FTML Exercices 3 solutions

Pour le 4 avril 2024

TABLE DES MATIÈRES

1 RISQUES DE BAYES

1.1 Exemple 1 (penalty)

On utilise la 01 loss, donc on sait que le prédicteur de Bayes prédit, pour une valeur x de X, la sortie la plus probable. Il prédit donc 1 si $X = 1$, et 0 si $X = 0$.

Pour calculer le risque de Bayes, c'est le même calcul que l'exercice 1 du cours magistral 3 avec l'estimateur f_1 et

- $p = 0.6$
- $q = 1 - p$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
R(f_1) &= E[l(Y, f(X))] \\
&= 1 \times P(Y \neq f(X)) + 0 \times P(Y = f(X)) \\
&= P(Y \neq f(X)) \\
&= P((Y \neq f(X)) \cap (X = 1)) + P((Y \neq f(X)) \cap (X = 0)) \\
&= P((Y \neq f(X))|X = 1)P(X = 1) \\
&+ P((Y \neq f(X))|X = 0)P(X = 0) \\
&= \frac{1}{2}P((Y = 0)|X = 1) + \frac{1}{2}P((Y = 1)|X = 0) \\
&= \frac{1}{2}(1 - p) + \frac{1}{2}q \\
&= 0.4
\end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Exempler 2 : Spotify streams

On utilise la squared loss, donc on sait que le prédicteur de Bayes prédit, pour une valeur x de X, l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X = x$. Pour une valeur x donnée, Y suit une loi binomiale de paramètres $n_Y(x) = 3^x$ et $p_Y(x) = 0.5$. L'espérance de cette variable conditionnelle est $n_Y(x)p_Y(x) = 0.5n_Y(x)$, qui est donc la prédiction faite par le prédicteur de Bayes. Calculons maintenant le risque de

Bayes. Pour cela, on utilise à nouveau la loi de l'espérance totale pour calculer dans un premier temps le "risque conditionnel" : l'espérance de la loss sachant X. Etant donnée une valeur x de X, on remarque que l'espérance de l'erreur est

$$\begin{aligned} E[l(Y, f^*(X))|X = x] &= E[(Y - f^*(X))^2|X = x] \\ &= E[(Y - E[Y|X])^2|X = x] \\ &= Var[Y|X = x] \\ &= n_Y(x)p_Y(x)(1 - p_Y(x)) \\ &= 3^x/4 \end{aligned} \tag{2}$$

Pour calculer le risque de Bayes, il nous suffit, avec le théorème de l'espérance totale, de calculer l'espérance de $E[l(Y, f^*(X))|X = x]$. Mais on connaît la loi de X qui est discrète et suit une loi binomiale de paramètres $n_X = 20$ et $p_X = 0.2$. Ainsi, ce calcul d'espérance est une simple somme.

$$\begin{aligned} R^* &= \sum_{x=0}^{n_X} P(X = x)E[l(Y, f^*(X))|X = x] \\ &= \sum_{x=0}^{n_X} \binom{n_X}{x} p_X^x (1 - p_X)^{n_X - x} n_Y(x)/4 \\ &= \sum_{x=0}^{20} \binom{20}{x} (0.2)^x (0.8)^{20-x} 3^x/4 \end{aligned} \tag{3}$$

Et on calcule cette somme numériquement pour arriver au résultat (c'est ce que fait la fonction **compute_bayes_risk()** dans la solution du tp).

Remarque : le fait que le risque de Bayes soit l'espérance de la variance conditionnelle n'est pas spécifique à ce problème. Ce sera vrai dès qu'on utilise la squared loss.

2 ESTIMATEURS ET ESPÉRANCES

2.1 Moyenne empirique et espérance

On utilise les notations de **lecture_notes.pdf** section 3.1.8. Avec la linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E_{D_n \sim \rho^n}[S_n] &= E_{D_n \sim \rho^n}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{D_n \sim \rho^n}[x_i] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X] \\ &= E[X] \end{aligned} \tag{4}$$

Un exemple de simulation est donné dans la solution de l'exercice 1 du tp 1.

2.2 Espérance du risque empirique

C'est le même principe qu'à la question précédente. Pour le calcul détaillé, voir **lecture_notes.pdf** section 3.1.8.