

清 华 大 学

综 合 论 文 训 练

题目：纠缠动力学的纠缠特征描述

系 别：物理系

专 业：数理基础科学

姓 名：张锦苏

指导教师：尤亦庄助理教授

辅导教师：翁征宇教授

2020 年 6 月 13 日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名： 张锦茹 导师签名： 付强 日 期： 2020.6.12

中文摘要

与经典物理相比，量子物理中的纠缠现象是它最为迷人的特色之一，它表现了两个多体子系统可以有非局域的相关性^[1]。纠缠熵是对量子系统纠缠程度的度量，近年来相关的研究在量子信息、凝聚态、以及引力和黑洞上都有广泛的应用。

随着超导、离子阱等技术在量子计算上的应用逐渐深入，制造相对复杂的量子逻辑门和量子电路也逐渐成为了现实。实现量子纠缠对于提升量子计算机的计算性能来说是至关重要的。对量子纠缠抵抗测量鲁棒性的研究，有助于设计远高于经典信息技术计算性能的量子系统。除此之外，对量子纠缠的探索有助于加深我们对多体系统的热力学的认识。

本文主要介绍了量子信息学的基本概念以及信息扰乱、失时序关联器等前沿的概念，综述了纠缠熵特征算符描述以及在随机幺正电路中的纠缠熵相变研究进展，同时对有关的论文结果给出了数值模拟复现。

关键词：纠缠熵；量子纠缠；纠缠熵动力学；量子多体系统

ABSTRACT

Compared to classical physics, the entanglement phenomenon is the most intriguing feature of quantum physics. It demonstrated the non-local correlations between two subsystems in a many-body system^[1]. The concept of entanglement entropy was introduced to measure how much the system is entangled. Relevant studies in recent years have emerged in various fields, including quantum information, condensed matter, black holes and gravity.

For starters, with techniques such as superconductors and ion traps advancing in the field of quantum computing, designing and performing comparatively complicated quantum logic gates and quantum circuits is not idealistic anymore. Performing quantum entanglement plays a crucial role in improving the capacity of quantum computing. The study towards the robust character of the entanglement against measurements would significantly benefit the protocol design of future quantum systems with the computing capacity that far more than that of classical information technologies. Moreover, the discovery of entanglement helps deepen our understanding of the thermodynamics of many-body systems.

In this thesis, we will introduce basic concepts of quantum information, the cutting-edge topics such as information scrambling and OTOC. We will review the literature of Entanglement Feature Formalism and the Entanglement Transitions in Random Unitary Circuit. We also provide numerical simulations of relevant results which is consistent with literature.

Keywords: Entanglement Entropy; Quantum Entanglement; Entanglement Entropy Dynamics; Quantum Many-body System

目 录

第 1 章 背景知识	1
1.1 量子纠缠和熵	1
1.2 混态演化、投影测量、广义测量和弱测量	4
1.3 随机幺正电路 (Random Unitary Circuit) 模型	7
1.4 边界律 (boundary law)、矩阵直积态 (Matrix Product State)	8
1.5 热化 (Thermalization)	10
1.6 信息扰乱 (Information Scrambling)	11
1.6.1 失时序关联 (OTOC, Out-of-time-order Correlator) 和量子混沌 (Quantum Chaos)	11
1.6.2 互信息 (Mutual Information)	16
1.6.3 相对熵、费希尔信息	17
第 2 章 纠缠熵动力学	19
2.1 纠缠熵相变 (Entanglement Phase Transition)	19
2.2 纠缠熵特征 (Entanglement Features) 算符	22
2.3 数值模拟	29
2.3.1 数值模拟方法	29
2.3.2 数值模拟结果及讨论	33
第 3 章 正文补充	36
3.1 复制方法 (Replica Method)	36
3.2 Weingarten 函数	38
参考文献	41
致 谢	47
声 明	48
附录 A 外文资料的调研阅读报告	49

第 1 章 背景知识

在本章节我们会回顾量子信息的基本原理、熵的内容^①, 介绍了信息扰乱 (Information Scrambling)、失时序关联 (OTOC, Out-of-time-order Correlator)、边界律、热化等物理概念, 以及一个近年来的研究中常用的模型: 随机么正电路 (RUC, Random Unitary Circuit). 这些内容将会为纠缠动力学研究提供必要的物理背景和计算方法.

1.1 量子纠缠和熵

我们知道, 给出一个量子系统, 我们可以写出它的密度矩阵 (density matrix) 为1-1:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad (1-1)$$

考虑将系统一分为二, 所在的希尔伯特空间 (Hilbert Space) 可用式1-2表示:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (1-2)$$

对系统 B 的希尔伯特空间求迹 (trace), 得到约化密度矩阵 (reduced density matrix), 见式1-3:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho = \sum_i \langle\psi_{B_i}|\rho|\psi_{B_i}\rangle \quad (1-3)$$

约化密度矩阵的另一种表达式为:

$$\langle\psi_{AB}|\hat{O}_A|\psi_{AB}\rangle = \text{Tr}(\rho_A \hat{O}_A) \quad (1-4)$$

如果式1-1所代表的系统是一个纯态 (pure state), 它的密度矩阵是 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. 进一步地, 可以将纯密度矩阵定义为 $|\psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$. 这一过程叫做纠缠纯化 (entanglement purification).

^① 本章参考了^{[2][1][3]}.

下面考虑一个形如式1-5的态. 其中, $|i\rangle_A$ 和 $|\mu\rangle_B$ 分别是 A 和 B 空间的正交归一基矢量, 相关系数 $c_{i,\mu}$ 为 $d_A \times d_B$ 维的矩阵.

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,\mu} c_{i,\mu} |i\rangle_A \otimes |\mu\rangle_B \quad (1-5)$$

如果一个系统的相关系数 $c_{i,\mu}$ 可以写成 $c_{i,\mu} = c_{i_A} c_{\mu_B}$, 那么它可以写成 $|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_A \otimes |\Psi\rangle_B$ 的形式, 其中 $|\Psi\rangle_A = \sum_i c_{i_A} |i\rangle_A$, $|\Psi\rangle_B = \sum_\mu c_{\mu_B} |\mu\rangle_B$. 这个态被称为可分态 (separable state) 或直积态 (product state). 显然, 它的约化密度矩阵是纯的.

如果 $c_{i,\mu} \neq c_{i_A} c_{\mu_B}$, 这个态被称为纠缠态 (entangled state). 通过施密特分解 (Schmidt decomposition), 这个态可以写成式1-6的形式. 其中, p_k 恒不为负, 且 $\sum_k p_k = 1$, $|\psi_k\rangle$ 为 A 、 B 系统的在施密特分解下新生成的正交归一基矢量.

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^{\min d_A, d_B} \sqrt{p_k} |\psi_k\rangle_A \otimes |\psi_k\rangle_B \quad (1-6)$$

下面更详细地解释式1-6. 我们对 $c_{i,\mu}$ 做奇异值分解 (SVD, singular value decomposition), 即找到 d_A 维矩阵 U 、和 d_B 维的矩阵 V 满足 $C = U \Sigma V^\dagger$. 那么实际上 $|\psi_k\rangle_A = \sum_i U_{ik} |i\rangle_A$, $|\psi_k\rangle_B = \sum_\mu V_{k\mu} |\mu\rangle_B$. 它的约化密度矩阵是一个混合态 (mixed state), 即式1-7.

$$\rho_A = \sum_{i=1}^{d_B} \langle \psi_i | \Psi \rangle \langle \Psi | \psi_i \rangle_B = \sum_{k=1}^{\min d_A, d_B} p_k |\psi_k\rangle_A \langle \psi_k| \quad (1-7)$$

我们下面引入熵. 在信息论中, 熵可以被视作一种从随机分布的事件中获取的平均信息的度量.

- 香农熵 (Shannon Entropy) 的定义为式1-8^[4]:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i) \quad (1-8)$$

- 考虑式1-3所描述的二分系统 (bipartite system), 冯诺伊曼熵 (Von Neumann Entropy) 被式1-9定义为^[5]:

$$S_A(\rho_A) = - \text{Tr}(\rho_A \log \rho_A) \quad (1-9)$$

- 仁义熵 (Rényi Entropy) 的定义是式1-11^[6]. 当 $n \rightarrow 1$ 时, 仁义熵近似为冯诺

伊曼熵^①.

$$S_A^{(n)}(A) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}_A \rho_A^n \quad (1-11)$$

下面介绍几个有关熵的性质.

- $S_A(\rho_A)$ 最大时, 态矢的纠缠为最大, 此时 $S_A(\rho_A) = \ln(\dim \mathcal{H}_A)$. 如果密度矩阵是纯的, $S_A(\rho_A) = 0$.
- S_A 在基矢量的么正变换下保持不变, $S_A(\rho_A) = S_A(U^\dagger \rho_A U)$.
- 如果基态波函数是纯的, 一个子系统的纠缠熵 S_A 和它的补的纠缠熵相等, 即 $S_A = S_{\bar{A}}$.
- 对于不相交 (disjoint) 的两个子系统, 纠缠熵满足弱可加性 (subadditivity), 即式1-12. 该不等式可以被推广到三个不相交的子系统.

$$S_{A \cup B} \leq S_A + S_B \quad (1-12)$$

纠缠态 (entanglement state). 下面介绍几个相关的纠缠态 (entanglement state).

- 两自旋态 (two spin state) 的表达式为1-13.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (1-13)$$

容易求出, 它的约化密度矩阵是对角元为 $1/2$, 其余元素为 0 的矩阵, 它的冯诺伊曼熵是 $S_A = \log 2$. 由上面介绍的性质, 可以看出它是一个最大纠缠态 (maximally entangled state). 一个更普遍的两自旋态的版本是式1-14, 它的熵是 $S_A = -\cos^2 \theta \log(\cos^2 \theta) - \sin^2 \theta \log(\sin^2 \theta)$. 可以看出, 在 $\theta = \pi/4$ 是它和式1-13是等同的, 这个态处于最大纠缠态. 而在 $\theta = \pi/2$ 时, 熵为 0 , 它又是纯态.

$$|\Psi\rangle = \cos \theta |01\rangle - \sin \theta |10\rangle \quad (1-14)$$

- Bell 态 (Bell state)/EPR 态 (Einstein-Podolsky-Rosen state) 可以从两自旋态展

^① 证明见式1-10.

$$S_A^{(n)}(A) = - \left. \frac{\partial}{\partial n} \text{Tr}_A \rho_A^n \right|_{n=1} = - \text{Tr}_A \rho_A^n \log \rho_A \Big|_{n=1} \quad (1-10)$$

开来,它是四个独立的最大纠缠态.

$$\begin{aligned}
|\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\
|\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\
|\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \\
|\Psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)
\end{aligned} \tag{1-15}$$

• GHZ 态 (Greenberger-Horne-Zeilinger state) 的表达式为式1-16.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n}) \tag{1-16}$$

正则系综. 有限温度下的热力学密度矩阵 (thermal density matrix) 为式1-17.

$$\rho_{thermal} = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)^{-1}} = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]} \tag{1-17}$$

1.2 混态演化、投影测量、广义测量和弱测量

我们在本小节对量子测量进行一点回顾. 在开放系统中, 量子测量会出现几点不同: 一, 量子态不一定是纯态, 可以是混态; 二, 量子态的演化可以是不可逆的; 三, 量子态的演化可以是非幺正的; 四, 量子测量的投影分解可以是非正交的.

考虑在对一个很大的系统的一个子系统做观测, 波恩定律描述了将测量结果当作系综考虑的情况. 考虑算符 P , 满足 $\sum_i P_i = 1$. 对一组量子态的测量可以表示为如下式1-18, 即 POVM 测量 (Positive-operator valued measure)^[7].

$$\text{Prob}(i) = \langle \tilde{\psi} | P_i | \tilde{\psi} \rangle = \lambda_i \langle \psi | P_i | \psi \rangle = \text{tr}(P_i \rho) \tag{1-18}$$

$$\rho \rightarrow \sum_i P_i \rho P_i \tag{1-19}$$

我们知道, 量子测量中有一个有趣的问题是, 我们不知道在实验中具体哪个 i 被测量了. 但是系综演化 (Ensemble Evolution) 的理论却在“环境退相干 (Environmental Decoherence)”的框架下发展起来. 环境退相干理论认为系统和环境都被同一套量子定律描述, 系统和环境的区别是系统的自由度可以被观测, 而环境的则不

能. 因此, 没有被观测的系统自由度需要被归结进入来确定他们怎么发展的. 因为系统和环境存在相互作用 (设系统为 S , 环境为 E), 量子体系 $S \otimes E$ 不可以想当然地被分离成两个么正算符, 即 $U_{SE}(t) \neq U_S(t) \otimes U_E(t)$.^{[3][8]} 在时间演化之后, 将会出现系统态与环境态的量子纠缠, 即式1-20.

$$\rho_{SE}(t) = U_{SE}(t)[\rho_S(0) \otimes |0\rangle_E\langle 0|]U_{SE}^\dagger(t) \quad (1-20)$$

为了只考虑系统的演化, 我们需要统计性地排除环境的作用, 因此我们对环境态求部分迹, 得到系统的约化密度矩阵1-21^[3]. $|\mu\rangle_E$ 是环境的一组正交归一基.

$$\begin{aligned} \rho_a(t) &= \text{tr}_E[U_{SE}(t)[\rho_S(0) \otimes |0\rangle_E\langle 0|]U_{SE}^\dagger(t)] \\ &= \sum_{\mu} \langle \mu | [U_{SE}(t)[\rho_S(0) \otimes |0\rangle_E\langle 0|]U_{SE}^\dagger(t) | \mu \rangle_E \end{aligned} \quad (1-21)$$

超算符和 Kraus 表示 (Kraus Operator).^{[3][7]} 定义算符 $M_\mu(t)$ 为1-22, 这个算符体现了系统与环境的相互作用, 环境从初始态到 $|\mu\rangle_E$ (一个与系统有相互作用的基态) 的影响.

$$\langle \mu | U_{SE}(t) | 0 \rangle \equiv M_\mu(t) \quad (1-22)$$

上述过程实际上就是超算符 (super-operator) 的 Kraus 表示. 我们用密度矩阵看系统, 那么系统从初始态演化的过程可以写作式1-23. 可以证明, $\rho_A(t)$ 仍然为密度矩阵, 它满足厄米、单位迹、半正定三条性质. 子系统初始时刻的密度矩阵经过超算符被映射到了时刻 t 的密度矩阵. \mathcal{H}_S 的演化可以被一个超算符描述, 也称 Kraus 算符^[3].

$$\rho_S(t) = \mathcal{S}(\rho_S(0)) = \sum_{\mu} M_\mu(t) \rho_S(0) M_\mu^\dagger(t) \quad (1-23)$$

马尔可夫近似 (Markov Approximation). 另一种对描述混态演化的方法是马尔可夫近似. 考虑环境的自由度比系统大很多, 系统的自由度不会对环境造成影响 (这里也可以把环境想象为热库). 我们知道, 在系统与环境的相互作用中, 会有信息可以从系统流向环境, 也会有信息从环境流向系统. 环境在某个时刻可以保存系统流向环境的信息并在另一个时刻还给系统, 因此系统的态会受到环境的影响. 从系统来看, 信息来回流动是信息的涨落 (fluctuation) 和耗散 (dissipation).

一般地, 这样的过程无法用微分方程描述. 但是, 如果我们取一个近似, 就是环境的记忆时间很小, 远小于系统的演化时间, 也就是说环境的记忆是瞬时的, 这

个近似为马尔可夫近似. 在马尔可夫近似下, 系统的演化过程可以用主方程来描述 (Lindblad Master Equation), 见式1-24. 可以看出, 它的形式和薛定谔方程比较像. 其中 L_μ 是一个量子跃变算符.

$$\begin{aligned}\frac{d[\rho_S]}{dt} &= i[\rho_S, H] + \sum_{\mu} \mathcal{L}[L_\mu]\rho_S \\ &= i[\rho_S, H] + L_\mu \rho_S L_\mu^\dagger - \frac{1}{2} \rho_S L_\mu^\dagger L_\mu - \frac{1}{2} L_\mu^\dagger L_\mu \rho_S\end{aligned}\quad (1-24)$$

弱测量 (Weak Measurement). 人们普遍认为量子测量会导致波函数塌缩 (wavefunction collapse) 到一个本征态上, 这也就是相对于弱测量的“强测量”. 弱测量可以被认为是一种观察者作用微弱、对信息影响很小的一种测量方式. 选择一个系统态 (pre-selection), 中间通过探针对系统产生微小、短暂的扰动, 最后再将态投影到后选择 (post-selection) 的态上. 弱测量的值被称为弱值 (weak value), 它的表达式为1-25:

$$\Omega_w = \frac{\langle \psi_f | \Omega_s | \psi_i \rangle_s}{\langle \psi_f | \psi_i \rangle_s} \quad (1-25)$$

下面简单介绍一种弱测量的例子, 就是使用一个附属量子比特 (ancilla qubit) 作为探针^[9]. 考虑一个直积系统的哈密顿量 $H = H_A \otimes H_B$, 初态为 $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$. 系统的么正演化算符为 $U = e^{i\lambda H} (\hbar = 1)$.

