Éléments de compréhension des statistiques

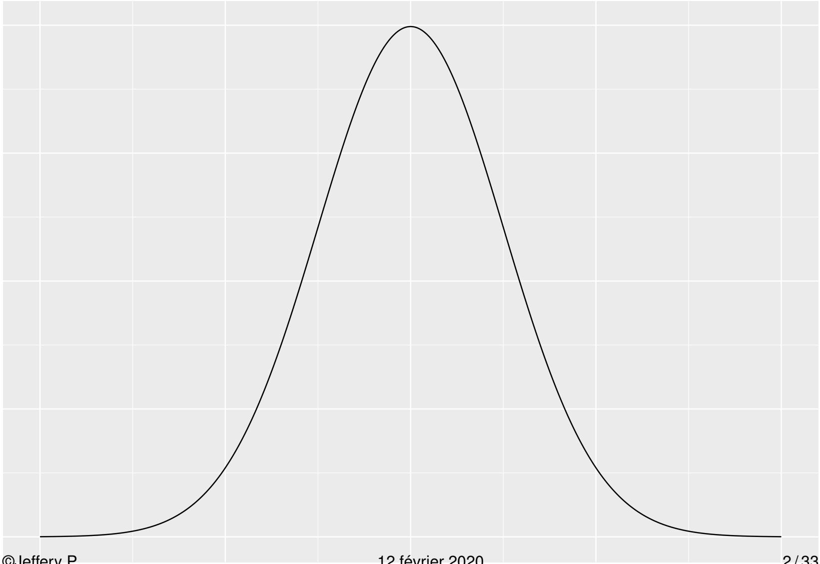
Jeffery P.

Doctorant au Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N)

2019

Quelques mots sur la loi normale

S'il y a bien une loi populaire en statistique, il s'agit de la loi normale. . .la célèbre courbe en cloche !

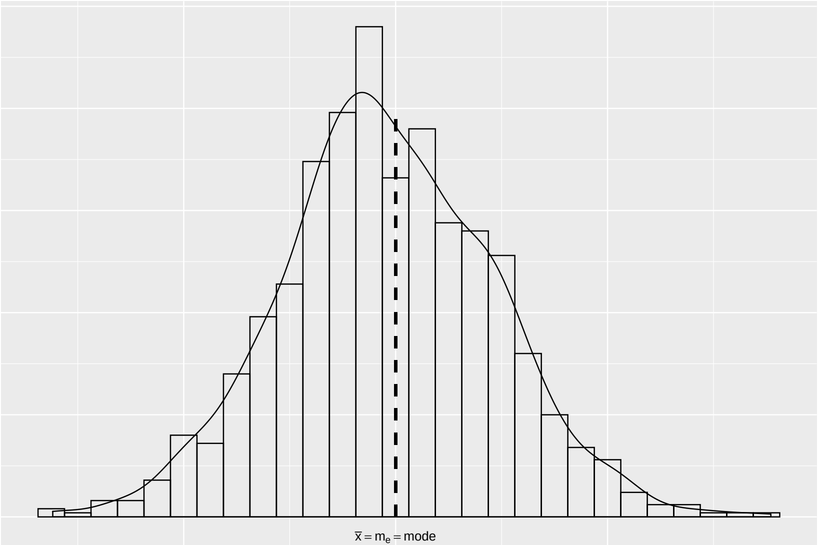


Caractéristiques de la loi normale

- La loi normale est une loi **symétrique, centrée autour de sa moyenne**
- La symétrie de la distribution implique que **la médiane est égale à la moyenne**
- C'est une loi unimodale, **son mode est égale à la moyenne**

Reconnaître une loi normale

En pratique, on peut supposer une distrbution normale d'après l'histogramme, ou le diagramme en barre



Quelques mots sur la loi normale

- La loi normale est définie par deux paramètres :

1. Sa moyenne souvent notée μ (où *mean*)
2. Son écart-type notée σ (où *sd* pour “Standard Deviation”)

Sa densité de probabilité est la suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

avec une variable X qui suit une loi normale de moyenne μ et d’écart-type σ

On note $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Illustration de la loi normale

Changer la moyenne d’une loi normale revient à translater la distribution vers la droite ou la gauche

