IFT2125 - Séance de travaux pratiques 3

26 janvier 2016

Université de Montréal

antakivi@iro.umontreal.ca

Numéro 1

Par définition, nous avons $t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0$. Nous nous rappelons que le polynôme caractéristique associé à la récurrence linéaire homogène $a_0 t_n + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$ est

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette récurrence est donc $p(x) = x^2 - 5x + 6$. Nous avons $p(x) = (x-3)(x-2)$ et ainsi ses racines sont 3 et 2.
Puisque toutes les racines de p sont de multiplicité 1, nous avons $t_n = c_1 3^n + c_2 2^n$ pour certaines constantes c_1 et c_2. Sachant que $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, nous obtenons

$$\begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ 3c_1 & + & 2c_2 & = & 1. \end{array}$$

En soustrayant deux fois la première équation à la seconde, nous obtenons $c_1 = 1$ et du coup $c_2 = -1$. Nous concluons donc que $t_n = 3^n - 2^n$.

Ainsi, $t_n \in \Theta(3^n)$, puisque

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&= 1 - 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Numéro 2

Par définition, nous avons $t_n - 2t_{n-1} + 2t_{n-3} - t_{n-4} = 0$. Nous nous rappelons que le polynôme caractéristique associé à la récurrence linéaire homogène $a_0 t_n + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$ est

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette récurrence est donc $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$. Nous vérifions aisément que 1 et -1 sont des racines de $p(x)$,

$$\begin{array}{lllllll} p(1) & = & 1^4 - 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 - 1 & = & 1 - 2 + 2 - 1 & = & 0 \\ p(-1) & = & (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot -1 - 1 & = & 1 + 2 - 2 - 1 & = & 0. \end{array}$$

Nous avons donc $p(x) = (x-1)(x+1)q(x) = (x^2-1)q(x)$ pour un certain q. Trouvons q,

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & x^2 & -2x & +1 & & \\
\hline
x^2-1 & x^4 & -2x^3 & & +2x & -1 \\
 & -x^4 & & +x^2 & & \\
\hline
 & & -2x^3 & +x^2 & +2x & \\
 & & 2x^3 & & -2x & \\
\hline
 & & & x^2 & & -1 \\
 & & & -x^2 & & +1 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

Nous avons donc
$p(x) = (x-1)(x+1)(x^2-2x+1) = (x-1)(x+1)(x-1)(x-1)$ et ainsi ses racines sont 1 (multiplicité 3) et -1. Nous avons donc

$$t_n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + c_4(-1)^n$$

pour certaines constantes c_1, c_2, c_3 et c_4.

Sachant que $t_n = n$ pour $0 \leq n \leq 3$, nous obtenons

$$\begin{array}{ccccccccc} c_1 & & & + & & + & c_4 & = & 0 \\ c_1 & + & c_2 & + & c_3 & - & c_4 & = & 1 \\ c_1 & + & 2c_2 & + & 4c_3 & + & c_4 & = & 2 \\ c_1 & + & 3c_2 & + & 9c_3 & - & c_4 & = & 3 \end{array}$$

ce qui est équivalent à la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 9 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 9 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}L_2{=}L_2{-}L_1\\ L_3{=}L_3{-}L_1\\ L_4{=}L_4{-}L_1\end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}L_3{=}L_3{-}2L_2\\ L_4{=}L_4{-}3L_2\end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \qquad L_2{=}L_2/2$$

$$\sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_4{=}L_4{-}6L_3 \\ L_4{=}L_4/{-2} \end{matrix}$$

$$\sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad L_2{=}L_2{-}L_3$$

$$\sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1{=}L_1{-}L_4 \\ L_2{=}L_2{+}3L_4 \\ L_3{=}L_3{-}L_4 \end{matrix}$$

et ainsi $c_1 = c_3 = c_4 = 0$ et $c_2 = 1$. Nous concluons donc que $t_n = n$ et qu'ainsi $t_n \in \Theta(n)$.

