

1-tajriba ishi. Mavzu: Kombinatorika elementlari. Extimolning klassik ta'rifidan, geometrik extimollikdan foydalanib hodisalarning ro'y berish extimolini topish.

O'rin almashtirishlar. n ta elementli o'rin almashtirishlar deb bir-biridan faqat elementlarining tartibi bilan farq qiladigan n ta elementli birikmalarga aytiladi.

n ta elementli o'rin almashtirishlar soni P_n harfi bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

O'rinlashtirishlar. n ta elementdan m tadan o'rinlashtirishlar deb, har birida berilgan n ta elementdan m tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo'lmaganda bitta elementi bilan yoki faqat ularning joylashish tartibi bilan farq qiladi.

n ta elementdan m tadan turli o'rinlashtirishlar soni A_n^m bilan belgilanadi va quyidagi formula bilan hisoblanadi:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1), \quad (0 \leq m \leq n).$$

Guruhlashlar. n ta element orasidan m ta elementdan tuzilgan guruhlashlar (mosliklar) deb har birida berilgan n ta elementdan m tasi olingan shunday birikmalarga aytiladiki, ularning har biri hech bo'lmaganda bitta elementi bilan farq qiladi.

n ta element orasidan m ta elementdan turli mosliklar soni C_n^m bilan belgilanadi va quyidagicha aniqlanadi:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (0 \leq m \leq n).$$

Xossalari:

$$1. C_n^0 = C_0^0 = 1 \quad 2. C_n^1 = n$$

$$3. C_n^m = C_n^{n-m} \quad 4. C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$5. C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} - \text{rekurrent formula, bu yerda } 0 \leq m \leq n.$$

Extimollar nazariyasi «tasodifiy tajribalar», ya'ni natijasini oldindan aytib bo'lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlarni o'rganuvchi matematik fandir. Biz kuzatadigan hodisalarni quyidagi uch turga ajratish mumkin: muqarrar, mumkin bo'lmagan va tasodifiy hodisalar.

Muqarrar hodisa deb tayin shartlar to'plami S bajarilganda albatta ro'y beradigan hodisaga aytiladi. Masalan, agar idishdagi suv normal atmosfera bosimi ostida va temperaturasi 20^0 bo'lsa, u xolda «idishdagi suv suyuq xolatda» hodisasi muqarrar hodisadir.

Mumkin bo'lmagan hodisa deb shartlar to'plami S bajarilganda mutlak ro'y bermaydigan hodisaga aytiladi. Masalan, yuqoridagi misol shartlari bajarilganda «idishdagi suv qattiq xolatda» hodisasi umuman ro'y bermaydi.

Tasodifiy hodisa deb shartlar to'plami S bajarilganda ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisaga aytiladi. Masalan, tanga tashlanganda, u yo gerbli tomoni, yo yozuvli tomoni bilan tushishi mumkin. Shu sababli, «tanga tashlanganda gerbli tomon bilan tushdi» hodisasi tasodifiydir.

Shunday qilib, extimollar nazariyasining predmeti ommaviy bir jinsli tasodifiy hodisalarning extimoliy qonuniyatlarini o'rganishdir.

Yuqorida biz tasodifiy hodisa deb tayin shartlar to'plami bajarilganda yo ro'y berishi, yoqi ro'y bermasligi mumkin bo'lgan hodisani atadik. Bundan keyin «shartlar to'plami bajarildi» deyish o'rniga, biz qisqacha qilib, «sinash o'tkazildi» deymiz. Shunday qilib, biz hodisani sinash natijasi sifatida qaraymiz.

Tasodifiy hodisalar quyidagi turlarga bo'linadi.

Birgalikda bo'lmagan hodisalar deb bitta sinashda birining ro'y berishi qolganlarining ro'y berishini yo'qqa chiqaradigan hodisalarga aytiladi.