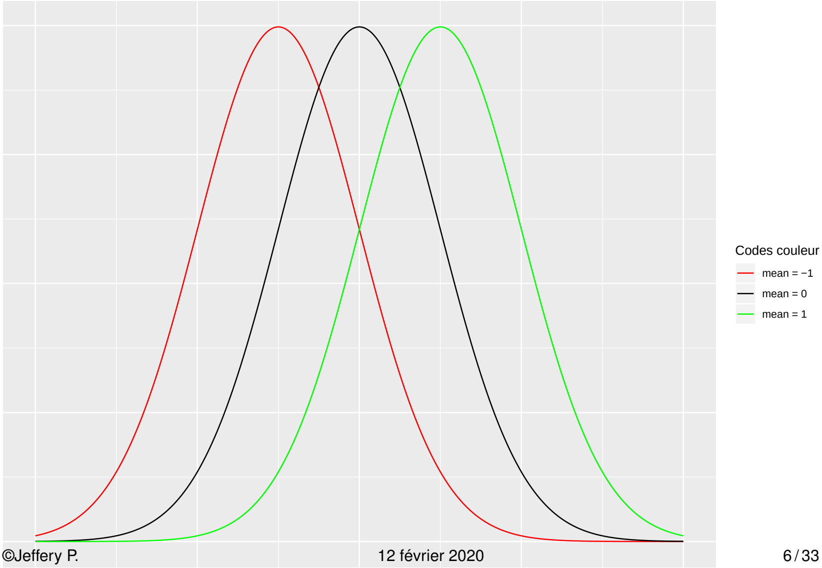
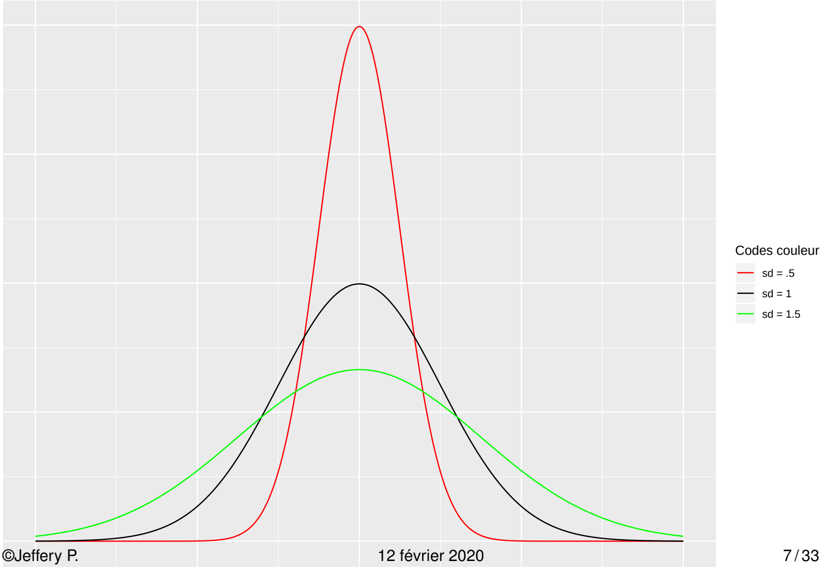


Illustration de la loi normale

Changer l'écart-type d'une loi normale revient à aplatir ou resserrer sa distribution autour de sa moyenne



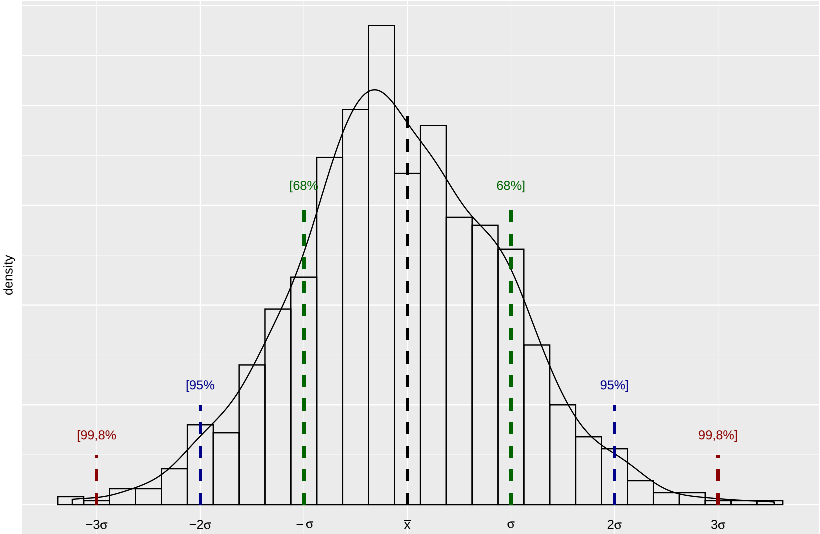
Propriété intéressante

Si l'on dispose d'observations d'une distribution $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors :

- 68% des observations sont comprises dans l'intervalle $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$
- 95% des observations sont comprises dans l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$
- 99,8% des observations sont comprises dans l'intervalle $[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$

Estimation graphique de μ et σ

- En pratique on estime μ en prenant le centre de la distribution, et on déduit σ en estimant l'intervalle vert



Calcul de probabilité : généralité

La probabilité pour qu'une variable aléatoire X soit inférieure à une quelconque valeur x s'écrit $P(\mathrm{X} \leq x)$

- **Un probabilité est toujours positive et inférieure à 1**

Remarque

- Pour une variable aléatoire réelle on a : $P(-\infty < \mathrm{X} < +\infty) = 1$
- Pour une variable continue, on a $P(\mathrm{X} = x) = 0$, d'où :

$$P(\mathrm{X} \leq x) = P(\mathrm{X} < x) \text{ où encore } P(\mathrm{X} \geq x) = P(\mathrm{X} > x)$$

Ce résultat s'explique avec un peu de théorie mathématique que l'on ne détaillera pas ici, mais il peut être utile d'avoir ces propriétés en tête pour les exercices...

Calcul de probabilité : lien avec l'aire sous la courbe de densité

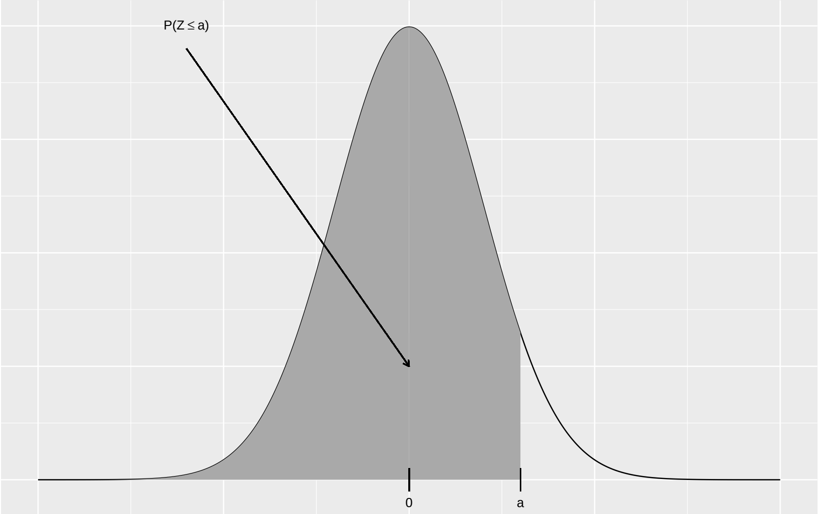
Cas 0 : soit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, l'aire sous la courbe est égale à 1

$$P(-\infty < Z < +\infty) = 1$$

Calcul de probabilité : valeurs de la table

Cas I : soient $\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et a un nombre réel **positif**

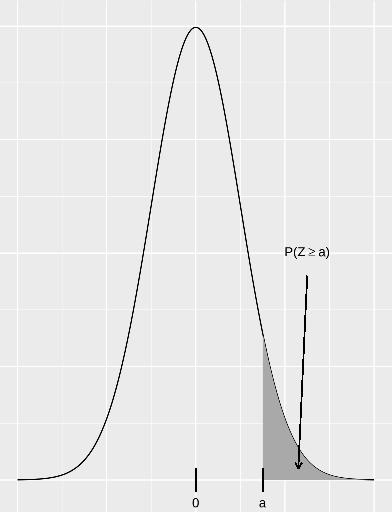
$$P(\mathbb{Z} \leq a) \longrightarrow \text{le résultat se trouve dans la table !}$$

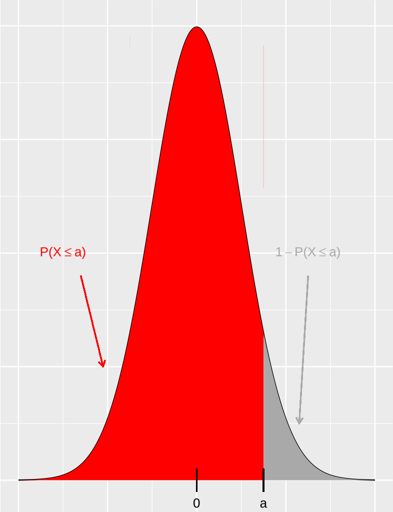


Calcul de probabilité avec la loi normale

Cas II : soient $\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et a un nombre réel **positif**

$$P(\mathbb{Z} \geq a) = 1 - P(\mathbb{Z} \leq a) \longrightarrow \text{on se ramène au } \textbf{cas I}$$

