N 维空间球体体积和表面积的高斯积分推导

Dixuan Wu

March 29, 2025

1 问题定义

考虑 N 维欧氏空间中的球体，其体积 $V_N(R)$ 和表面积 $S_N(R)$ 定义为：

$$\begin{cases} V_N(R) = \displaystyle\int_{x_1^2+\cdots+x_N^2 \le R^2} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \\ S_N(R) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R} V_N(R) \end{cases} \tag{1}$$

目标是通过高斯积分法推导出显式表达式。

2 核心推导

2.1 高斯积分的两种表示

首先计算 N 维高斯积分：

$$I = \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}V, \quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{2}$$

2.1.1 笛卡尔坐标法

利用积分的可分性：

$$I = \prod_{i=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_i^2} \mathrm{d}x_i = (\sqrt{\pi})^N \tag{3}$$

2.1.2 球坐标法

引入球坐标分解 $\mathrm{d}V = S_N(1) r^{N-1} \mathrm{d}r$，其中 $S_N(1)$ 为单位球面面积：

$$I = S_N(1) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{N-1} \mathrm{d}r \tag{4}$$

2.2 单位球面面积推导

联立两种方法结果：

$$S_N(1) = \frac{(\sqrt{\pi})^N}{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{N-1} \mathrm{d}r} \tag{5}$$

通过变量替换 $t=r^2$，可得：

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r^{N-1} \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{\frac{N}{2}-1} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \tag{6}$$

因此单位球面面积为：

$$\boxed{S_N(1) = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}} \tag{7}$$

2.3 单位球体积推导

体积与表面积满足微分关系：

$$V_N(1) = \int_0^1 S_N(r)\mathrm{d}r = S_N(1)\int_0^1 r^{N-1}\mathrm{d}r = \frac{S_N(1)}{N} \tag{8}$$

代入 $S_N(1)$ 的表达式，并利用伽马函数性质 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$，可得：

$$\boxed{V_N(1) = \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}} \tag{9}$$

3 一般半径的推广

通过量纲分析可得：

$$\begin{cases} S_N(R) = S_N(1)R^{N-1} \\ V_N(R) = V_N(1)R^N \end{cases} \tag{10}$$

最终结果为：

$$\boxed{\begin{aligned} V_N(R) &= \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1\right)}R^N \\ S_N(R) &= \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}R^{N-1} \end{aligned}} \tag{11}$$