

# Целочисленная арифметика многократной точности

---

Таубер Кирилл Олегович

3 февраля, 2024, Москва, Россия

Российский Университет Дружбы Народов

# Цели и задачи

---

## Цель лабораторной работы

Ознакомление с алгоритмами целочисленной арифметики многократной точности, а также их последующая программная реализация.

# **Выполнение лабораторной работы**

---

Высокоточная (длинная) арифметика — это операции (базовые арифметические действия, элементарные математические функции и пр.) над числами большой разрядности (многоразрядными числами), т.е. числами, разрядность которых превышает длину машинного слова универсальных процессоров общего назначения (более 128 бит).

# Сложение неотрицательных целых чисел

- Вход. Два неотрицательных числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  и  $v = v_1 v_2 \dots v_n$ ; разрядность чисел  $n$ ; основание системы счисления  $b$ .
  - Выход. Сумма  $w = w_0 w_1 \dots w_n$ , где  $w_0$  - цифра переноса, всегда равная 0 либо 1.
1. Присвоить  $j = n, k = 0$  ( $j$  идет по разрядам,  $k$  следит за переносом).
  2. Присвоить  $w_j = (u_j + v_j + k) \pmod{b}$ , где  $k = \left\lfloor \frac{u_j + v_j + k}{b} \right\rfloor$ .
  3. Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то возвращаемся на шаг 2; если  $j = 0$ , то присвоить  $w_0 = k$  и результат:  $w$ .

# Вычитание неотрицательных целых чисел

- Вход. Два неотрицательных числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n$  и  $v = v_1 v_2 \dots v_n$ ,  $u > v$ ; разрядность чисел  $n$ ; основание системы счисления  $b$ .
  - Выход. Разность  $w = w_0 w_1 \dots w_n = u - v$ .
1. Присвоить  $j = n, k = 0$  ( $k$  – заём из старшего разряда).
  2. Присвоить  $w_j = (u_j - v_j + k) \pmod{b}$ ;  $k = \left\lfloor \frac{u_j - v_j + k}{b} \right\rfloor$ .
  3. Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то возвращаемся на шаг 2; если  $j = 0$ , то результат:  $w$ .

# Умножение неотрицательных целых чисел столбиком

- Вход. Числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n, v = v_1 v_2 \dots v_m$ ; основание системы счисления  $b$ .
- Выход. Произведение  $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$ .

1. Выполнить присвоения:

$w_{m+1} = 0, w_{m+2} = 0, \dots, w_{m+n} = 0, j = m$  ( $j$  перемещается по номерам разрядов числа  $v$  от младших к старшим).

2. Если  $v_j = 0$ , то присвоить  $w_j = 0$  и перейти на шаг 6.



## Умножение неотрицательных целых чисел столбиком

3. Присвоить  $i = n, k = 0$  (значение  $i$  идет по номерам разрядов числа  $u$ ,  $k$  отвечает за перенос).
4. Присвоить  $t = u_i \cdot v_j + w_{i+j} + k, w_{i+j} = t \pmod{b}, k = \lfloor \frac{t}{b} \rfloor$ .
5. Присвоить  $i = i - 1$ . Если  $i > 0$ , то возвращаемся на шаг 4, иначе присвоить  $w_j = k$ .
6. Присвоить  $j = j - 1$ . Если  $j > 0$ , то вернуться на шаг 2. Если  $j = 0$ , то результат:  $w$ .

- Вход. Числа  $u = u_1 u_2 \dots u_n, v = v_1 v_2 \dots v_m$ ; основание системы счисления  $b$ .
- Выход. Произведение  $w = uv = w_1 w_2 \dots w_{m+n}$ .

1. Присвоить  $t = 0$ .
2. Для  $s$  от 0 до  $m + n - 1$  с шагом 1 выполнить шаги 3 и 4.
3. Для  $i$  от 0 до  $s$  с шагом 1 выполнить присвоение
$$t = t + u_{n-i} \cdot v_{m-s+i}.$$
4. Присвоить  $w_{m+n-s} = t \pmod{b}, t = \left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor$ . Результат:  $w$ .

## Деление многоразрядных целых чисел

- Вход. Числа  $u = u_n \dots u_1 u_0$ ,  
 $v = v_t \dots v_1 v_0, n \geq t \geq 1, v_t \neq 0$ .
- Выход. Частное  $q = q_{n-t} \dots q_0$ , остаток  $r = r_t \dots r_0$ .

1. Для  $j$  от 0 до  $n - t$  присвоить  $q_j = 0$ .
2. Пока  $u \geq vb^{n-t}$ , выполнять:  
 $q_{n-t} = q_{n-t} + 1, u = u - vb^{n-t}$ .
3. Для  $i = n, n - 1, \dots, t + 1$  выполнять пункты 3.1 – 3.4:  
3.1. если  $u_i \geq v_t$ , то присвоить  $q_{i-t-1} = b - 1$ , иначе  
присвоить  $q_{i-t-1} = \frac{u_i b + u_{i-1}}{v_t}$ . 3.2. пока  
 $q_{i-t-1}(v_t b + v_{t-1}) > u_i b^2 + u_{i-1} b + u_{i-2}$  выполнять  
 $q_{i-t-1} = q_{i-t-1} - 1$ . 3.3. присвоить  
 $u = u - q_{i-t-1} b^{i-t-1} v$ . 3.4. если  $u < 0$ , то присвоить  
 $u = u + v b^{i-t-1}, q_{i-t-1} = q_{i-t-1} - 1$ .
4.  $r = u$ . Результат:  $q$  и  $r$ .

# Пример работы алгоритма

```
147     else:
148         q[i-t-1] = math.floor((int(u[i])*b + int(u[i-1]))/int(v[t]))
149
150     while (int(q[i-t-1])*int(v[t])*b + int(v[t-1])) > int(u[i])*(b**2) + int(u[i-1])*b + int(u[i-2])):
151         q[i-t-1] = q[i-t-1] - 1
152     u = (int(u) - q[i-t-1]*b**(i-t-1)*int(v))
153     if u < 0:
154         u = int(u) + int(v) *(b**(i-t-1))
155         q[i-t-1] = q[i-t-1] - 1
156     r = u
157     print(q, r)
158
```

[6, 9, 1, 3, 4]  
[4, 4, 4, 4, 4]  
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.39999999999999986, 4, 0, 0]  
[8, 3, 1, 4, 0, 2, 0, 5, 0, 0, 0]  
[0, 2, 9] -39899891

**Figure 1:** Работа алгоритма

## **Выводы**

---

Изучили алгоритмы целочисленной арифметики.