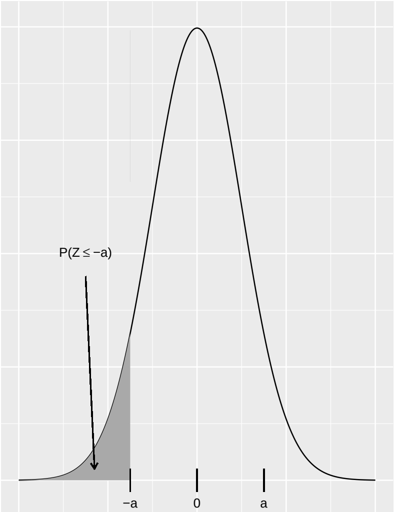


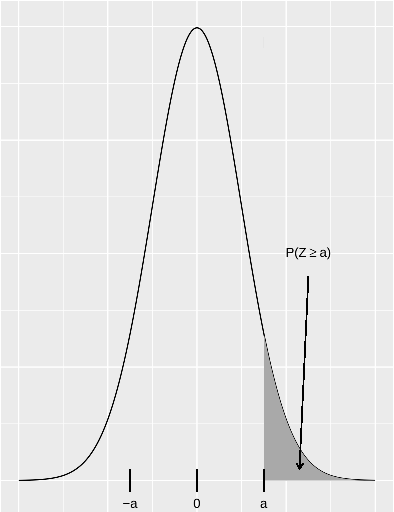


Calcul de probabilité avec la loi normale

Cas III : soient $\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et a un nombre réel **positif**

$$P(\mathbb{Z} \leq -a) = P(\mathbb{Z} \geq a) \longrightarrow \text{ on se ramène au } \textbf{cas II}$$

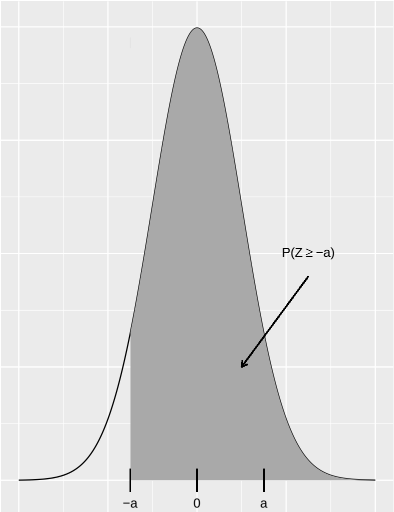


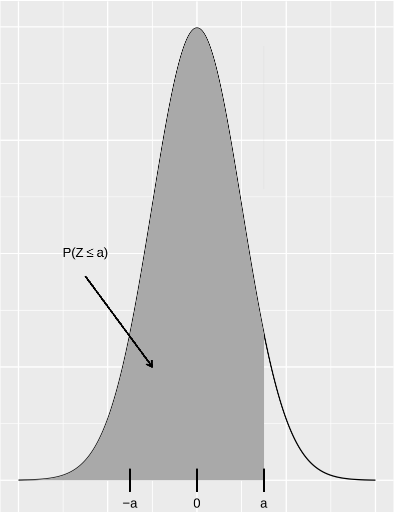


Calcul de probabilité avec la loi normale

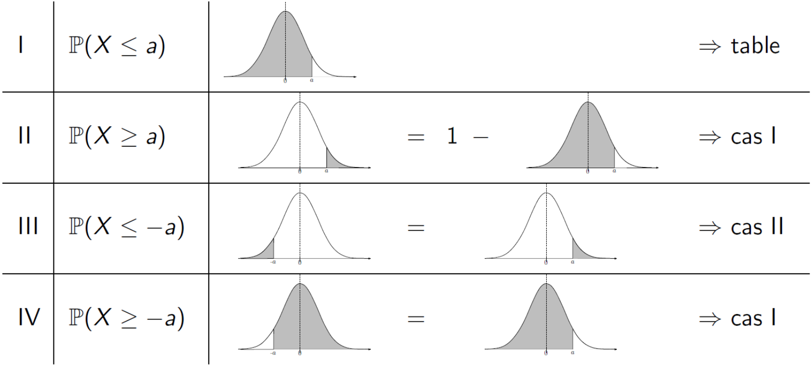
Cas IV : soient $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et a un nombre réel **positif**

$$P(\mathrm{Z} \geq -a) = P(\mathrm{Z} \leq a) \longrightarrow \text{on se ramène au } \textbf{cas I}$$