Agar sinash natijasida bir nechta hodisalardan bittasi va faqat bittasining ro'y berishi muqarrar hodisa bo'lsa, u xolda bu *hodisalar yagona mumkin bo'lgan hodisalar* deyiladi.

Agar bir nechta hodisalardan xech birini boshqalariga nisbatan ro'y berishi mumkinroq deyishga asos bo'lmasa, ular *teng imkoniyatli hodisalar* deyiladi.

Extimol tushunchasi extimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biridir. Bu tushunchaning bir nechta ta'rifi mavjud. Bu yerda extimolning *klassik ta'rif* deb ataluvchi ta'rifini keltiramiz.

A hodisaning extimoli deb sinashning bu hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalari sonining sinashning yagona mumkin bo'lgan va teng imkoniyatli elementar natijalar jami soniga nisbatiga aytiladi.

Shunday qilib, A hodisaning extimoli quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

bu yerda m – A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni; n – sinashning mumkin bo'lgan barcha elementar natijalari soni. Bu yerda elementar natijalar yagona mumkin bo'lgan va teng imkoniyatli deb faraz qilinadi. Umumiy qilib aytganda, extimol - tasodifiy hodisaning ro'y berish imkoniyatini miqdoriy jixatdan xarakterlovchi kattalikdir.

Extimolning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1-xossa. Muqarrar hodisaning extimoli birga teng.

Haqiqatan ham, agar hodisa muqarrar bo'lsa, u xolda sinashning har bir elementar natijasi shu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradi.

Bu holda $m = n$ va demak,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

2-xossa. Mumkin bo'lmagan hodisaning extimoli nolga teng.

Haqiqatan ham, agar hodisa ro'y bermaydigan bo'lsa, u holda tajribaning xech bir elementar natijasi bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'dirmaydi. Bu holda $m = 0$ va demak,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

3-xossa. Tasodifiy hodisaning extimoli musbat son bo'lib, u nol va bir orasida bo'ladi.

Haqiqatan ham, tasodifiy hodisaning ro'y berishiga sinashning barcha elementar natijalarining bir qismigina qulaylik tug'diradi. Bu holda

$0 < m < n$, shuning uchun $0 < \frac{m}{n} < 1$, va demak, $0 < P(A) < 1$

Shunday qilib, istalgan hodisaning ehtimoli quyidagi tengsizliklarni qanoatlantiradi:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar:

1. Quyidagi ifodalarning qiymati topilsin:

1) $\frac{14!}{12!}$; 2) $\frac{16!}{18!}$; 3) $\frac{9!}{5! \cdot 4!}$; 4) $8! + 9!$.

2. Quyidagilarni isbotlang:

1) $\frac{(m+3)!}{m!} = (m+1)(m+2)(m+3)$;

2) $\frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1) \cdots (n-m+2)(n-m+1)$, bunda $n > m$.

3. Amallarni bajaring:

1) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; 2) $\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$.

4. To'qqizta har xil qiymatli raqam bilan nechta to'qqiz xonali son yozish mumkin?

Javob: 362880.

5. 12 kishilik ovqat hozirlangan stolga 12 kishini necha turli o'tqazish mumkin?

Javob: 479001600.

6. Musobaqada 6 ta talaba qatnashmoqda. O'rinlarni ular o'rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

7. Talaba 6 ta kitobdan 4 tasini necha usul bilan ajratishi mumkin?

8. Ma'lum bo'limda ishlash uchun 20 nafar ishchidan 6 nafar ishchini ajratish kerak. Buni necha usul bilan amalga oshirish mumkin?

9. Tenglik to'g'riligini isbotlang:

1) $C_7^4 + C_7^3 = C_8^4$; 2) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$.

10. Ifodani soddalashtiring:

$$\frac{3}{2(2n-1)} C_n^{2n-3}.$$

11. Musobaqada 12 ta jamoa ishtirok etadi. Uchta turli medalni necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

Javob: $A_{12}^3 = 1320$.

