IFT2125 - Séance de travaux pratiques 7 - # 5

22 Mars 2016

Université de Montréal

antakivi@iro.umontreal.ca

Problème : Démontrez que *quicksort* prend, en moyenne, un temps $\mathcal{O}(n \log n)$ pour ordonner n éléments.
Notons d'abord que nous avons déjà montré en classe qu'il existe d, n_0 tels que

$$t(n) \leq dn + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t(k) \quad \text{pour } n > n_0.$$

Posons $a = t(0) + t(1)$. Soit

$$c = \max\left(\max\left\{\frac{t(n)}{n \log n} \,\middle|\, 2 \leq n \leq n_0\right\}, \quad 2d + \frac{4a}{(n_0+1)^2}\right).$$

Montrons, par induction généralisée, que $t(n) \leq cn \log n$ pour tout $n \geq 2$.
Cas de base. Considérons un entier n tel que $2 \leq n \leq n_0$. Par définition de c, nous avons

$$c \geq \frac{t(n)}{n \log n}.$$

Ainsi $t(n) \leq cn \log n$ et cela complète le cas de base.

Pas d'induction. Supposons que $t(k) \leq ck \log k$ pour $2 \leq k < n$. Nous avons

$$\begin{aligned}
t(n) &\leq dn + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} t(k) && \text{(vu en classe)} \\
&= dn + \frac{2}{n}\left(t(0) + t(1) + \sum_{k=2}^{n-1} t(k)\right) \\
&\leq dn + \frac{2a}{n} + \frac{2}{n}\sum_{k=2}^{n-1} ck \log k && \text{(par H.I.)} \\
&\leq dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n}\int_{x=2}^{n} x \log x \, \mathrm{d}x && (n \log n \text{ est croissante})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n} \int_{x=2}^{n} x \log x \; \mathrm{d}x \\
&= \quad dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n} \left[\frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_{x=2}^{n} \\
&= \quad dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n} \left(\left(\frac{n^2 \log n}{2} - \frac{n^2}{4} \right) - \left(\frac{2^2 \log 2}{2} - \frac{2^2}{4} \right) \right) \\
&= \quad dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n} \left(\left(\frac{n^2 \log n}{2} - \frac{n^2}{4} \right) - (2 \log 2 - 1) \right) \\
&\leq \quad dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n} \left(\frac{n^2 \log n}{2} - \frac{n^2}{4} \right)
\end{aligned}
$$

(car $2 \log 2 - 1 \simeq 0.386$)

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n}\left(\frac{n^2 \log n}{2} - \frac{n^2}{4}\right) \\
&= \quad dn + \frac{2a}{n} + cn \log n - \frac{cn}{2} \\
\\
&= \quad cn \log n - n\left(\frac{c}{2} - d - \frac{2a}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Notons que

$$n\left(\frac{c}{2} - d - \frac{2a}{n^2}\right) \geq 0$$

si et seulement si

$$c \geq 2d + \frac{4a}{n^2}.$$

Cette dernière inégalité est vraie par définition de c, puisque

$$c \geq 2d + \frac{4a}{(n_0+1)^2} \geq 2d + \frac{4a}{n^2}.$$

Ainsi $t(n) \geq cn \log n$. $\square$

Notons que Brassard & Bratley procèdent par induction dite *constructive* (p.234). Autrement dit, plutôt que de sortir c d'un chapeau, ils construisent un tel c en ajoutant des contraintes à chaque étape de la preuve. La preuve est présentée ici sans cette portion constructive pour faciliter la compréhension, mais lorsque bien assimiliée, elle permet la compréhension de la preuve originale.