Résumé



I	$\mathbb{P}(X \leq a)$		$\Rightarrow$ table
II	$\mathbb{P}(X \geq a)$	$= 1 -$	$\Rightarrow$ cas I
III	$\mathbb{P}(X \leq -a)$	$=$	$\Rightarrow$ cas II
IV	$\mathbb{P}(X \geq -a)$	$=$	$\Rightarrow$ cas I

FIGURE 1 – Calcul de probabilité *(Extrait du cours de M. Gérin, Paris Ouest 2012-2013)*

Formule de calcul avec une intervalle quelconque

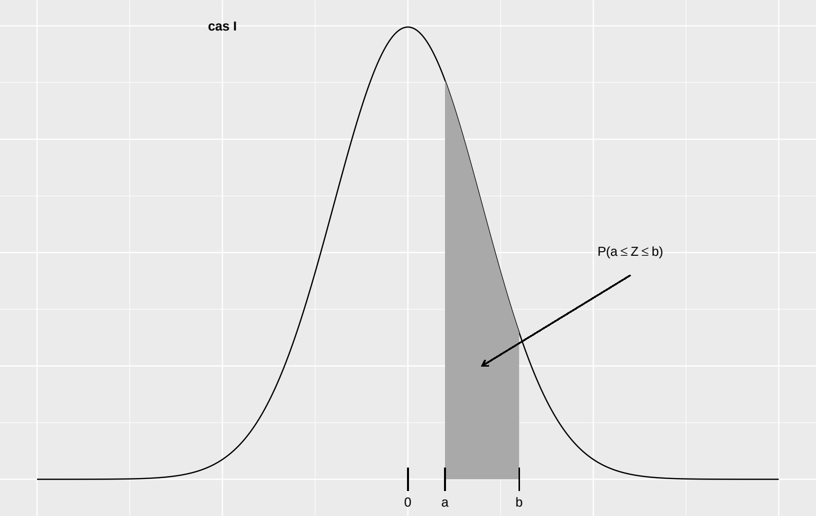
Soient $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et u, v deux nombres réels avec $u \leq v$

$$P(u \leq \mathrm{Z} \leq v) = P(\mathrm{Z} \leq v) - P(\mathrm{Z} \leq u)$$

Calcul de probabilité avec la loi normale

Cas V.1 : soient $\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $0 \leq a \leq b$

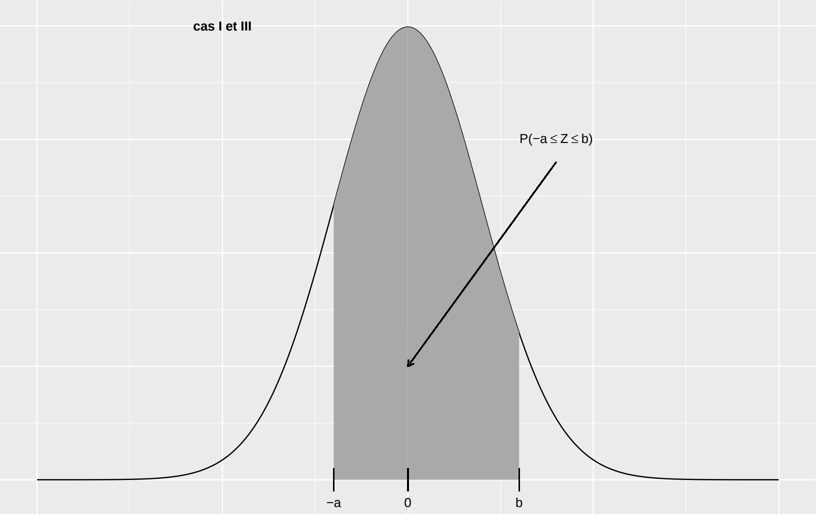
$$P(a \leq \mathbb{Z} \leq b) = P(\mathbb{Z} \leq b) - P(\mathbb{Z} \leq a)$$