12. Gruppada 30 ta o'quvchi bor. Ularning ichidan 3 kishini kompyuterda ishlash uchun ajratish kerak. Buni necha usul bilan bajarish mumkin?

Javob: $C_{30}^3 = 4060$.

13. Turli rangdagi 5 to'p mato bor. Bu matolardan har bir mato faqat bitta polosani egallaydigan qilib nechta turli besh rangli bayroqlar tayyorlash mumkin?

Javob: $P_5 = 5! = 120$.

14. Tenglamani yeching:

1) $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 72$; 2) $A_x^4 = A_{x-2}^2$.

Javob: 1) 7; 2) \emptyset .

Mustaqil yechish uchun misollar

1- topshiriq

1.1. Sexda 7 erkak va 6 ayol ishlaydi. Tavakkaliga 8 kishi ajratilganda, ular orasida uch ayol bo'lishi ehtimolligini toping.

1.2. Qutida nomerlangan oltita kub bor. Tavakkaliga bittadan hamma kublar olinganda hosil bo'lgan sonning beshga bo'linishi ehtimolligini toping.

1.3. 52 ta kartadan iborat to'lik dastadan tavakkaliga 4 ta karta olinganda rosa 2 tasi g'ishtin bo'lishi ehtimolligini toping.

1.4. 20 ta komanda ikkita guruhga bo'linadi. Ikkita eng kuchli komanda boshqa – boshqa guruhlariga tushishi ehtimolligini toping.

1.5. Uzunliklari 1, 3, 5, 7 va 9 sm bo'lgan beshta kesma mavjud. Tavakkaliga olingan uchta kesmadan uchburchak tuzish mumkinligi ehtimolligini toping.

1.6. 52 talik kartalar dastasidan tavakkaliga 3 ta karta olinadi. Bular «uch», «ettilik», «tuz» bo'lishi ehtimolligini toping.

1.7. Qutida 12 shar bulib ularning 5 tasi oq va 7 tasi qora. Tavakkaliga 3 ta shar olinadi. Olingan sharlarning 2 tasi qora va 1 tasi oq bo'lishi ehtimolligi qanday?

1.8. Yashikda 90 ta sifatli va 10 ta yaroqsiz buyum bor. Tavakkaliga olingan 5 ta buyumning 2 tadan ko'p bo'lmagani yaroqsiz ekanligi ehtimolligini toping.

1.9. Tavakkaliga olingan ikki xonali sonning raqamlari yig'indisi 9 ga teng bo'lishi ehtimolligini toping.

1.10. 8 ta bir xil kartochkaga 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 sonlar yozilgan. Tavakkaliga ikkita kartochka olinadi. Olingan ikkita kartochka-dagi sonlardan tuzilgan kasr qisqaruvchi bo'lishi ehtimolligini toping.

1.11. O'yin soqqasi tashlanadi. Tub son tushishi ehtimoli qanday?

1.12. Tavakkaliga tanlangan ikki xonali butun sonni kvadratga oshirganda to'rt bilan tugovchi son hosil bo'lishi ehtimolligini aniqlang.