Numéro 3

Posons $t_i = T(2^i)$, nous avons donc

$$t_i = 4T(2^{i-1}) + 2^i = 4t_{i-1} + 2^i.$$

Ainsi, $t_i - 4t_{i-1} = 2^i$. Nous avons donc une récurrence linéaire non homogène. Nous nous rappelons que le polynôme caractéristique associé à la récurrence $a_0 t_n + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n q(n)$ est

$$(a_0 x^k + \ldots + a_k)(x - b)^{d+1}$$

où d est le degré de $q(n)$. Dans notre cas, le polynôme caractéristique est donc $p(x) = (x-4)(x-2)$ et ses racines sont 4 et 2. Nous avons donc $t_i = c_1 4^i + c_2 2^i$. De plus,

$$\begin{array}{lllllllll} t_0 & = & T(2^0) & = & T(1) & = & 1 & & \\ t_1 & = & T(2^1) & = & T(2) & = & 4T(1)+2 & = & 4 \cdot 1 + 2 \quad = 6. \end{array}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{array}{ccccl} c_1 & + & c_2 & = 1 \\ 4c_1 & + & 2c_2 & = 6. \end{array}$$

En soustrayant deux fois la première équation à la seconde, nous obtenons $2c_1 = 4$ ce qui implique $c_1 = 2$ et du coup $c_2 = -1$. Nous avons donc $t_i = 2 \cdot 4^i - 2^i$.
Puisque nous considérons seulement les n qui sont des puissances de 2 et par définition de t_i, nous avons $T(n) = t_{\log n}$. Ainsi

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 2 \cdot 4^{\log n} - 2^{\log n} \\ & = & 2 \cdot 2^{2 \log n} - 2^{\log n} \\ & = & 2 \cdot 2^{\log n^2} - 2^{\log n} \\ & = & 2n^2 - n. \end{array}$$

Nous concluons donc que $T(n) = 2n^2 - n$ et que $T(n) \in \Theta(n^2 \mid n \text{ est une puissance de 2})$.

En considérant que $T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ (pour être bien définie sur tout n), nous pouvons enlever la condition du Θ. Montrons par induction sur n, que $T(n)$ est non décroissante, autrement dit, que pour tout $n \geq k \geq 1$, nous avons $T(n) \geq T(k)$. Remarquons d'abord que $T(n) \geq T(n)$ pour tout n. Le cas où $n = 1$ est donc complété. De plus, nous avons

$$\begin{array}{rcll}
T(n+1) & = & 4T(\lfloor (n+1)/2 \rfloor) + n + 1 & \text{(par définition)} \\
& \geq & 4T(\lfloor n/2 \rfloor) + n + 1 & \text{(par hypothèse d'induction)} \\
& = & T(n) + 1 & \text{(par définition)} \\
& \geq & T(n) & \\
& \geq & T(k) & \text{(par hypothèse d'induction).}
\end{array}$$

De plus, n^2 est non décroissante et est 2-harmonieuse car $(2n)^2 = 4n^2 \in O(n^2)$. Nous concluons donc que $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Numéro 4

Nous avons une récurrence linéaire non homogène. Nous nous rappelons que le polynôme caractéristique associé à la récurrence $a_0 t_n + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n q(n)$ est

$$(a_0 x^k + \ldots + a_k)(x - b)^{d+1}$$

où d est le degré de $q(n)$. Dans notre cas, le polynôme caractéristique est donc $p(x) = (x-2)(x-3)^2$ et ses racines sont 2 et 3 (multiplicité 2). Nous avons donc $t_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$. Calculons les trois premières valeurs de t_n :

$$\begin{array}{lllll} t_0 & = & t_0 & & \\ t_1 & = & (1+5) \cdot 3^1 - 2t_0 & = & 18 + 2t_0 \\ t_2 & = & (2+5) \cdot 3^2 - 2t_1 & = & 99 + 4t_0 \end{array}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & & & = & t_0 \\ 2c_1 & + & 3c_2 & + & 3c_3 & = & 18+2t_0 \\ 4c_1 & + & 9c_2 & + & 18c_3 & = & 99+2t_0 \end{array}$$

ce qui est équivalent à la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ 18+2t_0 \\ 99+4t_0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ 18+2t_0 \\ 99+4t_0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ 18 \\ 99 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_3 = L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad {\scriptstyle L_3 = L_3 - 5L_2}$$

$$\sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ 18 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad {\scriptstyle L_3 = L_3/3}$$

$$\sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad {\scriptstyle L_2 = L_2 - 3L_3}$$

