \infty)$ *está dado por*

$$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \; ... + c_n K_n e^{\lambda_n t}$$

Example

Resuelva

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dx} = 2x + y \end{cases}$$

Example

Resuelva

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dx} = 2x + y \end{cases}$$

Solution

Primero determinamos los autovalores y autovectores de la matriz de coeficientes.

De la ecuación característica

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$$

entonces los autovalores son $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4$

Solution

Ahora, para $\lambda_1 = -1$, *de (3) se tiene*

$$3k_1 + 3k_2 = 0$$
$$2k_1 + 2k_2 = 0$$

de donde $k_1 = -k_2$. *Cuando* $k_2 = -1$, *el autovector correspondiete es*

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solution

Ahora, para $\lambda_1 = -1$, *de (3) se tiene*

$$\begin{aligned} 3k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 + 2k_2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $k_1 = -k_2$. *Cuando* $k_2 = -1$, *el autovector correspondiete es*

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 4$, *de (3) se tiene*

$$\begin{aligned} -2k_1 + 3k_2 &= 0 \\ 2k_1 - 3k_2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $k_1 = \frac{3}{2}k_2$.

Solución

Por tanto, si $k_2 = 2$, *el autovector correspondiete es*

$$K_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Asi, se determinó las dos soluciones linealmente independientes del problema dado

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad y \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Solución

Por tanto, si $k_2 = 2$*, el autovector correspondiete es*

$$K_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Asi, se determinó las dos soluciones linealmente independientes del problema dado

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad y \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Luego, la solución general del sistema es

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Example

Resuelva

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + y + z \\ \dfrac{dy}{dx} = x + 5y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = \qquad y - 3z \end{cases}$$

Example

Resuelva

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x + y + z \\ \dfrac{dy}{dx} = x + 5y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = \qquad y - 3z \end{cases}$$

Solution

Se tiene

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-5) =$$

asi tenemos los autovalores $\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 5$

Para $\lambda_1 = -3$, utilizando eliminación Gauss-Jordan, se tiene

$$(A + 3I \mid 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operaciones}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asi obtenemos $k_1 = k_3, \quad k_2 = 0$

Para $\lambda_1 = -3$, utilizando eliminación Gauss-Jordan, se tiene

$$(A+3I \mid 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operaciones}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asi obtenemos $k_1 = k_3, \quad k_2 = 0$

Elegimos $k_3 = 1$, lo cual nos da un autovector y el vector solución correspondiente

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Para $\lambda_2 = -4$, utilizando eliminación Gauss-Jordan, se tiene

$$(A + 4I \mid 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operaciones}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asi obtenemos $k_1 = 10k_3, \quad k_2 = -k_3$

Para $\lambda_2 = -4$, utilizando eliminación Gauss-Jordan, se tiene

$$(A+4I \mid 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{operaciones}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asi obtenemos $k_1 = 10k_3, \quad k_2 = -k_3$

Elegimos $k_3 = 1$, lo cual nos da un autovector y el vector solución correspondiente

$$K_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Por último. para $\lambda_3 = 5$, utilizando eliminación Gauss-Jordan, se tiene

$$(A + 5I \mid 0) = \left(\begin{array}{cccc} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Asi obtenemos $k_1 = k_3, \quad k_2 = 8k_3$

Por último. para $\lambda_3 = 5$, utilizando eliminación Gauss-Jordan, se tiene

$$(A+5I \mid 0) = \left(\begin{array}{cccc} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operaciones}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Asi obtenemos $k_1 = k_3, \quad k_2 = 8k_3$
Elegimos $k_3 = 1$, lo cual nos da un autovector y el vector solución correspondiente

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

Luego, la solución general es la combinación lineal de los vectores solución

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

AUTOVALORES REPETIDOS

No todos los n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de una matriz A de $n \times n$ deben ser distintos, es decir, algunos de los autovalores podrían ser repetidos. En general, si m es un entero positivo y $(\lambda - \lambda_1)^m$ es un factor de la ecuación característica, entonces se dice que λ_1 es un autovalor de multiplicidad m.