1. 13. Bitta tokchadagi 10 ta kitob tavakkaliga kuzdan kechirilyapti. Uchta ma'lum kitobning yonma-yon turganligi ehtimolligini toping.
1. 14. O'nta bir xil kartochkaga noldan to'kkizgacha turli sonlar yozilgan. Bu kartochkalar yordamida tavakkaliga tuzilgan uch xonali sonning 36 ga bo'linishi ehtimolligini toping.
1. 15. «36 dan 5» sportloto o'yinida mukofot olish ehtimolligi qanday? (Mukofot olishi uchun kamida 3 ta raqam to'g'ri topilishi kerak.)
1. 16. To'qqiz yulovchi tramvayning 3 ta vagoniga chiqib joylashdilar. Har bir yulovchi vagonni tavakkaliga tanlaydi. Bir vagonga to'rt yulovchi, boshqasiga uch, uchinchi vagonga esa ikki yulovchi chiqqanligi ehtimolligi qanday?
1. 17. Qurilma 3 tasi eskirib kolgan 5 ta elementdan iborat. Qurilmani tasodifan ishga tushirilganda 2 ta element ishlaydi. Qurilmaning ishga tushmay qolishi ehtimolligini toping.
1. 18. Ko'chada uchragan birinchi avtomoshinaning nomeri bir xil raqamlardan iborat bo'lishi ehtimolligini aniklang.
1. 19. «45 dan 6» sportloto o'yinida yutib olish ehtimolligi qanday? (Mukofot olish uchun kamida 4 ta raqam to'g'ri topilishi kerak.)
1. 20. Tavakkaliga tanlangan ikki xonali sonning tub son bo'lishi ehtimolligini toping.
1. 21. Bolalar uchun sanatoriyga 12 ta, sayyoxlar lageriga 8 ta va sport lageriga 5 ta yullanma ajratildi. Agar 3 urtoqning ota-onalari bir-biridan bexabar bittadan yullanma olgan bo'lsa, bu 3 o'rtoqning bitta lagerga tushib qolishi ehtimolligi qanday?
1. 22. O'quvchining birinchi imtixonni topshirishi ehtimolligi 0,9 ga, ikkinchisini topshirish ehtimolligi 0,8 ga, uchinchisini topshirish ehtimolligi 0,7 ga teng. O'quvchining: 1) barcha imtixonlarni; 2) aqalli bitta imtixonni topshirish ehtimolligi qanday?
1. 23. 3 ta stanok ishlamoqda. Bu stanoklarning bir soat davomida sozlashni talab qilmaslik ehtimolliklari mos ravishda 0,95; 0,8; 0,8 ga teng. Bir soat ichida hech bo'lmaganda bitta stanoqning sozlashni talab etmaslik ehtimolligini toping.
1. 24. Avtomat stanoq detallarni shtamplaydi. Bir soat ichida birorta ham yaroqli detal ishlab chiqarmaslik ehtimolligi 0,9 ga teng. 3 soat ichida chiqarilgan barcha detallarning yaroqli bo'lishi ehtimolligini toping.

1. 25. Tavakkaliga olingan telefon nomeri 6 ta raqamdan tuzilgan. Barcha raqamlarning turlicha bo'lishi ehtimolligi qanday?
1. 26. Qutida 5 ta oq, 10 ta qizil va 6 ta qora shar bor. Tavakkaliga 2 ta shar olinadi. Olingan sharlarning biri oq, ikkinchisi qora bo'lish ehtimolligini toping.
1. 27. Oltita bir xil kartochkada 2,4,7,8,12,14 sonlari yozilgan. Ikkita kartochka olinadi. Hosil qilingan kasr qisqaradigan bo'lish ehtimolini toping.
1. 28. Mergan o'nga qarab harakat qilayotgan nishonga qarata o'q uzadi. Birinchi o'q uzishda nishonga tegish ehtimolligi 0,4 ga teng va u har bir keyingi o'q uzishda 0,1 ga ortadi. 3 ta o'q uzishda ikki marta nishonga tekkazish ehtimolligi qanday.
1. 29. Bir xil kartochkalarga 1 dan 25 gacha bo'lgan notural sonlar yozilgan. Tavakkaliga ikki marta bittidan (qaytarib solmay) kartochkalar olinadi. Har ikkala kartochkada tub sonlar yozilgan bo'lishi ehtimolini toping.
1. 30. To'la damino toshlaridan (28 ta) tavakkaliga bittasi olinadi. Undagi ochkolar yigindisi 10 dan kichik, 3 dan katta bo'lish ehtimolini toping.