$$\sim \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 - 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad {\scriptstyle L_1 = L_1 - L_2}$$

et ainsi $c_1 = t_0 - 9, c_2 = 9$ et $c_3 = 3$.
Nous concluons donc que

$$t_n = (t_0 - 9)2^n + 9 \cdot 3^n + 3n3^n.$$

Ainsi, $t_n \in \Theta(n3^n)$ puisque

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \frac{(t_0-9)2^n + 9\cdot 3^n + 3n3^n}{n3^n} \\
= \quad & (t_0-9)\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n3^n} + 9\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n3^n} + 3\lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{n3^n} \\
= \quad & (t_0-9)\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n3^n} + 9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 3\lim_{n\to\infty} 1 \\
= \quad & (t_0-9)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + 9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 3\lim_{n\to\infty} 1 \\
= \quad & (t_0-9)(0\cdot 0) + 9\cdot 0 + 3\cdot 1 \\
= \quad & 3.
\end{aligned}
$$

Numéro 5

Posons $t_i = T(2^i)$, nous avons donc

$$t_i = 3T(2^{i-1}) + 2^i = 3t_{i-1} + 2^i.$$

Ainsi, $t_i - 3t_{i-1} = 2^i$. Nous avons donc une récurrence non homogène. Nous nous rappelons que le polynôme caractéristique associé à la récurrence $a_0 t_n + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n q(n)$ est

$$(a_0 x^k + \ldots + a_k)(x - b)^{d+1}$$

où d est le degré de $q(n)$. Dans notre cas, le polynôme caractéristique est donc $p(x) = (x-3)(x-2)$ et ses racines sont 3 et 2. Nous avons donc $t_i = c_1 3^i + c_2 2^i$. De plus,

$$\begin{array}{lllllllll} t_0 & = & T(2^0) & = & T(1) & = & 1 & & \\ t_1 & = & T(2^1) & = & T(2) & = & 3T(1) + 2 & = & 3 \cdot 1 + 2 \quad = 5. \end{array}$$

Nous obtenons donc

$$\begin{array}{rcrl} c_1 & + & c_2 & = 1 \\ 3c_1 & + & 2c_2 & = 5. \end{array}$$

En soustrayant deux fois la première équation à la seconde, nous obtenons $c_1 = 3$ et du coup $c_2 = -2$. Nous avons donc $t_i = 3 \cdot 3^i - 2 \cdot 2^i$. Puisque nous considérons seulement les n qui sont des puissances de 2 et par définition de t_i, nous avons $T(n) = t_{\log n}$ et ainsi

$$\begin{array}{rcll} T(n) & = & 3 \cdot 3^{\log n} - 2 \cdot 2^{\log n} & \\ & = & 3 \cdot n^{\log 3} - 2 \cdot 2^{\log n} & (\text{car } x^{\log y} = y^{\log x}) \\ & = & 3n^{\log 3} - 2n. & \end{array}$$

Nous concluons donc que $T(n) = 3n^{\log 3} - 2n$ et que $T(n) \in \Theta(n^{\log 3} \mid n \text{ est une puissance de } 2)$.

En considérant que $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$ (pour être bien définie sur tout n), nous pouvons enlever la condition du Θ. Montrons par induction sur n, que $T(n)$ est non décroissante, autrement dit, que pour tout $n \geq k \geq 1$, nous avons $T(n) \geq T(k)$. Remarquons d'abord que $T(n) \geq T(n)$ pour tout n. Le cas où $n = 1$ est donc complété. De plus, nous avons

$$\begin{array}{rcll} T(n+1) & = & 3T(\lfloor (n+1)/2 \rfloor) + n + 1 & \text{(par définition)} \\ & \geq & 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + n + 1 & \text{(par hypothèse d'induction)} \\ & = & T(n) + 1 & \text{(par définition)} \\ & \geq & T(n) & \\ & \geq & T(k) & \text{(par hypothèse d'induction).} \end{array}$$

De plus, $n^{\log 3}$ est non décroissante et est 2-harmonieuse car $(2n)^{\log 3} = 2^{\log 3} n^{\log 3} \in O(n^{\log 3})$.
Nous concluons donc que $T(n) \in \Theta(n^{\log 3})$.