考虑一个很短的时间间隔 Δt 使得波长 $\lambda = x\Delta t$ 非常小, 二阶项以上可以忽略. 那么系统态矢的演化可以写成式1-26:

$$|\Psi'\rangle = (I \otimes I - i\lambda H_A \otimes H_B - \frac{1}{2} \lambda^2 H_A^2 \otimes H_B^2) |\Psi\rangle \quad (1-26)$$

考虑我们用附属量子比特进行测量. 这个量子比特的基矢记作 $|q\rangle$, 满足 $|q\rangle\langle q| = I$. 它的投影算符记作 $\Pi_q = I \otimes |q\rangle\langle q|$, 将它作用到系统并归一, 得到式1-27.

$$\begin{aligned}|\psi_q\rangle &= \frac{\Pi_q}{\sqrt{\langle \Psi' | \Pi_q | \Psi' \rangle}} |\Psi'\rangle \\ &= \frac{(I\langle q|\phi\rangle - i\lambda H_A\langle q|H_B|\phi\rangle - \frac{1}{2}\lambda^2 H_A^2\langle q|H_B^2|\phi\rangle)}{\sqrt{\langle \Psi' | \Pi_q | \Psi' \rangle}} |\psi\rangle \otimes |q\rangle\end{aligned}\quad (1-27)$$

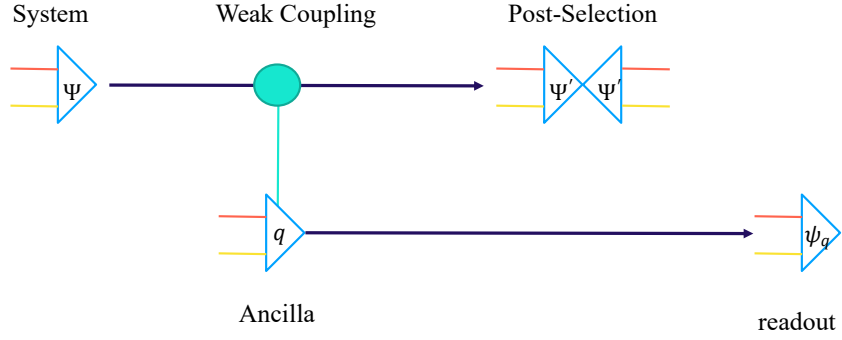


图 1.1 使用附属量子比特进行弱测量示意图^[10]

1.3 随机么正电路 (Random Unitary Circuit) 模型

量子电路 (Quantum Circuit) 通过插入量子门 (Quantum gate) 进行测量. 随机么正电路是研究此类问题常用的一个物理模型, 弱测量的随机么正电路图见1.2.

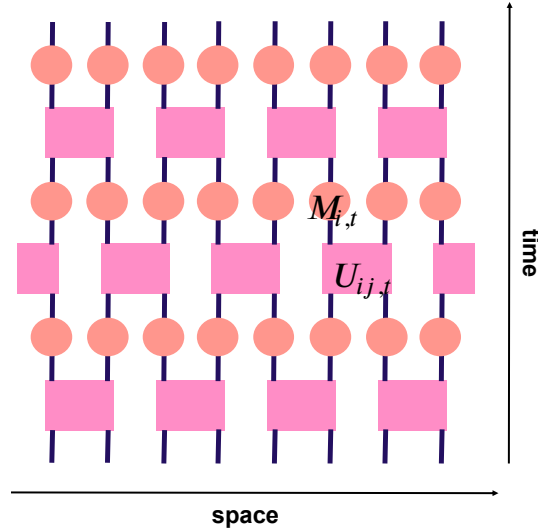


图 1.2 随机么正电路图
 U 为么正算符, M 为测量算符

这一模型从一维链上的 q 维量子比特, 初态为长度为 L 的直积态 (product state), 不产生纠缠. 通过交错链接局域的相互独立的随机么正算符到两个近邻位置在时间上演化, 对偶数时间步长的偶数链接和在奇数时间步长的奇数链接进行作用, 每个链接都从 $U(q \times q)$ 中随机抽取 Haar 测量^[11], q 为局域哈密顿量的自由

度. 插入的么正算符可由公式1-28描述.

$$U_t = \begin{cases} \bigotimes_x U_{t;2x-1,2x} & t \text{ is odd} \\ \bigotimes_x U_{t;2x,2x+1} & t \text{ is even} \end{cases} \quad (1-28)$$

随机么正电路的第 t 层为偶数时, 由偶数 i 的两点么正 (2 site unitaries) $(U_{i,i+1})$ 的张量直积 (tensor product) 给定, 奇数 i 在第 t 层为奇数 i 的张量直积 $U_{i,i+1}$. 可以看出, 随机么正电路的几何结构在空间和时间上都是周期性的 (periodic). 在 t 时刻, 该局域么正算符 (或么正门) 作用在波函数上的表达式为^[12]:

$$|\psi'\rangle = U_t |\psi\rangle \quad (1-29)$$

在后面我们会看到, 随机么正电路是一种可以用来分析量子混沌系统的玩具模型 (toy model), 它能有效地表现信息的扰乱.

1.4 边界律 (boundary law)、矩阵直积态 (Matrix Product State)

面积律 (Area Law) 和体积律 (Volume Law) 统称为边界律 (boundary law), 是多体系统中常见的概念. 一般地, 一个多体系统的熵满足体积律 (Volume Law), 即 $S(X) \sim O(A)$. 面积律 (Area Law) 指的则是纠缠熵与子系统的面积成比例地增长: $S(X) \sim O(\partial A) \sim O(\sqrt{n})$. 对一条子长度为 A 的 1D 原子链的划分, 面积律意味着对 $S(A) = A \xi$, 其中 ξ 为关联长度.

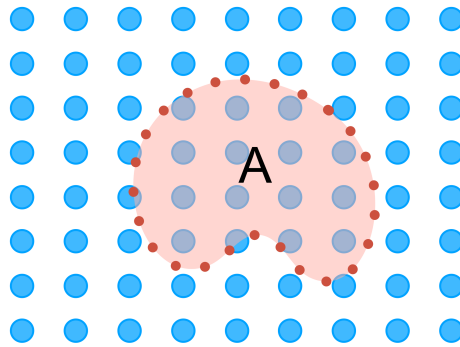


图 1.3 面积律示意图

面积律最早是在人们研究二分系统的特性中被提取出来的. 文献^[13] 研究了耦合谐振子 (coupled harmonic oscillator) 的约化密度矩阵和熵, 发现领头项 (leading term) 和系统边界的尺度成比例. 在对黑洞的研究中, Bekenstein-Hawking 熵 (式1-

30) 与黑洞表面积 (surface) 呈现线性关系^{[14][15]}.

$$S_{BH} = \frac{Ac^3}{4G\hbar} \quad (1-30)$$

随着我们对多体系统认识的逐渐深入, 一部分人们认为纠缠来自局部 (local) 的相互作用 (interactions), 这就意味着纠缠是一个粒子先和它的近邻 (neighbor) 建立的, 以此递推. 那么对于一个二分系统而言, 一个系统被求部分迹 (partial trace) 的时候它就和另一个系统建立了相互作用, 纠缠熵应该和切割边界的长度成比例. 此外补充说明的是, 局部系统哈密顿量的基态不是随机的. 它是系统的本征态的一部分, 包含了局部纠缠的特征^[16].

通过探索面积律在凝聚态系统中的应用, 目前可以证明一维的有带隙的 (gapped) 和局域 (local) 哈密顿量的基态符合面积律, 例子包括如玻色系统^[17] 和 XY 自旋链^[18], 它们可以通过若当-瓦格纳变换 (Jordan-Wigner transformation) 映射到自由费米子模型. 如果认为带隙意味着短程关联 (short-range correlations), 因此, 只有在 A 的表面附近的自由度与 B 的自由度纠缠在一起, 由 Hastings 给出了证明^{[19][20]}. 进一步地, 他指出, 在一维中, 也存在着具有短程关联但任意 (arbitrary) 大纠缠的状态; 给出了在近邻哈密顿相互作用强度不大于 J , 每个点 (site) 上为有限维希尔伯特空间的情形下, 熵被1-31式约束^[21]. Brandão 和 Horodecki 证明了一维态在任何两个区域之间具有有限长度关联 (finite correlation length)(包括基态带隙模型、非零度温度下的热态等情形) 必须满足面积律^{[22][23]}. 文献^[24] 指出对于局部哈密顿量的某一逆温 $\beta > 0$ 的吉布斯态满足面积定律. 然而, 在高维系统中或者长程系统中给出面积律的证明是一个困难的问题.

$$S \leq S_{\max} = \exp(\mathcal{O}(v/\Delta E)) \quad (1-31)$$

矩阵直积态 (MPS, Matrix Product State) 矩阵直积态 (MPS, Matrix Product State) 是形如式1-32的, 由一维线性链或环状张量的形式的量子态^{[25][26]}, 对于矩阵直积态的任意连续格点的子集 $S_{(\rho_A)}^{(2)} = O(\log(D))$ (D 为链接维数 (bond dimension), 见1-33), 它可以有效近似面积律, 进而可以有效地被用来近似一维的带隙的系统^{[21][27][28]}. 更强的条件是, 每一个满足面积律的状态都可以被矩阵直积态有效地近似^[29].

$$|\psi\rangle = c_{j_1, \dots, j_n} |ij \dots k\rangle \quad (1-32)$$

$$c_{j_1, \dots, j_n} = \sum_{\alpha, \beta, \dots, \omega=1}^D A_{\alpha, \beta; j_1}^{(1)} A_{\beta, \gamma; j_2}^{(2)} \dots A_{\omega, \alpha; j_n}^{(n)} = \text{Tr} \left(A_{j_1}^{(1)} A_{j_2}^{(2)} \dots A_{j_n}^{(n)} \right) \quad (1-33)$$

1.5 热化 (Thermalization)

我们首先讨论热化悖论 (paradox of thermalization)^[30]. 在热平衡中的量子系统是**完全由温度、化学势等参数来表征 (characterize) 的, 这表明进入热平衡的过程与擦除系统记忆的有其他细节的初态有关. 但是, 含时么正演化不能擦去信息, 因此, 所有关于初始状态的量子信息必须保留在封闭系统里. 这个悖论的解决方法是, 系统初态对局域特征的记忆并没有被含时么正演化所擦去, 而是在系统热化中被隐藏了起来. 量子纠缠的扩散使得初态的信息无法获取, 而恢复这些信息需要对全局 (global) 算符进行测量. 这就是退相干 (decoherence) 的过程.

进一步地, 在一个子系统中, 热化意味着在长时间内, 这个子系统的状态就像它**在与一个由温度、化学势等特征的热库 (reservoir) 接触的热平衡态一样, 热库就是除去子系统之外的部分. 考虑一个二分系统 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 的时间演化. 其中 A 中的自由度是由有限的局域算符定义的, 看作一个固定的子系统, 而 B 不包含 A , 可以看作环境或者热库. 假定通过给 B 增加更多的自由度, 比如在离 A 任意远的极限中的自由度, 然后取 B 的热力学极限, 我们就有了一系列系统及其哈密顿量, 在这个系列中自由度的数量无限制地增加. 假设系统从 $\rho(t=0)$ 开始热化到温度 T , 那么平衡态的能量的期望值为 $\langle H \rangle_T$. 那么可以计算两个极限, $\rho_A(t) = \text{Tr}_B \rho(t)$ 在某个温度下接近热力学系综的密度矩阵, $\rho_{th} = e^{(-H/kBT)}/Z(T)$ 是系统玻尔兹曼平衡态的密度矩阵. 在系统很大、时间很长的时候它们是相等的^[30]. 这表明量子系统已达到热化状态, 无法通过局部测量来提取有关初始状态的局部信息.

然而, 考虑系统能量的涨落小于系统扩张速度的情况, 即使我们把系统的能量固定到了平衡态, 我们仍然不确定所有初态是否一开始就是平衡的. 统计力学认为所有一定能量下的所有的失平衡初态都会在无限时间内热化, 在相应的温度下达到平衡. 这个表述虽然难以证明, 但目前**在确定会热化的体系中都成立 (有一些系统不会热化).

在上述背景下, Deutsch^[31] 和 Srednicki^[32] 提出的本征态热化假设 (Eigenstate Thermalization Hypothesis) 概念: 如果一个系统在给定温度下的每一个这样的初始状态 $\rho(t=0)$ 是热化的, 那么可将系统初始态考虑为本征态中的纯态^[30]; 对于一般的热化的量子多体系统, 它们服从本征态热化假设, 并且在任何非零温度下都

服从体积律, 纠缠熵从初态的低纠缠开始, 随着时间的演化, 呈幂律增长^[33].

1.6 信息扰乱 (Information Scrambling)

我们知道, 孤立的量子系统在含时演化中保留有关初始状态的所有信息; 然而, 对于一般 (generic) 的、具有大量宏观自由度的系统来说, 我们只能对它实现局域的探测 (probe)^[33]. 那么, 在局域测量下, 我们可否得到系统的原始信息?

想象我们有一个参照物 (reference) 在初始时刻与一个一维链系统 (比如随机么正电路 (1.3节)) 建立了纠缠. 虽然在最开始时, 参照物是与链中的单个自旋纠缠在一起, 但随着时间的推移, 参照物反而会变成许多自旋的纠缠集合. 在第一个点建立的的纠缠是可以还原的, 但是在时间演化之下, 纠缠扩散到了整个系统^[34]. 信息扰乱 (Information Scrambling) 的概念是指整个系统自由度 (system degrees of freedom) 上量子信息的去局域化 (delocalization)^[35], 也就是说, 如果局域的信息已被扰乱, 那么局域的测量对系统没有意义, 也就是说系统已“忘记”了局域的基矢 (basis)^[36].

有两个方法可以衡量信息的扰乱程度, 第一个是失时序关联, 第二个是三分互信息. 目前可以证明互信息所量化的纠缠的增长的下界被 OTOC 的含时变化限制; 互信息的增长速度的上界由局域熵的产生和量子系统的子系统之间的信息流所产生的交换熵的总和限制^[37].

1.6.1 失时序关联 (OTOC, Out-of-time-order Correlator) 和量子混沌 (Quantum Chaos)

我们将在本章节介绍失时序关联 (OTOC, Out-of-time-order Correlator). OTOC 被广泛用于研究黑洞中的量子混沌 (Quantum Chaos) 现象、SYK(Sachdev-Ye-Kitaev) 模型和多体局域化 (Many-body Localization) 现象.

在经典力学中, 混沌是粒子的初始坐标和动量 ($q_{t=0}, p_{t=0}$) 在扰动下产生了偏移, 这又称为蝴蝶效应 (butterfly effect), 即坐标变量 q 对初始状态的灵敏度 (sensitivity):

$$\frac{\partial q_t}{\partial q_0} \sim e^{\lambda t} \quad (1-34)$$

其中, λ 是李雅普诺夫常数 (Lyapunov exponent). 用经典力学中常用的泊松括

号 (Poisson bracket) 表达, 即式1-35^{[38][39]}.

$$\frac{\partial q_t}{\partial q_0} = \frac{\partial q_t}{\partial q_0} \frac{\partial q_0}{\partial p_0} - \frac{\partial q_t}{\partial p_0} \frac{\partial q_0}{\partial q_0} = \{q_t, q_0\}_P \quad (1-35)$$

人们将经典力学中的坐标变量推广到量子系统中的算符. 因为不确定原理的存在, 经典力学中的坐标并不能完全等价到量子力学中的可观测算符上; 另一种说法是, 因为量子力学禁止轨迹的无穷小移动^[40].

不过我们仍然使用泊松括号在经典力学的含义, 类比到量子系统中, 混沌现象可以通过两个算符的对易关系来描述: $[\hat{W}(t), \hat{V}(0)]$. 可以因此构建式1-36:

$$C(t) = -\langle [\hat{W}(t), \hat{V}(0)]^2 \rangle \quad (1-36)$$

其中, $\hat{W}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{W} e^{i\hat{H}t}$, $\langle \dots \rangle_\beta$ 是系统在温度 $K_B T$ 下的热力学密度矩阵^{[41][42]}. 在半经典极限下, 取 $V = p$ 和 $W(t) = q(t)$ ^[42], 可以将泊松括号改写成对易括号, 有式1-37:

$$[q_t, p_0] \sim i\hbar \{q_t, q_0\}_P \sim i\hbar e^{\lambda t} \quad (1-37)$$

因此我们可以通过把1-36式展开定义1-38式为 OTOC. OTOC 的形式是一个四点关联函数 (four-point correlation function), 而普通的两点函数无法描述对易子的动力学, 因而也无法描绘混沌现象.

$$F(t) = \langle \hat{W}(t)^\dagger \hat{V}(0)^\dagger \hat{W}(t) \hat{V}(0) \rangle_\beta := \text{Tr}[\rho \hat{W}(t)^\dagger \hat{V}(0)^\dagger \hat{W}(t) \hat{V}(0)] \quad (1-38)$$

从1-38式中可以看出, OTOC 描述了 $\hat{V}(0)$ 的扰动在多大程度上改变了 $\hat{W}(t)$ 的值. 可以看出, 这两个算符以不同顺序进行操作时获得的状态不一致^[40]. 设密度矩阵写作 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, 那么作用在 $|\psi\rangle$ 上的是 $\hat{V}(0)$ 先, $\hat{W}(t)$ 后; 同理, 作用在 $\langle\psi|$ 上的是 $\hat{W}(t)$ 先, $\hat{V}(0)$ 后. 这样的时间顺序暗示了时间的“倒退”.

一方面, 局域扰动最初会局部破坏算符相关性, 然后相关性被破坏的区域 (region) 会随着时间快速增长^[40]. 在海森堡绘景中, 初始局域算符的时间演化为 $\hat{W}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{W} e^{i\hat{H}t}$, 它随着时间的增加而增长, 逐渐具有非局域性 (non-local). 随着 $\hat{W}(t)$ 的增长, 它开始在其他空间位置与局域算符 V 重叠 (overlap), 并与它们不再对易^[33].

另一方面, 考虑到量子系统中哈密顿量的局域性, 因此一个与某子系统离的很远 (distant) 的子系统不会对造成影响. 但是, 在一定时间之后, 扰动扩展到将这些算符上, 相关性会减少. 子系统的 OTOC 在较长时间后的衰减, 意味着完整的量子

信息加扰^[40]. 已经被证明, 对各项 $k \leq N$ 个可观测算符的哈密顿量, 算符增长的使得系统演化到无法被分辨的时间 $\sim \log N$, 这又被称为“fast scrambler”^[43].