AUTOVALORES REPETIDOS

No todos los n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de una matriz A de $n \times n$ deben ser distintos, es decir, algunos de los autovalores podrían ser repetidos.
En general, si m es un entero positivo y $(\lambda - \lambda_1)^m$ es un factor de la ecuación característica, entonces se dice que λ_1 es un autovalor de multiplicidad m.
Se tienen los siguientes casos:

AUTOVALORES REPETIDOS

No todos los n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de una matriz A de $n \times n$ deben ser distintos, es decir, algunos de los autovalores podrían ser repetidos.
En general, si m es un entero positivo y $(\lambda - \lambda_1)^m$ es un factor de la ecuación característica, entonces se dice que λ_1 es un autovalor de multiplicidad m.
Se tienen los siguientes casos:

1. Para algunas matrices A de $n \times n$ sería posible encontrar m autovectores linealmente independientes $K_1, K_2, ..., K_m$, correspondientes a un autovalor λ_1, de multiplicidad $m \leq n$. En este caso la solución general del sistema contiene la combinación lineal

$$c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_1 t} + \ ... + c_m K_m e^{\lambda_1 t}$$

2, Si sólo hay un autovector propio que corresponde al autovalor λ_1 de multiplicidad m, entonces siempre se pueden encontrar m soluciones linealmente independientes de la forma

$$
\begin{aligned}
X_1 &= K_{11} e^{\lambda_1 t} \\
X_2 &= K_{21} t e^{\lambda_1 t} + K_{22} e^{\lambda_1 t} \\
&\vdots \\
X_m &= K_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_1 t} + K_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_1 t} + \ldots + K_{mm} e^{\lambda_1 t}
\end{aligned}
$$

donde los K_{ij} son vectores columna.

Example

Resuelva

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X$$

Example

Resuelva

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X$$

Solution

Veamos la ecuación característica

$$\det\left(A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

entonces

$$-\left(\lambda+1\right)^2\left(\lambda-5\right) = 0$$

Asi, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 5$

Solution

Para $\lambda_1 = -1$, *Por eliminación Gaussiana, se tiene*

$$(A + I \mid 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{operaciones} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila, se tiene $k_1 - k_2 + k_3 = 0$.
Sean las elecciones: $k_2 = 1,\ k_3 = 0$ *y* $k_2 = 1,\ k_3 = 1$; *Estos generan respectivamente* $k_1 = 1,\ k_1 = 0$.

Solution

Para $\lambda_1 = -1$, *Por eliminación Gaussiana, se tiene*

$$(A + I \mid 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{operaciones} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la primera fila, se tiene $k_1 - k_2 + k_3 = 0$.
Sean las elecciones: $k_2 = 1,\ k_3 = 0$ *y* $k_2 = 1,\ k_3 = 1$; *Estos generan respectivamente* $k_1 = 1,\ k_1 = 0$.
Entonces los dos autovectores correspondientes a $\lambda_1 = -1$ *son*

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution

Como ningún autovector es un múltiplo constantes del otro, se han encontrado dos soluciones linealmente independientes,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

que corresponden al mismo autovalor.

Solution

Como ningún autovector es un múltiplo constantes del otro, se han encontrado dos soluciones linealmente independientes,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

que corresponden al mismo autovalor.
Para $\lambda_3 = 5$, *la reducción respectiva*

$$(A + 5I \mid 0) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{operaciones} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $k_1 = k_3$ *y* $k_2 = -k_3$.

Solution

Sea $k_3 = 1$, *entonces* $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. *Asi obtenemos el tercer autovector*

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution

Sea $k_3 = 1$, *entonces* $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. *Asi obtenemos el tercer autovector*

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y la solución general del sistema es

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

(Observación)

Se dice que una matriz A de $n \times n$ es simétrica si su transpuesta A^T (donde se intercambian renglones y columnas) es igual que A, es decir, si $A^T = A$.

(Observación)

Se dice que una matriz A de $n \times n$ es simétrica si su transpuesta A^T (donde se intercambian renglones y columnas) es igual que A, es decir, si $A^T = A$.

Se demuestra que si la matriz A del sistema $X' = AX$ es simétrica y tiene elementos reales, entonces siempre es posible encontrar n autovectores linealmente independientes $K_1, K_2, \ldots, K_n$, y la solución general de ese sistema es la combinación lineal de ellas.

