从极小作用量原理出发推导场论中的 Lagrange 方程

Dixuan Wu

June 2, 2025

我们考虑一个由连续变量 $\boldsymbol{r}$ 和离散指标 j 共同决定状态的系统，其动力学变量为 $A_j(\boldsymbol{r},t)$，其时间导数为

$$\dot{A}_j(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial A_j(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1}$$

系统的 Lagrange 量定义为对 Lagrange 密度 $\mathscr{L}$ 的空间积分：

$$L = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathscr{L}(A_j, \dot{A}_j, \partial_i A_j) \tag{2}$$

其中 $\partial_i = \partial/\partial x^i$ 表示对空间坐标的偏导数，$i = 1, 2, 3$。

系统的作用量为：

$$S[A_j] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathscr{L}(A_j, \dot{A}_j, \partial_i A_j) \tag{3}$$

我们考虑 $A_j(\boldsymbol{r},t)$ 的任意微小变分：

$$A_j(\boldsymbol{r},t) \to A_j(\boldsymbol{r},t) + \delta A_j(\boldsymbol{r},t) \tag{4}$$

其中 δA_j 在边界处为零。

作用量的变分为：

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_j}\delta A_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j}\delta \dot{A}_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)}\delta(\partial_i A_j) \right] \tag{5}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_j}\delta A_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j}\partial_t \delta A_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)}\partial_i \delta A_j \right] \tag{6}$$

对第二项和第三项使用分部积分（边界项为零）：

时间导数项：

$$\int \mathrm{d}t\, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j}\partial_t \delta A_j = -\int \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j} \right) \delta A_j \tag{7}$$

空间导数项：

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)}\partial_i \delta A_j = -\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \partial_i \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)} \right) \delta A_j \tag{8}$$

综上，作用量的变分为：

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j} \right) - \partial_i \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)} \right) \right] \delta A_j \tag{9}$$

由于 δA_j 是任意的，为使 $\delta S = 0$ 恒成立，必须满足 Euler-Lagrange 场方程：

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_j} - \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)} \right)} \tag{10}$$

该公式就是从极小作用量原理出发推导得到的 Lagrange 场方程，适用于描述如电磁场等连续场的动力学演化。