我们现在介绍与 OTOC 相关的时间尺度^[42]. 第一个是“扰乱时间尺度 (scrambling time)” t_* , 表示初态从演化到无法被分辨的时间. 在较短时间内, $C(t) \sim \hbar^2 e^{2\lambda t}$, 因而 $t_* \sim \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\hbar}$, t_* 也被称作艾伦法斯特时标 (Ehrenfest time). 另一个是“耗散时间尺度 (dissipation time)” t_d ^①, 表示 $\langle \hat{V}(0) \hat{V}(t) \rangle$ 这样的两点函数, 即局域算符到达平衡态的时间, 可见 $t_d \sim \frac{1}{\lambda}$.

我们接下来讨论算符 $\hat{W}(t)$ 在空间的增长速度, 一般被称为蝴蝶速度 (butterfly velocity) v_B . Lieb 和 Robinson 证明了它的有限性, 极限服从式1-39中定义的 v_{LR} ^[45].

$$C(x, t) \leq ||4v| |||w|| e^{-\mu \max\{0, |x| - v_{LR}t\}} \quad (1-39)$$

在随机么正电路中, 蝴蝶速度服从1-40式^{[46][47]}:

$$C \sim \text{erf} \left(\frac{x - v_B t}{\sqrt{Dt}} \right) \quad (1-40)$$

目前发现蝴蝶速度服从一个一般形式, 即式1-41^{[48][49]}. 在 $p = 0$ 时, 该式与半经典 (Semi-classical)、大 N (Large N)、全息对偶 (holographic duality) 模型符合; 在 $p = 1$ 时, 该式符合随机么正电路的情形.

$$C(r, t) \sim \exp \left(-\lambda \frac{(r - v_B t)^{1+p}}{v_B (v_B t)^p} \right) \quad (1-41)$$

随机么正电路中的 OTOC. 下面对随机么正电路中的 OTOC 的最简单模型做一些介绍. 随机么正电路中的 OTOC 可以用式1-42描述^[46]. ρ_∞ 是无限温度 (infinite temperature) 的吉布斯态 (Gibbs state), 即所有可能的等权重自旋构造 (spin configuration with equal weight) 的集合. W_0 为演化初始自旋链上的厄米算符, V_x 为第 x 个节点 (site) 上的算符. 给定假设 $\text{Tr } X^2 = \text{Tr } Y^2 = q$.

$$\begin{aligned} C(x, t) &\equiv \frac{1}{2} \text{Tr } \rho_\infty [W_0(t), V_x]^\dagger [W_0(t), V_x] \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr } \rho_\infty [W_0(t), V_x]^2 \end{aligned} \quad (1-42)$$

最简单的随机么正电路中的 OTOC 可以用随机游走 (random walk) 模型来计算^{[50][46]}. 考虑算符在随机么正电路中的行为, 以 -1 代表向左移动, 概率为 p , 以

① 在一些文献中也被称为特征时间长度^[44].

+1 表示向右移动, 概率为 $1 - p$. 那么在 t 时刻它的位置 $X(t)$ 可以用1-43描述:

$$X(t) = \sum_{i=1}^t x_i \quad (1-43)$$

这是一个马尔可夫过程 (Markovian), 因为如果我们确定了 $t - 1$ 时刻算符的位置, 那我们就知道了 t 时刻它位置的分布. 求它的平均值 (mean) 我们得到式1-44. 从而得到 $v_B = 1 - 2p$.

$$\langle X(t) \rangle = \sum_{i=1}^t \langle x_i \rangle = t \langle x_i \rangle = t(1 - 2p) \quad (1-44)$$

现在我们求它的二阶矩, 见式1-45.

$$\langle X(t)^2 \rangle = \sum_{i,j=1}^t \langle x_i x_j \rangle = t \langle x_i^2 \rangle + (t^2 - t) \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = t + (t^2 - t)(1 - 2p)^2 \quad (1-45)$$

我们计算它的方差得到式1-46, 可见扩散系数 $D = \text{var}(X)/2t = 2p(1 - p)$.

$$\langle X(t)^2 \rangle - \langle X(t) \rangle^2 = 4pt(1 - p) \quad (1-46)$$

从而我们可以看到, 它符合形如式1-47的扩散方程.

$$\partial_t \rho(x, t) = -v_B \partial_x \rho(x, t) + D \partial_x^2 \rho(x, t) \quad (1-47)$$

对于给定的算符, 我们希望知道概率 p , 它由随机么正电路的性质决定, 我们现在研究它在随机么正电路中的行为. 我们知道, 在量子力学中, 算符可以被展开成形如1-48的形式.

$$\mathcal{O}(t) = \sum_p \gamma_p(t) \mathcal{O}_p \quad (1-48)$$

在随机么正电路中, 初始化的自旋链可以用一组 q^{2L} 由泡利矩阵展开的泡利弦 (Pauli Strings) 表示, 其中 q 为局域 qudit 的哈密顿量维数. 即 $\sigma^\mu \equiv \bigotimes_{r=1}^L \sigma_r^{\mu_r}$. 每个泡利弦可写作 $\mu \in (\mathbb{Z}_q^{\otimes 2})^{\otimes L [47]}$. 考虑式1-48中的相关系数, 对其求模方并以链

长度维数归一, 进一步地, 将 $\mathcal{O}(t)$ 用 $U_t \mathcal{O}(t-1) U_t^\dagger$ 展开, 得到式1-49^{[50][46]}.

$$\begin{aligned}
|\gamma_p(t)|^2 &= \frac{1}{q^{2L}} |\text{Tr}(\mathcal{O}(t) \mathcal{O}_p)|^2 \\
&= \frac{1}{q^{2L}} \text{Tr} \left(U_t \mathcal{O}(t-1) U_t^\dagger \mathcal{O}_p \right) \text{Tr} \left(U_t \mathcal{O}(t-1) U_t^\dagger \mathcal{O}_p \right) \\
&= \frac{1}{q^{2L}} \sum_{a,b} \gamma_a(t-1) \gamma_b(t-1) \text{Tr} \left(U_t \mathcal{O}_a U_t^\dagger \mathcal{O}_p \right) \text{Tr} \left(U_t \mathcal{O}_b U_t^\dagger \mathcal{O}_p \right)
\end{aligned} \tag{1-49}$$

然后我们可以对式1-49中的 $\mathcal{O}(t)$ 展开成 a 和 b 两组基的形式. 进而, 对于一个由 2 点门 (2-site gate) 作用于一个 2 点 (2-site) 的算符, 我们用二阶矩 (second moment) 的表达式找到 Haar 测量的均值, 可以看到 $\int_{U(d)} dU \text{Tr} (U \mathcal{O}_a U^\dagger \mathcal{O}_p) \text{Tr} (U \mathcal{O}_b U^\dagger \mathcal{O}_p)$ 符合3.2章节中的 Weingarten 函数的形式. 已知二阶的 Weingarten 函数符合式1-50^[51].

$$\begin{aligned}
\int_{U(d)} dU U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} U_{j_3 i_3}^\dagger U_{j_4 i_4}^\dagger &= \frac{1}{d^2 - 1} \left(\delta_{i_1, j_3} \delta_{i_2, j_4} \delta_{i_3, j_1} \delta_{i_4, j_2} + \delta_{i_1, j_4} \delta_{i_2, j_3} \delta_{i_4, j_1} \delta_{i_3, j_2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{d(d^2 - 1)} \left(\delta_{i_1, j_3} \delta_{i_2, j_4} \delta_{i_4, j_1} \delta_{i_3, j_2} + \delta_{i_1, j_4} \delta_{i_2, j_3} \delta_{i_3, j_1} \delta_{i_4, j_2} \right)
\end{aligned} \tag{1-50}$$

考虑泡利弦的性质, 代入 $\text{Tr} \mathcal{O}_a \mathcal{O}_b = d \delta_{a,b}$, 我们得到:

$$\int_{U(d)} dU \text{Tr} (U \mathcal{O}_a U^\dagger \mathcal{O}_p) \text{Tr} (U \mathcal{O}_b U^\dagger \mathcal{O}_p) = \frac{d^2}{d^2 - 1} \delta_{a,b} (d^2 \delta_{a,1} \delta_{p,1} + 1 - \delta_{a,1} - \delta_{p,1}) \tag{1-51}$$

返回式1-50, 换成含时间递归的形式:

$$|\gamma_p(t)|^2 = \sum_a S_{pa} |\gamma_a(t-1)|^2 \tag{1-52}$$

其中,

$$S_{pa} = \prod_s \left(\delta_{a,1}^{(s)} \delta_{p,1}^{(s)} + \frac{1}{d^2 - 1} (1 - \delta_{a,1}^{(s)}) (1 - \delta_{p,1}^{(s)}) \right) \tag{1-53}$$

因此我们得到在泡利弦中的两点算符跃变递归式, 即从非单位 (non-identity) 算符跳变到另一个非单位算符的概率为 S_{pa} 最前面的系数 $1/(d^2 - 1)$. 我们把它放到随机么正电路的几何图形中. 一个泡利弦的边缘会在某个门上, 超出该门的所有站点 (site) 的算符都只有单元算符. 现在计算算符在边缘向后移动的概率, 在

下一个时间步, 算符就会变小. 产生这种情形的概率就是在最远处一个泡利算符与一个单元算符一起作用的的概率.

举例来说, 我们只考虑局域维数 $q = 2$. 在这种情况下, 有 15 个非单位的 2 位泡利算符 ($S_x S_x, S_x S_y, S_x S_z, S_x I, S_y S_x \dots$), 其中有 3 个使算子的右边后移 ($S_x I, S_y I, S_z I$). 所以算符的概率为 $p = 1/5$. 一般情况下, 有 $(q^4 - 1)$ 个非单位元算符, 其中有 $p = (q^2 - 1)$ 个是后移的. 最终我们得到了 $p = (q^2 - 1)/(q^4 - 1) = 1/(q^2 + 1)$. 代入1-47就可以得到完整的扩散方程.

1.6.2 互信息 (Mutual Information)

熵是衡量信息多少的度量, 而互信息则度量了信息之间的相关性^[7]. 从条件概率公式出发, 我们可以定义式1-55为条件熵 (conditional entropy).

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)} \quad (1-54)$$

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \langle -\ln p(x|y) \rangle \\ &= \langle -\ln p(x, y) + \ln p(y) \rangle \\ &= H(X, Y) - H(Y) \end{aligned} \quad (1-55)$$

二分互信息. 假定系统可分成两部分, X 和 Y . 如果给定已知的子系统 Y 的信息, 通过获取 X 在指定 Y 下的减少^[7], 可以得到 X 的信息, 即公式1-56. 第二个等号是在引入式1-9、1-11的情况下, 代入熵的表达式, 从而得到了子系统之间的熵与互信息的关系.

$$\begin{aligned} I_2(X : Y) &\equiv H(X) - H(X|Y) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ &= S(X) + S(Y) - S(X \cup Y) \end{aligned} \quad (1-56)$$

同时注意到互信息有几个性质. 其一是对称性, 通过获取 X 得到的 X, Y 相关性与通过获取 Y 得到的是一样的; 其二是可以证明, $I(X; Y)$ 恒不为负; 其三是, 如果 $I(X; Y) = 0$, 则两者不相关.

我们可以进一步拓展, 定义三分互信息 (Tripartite Mutual Information, TMI). 其

表达式为式1-57.

$$\begin{aligned}
I_3(X : Y : Z) &= I_2(X : Y) + I_2(Y : Z) - I_2(X : YZ) \\
&= S(X) + S(Y) + S(Z) - S(X \cup Y) \\
&\quad - S(X \cup Z) - S(Y \cup Z) + S(X \cup Y \cup Z)
\end{aligned} \tag{1-57}$$

我们可以使用互信息作为衡量信息扰乱的一个描述 (formalism)^[36]. 如果我们的量子通道 (channel) 是一个强信息扰乱器 (strong scrambler), 那么对初态的一个子区域局域扰动就不能被输出态的另一个子区域局域测量检测到, 那么该局域测量就不能表达局域扰动的信息. 当通道扰乱信息时, $I(X : Z)$ 可以被看作是小的, 因为 Z 也是一个区域. 考虑 $I(X : YZ)$ 则可以告诉我们通过 Y 、 Z 可以了解到的 X 的信息, 那么我们可以通过找到隐藏在 Y 和 Z 上的非局域的 X 的信息来得到衡量信息扰乱的一个标准: $I(X : YZ) - I(X : Y) - I(X : Z)$. 这个标准又被称为三分互信息的负性 (negativity), 它的有效性已经在自旋链^[36]、Clifford 电路^[52]上得到了验证.

1.6.3 相对熵、费希尔信息

相对熵. 我们在这里补充一下相对熵 (Relative Entropy) 的相关内容, 它又叫 Kullback-Leibler 散度 (Kullback-Leibler divergence). 它度量了随机变量概率分布之间的距离, 在我们的物理背景下就是两个态之间的距离^[1]. 以随机变量 $p(x)$ 、 $q(x)$ 的形式写相对熵的公式为1-58, 用密度矩阵 ρ 、 σ 表示为1-59.

$$D(p||q) = \sum_x p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \tag{1-58}$$

$$S(\rho||\sigma) = \text{tr}[\rho(\log \rho - \log \sigma)] \tag{1-59}$$

互信息也可以写成相对熵的形式, 式1-60为随机变量的形式, 式1-61为密度矩阵的形式.

$$I_2(X : Y) = D(p(x, y)||p(x)p(y)) \tag{1-60}$$

$$I_2(X : Y) = S(\rho_{A \cup B}||\rho_A \otimes \rho_B) \tag{1-61}$$

费希尔信息. 相对熵和费希尔信息 (Fisher Information) 有密切的关系. 可以证明, 费希尔信息是相对熵展开到二阶的黑塞矩阵 (Hessian Matrix)^[53], 即式1-62^[54].

费希尔信息可以度量随机变量中的其自身随机分布函数中未知参数 (比如上式中的 θ) 的信息量.

$$\mathcal{F} = \partial_{\theta}^2 D(p_0 || p_{\theta})|_{\theta=0} \quad (1-62)$$

第 2 章 纠缠熵动力学

2.1 纠缠熵相变 (Entanglement Phase Transition)

在一个多体量子系统里, 态总是随着时间产生幺正演化 (unitary evolution), 它所在的不同子系统的纠缠熵也会随时间演化, 很自然地产生熵增. 从动力学的角度讨论, 我们想要知道动力学受限于局域测量 (local measurement) 的系统自由度 (system degrees of freedom) 的程度. 局域测量会通过将测量将所测对象投影到一个确定的状态上, 从而量子纠缠就被破坏. 我们会产生这样的疑问, 一方面, 怎样的测量会破坏量子纠缠^{[54][55]}? 另一方面, 在一定时间的演化后, 量子纠缠从局域扩大到了系统, 信息被扰乱 (scrambled) 了, 局域的信息是否还能被还原?

从热力学的角度来讨论, 根据本征态热化假说 (ETH), 系统的能量密度不为零的本征态有高度纠缠, 符合体积律的特征; 确立了热平衡, 实现局域可观测量实现各态无限接近 (ergodic) 的过程: 孤立系统从任一初态出发, 在足够长的时间后, 它将经历一切可能的微观状态. 然而, 系统在局域的相互作用 (local interactions) 下 (对于局域测量来说, 局域测量带来的波函数可以减缓和停止热化), 会呈现一个纠缠熵服从面积律的阶段, 违反了纠缠熵服从体积律增长的设定, 违反了本征态热化假说^[56].

一般描述. 一个前沿的物理模型是在测量引导 (measurement-driven/induced) 下, 随着测量比率 (measurement rate) 的不同, 纠缠熵在进入稳态 (steady state) 后随子系统的体积尺度或者面积尺度 (scaling) 变化, 产生一个从体积律到面积律的相变 (phase transition) 过程, 参见图2.1, 2.2. 这个相变过程是一个天然的量子纠错 (quantum error correction) 机制. 它在一系列混合量子 (hybrid) 电路 (如随机幺正电路、稳态电路等)^{[12][56][54][57][55][58][59][60][61][62]}、玻色系统^{[63][64][65]}、伊辛模型^[66]、随机张量网络 (random tensor network)^[67]、随机树张量网络 (random tree tensor networks)^[68] 等模型中已经被广泛地观察到.



图 2.1 纠缠熵相变示意图

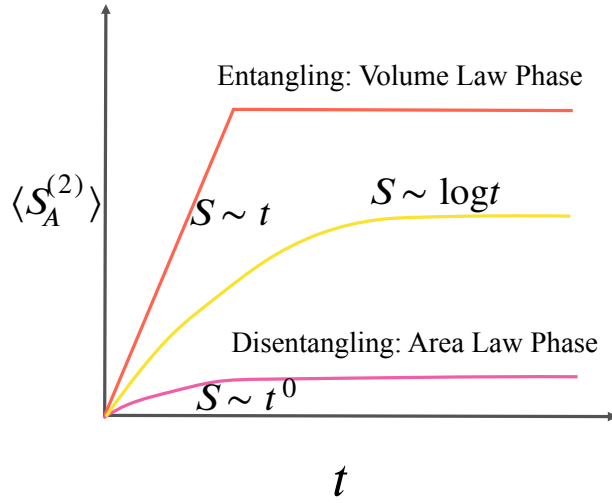


图 2.2 纠缠熵在不同的相随时间增长示意图

纠缠熵在随机么正电路中的动力学行为可以在复制方法 (3.1节) 的基础上, 通过几个投影 (mapping) 方法, 如纠缠熵算符描述^{[69][70][41]}(2.2节)、畴壁 (domain wall)^{[60][71][11]}、2 阶或 n 阶矩 (n-th moment)^{[54][72]}、最短切片 (minimal cut)^{[55][73]} 与统计力学模型的对应关系来解析计算. 实际上, 解析方法之间有许多共通之处. 一, 我们计算二阶或者高阶的熵, 所以需要用到复制方法 (3.1) 节; 二, 在随机么正电路中, 算符是在两个量子比特上随机抽取的 Haar 测量, 在计算么正算符平均的积分 (ensemble), 也就是 n 阶矩时不可避免地会用到 Weingarten 函数 (3.2节); 三, 算符在随机么正电路的行为可以近似为一个随机游走; 四, 可以使用量子信道和 Kraus 算符的语言来解析测量.