Sea el sistema

$$X' = AX \tag{1}$$

Supongamos que λ_1 es un valor propio de multiplicidad dos y que sólo hay un autovector asociado con este valor. Se puede encontrar una segunda solución de la forma

$$X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t} \tag{2}$$

donde

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \qquad y \qquad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

Reemplazando (2) en (1)

$$(AK - \lambda_1 K)\, te^{\lambda_1 t} + (AP - \lambda_1 P - K)\, e^{\lambda_1 t} = 0$$

entonces se tiene para todo t,

$$(A - \lambda_1 I)\, K = 0 \tag{3}$$
$$(A - \lambda_1 I)\, P = K \tag{4}$$

De (3) se tiene que K debe ser un vector característico de A asociado a λ_1. Al resolver (3) se obtiene una solución $X_1 = Ke^{\lambda_1 t}$.

Reemplazando (2) en (1)

$$(AK - \lambda_1 K)\, te^{\lambda_1 t} + (AP - \lambda_1 P - K)\, e^{\lambda_1 t} = 0$$

entonces se tiene para todo t,

$$(A - \lambda_1 I)\, K = 0 \tag{3}$$

$$(A - \lambda_1 I)\, P = K \tag{4}$$

De (3) se tiene que K debe ser un vector característico de A asociado a λ_1. Al resolver (3) se obtiene una solución $X_1 = Ke^{\lambda_1 t}$.
Para hallar la segunda solución X_2, se resuelve el sistema (4) para obtener el vectpr P.

Example

Hallar la solución general del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$$

Example

Hallar la solución general del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X$$

Solution

La ecuación característica es

$$(\lambda + 3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

es una raiz de multiplicidad dos. Para este valor se tiene el único autovector y una solución respectiva

$$K_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Solution

Ahora veamos la segunda solución, identificando se tiene

$$K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

De (4), resolver

$$(A + 3I)\,P = K \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6p_1 - 18p_2 = 3 \\ 2p_1 - 6p_2 = 1 \end{cases}$$

este sistema equivale a una sola ecuación, se tiene una infinidad de elecciones de p_1 *y* p_2.

Solución

Una elección podria ser $p_1 = 1 \implies p_2 = \frac{1}{6}$. *Por simplicidad elegimos* $p_1 = \frac{1}{2} \implies p_2 = 0$, *entonces* $P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución

Una elección podria ser $p_1 = 1 \implies p_2 = \frac{1}{6}$. *Por simplicidad elegimos* $p_1 = \frac{1}{2} \implies p_2 = 0$, *entonces* $P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

y la segunda solución es

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Solución

Una elección podria ser $p_1 = 1 \implies p_2 = \frac{1}{6}$. *Por simplicidad elegimos* $p_1 = \frac{1}{2} \implies p_2 = 0$, *entonces* $P = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
y la segunda solución es

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Luego, la solución general es

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right]$$

AUTOVALOR DE MULTIPLICIDAD TRES

Cuando la matriz de coeficientes A tiene sólo un autovector asociado con un autovalor λ_1 de multiplicidad tres, podemos encontrar una segunda solución de la forma (2) y una tercera solución de la forma

$$X_3 = K\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + Pte^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t} \tag{5}$$

donde

$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Al reemplazar (5) en el sistema (1), se determina que los vectores columna K, P y Q deben satisfacer

$$(A - \lambda_1 I)\, K = 0 \tag{6}$$

$$(A - \lambda_1 I)\, P = K \tag{7}$$

$$(A - \lambda_1 I)\, Q = P \tag{8}$$

Las soluciones (6) y (7) se pueden usar para formar las soluciones $X_1 \;\; y \;\; X_2$,

Example

Resuelva

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

Example

Resuelva

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

Solution

De la ecuación característica $(\lambda - 2)^3 = 0$, *se tiene que* $\lambda_1 = 2$ *es un autovalor de multiplicidad tres. Al resolver* $(A - 2I)\,K = 0$, *se tiene el único autovector*

$$K = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution

Ahora resolvemos el sistema $(A-2I)\,P = K$ *y luego el sistema* $(A-2I)\,Q = P$, *y asi se determina que*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Solution

Ahora resolvemos el sistema $(A-2I)\,P = K$ *y luego el sistema* $(A-2I)\,Q = P$, *y asi se determina que*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$$

Usando (2) y (5), la solución general del sistema es

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$
$$+ c_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \;\; te^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

AUTOVALORES COMPLEJOS

Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta > 0$, $i^2 = 1$ son autovalores complejos de la matriz de coeficientes A, entonces se puede esperar de hecho que sus autovectores correspondientes también tengan entradas complejas.

