



پردیس دانشکده‌های فنی

بسمه تعالی
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
تمرین سری دوم درس شناسایی الگو



دانشگاه تهران

سلام بر تمام دانشجویان عزیز، چند نکته مهم:

۱. حجم گزارش به هیچ عنوان معیار نمره‌دهی نیست، در حد نیاز توضیح دهید.
۲. نکته‌ی مهم در گزارش نویسی روشن بودن پاسخها می‌باشد، اگر فرضی برای حل سوال استفاده می‌کنید حتماً آن را ذکر کنید، اگر جواب نهایی عددی است به صورت واضح آن را بیان کنید.
۳. برای سوالات شبیه سازی، فقط از دیتاست داده شده استفاده از کنید. شکل ها، به طور واضح و فرمت درست گزارش شود.
۴. از بین سوالات **امتیازی** حتماً به یک مورد پاسخ داده شود و از بین سوال‌های ۱-۶، به اختیار خود، به ۵ مورد حتماً پاسخ داده شود.
۵. هرگونه شباهت در گزارش و کد مربوط به شبیه سازی، به منزله **تقلب** می باشد و کل نمره تمرین **صفر** می‌شود.
۶. در صورت داشتن سوال، از طریق ایمیل salar.nouri@ut.ac.ir سوال خود را مطرح کنید.

۱. دو توزیع نرمال، $p(x|\omega_i) \sim N(\mu_i, \sigma^2 \mathbf{I})$ ، با توزیع احتمال پیشین یکسان را در نظر بگیرید.
الف) کمترین مقدار احتمال خطا را محاسبه کنید.
ب) در صورتی که میانگین یکی از توزیع ها، صفر باشد، نشان دهید که مقدار احتمال خطا به صفر میل میکند. این نتیجه را توضیح دهید.

۲. دو توزیع نرمال، با میانگین های متفاوت و ماتریس کواریانس یکسان در نظر بگیرید. تحت چه شرایطی، مرز تصمیم گیری بیز، از بین میانگین این دو توزیع، عبور نمی کند.

۳. دو کلاس یک بعدی، که توزیع نرمال با واریانس برابر و میانگین ۰ و ۱ دارند را در نظر بگیرید، مقدار آستانه x ای که در آن، میانگین ریسک کمینه می شود را، بیابید.

۴. سه کلاس دو بعدی، که توزیع نرمال با ماتریس کواریانس و میانگین زیر دارند و احتمال رخداد برابر را، فرض کنید:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.8 \end{bmatrix}$$

$$\mu_1 = [0.1, 0.1]^T, \mu_2 = [2.1, 1.9]^T, \mu_3 = [-1.5, 2.0]^T$$

الف) مطابق با Bayes Minimum error probability classifier ویژگی $[1.6, 1.5]^T$ را طبقه بندی کنید.

ب) منحنی هایی که نشان دهنده فاصله Mahalanobis از مقدار $[2.1, 1.9]^T$ می باشند، را رسم کنید.

۵. قاعده تصمیم گیری زیر را برای ۲ کلاس یک بعدی در نظر بگیرید:

$$\text{decide } \omega_1 \text{ if } x > \theta; \quad \text{otherwise decide } \omega_2$$

الف) مقدار احتمال خطای مربوطه را به دست بیاورید.

ب) در چه شرایطی این احتمال خطا، کمترین مقدار خود را دارد (رابطه ریاضی). شرایط توزیع θ در این حالت چگونه است؟

پ) به ازای چه مقداری از θ احتمال خطا maximum مقدار خود را دارد؟

۶. فرض کنید که تابع تصمیم گیری یقینی $\alpha(x)$ را با قاعده تصادفی شده آن جایگزین می کنیم.

الف) نشان دهید که مقدار ریسک برابر است با:

$$R = \int \left[\sum_{i=1}^a R(\alpha_i | x) P(\alpha_i | x) \right] p(x) dx$$

ب) در چه شرایطی مقدار ریسک کمترین مقدار خود را دارد؟

پ) آیا تصادفی کردن یک قاعده suboptimal مزیت دارد؟ توضیح دهید.

۷. (امتیازی) با استفاده از قاعده تصمیم گیری minmax، برای طبقه بندی کردن ۳ کلاس، که توزیع مثلی به صورت زیر

دارند، موارد مذکور را بررسی کنید:

$$p(x|\omega_i) = T(\mu_i, \delta_i) = \begin{cases} \frac{\delta_i - |x - \mu_i|}{\delta_i^2}; & \text{for } |x - \mu_i| < \delta_i \\ 0; & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\text{where } \delta_i > 0; \quad \text{and} \quad \mu_1 < \mu_2 < \mu_3$$

الف) نقاط تصمیم گیری بهینه را تحت zero-one loss به دست آورید.

ب) قاعده تصمیم گیری minmax را برای دو نقطه تصمیم گیری برای توزیع های مثلی مربوطه به دست آورید.