2-topshiriq

- 2.1 Qutida 6 ta oq, 4 ta qora, 3 ta qizil shar bor. Tavakkaliga olingan 3 ta sharning hammasi turli rangda bo'lishi ehtimolligini toping.
- 2.2. 7ta o'rindiqlarda bir qatorga 4 qiz va 3 o'g'il utirishadi. Uch o'g'ilning yonma-yon o'tirishi ehtimolligini toping.
- 2.3. Kitob tokchasida algebradan 4 ta, geometriyadan 3 ta kitob tavakkaliga terib chiqilgan. har qaysi fanga doir kitoblar yonma-yon turishi ehtimolligini toping.
- 2.4. Tangani 10 marta tashlanganida 5 marta gerbli tomon va 5 marta raqamli tomon tushgan. Gerbli tomonlarning hammasi dastlabki 5 marta tashlanganda tushganligi ehtimolligini toping.
- 2.5. Yashikda 15 ta detal bo'lib, ularning 5 tasi bo'yalgan. Tavakkaliga olingan 5 ta detalning 4 tasi bo'yalgan, bittasi bo'yalmagan bo'lib chiqishi ehtimolligini toping.
- 2.6. Sportloto o'yinidagi bosh yutuqni (45 tadan 6 ta nomerni topish) yutib olish ehtimolligini toping. 5 ta nomerni topish ehtimolligini aniklang.
- 2.7. 52 talik o'yin kartasini 2 tadan tarkatilganda «tuz» va «Kirol» chiqishi ehtimolligini toping.
- 2.8. Teatrga 6 ta chipta olingan bo'lib, ulardan 4 tasi 1-qatordagi joylardan iboratdir. Tavakkaliga olingan 3 ta chiptaning 2 tasi birinchi qatordagi joylarda bo'lishi ehtimol ligini toping.
- 2.9. Futbol bo'yicha musobaqalarda 20 ta jamoa qatnashadi.

Tasodifiy ravishda bu jamoalar 10 tadan qilib ikkita Guruhga bo'ling. Bunda 2 ta eng kuchli jamoa bitta Guruhga tushib qolishi ehtimolligini toping.

2.10. Qutichada 7 ta oq va 5 ta qora shar bor.

a) tavakkaliga olingan shar qora bo'lishi;

b) tavakkaliga olingan 2 ta shar qora bo'lish ehtimolligini toping.

2.11 Talaba ukuv dasturidagi 40 savoldan 30 tasini biladi. Har bir imtixon билетida 2 tadan savol bo'lsa, talabaning har ikkala savolni bilishi ehtimolligini toping.

2.12 Qura tashlash Qatnashchilari yashikdan 1 dan 100 gacha nomerlangan jetonlarni tortadilar. Tavakkaliga birinchi bo'lib, olingan jeton nomerida 5 raqami ishtiroq etmasligi ehtimolligini toping.

2.13 Oltita bir xil kartochkalarining har biriga quyidagi Harflardan biri yozilgan: a, b, s, m, r, o. Kartochkalar yaxshilab aralashtirilgach, galma-galdan bittalab olingan va qator kilib, terib chiqilgan to'rtta kartochkada «romb» so'zining hosil bo'lishi ehtimolligini toping.

2.14 Barcha yoqlari bo'yalgan kub mingta bir xil o'lchamli kubchalarga bo'linadi va ular yaxshilab aralashtiriladi. Tavakkaliga olingan kubchaning: a) bitta, b) ikkita yog'i bo'yalgan bo'lishi ehtimolligini toping.

2.15 Sakkizta har xil kitob bitta tokchaga tavakkaliga terib qo'yilganda, ikkita ma'lum kitob yonma-yon turib qolishi ehtimolligini toping.

2.16 10 ta har xil kitobning 5 tasi har biri 4 so'mdan, uchasi 1 so'mdan, 2 tasi 3 so'mdan sotilyapti. Tavakkaliga olingan ikkita kitob birgalikda 5 so'm bo'lishi ehtimolligini toping.