AUTOVALORES COMPLEJOS

Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\beta > 0$, $i^2 = 1$ son autovalores complejos de la matriz de coeficientes A, entonces se puede esperar de hecho que sus autovectores correspondientes también tengan entradas complejas.
Por ejemplo, la ecuación característica del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - 7 \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}$$

es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$$

entonces $\lambda_1 = 5 + 2i, \quad \lambda_2 = 5 - 2i.$

Para $\lambda_1 = 5 + 2i$ se debe resolver

$$\begin{aligned} (1-2i)\,k_1 - k_2 &= 0 \\ 5k_1 - (1+2i)\,k_2 &= 0 \end{aligned}$$

Como $k_2 = (1-2i)\,k_1$,

Para $\lambda_1 = 5 + 2i$ se debe resolver

$$\begin{aligned} (1-2i)\,k_1 - k_2 &= 0 \\ 5k_1 - (1+2i)\,k_2 &= 0 \end{aligned}$$

Como $k_2 = (1-2i)\,k_1$,
La elección de $k_1 = 1$ nos da el siguiente autovector y vector solución correspondiente

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}$$

Para $\lambda_2 = 5 - 2i$, tenemos

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}$$

Para $\lambda_2 = 5 - 2i$, tenemos

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}$$

Se comprueba por Wronskiano que estos vectores solución son linealmente independientes, por tanto la solución general es

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t} \tag{I}$$

Para $\lambda_2 = 5 - 2i$, tenemos

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}$$

Se comprueba por Wronskiano que estos vectores solución son linealmente independientes, por tanto la solución general es

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t} \qquad \text{(I)}$$

(Observación)

Las entradas en K_2 correspondientes a λ_2 son los conjugados de las entradas en K_1 correspondientes a λ_1. El conjugado de λ_1 es λ_2. Esto se escribe como $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ y $K_2 = \overline{K}_1$.

Theorem (Soluciones correspondientes a un autovalor complejo)

Sea A una matriz de coeficientes que tiene entradas reales del sistema homogéneo (1) y sea K_1 *un autovector correspondiente al autovalor complejo* $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \;\; \alpha, \beta \in R$. *Entonces*

$$K_1 e^{\lambda_1 t} \qquad y \qquad \overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}$$

son soluciones de (1).

Theorem (Soluciones correspondientes a un autovalor complejo)

Sea A una matriz de coeficientes que tiene entradas reales del sistema homogéneo (1) y sea K_1 *un autovector correspondiente al autovalor complejo* $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \ \alpha, \beta \in R$. *Entonces*

$$K_1 e^{\lambda_1 t} \qquad y \quad \overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}$$

son soluciones de (1).

De la fórmula de Euler, se tiene

$$e^{(5+2i)t} = e^{5t} e^{2ti} = e^{5t} \left(\cos 2t + i \sin 2t \right)$$

$$e^{(5-2i)t} = e^{5t} e^{-2ti} = e^{5t} \left(\cos 2t - i \sin 2t \right)$$

En la solución (I), agrupando los términos y reemplazando $c_1 + c_2$ por C_1 y $(c_1 - c_2)\, i$ por C_2 se tiene que

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 \tag{II}$$

donde

$$X_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \sin 2t \right] e^{5t}$$

$$X_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t \right] e^{5t}$$

donde

$$X_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \sin 2t \right] e^{5t}$$

$$X_2 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t \right] e^{5t}$$

Es importante entender que los vectores X_1 y X_2 en (II) constituyen un conjunto linealmente independiente de soluciones reales del sistema original. La combinación lineal (II) es una solución general alternativa del problema.

