

Schrödinger 绘景, Heisenburg 绘景与相互作用绘景

Dixuan Wu

January 20, 2025

1 Schrödinger 绘景

在 Schrödinger 绘景中, 体系的态矢量随时间变化, 遵守 Schrödinger 方程:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H \psi(t) \quad (1.1)$$

令

$$\psi(t) = U(t, 0) \psi(0) \quad (1.2)$$

$U(t, 0)$ 称为时间变化算符。

将1.2代入1.1, 得

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, 0) \psi(0) = H U(t, 0) \psi(0) \quad (1.3)$$

所以

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, 0) = H U(t, 0) \quad (1.4)$$

又有初始条件

$$U(0, 0) = 1 \quad (1.5)$$

所以可得

$$U(t, 0) = \begin{cases} \exp(-iHt/\hbar) & H \text{ 不显含 } t \\ T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t') dt'\right) & H \text{ 显含 } t \end{cases} \quad (1.6)$$

其中 T 为时间排序算符 (编时算符)。

在 Schrödinger 绘景中, 力学量 A (算符, 不显含 t) 不随时间变化, 我们只考虑它的期待值 $\langle A \rangle$ 随时间的变化

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | U^\dagger(t, 0) A U(t, 0) | \psi(0) \rangle \quad (1.7)$$

定义

$$A_H(t) = U^\dagger(t, 0) A U(t, 0) \quad (1.8)$$

2 Heisenburg 绘景

$\langle A \rangle(t)$ 随时间的变化可以用另外一种图像来理解, 即让 $\langle A \rangle(t)$ 随时间的变化完全由力学量 (算符) $A_H(t)$ (1.8) 来承担, 而保持态矢量 $\psi_H = \psi(0)$ 不随时间变化, 即 Heisenburg 绘景。由1.8可得

$$\frac{d}{dt} A_H(t) = \frac{1}{i\hbar} [A_H(t), H] \quad (2.1)$$

此式即为 Heisenberg 方程, 它描述在 Heisenburg 绘景中力学量 (算符) 随时间的变化。

算符 A 的期待值为

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(0) | U^\dagger(t, 0) A U(t, 0) | \psi(0) \rangle = \langle \psi_H | A_H(t) | \psi_H \rangle \quad (2.2)$$

其中 $A_H(t)$ 为力学量（算符）在 Heisenberg 绘景中的形式， A 为力学量（算符）在 Schrödinger 绘景中的形式。

Schrödinger 绘景与 Heisenberg 绘景的比较

(1) 在 Schrödinger 绘景中，态矢量 $\psi(t)$ 随时间变化，遵守 Schrödinger 方程1.1，力学量（算符） A 不随时间变化。与此相反，在 Heisenberg 绘景中，态矢量 $\psi_H = \psi(0)$ 不随时间变化，而力学量（算符） $A_H(t)$ 随时间变化，遵守 Heisenberg 方程2.1。

(2) 在 Schrödinger 绘景中，由于力学量（算符）不随时间变化，力学量完全集的共同本征态（作为 Hilbert 空间的基矢）也不随时间变化，因而任何一个力学量（算符）在这组基矢之间的矩阵元也不随时间变化，但描述体系状态的矢量（在各基矢方向上的投影或分量）是随时间改变的。与此相反，在 Heisenberg 绘景中，描述体系状态的矢量不随时间变化，但由于力学量（算符）随时间变化，因此，力学量完全集的共同本征态随时间变化，而且任何一个力学量在此一组运动的各基矢之间的矩阵元也随时间变化。

(3) 两种绘景是等价的，凡物理上可观测的结果都不会因所采取绘景不同而异（1.7与2.2等价）。

3 相互作用绘景

设

$$H = H_0 + H' \quad (3.1)$$

H_0 是自由 Hamilton 量（不显含时间 t ）， H' 是相互作用 Hamilton 量。

令

$$\psi_I(t) = \exp(iH_0 t/\hbar) \psi(t), \quad \psi(t) = \exp(-iH_0 t/\hbar) \psi_I(t) \quad (3.2)$$

容易证明

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_I(t) = H'_I(t) \psi_I(t) \quad (3.3)$$

其中

$$H'_I(t) = \exp(iH_0 t/\hbar) H' \exp(-iH_0 t/\hbar) \quad (3.4)$$

$\psi_I(t)$ 为相互作用绘景中的态矢量， $H'_I(t)$ 为相互作用绘景中的相互作用 Hamilton 量。

算符 A 的期待值为

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \langle \psi_I(t) | \exp(iH_0 t/\hbar) A \exp(-iH_0 t/\hbar) | \psi_I(t) \rangle = \langle \psi_I(t) | A_I(t) | \psi_I(t) \rangle \quad (3.5)$$

其中

$$A_I(t) = \exp(iH_0 t/\hbar) A \exp(-iH_0 t/\hbar) \quad (3.6)$$

为算符 A 在相互作用绘景中的形式。 $A_I(t)$ 随时间的变化满足

$$\frac{d}{dt} A_I(t) = \frac{1}{i\hbar} [A_I(t), H_0] \quad (3.7)$$

在相互作用绘景中，态矢量 $\psi_I(t)$ 和力学量（算符） $A_I(t)$ 都随时间变化，态矢量的变化由相互作用 Hamilton 量 $H'_I(t)$ 来支配（3.3），而力学量（算符）随时间的变化则由 H_0 来支配（3.7）。