测量引导. 我们先前介绍了强测量 (投影测量) 和弱测量. 在随机么正电路每一层的演化后, 我们会对 qubit 进行测量来观察纠缠的鲁棒性. 第一种方法是投影测量^{[12][58]}, 以 p 的概率来决定 qubit 被测量或者不被测量, 如果被选中, 则使用投影测量中常用的泡利矩阵 Z 算符 (Pauli-Z) 进行投影测量, 即 $P_{\pm} = (1 \pm Z)/2$. 如果不被选中, 则不做测量.

第二种方法是弱测量^{[54][72]}. 我们考虑每次弱测量的时候引入一个附属量子比特 (ancilla qubit), 与系统的一个量子比特做量子纠缠. 考虑附属量子比特的局域自由度为 $q + 1$, 即 $|i\rangle_m$ 中 $i \in \{0, 1, \dots, q\}$, 附属量子比特与系统的耦合由式 2-1 描述. $\hat{P}_i = |i\rangle_s \langle i|_s$ 式投影到系统的投影算符, \hat{R}_α 可以看作一个旋转算符, 而 \hat{X}_i 式泡利矩阵 X . 可以看出, 当 $\alpha = \pi/2$ 时, 对附属量子比特的投影测量充分地显示了系统比特的信息; 而在 $\alpha < \pi/2$ 时, 系统与附属量子比特的关联较小, 对 $|0\rangle_m$ 的测量

不会表达系统比特的信息.

$$\hat{R}_\alpha = \sum_{i=1}^q \hat{P}_i \otimes e^{-i\alpha \hat{X}_i} \quad (2-1)$$

实际上, 对于系统量子比特以 p 的概率作用强测量, 与对系统量子比特使用 2-1 的操作是等价的, 其中 $\rho = \sin^2 \alpha$. 考虑系统和附属量子比特的密度矩阵, ρ_{in} 为系统量子比特之前的密度矩阵, 设 $\mathcal{N}_\phi[\rho] = \sum_i |i\rangle_m \langle i|_m \rho |i\rangle_m \langle i|_m$, 弱测量和强测量的等价关系可以用式 2-2 证明.

$$\mathcal{N}_\phi \left[\hat{R}_\alpha \left(\rho_{in} \otimes |0\rangle_m \langle 0|_m \right) \hat{R}_\alpha^\dagger \right] = (1-p) \rho_{in} \otimes |0\rangle_m \langle 0|_m + p \sum \hat{P}_i \rho_{in} \hat{P}_i \otimes |i\rangle_m \langle i|_m \quad (2-2)$$

从更加一般的角度来看, 文献^[72] 使用量子信道和 Kraus 算符来解释投影测量和广义测量的共通性. 简单进行回顾, 考虑投影测量的 Kraus 算符 $\mathcal{M}_p = \{1, P_1, P_2, \dots, P_d\}$, 其中投影算符为 $P_i = |i\rangle \langle i|$, 权重为 $w(P_i) = 1$. 那么在投影测量下, 波函数的塌缩表示为 2-3. 因此, 考虑随机么正电路的情形, 考虑一个量子比特不被测量的权重, 即不变的权重为 $w(1) = 1 - p$, 被测量时 $w(P_i) = p$.

$$\frac{P_i |\psi\rangle}{\|P_i |\psi\rangle\|} \quad (2-3)$$

考虑广义测量的 Kraus 算符 $\mathcal{M}'_p = \{1\} \cup \{\sqrt{d} P_U | U \in \text{U}(d)\}$, 为一系列投影算符的无穷不可数集合, 其中 $P_U \equiv U^\dagger P_1 U$. 在 Haar 测量下 $\{\sqrt{d} P_U | U \in \text{U}(d)\}$ 为 $w(\sqrt{d} P_U) = p dU$. 可见广义测量的 Kraus 算符和投影算符的 Kraus 算符具有相同的形式.

附属量子比特 (ancilla qubit). 通过制备与系统耦合的附属量子比特, 可以从另一个方面了解纠缠熵相变. 附属量子比特可以在弱测量时引入, 亦可直接构造两个与系统量子比特纠缠的附属量子比特, 再对系统量子比特进行强测量. 附属量子比特的处理方法非常有意义, 因为随机么正电路在不断的含时演化中, 系统的量子比特也在动态的变化中, 使用附属量子比特在某个时刻做一次性的与系统的纠缠可以有效地“记录”当前系统量子比特的状态^[58].

如果我们在 t_1 时刻, 在第 x_1 个系统量子比特处耦合附属量子比特 A , 我们在 t_2 时刻, 在第 x_2 处耦合附属量子比特 B , 实际上我们研究的是一个两点关联函数 (two-point correlation function): (x_1, t_1) 与 (x_2, t_2) 的时空关联^[73]. 文献^[74] 讨论认为两个附属量子比特的互信息与用纠缠熵特征算符做平均场近似下求解的伊辛模型序参量和关联函数有关. 另一种方法是使用一个附属量子比特与环境纠

缠^{[58][75]}. 文献^[75] 使用此方法模拟了 Hayden-Preskill 思想实验^[76], 测试信息的复原 (retrieval): 假设黑洞是由具有丰富扰动的内部哈密顿量引导, 丢进这个黑洞的信息将在相对 (比黑洞寿命时间) 短的时间内恢复. 对于纠缠熵动力学中纠缠附属量子比特的所对应 (mapping) 的物理模型还需进一步的研究.

2.2 纠缠熵特征 (Entanglement Features) 算符

我们将在本章节综述文献^{[69][70][67][74]} 提出的纠缠熵特征算符模型. 考虑研究纠缠熵在随机么正电路中的演化相比研究纠缠熵在自旋链或者 SYK 模型中的演化有一些困难, 因为随机么正电路无法直接写出一个哈密顿量. 但是通过纠缠熵特征算符的方法直接从纠缠熵演化本身来建构动力学体系.

伊辛模型构造 (Ising Configuration). 一种描述 (Formalism) 是类比量子动力学的方法, 建立纠缠熵动力学的体系. 这里考虑的是一般的情况, 并不局限于随机么正电路. 考虑一个有 L 个量子比特的系统, 它的子系统数为 2^L 个. 进而, 可以使用伊辛模型的变量系统, 用 $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$ 来标记. 我们可以通过这个标记构造出所有的子系统, 即公式2-4^{[70][74]}:

$$\sigma_i = \begin{cases} \uparrow & i \in \bar{A} \\ \downarrow & i \in A \end{cases} \quad (2-4)$$

纠缠熵特征算符 (Entanglement Feature Operator). 对于在一个么正门上的输入和输出 (σ, τ) , 文献^[69] 定义纠缠熵特征算符 (Entanglement Feature Operator) 为式2-5. 对于任给的仁义指数 (Rényi index) N , 一组纠缠熵特征算符都可以用 $\sigma, \tau \in S^{XN}$ 表示, 即 $\sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_N$. n 实际代表的是 n 个复制 (n th replica).

$$W_U[\sigma, \tau] = \text{Tr}[U^{\otimes n} X_\sigma (U^\dagger)^{\otimes n} X_\tau] \quad (2-5)$$

这个定义也可以用微扰 (Permutation) 来理解. $W_U[\sigma, \tau]$ 可以被看作 $X_\sigma(t)$ 与 X_τ 的关联函数, 其中 $X_\sigma(t) = U^{\otimes n} X_\sigma (U^\dagger)^{\otimes n}$ 为算符在海森堡含时演化下的表达式^[69].

如果我们考虑约化密度矩阵的纯度 (purity), 也就是二阶矩, 我们得到式2-6. 对于纯态来说, 我们可以得到子区域 A 和它的补 (\bar{A}) 之间的纠缠.

$$W_\rho(A) = \text{Tr} \rho_A^2 = e^{-S_\rho^{(2)}(A)} \quad (2-6)$$

我们仿照3.1中介绍的3-6, 可以给出在复制一次的希尔伯特空间上的操作算符. 定义第 i 个基的 $\sigma = \uparrow$ 时操作 \mathbb{I}_i , 即单位算符; 定义第 i 个基的 $\sigma = \downarrow$ 时 X_i 为交换算符. 整个复制的长度为 L 个 qudit 的系统可以被定义为 $\mathcal{X}_\sigma = \bigotimes_{i=1}^L \mathcal{X}_{\sigma_i}$, 任意一个区域的交换操作都可以用伊辛构造来实现^[70].

$$\mathcal{X}_{\sigma_i} = \begin{cases} \mathbb{I}_i \equiv \sum_{\alpha, \beta=1}^d |\alpha\beta\rangle_i \langle \alpha\beta|_i & \text{if } \sigma_i = \uparrow \\ X_i \equiv \sum_{\alpha, \beta=1}^d |\alpha\beta\rangle_i \langle \beta\alpha|_i & \text{if } \sigma_i = \downarrow \end{cases} \quad (2-7)$$

我们使用式2-7中的构造方法代入2-6, 得到式2-8:

$$W_{|\Psi\rangle}[\sigma] \equiv e^{-S^{(2)}[\sigma]} = \text{Tr}(\mathcal{X}_\sigma(|\Psi\rangle\langle\Psi|)^{\otimes 2}) \quad (2-8)$$

对于前面所述的伊辛模型的一组基矢量 $|\sigma\rangle$, 公式2-9定义纠缠熵特征基矢量为^{[70][74]}:

$$|W_\Psi\rangle = \sum_{\sigma} W_{|\Psi\rangle}[\sigma] |\sigma\rangle \quad (2-9)$$

纠缠特征算符的算例. 文献^{[70][74]} 中介绍了几个纠缠特征算符的算例. 我们首先引入纠缠熵算符的计算方法, 即式2-8与2-5. 首先从解析地角度简单理解. 设局域自由度 $q = 4$, 复制以后 qudit 的基就是 $|ij\rangle$ 的组合, 其中 $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. 那么对于单位算符来说, 它可以表现为 $\sum_{i,j} |ij\rangle\langle ij|$ 的形式. 使用 \mathbb{I} 和 X 的表示方法, 如果 X_σ 和 X_τ 都是 X , 那么在取迹运算的时候, 对角项全满, $\text{Tr}[X_\sigma I X_\tau I] = q^2$. 如果 $X_\sigma = \mathbb{I}$ 而 $X_\tau = X$, 那么只有 $|00\rangle\langle 00|, |11\rangle\langle 11| \dots$ 这样的对角项有贡献, $\text{Tr}[X_\sigma I X_\tau I] = q$.

更简单的方法是通过图解法. 从复制方法 (3.1节的解析分析及图解法) 我们知道, 仁义指数为 2 时系统所有的态、算符、连接 (contraction) 都被复制了一次. 我们需要做迹运算时, 我们将图2.4(b)的上端和下端接起来.

我们计算具体的纠缠熵特征算符时, 可以将需要计算的算符代入图2.3(b), 通过计数迹运算中剩下的圈数 (如图2.4), 可以得到纠缠特征算符关于 d 的表达式. 下面介绍具体的例子.

单元 (identity) 算符. 考虑单元算符的表达式:

$$W_{\mathbb{I}}[\sigma, \tau] = \text{Tr}[X_\sigma I X_\tau I] \quad (2-10)$$

代入式2-7的构造方法, 即 \mathbb{I} 和 X 进入式2-10, 得到表2.1.

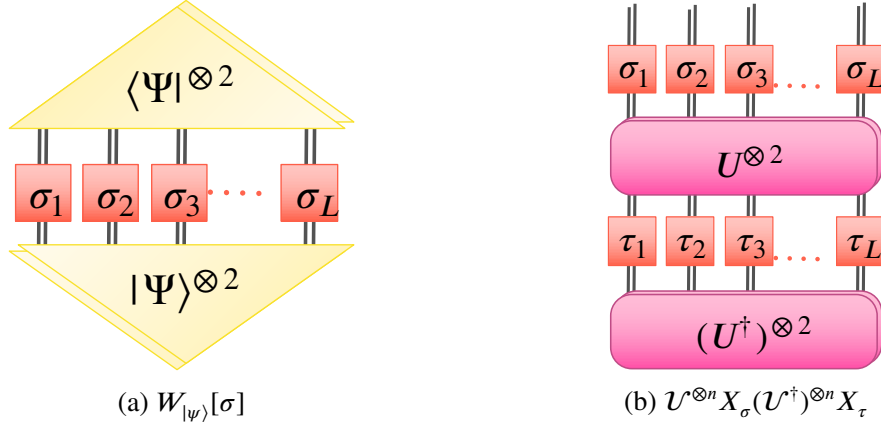


图 2.3 纠缠熵特征算符的图解法^[70]

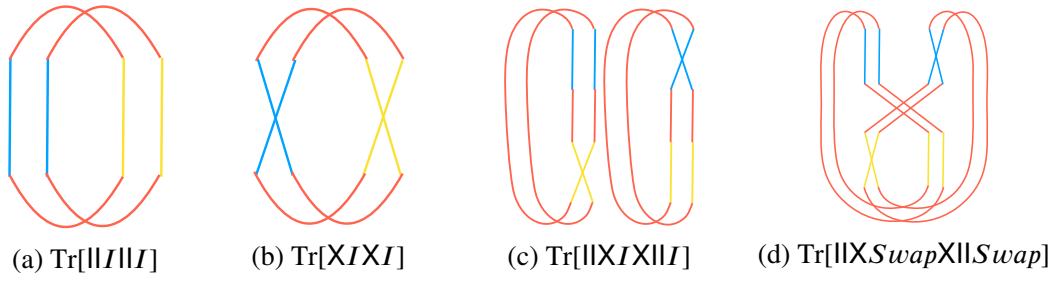


图 2.4 纠缠熵特征算符的计算过程举例

$\sigma \backslash \tau$	II	X
II	q^2 (图2.4(a))	q
X	q	q^2 (图2.4(b))

表 2.1 $\text{Tr}[X_\sigma I X_\tau I]$

$\sigma \backslash \tau$	III	II X	X II	XX
III	q^4	q^3	q^3	q^2
II X	q^3	q^2	q^4	q^3
X II	q^3	q^4 (图 2.4(d))	q^2	q^4
XX	q^2	q^3	q^3	q^4

表 2.2 $\text{Tr}[X_\sigma \text{Swap} X_\tau \text{Swap}]$

最后计算得到式2-11(X 为泡利矩阵 X).

$$W_I[\sigma, \tau] = \text{Tr}[X_\sigma I X_\tau I] = q(q + X) \quad (2-11)$$

交换 (Swap) 算符. 同理, 我们可以得到表2.2, 整理得交换的算符的表达式为式2-10.

$$W_{\text{SWAP}} = q^4 \left(\frac{1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{2} + \frac{1}{q} (X_1 + X_2) + \frac{1 + X_1 X_2 - Y_1 Y_2 - Z_1 Z_2}{2q^2} \right) \quad (2-12)$$

2 点 Haar 随机么正 (2-site Haar Random Unitary) 算符. 首先, 回顾式2-5作用与在随机么正电路上的 2 点么正算符使用伊辛构造的基描述为:

$$W_U[\sigma, \tau] = \text{Tr} \left[\mathcal{X}_\sigma U_{ij}^{\otimes 2} \mathcal{X}_\tau U_{ij}^{\dagger \otimes 2} \right] \quad (2-13)$$

算符在么正群下的平均由式2-14定义. 不难看出, 它可以使用 Weingarten 函数展开. 这个推导结果与1-51式非常类似, 只是把泡利弦的一组泡利基换成了纠缠熵特征算符的伊辛构造基.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} W_U[\sigma, \tau] &= \int dU \text{Tr} \left(U^{\otimes 2} X_\sigma (U^\dagger)^{\otimes 2} X_\tau \right), \quad U \in U(q^2) \\ &= \sum_{g, h \in S_2} \text{Wg}(g^{-1}h, q^2) \text{Tr}(\mathcal{X}_g \mathcal{X}_{\sigma_1}) \text{Tr}(\mathcal{X}_g \mathcal{X}_{\sigma_2}) \text{Tr}(\mathcal{X}_h \mathcal{X}_{\tau_1}) \text{Tr}(\mathcal{X}_h \mathcal{X}_{\tau_2}) \end{aligned} \quad (2-14)$$

下面分别考虑式2-14的第二行的两个组成部分. 可以发现, 对于遍历 $\mathcal{X}_g \mathcal{X}_h$ 的 S_2 置换群元的求迹实际上可以用表2.1来得到结果, 见式2-15.

$$\text{Tr}(\mathcal{X}_g \mathcal{X}_h) = \begin{cases} q^2 & gh = \text{II} \\ q & gh = \text{X} \end{cases} \quad (2-15)$$

对于 Weingarten 函数 $\text{Wg}(g^{-1}h, q^2)$, 我们可以参考图3.2、图3.3、图3.4和公式3-12,

$\sigma \backslash \tau$	IIII	IIIX	XII	XX
IIII	q^4	q^3	q^3	q^2
IIIX	q^3	$\frac{2q^4}{q^2+1}$	$\frac{2q^4}{q^2+1}$	d^3
XII	q^3	$\frac{2q^4}{q^2+1}$	$\frac{2q^4}{q^2+1}$	q^3
XX	q^2	q^3	q^3	q^4

表 2.3 $\text{Tr}[\mathcal{X}_\sigma U_{ij}^{\otimes 2} \mathcal{X}_\tau U_{ij}^{\dagger \otimes 2}]$

代入得到式2-16.

$$\text{Wg}(g^{-1}h, q^2) = \begin{cases} \frac{1}{q^4-1} & gh = \text{II} \\ \frac{1}{q^2(q^4-1)} & gh = \text{X} \end{cases} \quad (2-16)$$