En general, Sea K_1 un autovector característico de la matriz de coeficientes A (con elementos reales) que corresponden al autovalor complejo $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \;\; \alpha, \beta \in R$. Entonces los vectores solución del teorema anterior se pueden escribir como

$$K_1 e^{\lambda_1 t} = K_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} = K_1 e^{\alpha t} \left(\cos 2t + i \sin 2t\right)$$
$$\overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t} = \overline{K}_1 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \overline{K}_1 e^{\alpha t} \left(\cos 2t - i \sin 2t\right)$$

En general, Sea K_1 un autovector característico de la matriz de coeficientes A (con elementos reales) que corresponden al autovalor complejo $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \ \ \alpha, \beta \in R$. Entonces los vectores solución del teorema anterior se pueden escribir como

$$K_1 e^{\lambda_1 t} = K_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} = K_1 e^{\alpha t} (\cos 2t + i \sin 2t)$$
$$\overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t} = \overline{K}_1 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \overline{K}_1 e^{\alpha t} (\cos 2t - i \sin 2t)$$

Por el principio de superposición, los siguientes vectores también son soluciones

$$X_1 = \frac{1}{2}\left(K_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}\right) = \frac{1}{2}\left(K_1 + \overline{K}_1\right) e^{\alpha t} \cos \beta t - \frac{i}{2}\left(-K_1 + \overline{K}_1\right) e^{\alpha t} \text{si}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{i}{2}\left(-K_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{K}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(-K_1 + \overline{K}_1\right) e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{1}{2}\left(K_1 + \overline{K}_1\right) e^{\alpha t} \sin \beta t \end{aligned}$$

Definimos

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(K_1 + \overline{K}_1\right) \quad y \quad B_2 = \frac{i}{2}\left(-K_1 + \overline{K}_1\right) \tag{III}$$

Definimos

$$B_1 = \frac{1}{2}\left(K_1 + \overline{K}_1\right) \quad y \quad B_2 = \frac{i}{2}\left(-K_1 + \overline{K}_1\right) \tag{III}$$

Theorem (Soluciones reales que corresponden a un autovalor complejo)

Sea $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ un autovalor complejo de la matriz de coeficientes A en el sistema homogéneo (1) y sean B_1 y B_2 los vectores columna definidos en (III). Entonces

$$\begin{aligned} X_1 &= \left[B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t\right] e^{\alpha t} \\ X_2 &= \left[B_2 \cos \beta t + B_1 \sin \beta t\right] e^{\alpha t} \end{aligned} \tag{IV}$$

son soluciones linealmente independientes de (1) en $(-\infty, \infty)$.

(Observación)

Las matrices B_1 y B_2 tambien se denotan por

$$B_1 = \mathrm{Re}\left(K_1\right) \quad y \quad B_2 = \mathrm{Im}\left(K_1\right)$$

(Observación)

Las matrices B_1 *y* B_2 *tambien se denotan por*

$$B_1 = \mathrm{Re}\,(K_1) \quad y \quad B_2 = \mathrm{Im}\,(K_1)$$

Por ejemplo (II) se deduce (IV) con

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \mathrm{Re}\,(K_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B_2 = \mathrm{Im}\,(K_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Example

Resolver el problema de Cauchy

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Example

Resolver el problema de Cauchy

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solution

Hallando los autovalores

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

se tienen: $\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i = \overline{\lambda}_1$. *Para* λ_1, *el sistema es*

$$\begin{aligned} (2-2i)\,k_1 + 8k_2 &= 0 \\ -k_1 + (-2-2i)\,k_2 &= 0 \end{aligned}$$

entonces $k_1 = -(2+2i)\,k_2$.

Solution

Eligiendo $k_2 = 1$, *se tiene*

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos que

$$B_1 = \mathrm{Re}\,(K_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \mathrm{Im}\,(K_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solution

Eligiendo $k_2 = 1$, *se tiene*

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos que

$$B_1 = \mathrm{Re}\,(K_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \mathrm{Im}\,(K_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\alpha = 0$, *de (IV) se tiene que la solución general del sistema es*

$$X = c_1 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2 \right.$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1\cos 2t + 2\sin 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$