Solutions des numéros 7 et 8 du TP1

dift2125

11 janvier 2016

7.

Rappel : $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ (série de McLaurin)

La solution est

$$O(n \log n) \subset O(n^{1+\epsilon}) \subset O(n^2/\log n) \subset O(n^8) = O((n^2 - n + 1)^4) \subset O((1+\epsilon)^n).$$

Avant de prouver que cette chaîne d'inclusion est vraie, montrons d'abord que $O(\log n) \subset O(n^d)$ pour tout $d > 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} n^d &= e^{d \log n} \\ &= 1 + d \log n + d^2/2 \log^2 n + \ldots \\ &\geq d \log n \end{aligned}$$

et ainsi $\frac{n^d}{d} \geq \log n$. Donc $\log n \in O(n^d)$. Supposons maintenant que $n^d \in O(\log n)$, alors il existe $c \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}$ tels que $n^d \leq c \log n$ pour tout $n \geq m$. Nous avons donc

$$n^d = 1 + d \log n + \frac{d^2}{2!} \log^2 n + \ldots \leq c \log n \quad \forall n \geq m$$

et ainsi, en divisant par $\log n$, nous obtenons

$$\frac{1}{\log n} + d + \frac{d^2}{2!} \log n + \ldots \leq c.$$

En soustrayant par $1/\log n$, nous remarquons que cela implique

$$\frac{d^2}{2!} \log n \leq d + \frac{d^2}{2!} \log n + \ldots \leq c - \frac{1}{\log n} \leq c.$$

Nous concluons donc que $\log n \leq (2!c)/d^2$, ce qui est impossible, ainsi $O(\log n) \subset O(n^d)$. $\square$

a) Nous avons $\log n \in O(n^\epsilon)$, donc $n \log n \in O(n^{1+\epsilon})$. Puisque $n^\epsilon \notin O(\log n)$, alors $n^{1+\epsilon} \notin O(n \log n)$. $\square$

b)

Posons $d = 1 - \epsilon$, alors $\log n \in O(n^d)$ puisque $d > 0$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $n^d \geq c \log n$ et, du coup, tel que $1/n^d \leq 1/(c \log n)$. Nous avons donc

$$\begin{array}{rcll} n^{1+\epsilon} & = & n^{1+1-(1-\epsilon)} & \\ & = & n^{2-d} & \\ & = & \dfrac{n^2}{n^d} & \\ & \leq & \dfrac{n^2}{c \log n} & \qquad (\text{car } 1/n^d \leq 1/(c \log n)) \end{array}$$

et ainsi $n^{1+\epsilon} \in O(n^2/\log n)$. Supposons maintenant que $\frac{n^2}{\log n} \in O(n^{1+\epsilon})$, alors

$$\begin{array}{ll} \frac{n^2}{\log n} & \in O(\frac{n^2}{n^d}) \\ \frac{n^2}{\log n} & \leq c\frac{n^2}{n^d} \\ \frac{\log n}{n^2} & \geq \frac{1}{c}\frac{n^d}{n^2} \\ \log n & \geq \frac{1}{c} n^d \\ c \log n & \geq n^d \end{array}$$

Ce qui implique que $n^d \in O(\log n)$ (que nous avons précédemment prouvé faux). On peut donc conclure que $\frac{n^2}{\log n} \notin O(n^{1+\epsilon})$. $\square$

c) Nous avons $n^2/\log n \leq n^2 \leq n^8$ pour tout $n \geq 0$, donc $n^2/\log n \in O(n^8)$. Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}$ tels que $n^8 \leq cn^2/\log n$ pour tout $n \geq m$, alors $n^8 \leq cn^2$ et nous obtenons $n^6 \leq c$, ce qui est impossible $\square$

d) Nous avons

$$\begin{array}{rcl} (n^2 - n + 1)^4 & = & n^8 - 4n^7 + 10n^6 - 16n^5 + 19n^4 - 16n^3 + 10n^2 - 4n + 1 \\ & \leq & n^8 + 10n^6 + 19n^4 + 10n^2 + 1 \\ & \leq & n^8 + 10n^8 + 19n^8 + 10n^8 + n^8 \\ & = & 41n^8 \end{array}$$

et ainsi $(n^2 - n + 1)^4 \in O(n^8)$. De plus, nous avons

$$\begin{array}{rcl} (n^2 - n + 1)^4 & = & n^8 - 4n^7 + 10n^6 - 16n^5 + 19n^4 - 16n^3 + 10n^2 - 4n + 1 \\ & \geq & n^8 - (4n^7 + 16n^5 + 16n^3 + 4n) \\ & \geq & n^8 - 40n^7 \\ & \geq & n^8 - (1/2)n^8 \quad \forall n \geq 80 \\ & = & (1/2)n^8 \end{array}$$

et ainsi $n^8 \in O((n^2 - n + 1)^4)$. Par la question 2, $O(n^8) = O((n^2 - n + 1)^4)$. $\square$

e)