2.17 Guruhning 8 nafari qizlar bo'lgan 17 talabasi orasida 7 ta билет o'ynalyapti. Biletga «ega chiqqanlar» ichida 4 ta talabaning qizlar bo'lishi ehtimolligini toping.

2.18 Besh kavatli uyning lifti uch yo'lovchi bilan ko'tarila boshladi. Har qaysi kavatdan bittadan ortiq bo'lmagan yo'lovchi tushib qolishi ehtimolligini toping. (Bunda yo'lovchilarni kavatlar bo'yicha taqsimlashning mumkin bo'lgan barcha usullarini teng ehtimolli deb hisoblang.)

2.19 Natural qatorning 1,2,3,...,100 sonlari tavakkaliga joylashtirilgan 1 va 2 sonlari yonma-yon, shu bilan birga, o'sib borish tartibida joylashganligi ehtimolligini toping.

2.20 O'nta talaba tayin elektropoezdga ketishga shartlashib oldilar, lekin qaysi vagonda ketishga kelishib olmadilar. Agar elektropoezdga 10 ta vagon bo'lsa ikkita talabaning bitta vagonga

tushib qolmaslik ehtimolligini toping. (Bunda talabalarnin vagonlar buyicha joylashishlarining barcha imkoniyatlari teng imkoniyatli deb faraz qilinadi.).

2.21 Tavakkaliga olingan uchta raqamning: a) hammasi bir xil; b) ikkitasi bir xil bo'lishi ehtimoligini toping.

2.22 10 erkak va 10 ayoldan iborat Guruh tasodifiy ravishda 2 ta teng qismga bo'linadi. Har qaysi qismda erkaklar va ayollar soni bir xil bo'lishi ehtimolligini toping.

2.23 Yiguvchida bir-biridan kam farq qiladigan 10 ta detal bor. Ularning to'rttasi birinchi turdagi, ikkitasi ikkinchi, ikkitasi uchinchi va ikkitasi to'rt inchi turdagi detallardir. Bir paytda olingan oltita detalning uchtasi — birinchi turdagi, ikkitasi ikkinchi, bittasi—uchinchi turdagi detal bo'lish ehtimolligini toping.

2.24 Tavakkaliga olinadigan ikki xonali sonning

a) tub son;

b) 5 ga karrali son bo'lishi ehtimolligini toping.

2.25 Har xil raqamlar bilan nomerlangan 9 ta jetonning 3 tasi olinadi. Ularning o'sib borish tartibida chiqishi ehtimolligini toping. Uchala jetonning nomerlari juft bo'lishi ehtimolligini toping.

2.26. Tavakkaliga tanlangan telefon nomeri 5 ta raqamdan iborat. Ularda:

a) barcha raqamlar har xil bo'lishi;

b) barcha raqamlar toq bo'lishi ehtimol ligini toping.

2.27 Tavakkaliga olingan natural son 2 ga ham, 3 ga ham bo'linmasligi ehtimolligini toping.

2.28 2,3,4,5,6 sonlari yozilgan beshta kartochkadan tasodifiy ravishda uch xonali son tuziladi. Bu son toq bo'lishi ehtimolligini toping.

2.29 Berilgan 1, 2, 3, 4, 5 raqamdan foydalanib turli raqamli to'rt xonali son tuziladi. Tuzilgan son raqamlarining o'sish tartibida bo'lishi ehtimolligini toping.

2.30. Yashikda 40 ta yaroqli va 6 ta yaroqsiz saqlagichlar bor. Yashikdan 3 ta saqlagich olingan:

a) barcha saqlagichlar yaroqli bo'lishi;

b) aqalli bittasi yaroqsiz bo'lishi ehtimolligini toping.

*****Izoh:** Har bir talaba jurnalidagi nomeri bo'yicha topshiriqni yechishi kerak.