综上, 通过纠缠特征算符的表示方法, 我们整理得到了表2.3. 2 点 Haar 随机幺正算符的统一表达式可以写成:

$$\hat{W}_{\text{Haar}} = q^2(q + X_i)(q + X_j) - \frac{q^2(q^2 - 1)}{2(q^2 + 1)}(1 - Z_i Z_j)(q^2 - X_i X_j) \quad (2-17)$$

局域信息扰乱 (Local Information Scrambling). 一种处理纠缠熵演化的方法是引入局域扰乱信息 (Locally Scrambled Information) 动力学. 在量子动力学中, 一个幺正演化总可以用 $U = \prod_t U_t$ 分解成多个以时序排列的幺正算符 (用脚标区分) 的内积. 由此, 可以定义局域扰乱 (Locally Scrambled) 的概念. 如果一个量子的动力学过程是局域混合的, 那么在每一个时刻, 从该时刻的平均中拿出的幺正算符 U_t 都在局域基矢变换 (Local Basis Transformation) 下保持不变, 即 $P(U_t) = P(VU_tV^\dagger)$, 并且, U_t 在不同时刻是相互独立的^[70]. 因此我们可以在每步中间引入局域扰乱器 (Local Scrambler), 如式2-18所示.

$$U = V_t^\dagger U'_t V_t V_{t-1}^\dagger U'_{t-1} V_{t-1} \dots \quad (2-18)$$

这样的分解使得信息扰乱的过程被分解成了许多局域扰乱过程的序列. 信息在每个局域充分被扰乱, 但是每次扰乱都是独立的, 局域的扰乱不会随着时间扩散. 按照上文的序列, 从 0 时间到 t 时间波函数的纠缠熵特征态的演化为2-20描述, 波函数 0 时刻的纠缠熵特征态经过一个个局域信息扰乱的幺正算符, 最终的纠缠

熵特征态可以看作是经过每个时刻的么正算符的时间平均. 即:

$$\mathcal{E}_U = \{V^\dagger U V | V = \bigotimes_{i=1}^L V_i, V_i \in \text{Haar}\} \quad (2-19)$$

$$|W_{\Psi_{i+1}}\rangle = \mathbb{E}_{U_i} \mathbb{E}_{U_{i-1}} \cdots |W_{U_i U_{i-1} \cdots \Psi_0}\rangle \quad (2-20)$$

先看单步 (single step) 的情况. 如果把2-19式展开, 就会发现它可以被变形成一个类似 Weigarten 函数的形式. 如果不把它全部拆开, 而是重新组合成纠缠特征算符的形式. 首先, 我们回顾2-5, 把它以2-18的形式展开, 利用 $[\sigma_i, V_i^{\otimes 2}] = 0$, 我们可以把中间的 V 消掉. 我们得到式2-21.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{U' \in \mathcal{E}_U} W_{U'|\Psi}[\sigma] &= \mathbb{E}_{U' \in \mathcal{E}_U} \text{Tr} \left[\mathcal{X}_\sigma (U' |\Psi\rangle \langle \Psi| U'^\dagger)^{\otimes 2} \right] \\ &= \mathbb{E}_{V \in \text{Haar}} \text{Tr} \left[\mathcal{X}_\sigma (V^\dagger U V |\Psi\rangle \langle \Psi| V^\dagger U^\dagger V)^{\otimes 2} \right] \\ &= \mathbb{E}_{V \in \text{Haar}} \left\langle \Psi |^{\otimes 2} V^{\dagger \otimes 2} U^{\dagger \otimes 2} V^{\otimes 2} \mathcal{X}_\sigma V^{\dagger \otimes 2} U^{\otimes 2} V^{\otimes 2} | \Psi \right\rangle^{\otimes 2} \\ &= \mathbb{E}_{V \in \text{Haar}} \left\langle \Psi |^{\otimes 2} V^{\dagger \otimes 2} U^{\dagger \otimes 2} \mathcal{X}_\sigma U^{\otimes 2} V^{\otimes 2} | \Psi \right\rangle^{\otimes 2} \end{aligned} \quad (2-21)$$

纠缠熵特征描述需要我们使用伊辛构造所生成的基来展开式2-21, 因此有:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{U' \in \mathcal{E}_U} W_{U'|\Psi}[\sigma] &= \sum_{\tau, \tau'} \text{Tr} (\mathcal{X}_\tau |\Psi\rangle \langle \Psi|^{\otimes 2}) \text{Tr} (\mathcal{X}_{\tau'} U^\dagger(t)^{\otimes 2} \mathcal{X}_\sigma U_t^{\otimes 2}) \prod_i \text{Wg}(\tau_i'^{-1} \tau_i, q) \\ &= \sum_{\tau, \tau'} W_{|\Psi\rangle}[\tau] W_U[\sigma, \tau'] \prod_i \text{Wg}(\tau_i'^{-1} \tau_i, q) \end{aligned} \quad (2-22)$$

考虑 $\text{Wg}(\tau_i'^{-1} \tau_i, q)$ 对接了两组伊辛构造基矢. 实际上可以认为它是在一维链上遍历了所有在一维链上所有节点的伊辛指标. 从数学上看, $\text{Wg}(\tau_i'^{-1} \tau_i, q)$ 为格兰矩阵 (Gramian matrix) 的逆 (inverse)^[77]. 对于这个模型来说, 格兰矩阵是所有遍历一维链上所有可能内积矩阵的集合, $\langle \tau' | \hat{W}_1 | \tau \rangle$. 其中 \hat{W}_1 式定义为2-23, 它的逆为式2-24.

$$\hat{W}_1 = \prod_{i=1}^L q (q + X_i) \quad (2-23)$$

$$\hat{W}_1^{-1} = \prod_{i=1}^L \frac{1 - q^{-1} X_i}{q^2 - 1} \quad (2-24)$$

可见, 每一步作用在纠缠熵特征态上的二阶平均为:

$$\mathbb{E}_{U' \in \mathcal{E}_U} |W_{U'}\rangle = \hat{W}_U \hat{W}_1^{-1} |W_\Psi\rangle \quad (2-25)$$

让我们回到时间演化的情形. 局域信息扰乱的设定使得该动力学过程是一个马尔可夫过程, 允许我们引入转移矩阵 (transfer matrix):

$$|W_{\Psi_{t+1}}\rangle = \hat{T}_t |W_{\Psi_t}\rangle = \hat{T}_t = \hat{W}_{U_t} \hat{W}_1^{-1} |W_{\Psi_t}\rangle \quad (2-26)$$

进一步地, 我们可以得到纠缠熵特征算子的 (广义的) 哈密顿量. 在这个形式下, V 体现为一层层的局域扰乱器, 每个 V 是一个符合 Haar 随机的局域幺正算符. 从式2-27中可以看出, 原本在随机幺正电路中的纠缠被封装到了这个局域的哈密顿量里面. 在 $\epsilon \ll 1$ 的条件下, 纠缠的演化相对缓慢, 可以看作是一个连续时间 (continuum) 演化, 即取连续极限 $-\partial_t |W_\Psi\rangle = H_{\text{EF}} |W_\Psi\rangle$.

$$U_t = V_t^\dagger e^{-i\epsilon H} V_t \quad (2-27)$$

$$H_{\text{EF}} = g \sum_{\langle ij \rangle} \frac{1 - Z_i Z_j}{2} e^{-\beta X_i X_j - \delta(X_i + X_j)} \quad (2-28)$$

模拟随机幺正电路中的纠缠熵. 文献^[74] 引入了一种平均场 (mean-field) 的处理方法, 因随机幺正门是快速的局域扰乱器, 可以迅速实现局域的热化, 所以可以用 Kraus 算符的期望值代替分母 $(\text{Tr } K \rho K^\dagger)^2$, 并忽略其相对于 K 的涨落.

$$W_\rho[\sigma] \simeq \frac{\mathbb{E}_K \text{Tr } \rho^{\otimes 2} \mathcal{X}_\sigma}{\mathbb{E}_K \text{Tr } \rho^{\otimes 2}} = \frac{W_\rho[\sigma]}{W_\rho[\uparrow]} = \frac{\langle \sigma | W_\rho \rangle}{\langle \uparrow | W_\rho \rangle} \quad (2-29)$$

$$S_\rho^{(2)}[\sigma] = -\log W_\rho[\sigma] \simeq -\log \frac{\langle \sigma | W_\rho \rangle}{\langle \uparrow | W_\rho \rangle} \quad (2-30)$$

参考图1.2, 在随机幺正电路图中的操作有作用幺正算符和测量, 我们需要把这两个步骤用纠缠熵特征描述的方法写出来, 因此我们将幺正算符和测量都换成转移矩阵的描述方式, 见式2-31.

$$\hat{T}_{\text{step}} = \prod_i \hat{T}_{M_i} \prod_{\langle ij \rangle \in \text{even}} \hat{T}_{U_i} \prod_i \hat{T}_{M_i} \prod_{\langle ij \rangle \in \text{odd}} \hat{T}_{U_i} \quad (2-31)$$

随机么正电路	自旋模型
$\overline{\text{tr } \rho_{AM}^n}$	$\mathcal{Z}_{AM}^{(n)}$
$-\log \overline{\text{tr } \rho_{AM}^n}$	$F_{AM}^{(n)}$
$\tilde{S}^{(n)}(A M)$	$(F_{AM}^{(n)} - F_M^{(n)})/(n-1)$
$D^{(n)}(P_0 \ P_\theta)$	$(F_{M,\theta}^{(n)} - F_M^{(n)})/(n-1)$
$\mathcal{F}^{(n)}$	$2\langle m_1^\downarrow \rangle / (n-1)$

表 2.4 随机么正电路与自旋模型的对应^[54]

量子信道的转移矩阵 (transfer matrix) 可以写作式2-32. 其中将测量强度 p 代入 \hat{T}_{M_i} , 展开再代入 Weingarten 函数的公式可以得到.

$$\begin{aligned}\hat{T}_{U_{ij}} &= \left(1 + \frac{d}{d^2 + 1}(X_i + X_j)\right) \frac{1 + Z_i Z_j}{2} \\ \hat{T}_{M_i} &= 1 - \frac{p}{d+1} + \frac{pd}{d+1} X_i\end{aligned}\tag{2-32}$$

文献^[74] 使用 MPS 方法对纠缠特征算符描述下的转移矩阵在随机么正电路中的演化进行了模拟. 这个方法有能力对 $L = 50$ 进行模拟, 在效率上大大高于直接对随机么正电路进行模拟的效率. 同时, 可以通过纠缠特征算符模型模拟计算临界现象有关的物理量, 如序参量、关联函数.

另一种把纠缠熵相变用物理模型的解析方法是将随机么正电路中的纯度 (purity)(更广泛地是从 n 阶矩 (n -th moment)) 与自旋模型的配分函数对应^{[54][72][11]}, 如表2.4所示. 其中, $\tilde{S}^{(n)}(A|M)$ 为两个子系统的条件熵, $D^{(n)}(P_0 \| P_\theta)$ 为 K-L 散度, $\mathcal{F}^{(n)}$ 为费舍尔信息.

2.3 数值模拟

2.3.1 数值模拟方法

我们对随机么正电路进行了数值模拟. 最直观的数值模拟方法, 如算法1所示, 需要通过构造大量的克罗内克直积 (Kronecker product) 来构造随机么正作用算符 ($2^L \times 2^L$). 除此之外, 使用泡利矩阵 Z 分量的投影测量方法需要在测量一个量子比特时, 因此需要构造 ($2^L \times 2^L$) 的投影测量算符, 并用它作用在波函数上, 计算期望值 (expectation)、向上的概率、向下的概率, 同样需要耗费大量的时间.

考虑随机么正电路矩阵的特点^[78] 及 Python、Numpy、Scipy 里在矩阵计算上较为方便的函数, 我们提出了算法2. 从算法1中可以看出, 我们需要构建的作用在整个波函数上随机么正门的是一个 $2^L \times 2^L$ 的矩阵, 但是我们一次只会在近邻

算法 1 生成随机么正电路

输入: $|\psi\rangle, L$

输出: $|\psi\rangle$

- 1: Initial $U_{(4 \times 4)}$ ▷ 生成随机么正门作用之后的波函数
 - 2: **for** $i = 0 \rightarrow L/2$ **do** ▷ 用 `unitary_group.rvs(4)` 生成随机么正门
 - 3: $U'_{(2^L \times 2^L)} \leftarrow ((I_{2^{2i} \times 2^{2i}}) \otimes U_{(4 \times 4)}) \otimes I_{(2^{(L-2i-2)} \times 2^{(L-2i-2)})}$ ▷ 一共有 $L/2$ 个门
 - 4: ▷ 用 `sparse.kron` 函数通过直积将 U 扩展成 $2^L \times 2^L$ 的第 i 个门的算符
 - 5: $|\psi\rangle \leftarrow U'_{(2^L \times 2^L)} |\psi\rangle$ ▷ 将作用算符作用于波函数上
 - 6: **end for**
-

的两个量子比特上作用, 所以使用克罗内克直积后这个矩阵时分块对角的 (block diagonal). 类比2.2节的伊辛描述, 考虑一个有 L 个量子比特的系统, 它的状态数为 2^L 个. 在计算机模拟时, 使用十进制和二进制的关系, 将 $|\uparrow\rangle$ 态记为 1, $|\downarrow\rangle$ 态记为 0. 举例来说 000001 和 000010 分别标记了最后一个和倒数第二个比特的 $|\uparrow\rangle$ 态. 因此, 我们在操控需要的量子比特时亦通过二进制和十进制的转换关系定位, 用 `reshape` 函数把它的本地波函数提取出来, 用 `transpose` 函数把它放到最前面, 并对它赋予相关操作, 操作完毕以后再把它恢复成一维的波函数向量.

算法 2 优化随机么正电路 (添加了附属量子比特后)

输入: $|\psi\rangle, L$

输出: $|\psi\rangle$

- 1: **for** $i = 0 \rightarrow (L - 2)/2$ **do** ▷ 一共有 $(L - 2)/2$ 个门
 - 2: Initial $U_{(4 \times 4)}$ ▷ 用 `unitary_group.rvs(4)` 生成随机么正门
 - 3: $[\psi]_{(4 \times 2^{(L-2)})} \leftarrow |\psi\rangle$
 - 4: ▷ 使用 `reshape` 函数将 $|\psi\rangle$ 变成矩阵, 提取前两个量子比特
 - 5: $|\psi\rangle = U_{(4 \times 4)} \times [\psi]_{(4 \times 2^{(L-2)})}$ ▷ 用随机么正门作用
 - 6: $[\psi]_{(4 \times 2^{(L-4)} \times 4)} \leftarrow [\psi]_{(4 \times 2^{(L-2)})}$ ▷ 使用 `reshape` 函数, 把附属比特分出
 - 7: $[\psi]_{(2^{((L-4)} \times 4 \times 4)} \leftarrow [\psi]_{(4 \times 2^{(L-4)} \times 4)}$
 - 8: ▷ 使用 `transpose` 函数, 附属量子比特不动, 把已经作用完的两个量子比特后调
 - 9: **end for**
 - 10: **return** $|\psi\rangle \leftarrow [\psi]_{(2^{((L-4)} \times 4 \times 4)}$ ▷ 使用 `flatten` 函数返回波函数一维向量
-

在算法3中, 我们使用了与2相似的操作, 则不需要构造直接作用在波函数上的

$2^L \times 2^L$ 为投影算符 S_Z . 我们使用了与文献^{[12][73]} 相同的实验设计 (protocol). 上文所述的随机么正电路的特性使我们可以把需要操作的位置固定下来, 通过 reshape 函数在维数之间的调动, 可以实现给定位置 x 的量子比特的测量.

算法 3 投影测量

输入: $|\psi\rangle, p, L, x$ ▷ x 为所测量的比特的位置, p 为概率

输出: $|\psi\rangle$

```

1: Initial selection
2:           ▷ 使用 np.random.choice 函数, 在  $p$  的概率为 1 下确定是否测量
3: if selection = 1 then           ▷ 执行测量
4:      $[\psi]_{(2^x \times 2 \times 2^{(L-x-1)})} \leftarrow |\psi\rangle$            ▷ 使用 reshape 函数, 分出  $x$  位置的比特
5:      $[\psi]_{(2 \times 2^x \times 2^{(L-x-1)})} \leftarrow [\psi]_{(2^x \times 2 \times 2^{(L-x-1)})}$ 
6:           ▷ 使用 transpose 函数, 将  $x$  位置的比特调到前面
7:      $[\psi]_{(2 \times 2^{(L-1)})} \leftarrow [\psi]_{(2^x \times 2 \times 2^{(L-x-1)})}$            ▷ 使用 transpose 函数, 将  $[\psi]$  变成矩阵
8:      $upprob \leftarrow \min(1, |[\psi](0)|^2)$ 
9:     ▷ 使用 np.linalg.norm 计算该比特向上的概率, 如果有数据误差则将超过
       1 的变成 1
10:     $downprob \leftarrow \max(0, 1 - upprob)$ 
11:    generate outcome by  $upprob, downprob$ , normalize           ▷ 给出测量结果并归一
12:     $[\psi]_{(2^x \times 2 \times 2^{(L-x-1)})} \leftarrow [\psi]_{(2 \times 2^{(L-1)})}$            ▷ 恢复波函数
13:     $[\psi]_{(2^x \times 2 \times 2^{(L-x-1)})} \leftarrow [\psi]_{(2 \times 2^x \times 2^{(L-x-1)})}$            ▷ 恢复波函数
14: end if
15: return  $|\psi\rangle$            ▷ 使用 flatten 函数返回波函数一维向量

```

需要特别说明的是, 在创建时间演化 (evolution) 函数时, 随机么正电路要求我们处理奇偶性. 我们可以使用与算法2中相同的技巧. 奇数时间的情况下, 就把最左边的一个量子比特 (2×2) 移动到最右边, 生成随机么正电路, 之后再把被 $L/2$ 个随机么正算符作用过的波函数的量子比特放回去, 实现偶数时间的测量. 同时需要注意的是, 在图1.2中, 奇数时间的一维链的首尾的量子比特是使用么正门作用在一起的, 这便是循环边界条件 (periodic boundary condition). 我们因此以一种简洁的形式实现了奇偶对换和循环边界条件. 在演化函数中调用生成随机么正电路、投影测量函数, 就生成随机么正电路的时间演化和在每一次演化后对量子比特的测量. 进而计算相关的物理量, 如子系统之间的纠缠熵和互信息, 与文献中的

理论和实验结果进行比对.