- ج) با در نظر گرفتن مقادیر ۰ و ۰.۵ و ۱ برای میانگین ها و به همان ترتیب مقادیر ۱ و ۰.۵ و ۱ برای مقادیر دلتا، قاعده تصمیم گیری minmax را پیدا کنید.
- د) ریسک minmax چیست؟

۸. (امتیازی) شرایط Neyman-Pearson را برای دو توزیع کوشی در یک بعد را، در نظر بگیرید:

$$p(x|\omega_i) = \frac{1}{\pi b} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x - a_i}{b})^2}, \quad i = 1, 2.$$

- الف) مرز تصمیم گیری را به دست بیاورید.
- ب) برای این مرز تصمیم گیری، نرخ خطا چقدر می باشد.
- ج) نتایج خود را با نرخ خطای بیز مقایسه کنید. (بدون در نظر گرفتن شرایط Neyman-Pearson)

۹. (امتیازی) با استفاده رابطه مطرح شده برای آنتروپی در کلاس و شرایط زیر، موارد الف و ب را بررسی کنید.

$$\int b_k(x)p(x)dx = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, q$$

الف) با استفاده از ضرایب لاگرانژ، رابطه زیر را به دست آورید و مقادیر a, b را محاسبه کنید.

$$H_S = - \int p(x) \left[\ln p(x) - \sum_{k=0}^q \gamma_k b_k(x) \right] dx - \sum_{k=0}^q \gamma_k a_k$$

ب) به ازای چه احتمالی، مقدار آنتروپی در رابطه بالا، کمینه خواهد بود.

۱۰. با استفاده از داده های مربوط به این سوال (دیتاست MNIST)، سوالات مربوطه زیر را شبیه سازی کرده و نتایج مربوطه را گزارش کنید.

- به تعداد ۱۰ نمونه از جدول بالا انتخاب کنید، جهت هر قسمت یک طبقه بند طراحی کنید.
- در هر مورد ماتریس Confusion ، مقدار Correct Classification Rate و ماتریس Confidence را گزارش دهید.

الف) با در نظر گرفتن احتمال پیشین یکسان برای کلاس یک و دو و صفر برای کلاس سوم، با استفاده از داده های مربوط به ویژگی اول، طراحی کنید

ب) مقدار empirical training error را برای نمونه های خود حساب کنید.

پ) موارد بالا را برای حالتی که بتوانید از دو ویژگی استفاده کنید، انجام دهید.

ج) نتایج بالا را بررسی و بحث کنید. و بررسی کنید که با افزایش بعد داده ها، مقدار empirical error چگونه تغییر میکند؟

۱۱. (بخش اول) یک طبقه بند Bayes با تخمین زن pdf گوسی، جهت کمینه کردن احتمال خطای طبقه بندی طراحی کنید. (روابط را به طور دقیق شرح دهید)
برای دیتاست داده شده، این طبقه بند را تست کنید و مقدار correct classification و ماتریس Confidence , Confusion را گزارش دهید.
این کار را با استفاده از توابع از پیش تعریف شده scikit-learn انجام دهید و مقادیر زیر را گزارش دهید و نتایج را بررسی کنید.

الف) Correct Classification Rate (ب) Confusion Matrix (پ) Confidence Matrix

ت) Required time for Training the algorithm

ث) Required time for testing the algorithm

(بخش دوم) موارد بالا را برای طبقه بند K-NN نیز انجام داده و نتایج را با طبقه بند Bayes مقایسه کنید. همچنین برای طبقه بند K-NN، (با یک روش) با استفاده از سه معیار فاصله پی، اقلیدسی و مایلانوبیس پیاده سازی کنید و نتایج این سه معیار را با یکدیگر بررسی کنید.

- در هر بخش، برای کلاس های مطرح شده، نمودار ROC را رسم کنید و مقدار AUROC گزارش دهید.

۱۲. در این سوال، طبقه بندی طراحی کنید که بتوانیم، که ۲ کلاس متفاوت (دو تیم فوتبال **منچستر یونایتد** و **چلسی**) با استفاده از دیتاست داده شده، را تشخیص دهیم. انتخاب نوع طبقه بند به عهده خودتان می باشد. برای دیتاست داده شده، این طبقه بند را تست کنید و مقدار correct classification و ماتریس Confidence, Confusion را گزارش دهید. همچنین، نمودار ROC را برای دو کلاس مربوطه رسم کنید.
جهت انتخاب ویژگی، می توان از ویژگی ای که برای هر کلاس مشخص است و باعث تمایز آن دو کلاس می شود را، انتخاب کرد. (میانگین رنگ در هر عکس)

۱۳. به صورت تحلیلی نشان دهید که در Whitening Transformation، فاصله اقلیدسی در فضای انتقال یافته با فاصله مایلانوبیس در فضای ابتدایی برابر می باشد.