Posons $b = 1 + \epsilon$ et $d = \log_b(e)$, alors nous avons

$$\begin{array}{rcl} b^n & = & e^{\log(b^n)} \\ & = & e^{(\log_b(b^n)/\log_b(e))} \\ & = & e^{n/d} \\ & = & 1 + \frac{n}{d} + \frac{n^2}{2d^2} + \ldots + \frac{n^8}{8!d^8} + \ldots \\ & \geq & \frac{1}{8!d^8} n^8 \end{array}$$

et ainsi $n^8 \leq \frac{8!c^8}{8}(1+\epsilon)^n$. Donc $n^8 \in O(n^8) \in O((1+\epsilon)^n)$. Supposons que $b^n \leq cn^8$, alors

$$n \leq \log(cn^8) = 8\log n + \log c \leq 9\log n,$$

ce qui implique $n \in O(\log n)$, ce qui est impossible. $\square$

8.

La solution est

$$O(n^{\log n}) \subset O(n^{\sqrt{n}}) \subset O(2^n) = O(2^{n+1}) \subset O(2^{2n}) \subset O(n!) \subset O((n+1)!) \subset O(n^n).$$

a) Puisque $\sqrt{n} = n^{1/2}$ et $O(\log n) \subset O(n^{1/2})$, alors nous avons forcément $O(n^{\log n}) \subset O(n^{\sqrt{n}})$. $\square$

b) Nous avons

$$n^{\sqrt{n}} = (2^{\log n})^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log n}.$$

Puisque $\log n \leq \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$2^{\sqrt{n}\log n} \leq 2^{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 2^n \quad \forall n \geq 1.$$

Ainsi $n^{\sqrt{n}} \in O(2^n)$. Supposons maintenant $2^n \in O(n^{\sqrt{n}})$, alors il existe $c \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{array}{lll} & 2^n & \leq cn^{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow & n & \leq \log(cn^{\sqrt{n}}) \\ \Leftrightarrow & n & \leq \log c + \log(n^{\sqrt{n}}) \\ \Leftrightarrow & n & \leq \log c + \sqrt{n}\log(n) \\ \Leftrightarrow & \frac{n}{\sqrt{n}} & \leq \frac{\log c}{\sqrt{n}}\log(n) \\ \Leftrightarrow & n^{1/2} & \leq \frac{\log c}{\sqrt{n}} + \log(n) \leq 2\log(n) \end{array}$$

La précédente ligne indique que $n^{1/2} \in O(\log(n))$. Or, nous avons prouvé précédemment que $n^d \notin O(\log(n))$. $\square$

c) Ceci est un corollaire de la question 4c. $\square$

d) Nous avons $2^n \leq 2^{2n}$ pour tout $n \geq 0$, ainsi $2^n \in O(2^{2n})$. Par la réponse de la question 6, $2^{2n} \notin O(2^n)$. $\square$

e) Nous avons $2^{2n} = 4^n \leq n!$ pour tout $n \geq 9$ et ainsi $2^{2n} \in O(n!)$. Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}$ tels que $n! \leq c4^n$ pour tout $n \geq m$, alors

$$\frac{n!}{4^n} \leq c \quad \forall n \geq m$$

De plus, nous avons

$$\frac{n!}{4^n} = \frac{1}{4}\cdots\frac{n}{4} \geq \frac{3!}{4^3}\cdot\frac{n}{4} \quad \forall n \geq 4$$

puisque $n/k \geq 1$ pour tout $k > 3$. Nous obtenons donc

$$n \leq \frac{4^3}{3!} \cdot 4c \quad \forall n \geq \max(m, 4),$$

ce qui est impossible. $\square$

f) Nous avons $n! \leq n! \cdot (n+1) = (n+1)!$ pour tout $n \geq 0$, ainsi $n! \in O((n+1)!)$. Par la question 4d, $(n+1)! \notin O(n!)$. $\square$

g) Nous avons $(n+1)! = 1 \cdots (n+1) \leq n^{n-1} \cdot (n+1) = n^n + n^{n-1} \leq 2n^n$, ainsi $(n+1)! \in O(n^n)$. Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{N}$ tels que $n^n \leq c(n+1)!$ pour tout $n \geq m$, alors

$$\frac{n^n}{(n+1)!} \leq c \quad \forall n \geq m.$$

De plus, nous avons

$$\frac{n^n}{(n+1)!} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdots \frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{4} \quad \forall n \geq 1$$

puisque $n/k \geq 1$ pour $3 \leq k \leq n$ et $n/(n+1) \geq 1/2$. Nous obtenons donc

$$\frac{n}{4} \leq \frac{n^n}{(n+1)!} \leq c \quad \forall n \geq m,$$

ce qui est impossible. $\square$