因为注意到一些文献提出了使用附属量子比特测量对系统进行探测^{[58][73]}的方法, 我们使用了文献^[73]的实验设计, 使用 Controlled NOT(CNOT, 式2-33) 门作用在附属量子比特和系统量子比特上制造了贝尔态, 即最大纠缠态, 见算法4.

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

通过运用在布洛赫球 (Bloch Sphere) 上的旋转矩阵来调整 CNOT 门, 亦可构建附属量子比特与系统量子比特的弱纠缠. 将算法4中的 CNOT 换成式2-34就可以实现弱测量, 可以看到它与式2-1在局域自由度为 2 的情况下是等价的.

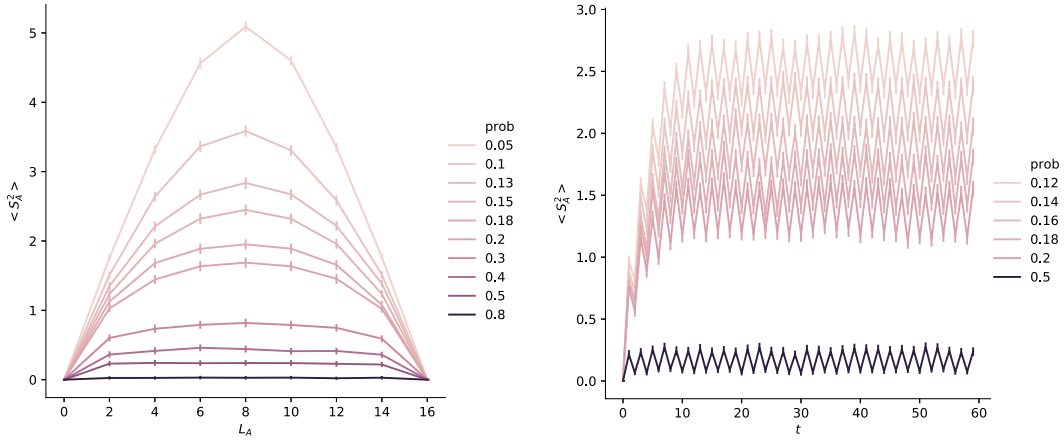
$$\text{CNOT}_{\text{weak}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -i \sin \alpha \\ 0 & 0 & i \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

算法 4 附属量子比特的最大纠缠态

输入: $|\psi\rangle, p, L, x, x_a$ ▷ x_a 为附属量子比特的位置

输出: $|\psi\rangle$

- 1: initial a $\text{CNOT}_{(4 \times 4)}$ gate
 - 2: $[\psi]_{(2^x \times 2^x \times \dots \times 2^{L-1-x_a})} \leftarrow |\psi\rangle$ ▷ 使用 reshape 函数, 分出 x 和 x_a 位置的比特
 - 3: $[\psi]_{(2 \times 2 \times 2^x \times \dots \times 2^{L-1-x_a})} \leftarrow [\psi]_{(2^x \times 2^x \times \dots \times 2^{L-1-x_a})}$
 - 4: ▷ 使用 reshape 函数, 把 x 和 x_a 位置的比特移动到最前面
 - 5: $[\psi]_{(4 \times 2^{(L-2)})} \leftarrow [\psi]_{(2 \times 2 \times 2^x \times \dots \times 2^{L-1-x_a})}$ ▷ 使用 transpose 函数, 将 $[\psi]$ 变成矩阵
 - 6: $[\psi]_{(4 \times 2^{(L-2)})} \leftarrow \text{CNOT}_{(4 \times 4)} \times [\psi]_{(4 \times 2^{(L-2)})}$ ▷ 将 CNOT 作用在波函数上
 - 7: $[\psi]_{(2 \times 2 \times 2^x \times \dots \times 2^{L-1-x_a})} \leftarrow [\psi]_{(4 \times 2^{(L-2)})}$ ▷ 恢复波函数
 - 8: $[\psi]_{(2^x \times 2^x \times \dots \times 2^{L-1-x_a})} \leftarrow [\psi]_{(2 \times 2 \times 2^x \times \dots \times 2^{L-1-x_a})}$ ▷ 恢复波函数
 - 9: **return** $|\psi\rangle$ ▷ 使用 flatten 函数返回波函数一维向量
-



(a) $L_A - \langle S_A^{(2)} \rangle, L = 16, t = 30, 500$ 次

(b) $t - \langle S_A^{(2)} \rangle, L = 14, t = 60, 500$ 次

图 2.5 $\langle S_A^{(2)} \rangle$ 在随机幺正电路下的演化结果

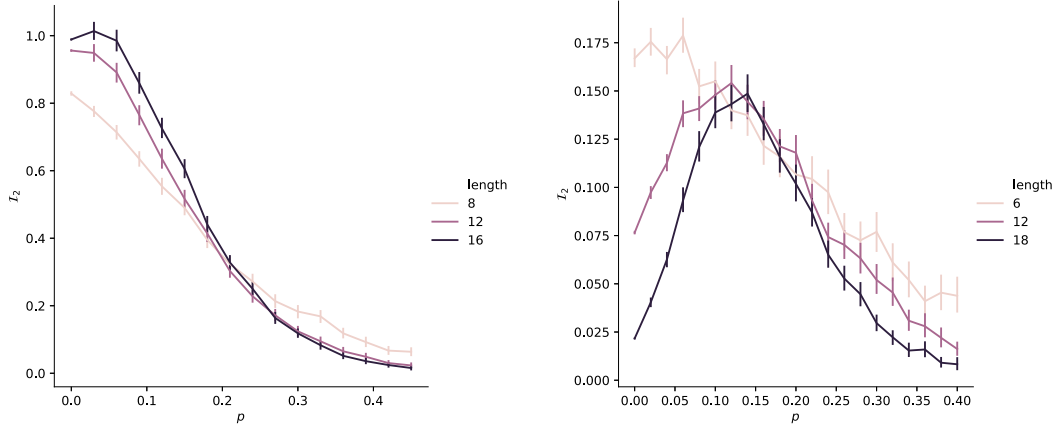
2.3.2 数值模拟结果及讨论

随机幺正电路中熵均值 $\langle S_A^{(2)} \rangle$ 的演化结果见图2.5. 在图2.5(a)中我们可以看到纠缠熵相变得到了复现, 取 $L = 16, t = 30$, 在 500 次的平均下, 可以看到纠缠熵的增长尺度随测量概率较大逐渐变小, 在约为 $p < 0.18$ 时符合体积律相, 在 $p > 0.18$ 时符合面积律相. 因为 $S_A^{(2)}$ 的期望值是对称的, 在大量平均下可以看出 $\langle S_A^{(2)} \rangle$ 的对称性. 该结果与文献^[59] 符合, 与文献^[74] 使用纠缠熵特征算符方法模拟的结果相符合.

在图2.5(b)中, $L = 14, t = 60, 500$ 次平均下, 我们可以看到, 在 $t \sim L$ 时系统接近稳态, 与文献^[73] 所描述相符合. 锯齿形状为随机幺正电路中奇偶效应 (odd-even effect) 的体现. 在体积律相, $S \sim t$; 在面积律相, $S \sim t^0$, 与文献^{[55][54]} 及图2.2符合.

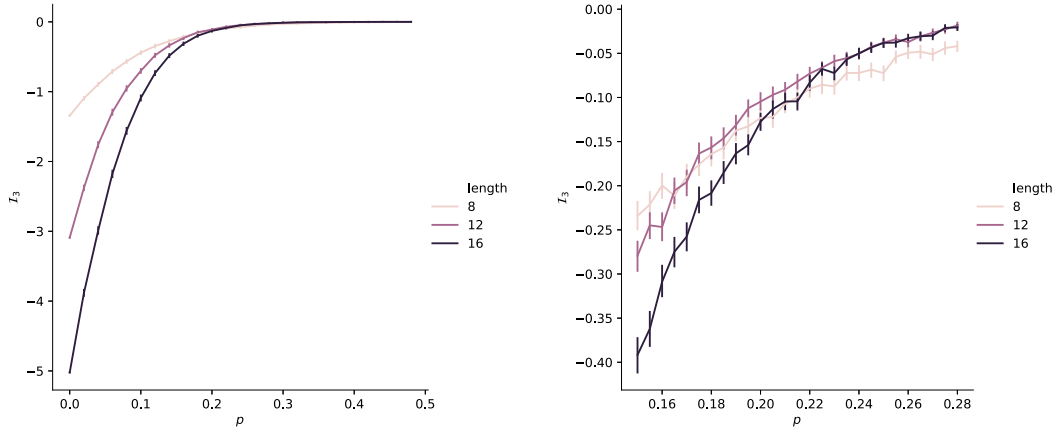
我们发现系统的二分互信息随概率的变化对子系统的大小 (size) 取法非常敏感. 在图2.6(a)中, $L = 8, L = 12, L = 16$, 两个子系统设置为 $[0, L/4]$ 和 $[L/2, 3L/4]$. $t = 40, 1000$ 次平均下, 我们可以看到, 系统的二分互信息总体呈递减趋势. 在图2.6(b)的模拟时, 我们采用了文献^[56] 的条件, 取子系统范围为 $[0, L/6]$ 和 $[L/2, 2L/3]$. 可以看到系统的二分互信息在 $L = 6, L = 12, L = 18, t = 40, 1000$ 次平均下, 在 p 从 0 开始增大的时候迅速增长, 在 $p = 0.08 \sim 0.18$ 之间存在峰值 (peak), 并且随着系统总长度的增大, 峰值呈现一个向右的位移 (shift). 这个结果大致与文献^{[56][62]} 的吻合.

我们计算了随机幺正电路系统演化到稳态的三分互信息. 在图2.7(a)中, 我们采用了文献^[73] 的条件, 取三个子系统为 $[0, L/4], [L/4, L/2], [L/2, 3L/4]$. 可以看到



(a) $p - \langle I_2 \rangle$, $\Delta p = 0.03$, $L_{sub} = L/4$, $t = 40$, 1000 次
(b) $p - \langle I_2 \rangle$, $\Delta p = 0.02$, $L_{sub} = L/6$, $t = 40$, 1000 次

图 2.6 随机幺正电路系统演化到稳态的二分互信息

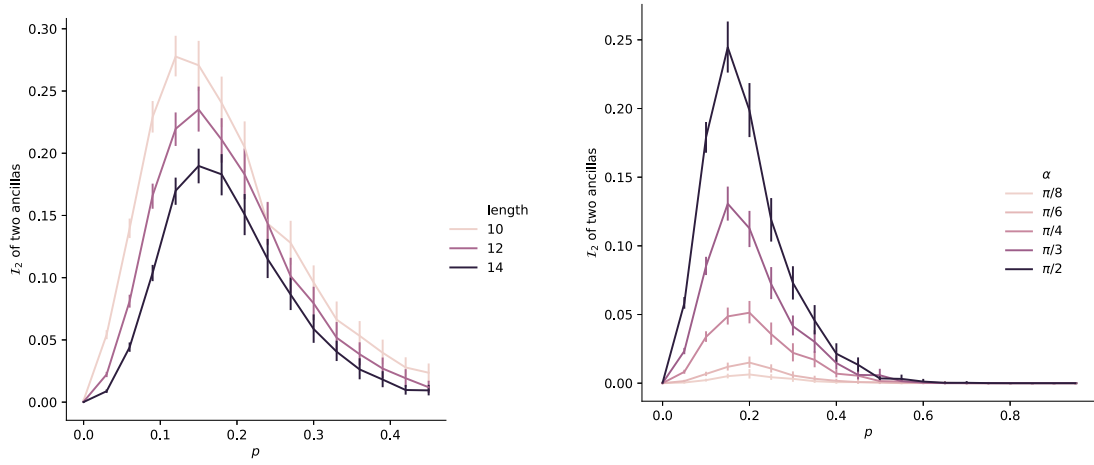


(a) $p - \langle I_3 \rangle$, $\Delta p = 0.03$, $L_{sub} = L/4$, $t = 40$, 1000 次
(b) 相变点附近, $p - \langle I_3 \rangle$, $\Delta p = 0.02$, $L_{sub} = L/4$, $t = 40$, 1000 次

图 2.7 随机幺正电路系统演化到稳态的三分互信息

三分互信息亦有相变产生. 按照文献^[36]的理论, 三分互信息的负性 (negativity) 体现了系统中信息的扰乱. 按照前文所述, 在 p 较小时, 系统为高度纠缠的体积律相, 纠缠扩散到了整个系统. 但是在 p 较大时, 测量使波函数塌缩, 纠缠从一定程度上就被破坏了, 因此三分互信息会逐渐接近于零. 除此之外, 不同系统大小的三分互信息在相变点附近存在交叠, 如图2.7(b)所示, 与文献^[73]相符合.

j 耦合附属量子比特的结果如图2.8所示. 我们在 $t = L$ 时刻, 将位置在 0 和 $L/2$ 的处的系统量子比特分别与两个附属量子比特制造纠缠, 使用算法4, 可以算出两个附属量子比特的二分互信息随 p 的变化. 图2.8(a)为按照式2-33制造贝尔态的两个附属量子比特的二分互信息结果, 图2.8(b)为按照式2-34制造弱纠缠态的结



(a) 贝尔态, $p - \langle I_2 \rangle, \Delta p = 0.03, t = 40, 1000$ 次 (b) 弱耦合, $p - \langle I_2 \rangle, \Delta p = 0.05, L = 12, t = 40, 1000$ 次平均

图 2.8 耦合附属量子比特的结果

果, 其中在 $\alpha = \pi/2$ 时, 弱纠缠态等于贝尔态; 在 $\alpha = 0$ 时, 没有纠缠. 文献^[74] 说明, 在 $p = 0$ 时系统全部热化, 为 Page 态 (Page State)^[79], 因此互信息为零.

第3章 正文补充

本章主要补充介绍复制方法 (Replica Method) 和 Weingarten 函数.

3.1 复制方法 (Replica Method)

我们在本节中介绍一种在有效作用量和自由能遇到的常用方法, 即复制方法 (Replica Method), 它通常被用来计算形如 $\overline{\ln Z}$ 的物理量. 在计算仁义熵 (仁义指数 $n \geq 2$) 之前, 它主要被用来计算 $n \rightarrow 1$ 的极限下, 体系平均自由能 ($\overline{F} = T \overline{\ln Z}$)、有效作用量^①, 或者冯诺伊曼熵 ($n \rightarrow 1$).

这个方法一度被用来计算仁义熵和有关的物理量, 通常是针对一些格点模型 (Lattice Model) 并配合量子蒙特卡罗算法 (Quantum Monte Carlo) 计算^{[16][80]}. 但是, 它很难直接运用到随机么正电路中, 因为随机么正电路不存在一个确定的哈密顿量.

平均自由能、冯诺伊曼熵. 复制方法的基本内涵是将体系的配分函数复制 n 份, 再取 $n \rightarrow 0$ 的极限. 它通常会配合式3-3和式3-4一起使用:

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n} \quad (3-3)$$

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial Z^n}{\partial n} \quad (3-4)$$

仁义熵计算方法. 考虑有限温度下的热力学密度矩阵 (thermal density matrix)(式1-17, $\rho_{thermal} = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)^{-1}} = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]}$.) 热力学极限下 (β 很大时), 希尔伯特空间很大, 直接对角化很难解决. 复制方法 (Replica Method) 可以不用对角化而得到密度矩阵的 n 阶的迹, 即 $\text{Tr}[\rho_A^n]$.

① 例如, 一个欧式空间体系的配分函数的平均转化成路径积分的形式为式3-1.

$$\overline{Z} = \int [du^\alpha] e^{-S} \quad (3-1)$$

其中有效作用量为:

$$S_n = S_{eff} = -\ln \overline{Z^n} \quad (3-2)$$

文献中亦有介绍在仁义指数为 2 的时, 可以不使用路径积分的方法来看复制方法^[16], 可为我们计算随机么正电路的纠缠熵提供灵感. 考虑一个二分系统做施密特分解后的基矢量, 这里记作 $\{|a_k\rangle|b_k\rangle\}$. 那么可以将 $\text{Tr}[\rho_A^2]$ 写成式3-5, 中间将子空间的密度矩阵换成了整个系统的密度矩阵.

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\rho_A^2] &= \sum_k \langle a_k | \rho_A^2 | a_k \rangle \\
&= \sum_{k,l} \langle a_k | \rho_A | a_l \rangle \langle a_l | \rho_A | a_k \rangle \\
&= \sum_{k,l,m,n} \langle a_k b_m | \rho | a_l b_m \rangle \langle a_l b_n | \rho | a_k b_n \rangle \\
&= \frac{1}{Z^2} \sum_{k,m,n} \langle a_k b_m | e^{-\beta H} [1_A \otimes |b_m\rangle\langle b_n|] e^{-\beta H} | a_k b_n \rangle
\end{aligned} \tag{3-5}$$

在量子蒙特卡洛中, $e^{-\beta H}$ 可以被转化成在每个虚时间步 (time step) 之间的转移矩阵 (transfer matrices) 的形式, 将边界条件设为 $\tau = \beta$ 就可以计算 $\text{Tr}[\rho_A^2]$.

