Legendre 变换

Dixuan Wu

May 23, 2025

1 初始设定

考虑一个二元函数 $F(x,y)$，其全微分为：

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y = u(x,y)\mathrm{d}x + v(x,y)\mathrm{d}y \tag{1.1}$$

其中：

$$u(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} \tag{1.2}$$

这里，x 和 y 是独立变量，u 和 v 是 x 和 y 的函数。

2 变量替换的目标

我们希望将独立变量从 (x,y) 转换为 (x,v)。也就是说，将 y 替换为 v 的函数。为了实现这一点，需要构造一个新的函数 $G(x,v)$，使得它的全微分仅包含 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}v$。

3 构造新函数

观察到 $\mathrm{d}F = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y$，我们希望消去 $\mathrm{d}y$ 并引入 $\mathrm{d}v$。为此，在等式两边减去 $\mathrm{d}(yv)$：

$$\mathrm{d}(F - yv) = \mathrm{d}F - \mathrm{d}(yv) \tag{3.1}$$

计算 $\mathrm{d}(yv)$：

$$\mathrm{d}(yv) = y\mathrm{d}v + v\mathrm{d}y \tag{3.2}$$

因此：

$$\mathrm{d}(F - yv) = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y - (y\mathrm{d}v + v\mathrm{d}y) = u\mathrm{d}x - y\mathrm{d}v \tag{3.3}$$

现在，右边的微分形式仅包含 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}v$，这正是我们需要的。

定义新函数 $G(x,v)$ 为：

$$G(x,v) = F(x,y) - yv \tag{3.4}$$

其全微分为：

$$\mathrm{d}G = u\mathrm{d}x - y\mathrm{d}v \tag{3.5}$$

4 新函数的偏导数

从 $\mathrm{d}G = u\mathrm{d}x - y\mathrm{d}v$ 可以看出：

$$\frac{\partial G}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial G}{\partial v} = -y \tag{4.1}$$

这表明：

$$u\text{是新函数}G\text{对}x\text{的偏导数} \tag{4.2}$$

$$y\text{是新函数}G\text{对}v\text{的偏导数的相反数} \tag{4.3}$$

5 变量关系的转换

原始变量 y 现在可以表示为 v 的函数。具体来说：

$$\text{从}v = \frac{\partial F}{\partial y}, \text{ 可以解出}y = y(x, v) \tag{5.1}$$

将 y 代入 $G(x, v) = F(x, y) - yv$，即完成了变量的转换。

6 Legendre 变换的几何意义

Legendre 变换可以理解为通过切线的斜率（即偏导数）来重新描述函数。原始函数 $F(x, y)$ 的微分信息被完全保留在新函数 $G(x, v)$ 中，只是自变量从 y 转换为了 v。

7 总结

Legendre 变换的具体步骤如下：

$$1.\text{从原始函数}F(x, y)\text{出发，计算其全微分}\mathrm{d}F = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y \tag{7.1}$$

$$2.\text{定义新函数}G(x, v) = F(x, y) - yv \tag{7.2}$$

$$3.\text{计算}\mathrm{d}G = u\mathrm{d}x - y\mathrm{d}v,\text{得到新函数的偏导数关系} \tag{7.3}$$

$$4.\text{通过}v = \frac{\partial F}{\partial y}\text{将}y\text{表示为}v\text{的函数} \tag{7.4}$$

这样，我们就成功地将独立变量从 (x, y) 转换为了 (x, v)，同时保留了系统的全部信息。

8 补充说明

如果目标是转换 x 而不是 y，方法完全类似：定义 $G(u, y) = F(x, y) - xu$。

Legendre 变换在物理学中广泛应用，例如从拉格朗日力学到哈密顿力学的转换（将广义速度转换为广义动量）