从 Lagrange 场论出发推导 Hamilton 场方程

Dixuan Wu

June 2, 2025

在经典场论中，为了从 Lagrange 形式过渡到 Hamilton 形式，我们需要定义与“广义坐标”$A_j(\boldsymbol{r},t)$ 共轭的“广义动量”$\Pi_j(\boldsymbol{r},t)$：

$$\Pi_j(\boldsymbol{r},t) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j(\boldsymbol{r},t)} \tag{1}$$

这与粒子力学中的动量定义完全类似。Lagrange 形式使用变量对 $(A_j, \dot{A}_j)$ 描述系统，而 Hamilton 形式则使用 (A_j, Π_j)。

我们通过对 Lagrange 密度 $\mathscr{L}$ 进行 Legendre 变换来定义 Hamilton 量密度 $\mathscr{H}$：

$$\mathscr{H} = \sum_j \Pi_j(\boldsymbol{r},t)\dot{A}_j(\boldsymbol{r},t) - \mathscr{L} \tag{2}$$

从而得到总的 Hamilton 量：

$$H = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \mathscr{H} \tag{3}$$

注意：$\mathscr{H}$ 是关于 $A_j, \Pi_j,$ 以及 $\partial_i A_j$ 的函数（但不依赖 $\dot{A}_j$，因为 $\dot{A}_j$ 应该被消去）。

推导 Hamilton 场方程

我们希望从变分原理出发，得到动力学变量 $A_j(\boldsymbol{r},t)$ 和其共轭动量 $\Pi_j(\boldsymbol{r},t)$ 的演化方程。

由于 $\mathscr{H} = \mathscr{H}(A_j, \Pi_j, \partial_i A_j)$，我们可以直接对其作时间的全导数：

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_j}\dot{A}_j + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Pi_j}\dot{\Pi}_j + \sum_i \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial(\partial_i A_j)}\partial_i \dot{A}_j \right) \tag{4}$$

另一方面，代入 $\mathscr{H} = \sum_j \Pi_j \dot{A}_j - \mathscr{L}(A_j, \dot{A}_j, \partial_i A_j)$ 的定义，并对其作时间导数，得到：

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\dot{\Pi}_j \dot{A}_j + \Pi_j \ddot{A}_j \right) - \frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

其中，$\mathscr{L}$ 的时间导数展开为：

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_j}\dot{A}_j + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j}\ddot{A}_j + \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)}\partial_i \dot{A}_j \right) \tag{6}$$

将其代入上式，注意 $\Pi_j = \partial\mathscr{L}/\partial\dot{A}_j$，可以将 $\ddot{A}_j$ 项抵消，得到：

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\dot{\Pi}_j \dot{A}_j - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_j} \dot{A}_j - \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)} \partial_i \dot{A}_j \right) \tag{7}$$

将上式与链式法则展开的时间导数表达式相比较：

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{H}}{\mathrm{d}t} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_j} \dot{A}_j + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Pi_j} \dot{\Pi}_j + \sum_i \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial(\partial_i A_j)} \partial_i \dot{A}_j \right) \tag{8}$$

我们可以逐项比较两式中 $\dot{\Pi}_j$、$\dot{A}_j$ 与 $\partial_i \dot{A}_j$ 的系数，得到以下等式恒成立：

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Pi_j} = \dot{A}_j \tag{9}$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_j} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_j} \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial(\partial_i A_j)} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)} \tag{11}$$

结合场论的 Euler–Lagrange 方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_j} \right) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_j} - \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_i A_j)} \right) \tag{12}$$

并代入 $\Pi_j = \partial \mathscr{L} / \partial \dot{A}_j$，即可推出：

$$\dot{\Pi}_j = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_j} + \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial(\partial_i A_j)} \right) \tag{13}$$

因此，Hamilton 场方程最终写为：

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{A}_j &= \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Pi_j} \\ \dot{\Pi}_j &= -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial A_j} + \sum_i \partial_i \left(\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial(\partial_i A_j)} \right) \end{aligned}} \tag{14}$$

这就是从 Lagrange 形式出发，通过 Legendre 变换得到的 Hamilton 形式的演化方程，适用于连续场的 Hamilton 力学。