这里还简单介绍一种基于复制方法的算符描述, 就是定义广义交换算符 (Generalized Swap Operator)^[81]. 考虑态 $|\Psi\rangle = \sum_{a,b} c_{a,b} |a\rangle|b\rangle$, 其中 $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 分别是 A 区域和 B 区域的基态. A 区域 (Region A) 的广义交换算符 S_A 的定义式为3-6^[81]:

$$S_A \sum_{a_1,b_1} c_{a_1,b_1} |a_1 b_1\rangle \otimes \sum_{a_2,b_2} d_{a_2,b_2} |a_2 b_2\rangle = \sum_{a_1,b_1} c_{a_1,b_1} \sum_{a_2,b_2} d_{a_2,b_2} |a_2 b_1\rangle \otimes |a_1 b_2\rangle \tag{3-6}$$

有一个巧妙的操作是对广义交换算符取均值 (即式3-7^[81], 其中 $|\Psi\rangle$ 为一个纠缠态), 我们可以得到 $\text{Tr}[\rho_A^2]$.

$$\begin{aligned}
\langle \Psi \otimes \Psi | S_A | \Psi \otimes \Psi \rangle &= \sum_{a_1,b_1,a_2,b_2} c_{a_1,b_1} c_{a_2,b_1}^* c_{a_2,b_2} c_{a_1,b_2}^* \\
&= \sum_{a_1,a_2} (\rho_A)_{a_1 a_2} (\rho_A)_{a_2 a_1} = \text{Tr}[\rho_A^2]
\end{aligned} \tag{3-7}$$

复制方法也可以用张量网络中常用的图解^[80](图3.1). 这个图有助于帮我们理解这个广义交换算符描述. 其中红色“腿 (leg)”表示子系统 A , 其中黄色“腿”表示子系统 B . 做迹运算的时候, 我们把外腿接起来. 图3.1(d)是对3.1(c)的调整, 本质上没有区别. 可以看出, 图3.1(d)相当于对一个密度矩阵复制以后, 将红色的腿连在一起, 黄色的腿交换. 从形式上来看它和式3-7等价, 当然这里是广义交换算符 $\langle S_B \rangle$. 图解方法和广义交换算符都可以被用到更高阶的情形, 比如需要四个复制.

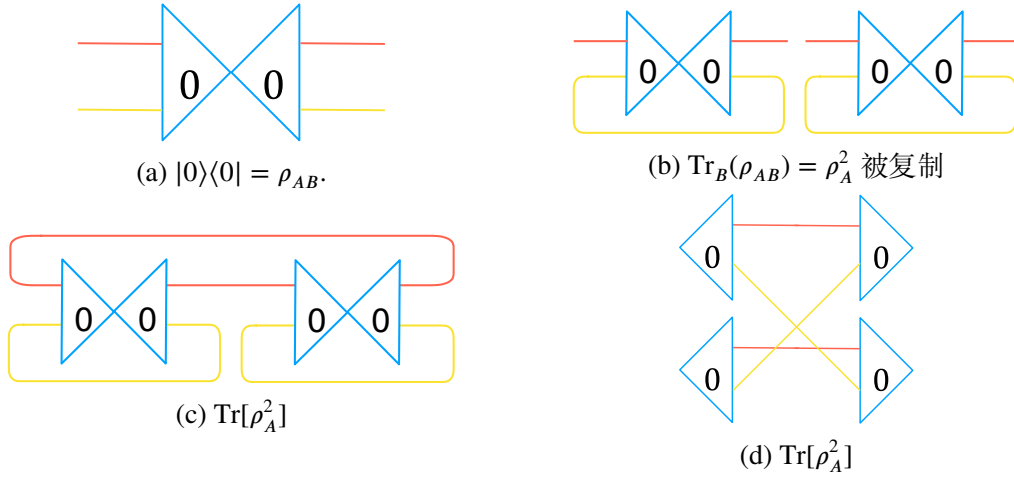


图 3.1 复制方法的图解法示意图^[80]

3.2 Weingarten 函数

在本章节我们简要介绍 Weingarten 函数^{[82][83]}. Weingarten 函数对求解形如式3-8的么正群 (unitary group) 上的积分非常有用.

$$\int_{U_d} U_{i_1 j_1} \dots U_{i_q j_q} U_{j'_1 i'_1}^\dagger \dots U_{j'_q i'_q}^\dagger dU = \sum_{\sigma, \tau \in q} \delta_{i_1 i'_{\sigma(1)}} \dots \delta_{i_q i'_{\sigma(q)}} \delta_{j_1 j'_{\tau(1)}} \dots \delta_{j_q j'_{\tau(q)}} \text{Wg}(\sigma \tau^{-1}, d) \quad (3-8)$$

Wg 为 Weingarten 函数. 它的形式如式3-9所示. 其中 λ 是置换群中的分割 (partition) 数, 1 是群单位元, $\chi^\lambda(\sigma)$ 是由分割数 λ 指标对应的对称群的不可约特征标 (irreducible character)^[84].

$$\text{Wg}(\sigma, d) = \frac{1}{q!^2} \sum_{\lambda} \frac{\chi^\lambda(1)^2 \chi^\lambda(\sigma)}{s_{\lambda, d}(1)} \quad (3-9)$$

在计算中常用的 Weingarten 函数如下:

$$\begin{aligned} \text{Wg}(1, d) &= \frac{1}{d} \\ \text{Wg}(2, d) &= \frac{-1}{d(d^2-1)} \\ \text{Wg}(1^2, d) &= \frac{1}{d^2-1} \\ \text{Wg}(3, d) &= \frac{2}{d(d^2-1)(d^2-4)} \\ \text{Wg}(21, d) &= \frac{-1}{(d^2-1)(d^2-4)} \\ \text{Wg}(1^3, d) &= \frac{d^2-2}{d(d^2-1)(d^2-4)} \end{aligned} \quad (3-10)$$

我们可以使用“箱子和接线 (boxes and wires)”图解法^{[85][86]} 来理解 Weingarten 函数. 带圆点装饰 (decoration) 的箱子为张量, 实心和空心分别对应 V 和 V^* . 用

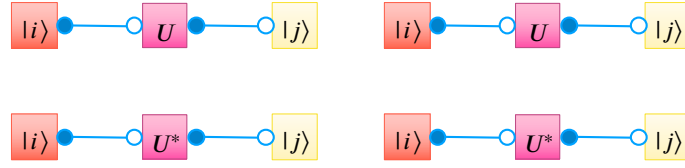


图 3.2 $|U_{ij}|^2 = U_{ij} \cdot U_{ji}^*$

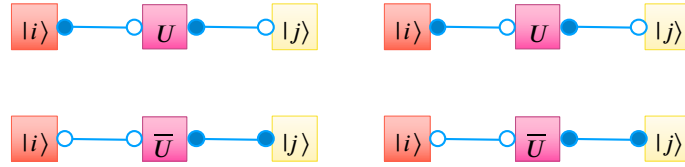


图 3.3 将 U^* 换成 \bar{U}

连线表示张量缩并 (tensor contraction). 我们这里介绍本文中最常见的算例, 见式3-11:

$$\mathbb{E}|u_{ij}|^4 = \int_{U(d)} |u_{ij}|^4 dU \quad (3-11)$$

我们首先将随机幺正矩阵 $|U_{ij}|^2 = U_{ij} \cdot U_{ji}^*$ 的图示画出, 见图3.2.

第二步是将 U_{ji}^* 换成 U_{ji}^* , 就是将 i 和 j 所连接的装饰形态对换, 见图3.3.

第三步是将实心装饰与实心装饰配对 (pairing), 空心装饰与空心装饰配对, 并由此遍历所有的可能性, 即所有的分块, 见图3.4. 将图3.4的结果写成公式, 我们得到了式3-12.

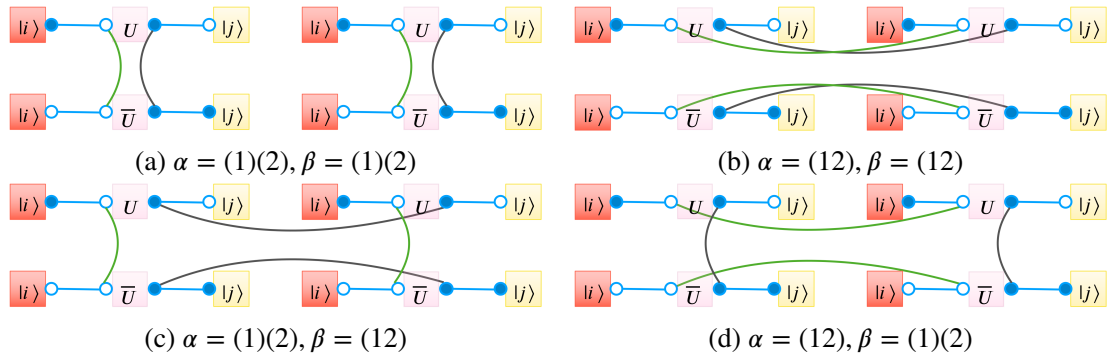


图 3.4 配对过程. 我们看到共有四种分割方式.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|u_{ij}|^4 &= \int_{U(d)} |u_{ij}|^4 dU \\
&= \text{Wg}(d, (1)(2)) + \text{Wg}(d, (12)) + \text{Wg}(d, (12)) + \text{Wg}(d, (1)(2)) \\
&= \frac{2}{d^2 - 1} - \frac{2}{d(d^2 - 1)} \\
&= \frac{2}{d(d + 1)}
\end{aligned} \tag{3-12}$$

参考文献

- [1] NISHIOKA T. Entanglement entropy: holography and renormalization group[J]. Reviews of Modern Physics, 2018, 90(3):035007.
- [2] NIELSEN M A, CHUANG I. Quantum computation and quantum information[M]. American Association of Physics Teachers, 2002.
- [3] 张永德. 量子信息物理原理[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [4] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. Bell system technical journal, 1948, 27(3):379-423.
- [5] VON NEUMANN J. Thermodynamik quantenmechanischer gesamtheiten[J]. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1927, 1927:273-291.
- [6] RÉNYI A, et al. On measures of entropy and information[C]//Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Contributions to the Theory of Statistics. The Regents of the University of California, 1961.
- [7] PRESKILL J. Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation[J]. California Institute of Technology, 1998, 16.
- [8] PATEL A, KUMAR P. Weak measurements, quantum-state collapse, and the born rule[J]. Physical Review A, 2017, 96(2):022108.
- [9] Weak measurement[J/OL]. Wikipedia, 2020. https://en.wikipedia.org/wiki/Weak_measurement.
- [10] BRODUTCH A. Weak measurements with an ensemble quantum processor, 2014 cap congress [EB/OL]. 2014. <https://indico.cern.ch/event/293589/contributions/1652292/attachments/549826/757725/weakNMR.pdf>.
- [11] HUNTER-JONES N. Unitary designs from statistical mechanics in random quantum circuits [J]. arXiv preprint arXiv:1905.12053, 2019.
- [12] LI Y, CHEN X, FISHER M P A. Quantum zeno effect and the many-body entanglement transition[J/OL]. Physical Review B, 2018, 98(20). <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.98.205136>. DOI: 10.1103/physrevb.98.205136.
- [13] BOMBELLI L, KOUL R K, LEE J, et al. Quantum source of entropy for black holes[J]. Physical Review D, 1986, 34(2):373.
- [14] EISERT J, CRAMER M, PLENIO M B. Area laws for the entanglement entropy-a review[J]. arXiv preprint arXiv:0808.3773, 2008.
- [15] CALLAN C, WILCZEK F. On geometric entropy[J]. Physics Letters B, 1994, 333(1-2):55-61.

- [16] HELMES J. An entanglement perspective on phase transitions, conventional and topological order[D]. Universität zu Köln, 2017.
- [17] AUDENAERT K, EISERT J, PLENIO M B, et al. Entanglement properties of the harmonic chain[J]. *Physical Review A*, 2002, 66(4):042327.
- [18] ITS A R, JIN B Q, KOREPIN V E. Entanglement in the xy spin chain[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2005, 38(13):2975.
- [19] HASTINGS M B. Lieb-schultz-mattis in higher dimensions[J]. *Physical review b*, 2004, 69(10):104431.
- [20] HASTINGS M B. Locality in quantum and markov dynamics on lattices and networks[J]. *Physical review letters*, 2004, 93(14):140402.
- [21] HASTINGS M B. An area law for one-dimensional quantum systems[J]. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2007, 2007(08):P08024.
- [22] BRANDÃO F G, HORODECKI M. An area law for entanglement from exponential decay of correlations[J]. *Nature Physics*, 2013, 9(11):721-726.
- [23] BRANDAO F G, HORODECKI M. Exponential decay of correlations implies area law[J]. *Communications in mathematical physics*, 2015, 333(2):761-798.
- [24] WOLF M M, VERSTRAETE F, HASTINGS M B, et al. Area laws in quantum systems: mutual information and correlations[J]. *Physical review letters*, 2008, 100(7):070502.
- [25] BIAMONTE J, BERGHOLM V. Tensor networks in a nutshell[J]. *arXiv preprint arXiv:1708.00006*, 2017.
- [26] PAECKEL S, KÖHLER T, SWOBODA A, et al. Time-evolution methods for matrix-product states[J]. *Annals of Physics*, 2019, 411:167998.
- [27] BRIDGEMAN J C, CHUBB C T. Hand-waving and interpretive dance: an introductory course on tensor networks[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, 50(22):223001.
- [28] VERSTRAETE F, WOLF M M, PEREZ-GARCIA D, et al. Criticality, the area law, and the computational power of projected entangled pair states[J]. *Physical review letters*, 2006, 96(22):220601.
- [29] EISERT J. Entanglement and tensor network states[J]. *arXiv preprint arXiv:1308.3318*, 2013.
- [30] NANDKISHORE R, HUSE D A. Many-body localization and thermalization in quantum statistical mechanics[J]. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2015, 6(1):15-38.
- [31] DEUTSCH J M. Quantum statistical mechanics in a closed system[J]. *Physical Review A*, 1991, 43(4):2046.
- [32] SREDNICKI M. Chaos and quantum thermalization[J]. *Physical Review E*, 1994, 50(2):888.
- [33] ZHANG Y. Information scrambling in quantum many-body systems[D]. California Institute of Technology, 2020.

- [34] SWINGLE B. Quantum information scrambling: Boulder lectures[EB/OL]. 2018. https://boulderschool.yale.edu/sites/default/files/files/qi_boulder.pdf.
- [35] ZHUANG Q, SCHUSTER T, YOSHIDA B, et al. Scrambling and complexity in phase space [J/OL]. Physical Review A, 2019, 99(6). <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.99.062334>. DOI: 10.1103/physreva.99.062334.
- [36] HOSUR P, QI X L, ROBERTS D A, et al. Chaos in quantum channels[J]. Journal of High Energy Physics, 2016, 2016(2):4.
- [37] TOUIL A, DEFFNER S. Quantum scrambling and the growth of mutual information[J]. arXiv preprint arXiv:2002.02867, 2020.
- [38] LARKIN A, OVCHINNIKOV Y N. Quasiclassical method in the theory of superconductivity [J]. Sov Phys JETP, 1969, 28(6):1200-1205.
- [39] SWINGLE B, BENTSEN G, SCHLEIER-SMITH M, et al. Measuring the scrambling of quantum information[J]. Physical Review A, 2016, 94(4):040302.
- [40] ALEINER I L, FAORO L, IOFFE L B. Microscopic model of quantum butterfly effect: out-of-time-order correlators and traveling combustion waves[J]. Annals of Physics, 2016, 375: 378-406.
- [41] FAN R, ZHANG P, SHEN H, et al. Out-of-time-order correlation for many-body localization [J]. Science bulletin, 2017, 62(10):707-711.
- [42] MALDACENA J, SHENKER S H, STANFORD D. A bound on chaos[J]. Journal of High Energy Physics, 2016, 2016(8):106.
- [43] SEKINO Y, SUSSKIND L. Fast scramblers[J]. Journal of High Energy Physics, 2008, 2008 (10):065.
- [44] 陈一鸣. Sachdev-Ye-Kitaev 模型的研究[D]. 北京: 清华大学, 2018.
- [45] LIEB E H, ROBINSON D W. The finite group velocity of quantum spin systems[M]//Statistical mechanics. Springer, 1972: 425-431.
- [46] NAHUM A, VIJAY S, HAAS J. Operator spreading in random unitary circuits[J]. Physical Review X, 2018, 8(2):021014.
- [47] VON KEYSERLINGK C, RAKOVSKY T, POLLMANN F, et al. Operator hydrodynamics, otocs, and entanglement growth in systems without conservation laws[J]. Physical Review X, 2018, 8(2):021013.
- [48] XU S, SWINGLE B. Accessing scrambling using matrix product operators[J]. Nature Physics, 2020, 16(2):199-204.
- [49] KHEMANI V, HUSE D A, NAHUM A. Velocity-dependent lyapunov exponents in many-body quantum, semiclassical, and classical chaos[J]. Physical Review B, 2018, 98(14):144304.
- [50] HUNTER-JONES N. Operator growth in random quantum circuits with symmetry[J]. arXiv preprint arXiv:1812.08219, 2018.

- [51] COTLER J, HUNTER-JONES N. Spectral decoupling in many-body quantum chaos[J]. arXiv preprint arXiv:1911.02026, 2019.
- [52] KUDLER-FLAM J, NOZAKI M, RYU S, et al. Quantum vs. classical information: operator negativity as a probe of scrambling[J]. Journal of High Energy Physics, 2020, 2020(1):31.
- [53] OLLIVIER Y. Fisher metric. a natural gradient ascent: Expectation maximization[EB/OL]. 2018. http://www.yann-ollivier.org/rech/pubs/mdltalks_notes/NotesMDL_Talk6.pdf.
- [54] BAO Y, CHOI S, ALTMAN E. Theory of the phase transition in random unitary circuits with measurements[J]. arXiv preprint arXiv:1908.04305, 2019.
- [55] SKINNER B, RUHMAN J, NAHUM A. Measurement-induced phase transitions in the dynamics of entanglement[J]. Physical Review X, 2019, 9(3):031009.
- [56] SZYNSZEWSKI M, ROMITO A, SCHOMERUS H. Entanglement transition from variable-strength weak measurements[J]. Physical Review B, 2019, 100(6):064204.
- [57] CHOI S, BAO Y, QI X L, et al. Quantum error correction in scrambling dynamics and measurement induced phase transition[J]. arXiv preprint arXiv:1903.05124, 2019.
- [58] GULLANS M J, HUSE D A. Scalable probes of measurement-induced criticality[J]. arXiv preprint arXiv:1910.00020, 2019.
- [59] LI Y, CHEN X, FISHER M P. Measurement-driven entanglement transition in hybrid quantum circuits[J]. Physical Review B, 2019, 100(13):134306.
- [60] CHAN A, DE LUCA A, CHALKER J. Solution of a minimal model for many-body quantum chaos[J]. Physical Review X, 2018, 8(4):041019.
- [61] CHAN A, NANDKISHORE R M, PRETKO M, et al. Unitary-projective entanglement dynamics[J]. Physical Review B, 2019, 99(22):224307.
- [62] SZYNSZEWSKI M, ROMITO A, SCHOMERUS H. Universality of entanglement transitions from stroboscopic to continuous measurements[J]. arXiv preprint arXiv:2005.01863, 2020.
- [63] TANG Q, ZHU W. Measurement-induced phase transition: A case study in the nonintegrable model by density-matrix renormalization group calculations[J]. Physical Review Research, 2020, 2(1):013022.
- [64] GOTO S, DANSHITA I. Measurement-induced transitions of the entanglement scaling law in ultracold gases with controllable dissipation[J]. arXiv preprint arXiv:2001.03400, 2020.
- [65] FUJI Y, ASHIDA Y. Measurement-induced quantum criticality under continuous monitoring [J]. arXiv preprint arXiv:2004.11957, 2020.
- [66] ROSSINI D, VICARI E. Measurement-induced dynamics of many-body systems at quantum criticality[J]. arXiv preprint arXiv:2001.11501, 2020.
- [67] VASSEUR R, POTTER A C, YOU Y Z, et al. Entanglement transitions from holographic random tensor networks[J]. Physical Review B, 2019, 100(13):134203.
- [68] LOPEZ-PIQUERES J, WARE B, VASSEUR R. Mean-field theory of entanglement transitions from random tree tensor networks[J]. arXiv preprint arXiv:2003.01138, 2020.

- [69] YOU Y Z, GU Y. Entanglement features of random hamiltonian dynamics[J]. Physical Review B, 2018, 98(1):014309.
- [70] KUO W T, AKHTAR A, AROVAS D P, et al. Markovian entanglement dynamics under locally scrambled quantum evolution[J]. arXiv preprint arXiv:1910.11351, 2019.
- [71] ZHOU T, NAHUM A. The entanglement membrane in chaotic many-body systems[J]. arXiv preprint arXiv:1912.12311, 2019.
- [72] JIAN C M, YOU Y Z, VASSEUR R, et al. Measurement-induced criticality in random quantum circuits[J]. Physical Review B, 2020, 101(10):104302.
- [73] ZABALO A, GULLANS M J, WILSON J H, et al. Critical properties of the measurement-induced transition in random quantum circuits[J/OL]. Physical Review B, 2020, 101(6). <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.101.060301>. DOI: 10.1103/physrevb.101.060301.
- [74] FAN R, VIJAY S, VISHWANATH A, et al. Self-organized error correction in random unitary circuits with measurement[J]. arXiv preprint arXiv:2002.12385, 2020.
- [75] PIROLI L, SÜNDERHAUF C, QI X L. A random unitary circuit model for black hole evaporation[J]. arXiv preprint arXiv:2002.09236, 2020.
- [76] HAYDEN P, PRESKILL J. Black holes as mirrors: quantum information in random subsystems [J]. Journal of high energy physics, 2007, 2007(09):120.
- [77] BANICA T, COLLINS B. Integration over quantum permutation groups[J]. Journal of Functional Analysis, 2007, 242(2):641-657.
- [78] DAI X. Random unitary time evolution plus projective measurement in the one-dimensional quantum circuit model[J/OL]. GitHub repository, 2019. <https://github.com/empyriumz/Entanglement-Dynamics>.
- [79] PAGE D N. Average entropy of a subsystem[J]. Physical review letters, 1993, 71(9):1291.
- [80] MELKO R. Renyi entropies in theory, numerics, and experiment, maglab winter school the national high magnetic field laboratory[EB/OL]. 2018. https://nationalmaglab.org/images/news_events/searchable_docs/winterschool/2018/Theory_2018_melko_renyi.pdf.
- [81] TUBMAN N M, YANG D C. Calculating the entanglement spectrum in quantum monte carlo with application to ab initio hamiltonians[J]. Physical Review B, 2014, 90(8):081116.
- [82] WEINGARTEN D. Asymptotic behavior of group integrals in the limit of infinite rank[J]. Journal of Mathematical Physics, 1978, 19(5):999-1001.
- [83] COLLINS B, ŚNIADY P. Integration with respect to the haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group[J]. Communications in Mathematical Physics, 2006, 264(3):773-795.
- [84] MATSUMOTO S. Weingarten calculus for matrix ensembles associated with compact symmetric spaces[J]. arXiv preprint arXiv:1301.5401, 2013.
- [85] COLLINS B, NECHITA I. Random quantum channels i: Graphical calculus and the bell state phenomenon[J]. Communications in Mathematical Physics, 2010, 297(2):345-370.

- [86] NECHITA I. Weingarten calculus and applications to quantum information theory, annual meeting of the sfb trr 195 tübingen[EB/OL]. 2018. <http://ion.nechita.net/wp-content/uploads/2018/09/Nechita-Tuebingen-Sep-2018.pdf>.
- [87] 薛瑞尼. ThuThesis: 清华大学学位论文模板[EB/OL]. 2017[2019-04-27]. <https://github.com/xueruini/thuthesis>.

致 谢

首先感谢清华、物理系、学堂班的支持，感谢阮东老师和俞延同学对我的鼓励，还有老师们、助教们和同学们对我的照顾，特别感谢李岩松老师、罗曼、彭哲煜、李一达、刘书玮、杨柳、王霄、章钊、张子淳等同学解答了我很多问题，陈昌婷老师、张卫华老师和蔡正阳辅导员的帮助。

感谢我的暑研和毕设导师，UC San Diego 的尤亦庄老师，尤老师对学术的热爱和扎实的数学功底让我非常敬佩。感谢高等研究院的翁征宇老师给我的诸多帮助。清华物理系、普林斯顿大学的陈一鸣同学不厌其烦地回答了场论、热化、OTOC 的问题。感谢刘定峰、罗曼和李一达与我的讨论了很多解析计算或数值模拟代码实现中的问题。感谢哈佛大学的范瑞华学长回答了我很多问题，向我分享了他的笔记，对我的英文综述提出了宝贵意见。感谢 Dr. Marcin Szyniszewski(Lancaster University), Dr. Nicholas Hunter-Jones(Perimeter Institute), Dr.Xin Dai(清华毕业生、Ohio State University), Aidan Zabalo(Rutgers University), Dr. Tianci Zhou(KITP) 回复了我的邮件。感谢组里的扈鸿业学长和鹿大川同学，在 2019 年的暑假给我了不少的帮助。

感谢我的先生刘定峰，谢谢你包容我的一切，我们会一起开创更远的未来。感谢我的挚友们，感谢吴心怡、谢倩、罗曼和王昊翔，你们是我的精神后盾。感谢我的家人一直以来的支持，在我数次学业不顺的时候也没有放弃我。感谢 ThuThesis^[87]。

「また夜が明ければお別れ、夢は遠きまぼろしに、あなたを追いかけていた光の中で、抱かれるたび温かい風をたより～」

声 明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名： 张锦茹 日 期： 2020.6.13

附录 A 外文资料的调研阅读报告

Literature Review on Entanglement Entropy Dynamics Entanglement Transitions in Random Unitary Circuits

The *Entanglement Entropy* is a measure of how much a given pure state is quantum mechanically entangled^[15]. Though measuring the Entanglement Entropy is a sprout in today's experiments, numerical experiments could be utilized to calculate the Entanglement Entropy. Recent research works on Entanglement Entropy dynamics have been elucidating its features of classifying phases, modeling thermalization and non-equilibrium process, and also overlapping between Conformal Field Theory(CFT), tensor network holography and condensed matter systems from many-body perspectives.

In quantum information theory, local measurement would destroy the entanglement and collapse the wave function. The measured qubits/qudits were projected on a certain basis and disentangled from the rest^{[1][4]} may reduce the Entanglement Entropy^[2]. As highly-entangled quantum states provide remarkable computing capacities, discovering its entanglement features allows us to evaluate the unitary dynamics and nonunitary evolution which was restricted by local measurements of system degrees of freedom^[1]. *Random Unitary Circuit(RUC)*, as shown in figure 1.2 in the main text, is a common and generic model with "brick-layer" structure. It consists an 1D array of N qudits undertaking random unitary circuit evolution with independent Haar random $q^2 \times q^2$ gates act on neighbor qudits^[1]. Even time steps can be directed to the tensor product of 2-site unitaries $U_{i,i+1}$ for even i , and odd time steps for odd i ^[7].

Induced by measurement applied to each qudit after each layer of unitary gates with discrete time steps, the weak measurement with strength p ^{[1][19]}, or strong measurement choice^[5] rate p on qubits in RUC raised a phase transition: the *Entanglement Transition*, displaying a distinction between area law (at high measurement rate) and volume law (at low measurement rate)^{[1][17]}. The volume law demonstrates that the entanglement entropy grows proportionally with the volume of the partitions^[14]; while the area

law shows that if a ground state distinguishes a region, the scaling of the entropy is merely linear in the boundary area of the region^[3]. Moreover, the volume law implies a condition that each piece of local degree of freedom is highly entangled with the rest of the system^[17], which means it satisfies the Eigenstate Thermalization Hypothesis. Previous works have numerically located the transition in measurement rate p ranged from 0.15 to 0.19^{[5][10][18]}.

Statistical Mechanics Models. Prior to mapping the evolution of entanglement entropy dynamics to a statistical mechanics model, we apply the replica method^[6] analytically or diagrammatically towards 2nd Rényi Entropy of a subsystem A ($S^{(n)}(A) = \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}_A \rho_A^n$, $n = 2$). The replica method demonstrates that $\text{Tr} \rho_A^n$ could be interpreted as a path integral over n -sheet Riemann surface^{[15][6]}. In diagrammatic approaches, we duplicate the system and make contractions between outlying legs of copies^{[1][19]}.

One method which we will specifically focus on is to map an entanglement dynamical process to an Ising model, namely, the *Entanglement Feature*(EF) operator dynamics. By enumerating all subsets within a system^[4] via classical Ising Variables set, $\sigma = [\sigma_1 \dots \sigma_n]$, we can label all bipartition subsystems in a total size of 2^n . More specifically, If the i th qudit was in the subsystem A , its Ising Variable σ_i is marked as \uparrow . Otherwise, $\sigma_i = \downarrow$. The EF of is defined as $W_\phi[\sigma] \equiv e^{-S^{(2)}[\sigma]} = \text{Tr}(\mathcal{X}_\sigma(|\Phi\rangle\langle\Phi|)^{\otimes 2})$, where $|\Phi\rangle$ is a pure state^[9]. Given transfer matrix of each step in the unitary evolution in total of t steps, the final entanglement future state can be given as $|W_\phi\rangle = \hat{T}_{step}^t |W_{\phi_0}\rangle$. An alternative statistical mechanics treatment is to rearrange tensor contractions and map the purity(the second moment) to a partition function of classical spin models^{[1][19]}. The adjusted tensor network can be reduced to a honeycomb-lattice-based network, with each sites hosting a classical Ising variable. It was shown that this approach is equivalent to the entanglement feature formalism^[9].

Local Information Scrambling. The entanglement transition indicates a shift of the amount of information that can be extracted by the measurement^[1], which enables us to study local information scrambling^[13]. The concept of *information scrambling* was

originated in the study of the quantum information features of black holes, referring to the de-localization over degrees of freedom^[20]. In the Entanglement Feature formalism, the locally scrambled quantum dynamics in RUC demonstrates a unitary evolution splitted by simpler unitaries at each time. For each time step, the unitary is drawn from a ensemble which is invariant under local basis transformations^[9]. Equivalently, it means that no local measurement could fully reconstruct the original quantum state^[16]. There are two characteristic features that can be used to determine how much the information was scrambled. The first one is *Out-of-time Correlator(OTOC)*, which satisfies a biased diffusion equations in the $1 + 1D$ RUC picture^[12]. Moreover, the entanglement grows linearly in time with $\propto t^{1/3}$ fluctuations, corresponding to the Kardar-Parisi-Zhang equation from OTOC calculations in the RUC picture^[11]. Another way to characterize locally-encoded quantum information is the *Tripartite Mutual Information(TMI)*. The negativity of TMI implies the delocalization of information^[8].

Retrieval. By analyzing the “mapped” classical Ising Model, for example, via mean-field theory, we could obtain the essential physical quantities such as order parameter, correlation function, and criticality, which actually indicates properties of the entanglement transition. The mutual information of the entangled *ancilla qubits* that were introduced in measurement^[4] or independently^[18] in the unitary evolution process actually reveals the correlation length of the Ising model^[4].

Other than Haar-random. In systems other than RUC, previous studies have evaluated criticality of Stabilizer Circuits and Perlocations of entanglement transitions^[5]. Moreover, numerical calculations comparing the mutual information of added ancilla qubits in three different classes (Perlocations, Stabilizer Circuits and RUC) indicates that, despite the varied results of entanglement entropies at critical points and surface order-parameter exponents, the correlation length and bulk order-parameter exponents are close.^[18]

Acknowledgement. We thank Ruihua Fan (Harvard University) for correcting several small scientific mistakes/expressions in this survey.

参考文献

- [1] Yimu Bao, Soonwon Choi, and Ehud Altman. Theory of the phase transition in random unitary circuits with measurements. *arXiv preprint arXiv:1908.04305*, 2019.
- [2] Soonwon Choi, Yimu Bao, Xiao-Liang Qi, and Ehud Altman. Quantum error correction in scrambling dynamics and measurement induced phase transition. *arXiv preprint arXiv:1903.05124*, 2019.
- [3] Jens Eisert, Marcus Cramer, and Martin B Plenio. Area laws for the entanglement entropy-a review. *arXiv preprint arXiv:0808.3773*, 2008.
- [4] Ruihua Fan, Sagar Vijay, Ashvin Vishwanath, and Yi-Zhuang You. Self-organized error correction in random unitary circuits with measurement. *arXiv preprint arXiv:2002.12385*, 2020.
- [5] Michael J Gullans and David A Huse. Scalable probes of measurement-induced criticality. *arXiv preprint arXiv:1910.00020*, 2019.
- [6] Matthew Headrick. Lectures on entanglement entropy in field theory and holography. *arXiv preprint arXiv:1907.08126*, 2019.
- [7] Nicholas Hunter-Jones. Unitary designs from statistical mechanics in random quantum circuits. *arXiv preprint arXiv:1905.12053*, 2019.
- [8] Eiki Iyoda and Takahiro Sagawa. Scrambling of quantum information in quantum many-body systems. *Physical Review A*, 97(4), Apr 2018. ISSN 2469-9934. doi: 10.1103/physreva.97.042330. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.97.042330>.
- [9] Wei-Ting Kuo, AA Akhtar, Daniel P Arovas, and Yi-Zhuang You. Markovian entanglement dynamics under locally scrambled quantum evolution. *arXiv preprint arXiv:1910.11351*, 2019.
- [10] Yaodong Li, Xiao Chen, and Matthew P. A. Fisher. Quantum zeno effect and the many-body entanglement transition. *Physical Review B*, 98(20), Nov 2018. ISSN 2469-9969. doi: 10.1103/physrevb.98.205136. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.98.205136>.
- [11] Adam Nahum, Jonathan Ruhman, Sagar Vijay, and Jeongwan Haah. Quantum entanglement growth under random unitary dynamics. *Physical Review X*, 7(3):031016, 2017.
- [12] Adam Nahum, Sagar Vijay, and Jeongwan Haah. Operator spreading in random unitary circuits. *Physical Review X*, 8(2):021014, 2018.
- [13] Laimei Nie, Masahiro Nozaki, Shinsei Ryu, and Mao Tian Tan. Signature of quantum chaos in operator entanglement in 2d CFTs. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2019(9):093107, sep 2019. doi: 10.1088/1742-5468/ab3a29. URL <https://doi.org/10.1088%2F1742-5468%2Fab3a29>.
- [14] Frank Pollmann. Efficient numerical simulations using matrix-product states. 2015.
- [15] Tadashi Takayanagi. Entanglement entropy and ads/cft, lectures at cern winter school on supergravity, strings, and gauge theory 2012, 2012. URL <http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~tadashi.takayanagi/CERNEE.pdf>.

- [16] Akram Touil and Sebastian Deffner. Quantum scrambling and the growth of mutual information. *arXiv preprint arXiv:2002.02867*, 2020.
- [17] Romain Vasseur, Andrew C Potter, Yi-Zhuang You, and Andreas WW Ludwig. Entanglement transitions from holographic random tensor networks. *Physical Review B*, 100(13):134203, 2019.
- [18] Aidan Zabalo, Michael J. Gullans, Justin H. Wilson, Sarang Gopalakrishnan, David A. Huse, and J. H. Pixley. Critical properties of the measurement-induced transition in random quantum circuits. *Physical Review B*, 101(6), Feb 2020. ISSN 2469-9969. doi: 10.1103/physrevb.101.060301. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.101.060301>.
- [19] Tianci Zhou and Adam Nahum. Emergent statistical mechanics of entanglement in random unitary circuits. *Physical Review B*, 99(17), May 2019. ISSN 2469-9969. doi: 10.1103/physrevb.99.174205. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.99.174205>.
- [20] Quntao Zhuang, Thomas Schuster, Beni Yoshida, and Norman Y. Yao. Scrambling and complexity in phase space. *Physical Review A*, 99(6), Jun 2019. ISSN 2469-9934. doi: 10.1103/physreva.99.062334. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.99.062334>.