Calcul de probabilité avec la loi normale

Cas V.2 : soient $\mathbb{Z} \sim Norm(0,1)$ et $0 \leq a \leq b$

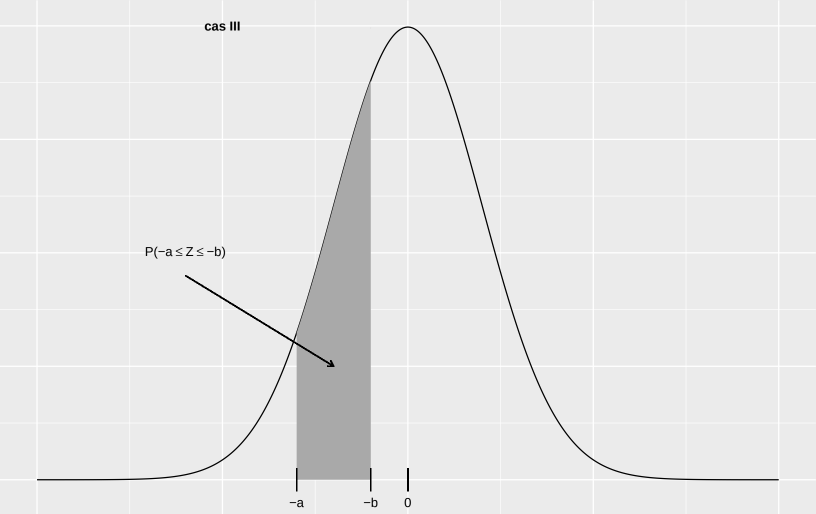
$$P(-a \leq \mathbb{Z} \leq b) = P(\mathbb{Z} \leq b) - P(\mathbb{Z} \leq -a) = P(\mathbb{Z} \leq b) + P(\mathbb{Z} \leq a) - 1$$



Calcul de probabilité avec la loi normale

Cas V.3 : soient $\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $-a \leq -b \leq 0$

$$P(-a \leq \mathbb{Z} \leq -b) = P(\mathbb{Z} \leq -b) - P(\mathbb{Z} \leq -a) = P(\mathbb{Z} \leq a) - P(\mathbb{Z} \leq b)$$



Transformation de la loi normale

Toute transformation *affine* d'une loi normale est encore une loi normale i.e., quelque soit les nombre réels a et $b \neq 0$ on a :

$$\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow a\mathrm{X} + b \sim \mathcal{N}(\mu + b, a^2 \times \sigma^2)$$

Par conséquent :

- si $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\mathrm{X} - \mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (**centrage**)
- si $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{\mathrm{X}}{\sigma} \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ (**réduction**)

En pratique, on fait souvent les deux en même temps :

- si $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (**normalisation=centrage+réduction**)

Calcul de probabilité : en pratique

Si la variable X ne suite pas une loi normale centrée réduite, on peut toujours se ramener aux cas précédents, par exemple :

$$P(\mathrm{X} \leq x) = P(\frac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}) = P(\mathrm{Z} \leq \frac{x - \mu}{\sigma})$$

Où $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$\rightarrow$ Rappel : il s'agit de la **normalisation**, cette petite transformation est très utile et beaucoup utilisée !

Cas pratique : calcul de probabilité

68% des observations sont comprises dans l'intervalle $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma]$… Est-ce bien vrai ?

$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq \mathrm{X} \leq \mu + \sigma) &= P(-\sigma \leq \mathrm{X} - \mu \leq \sigma), \quad \text{on centre} \\
&= P(-1 \leq \tfrac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma} \leq 1), \quad \text{on réduit} \\
&= P(-1 \leq \mathrm{Z} \leq 1)
\end{aligned}
$$

Où $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Il faut maintenant trouver la valeur de cette probabilité sur les tables…

Cas pratique

$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq \mathrm{X} \leq \mu + \sigma) &= P(-1 \leq \mathrm{Z} \leq 1) \\
&= P(\mathrm{Z} \leq 1) - P(\mathrm{Z} \leq -1) \\
&= P(\mathrm{Z} \leq 1) - (1 - P(\mathrm{Z} \leq 1)) \\
&= 2P(\mathrm{Z} \leq 1) - 1
\end{aligned}
$$

Où $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Remarque

Plus généralement, on a la formule suivante quelque soit k nombre entier positif :

$$P(\mu - k \times \sigma \leq \mathrm{X} \leq \mu + k \times \sigma) = P(-k \leq \mathrm{Z} \leq k)$$

Calcul des quantiles

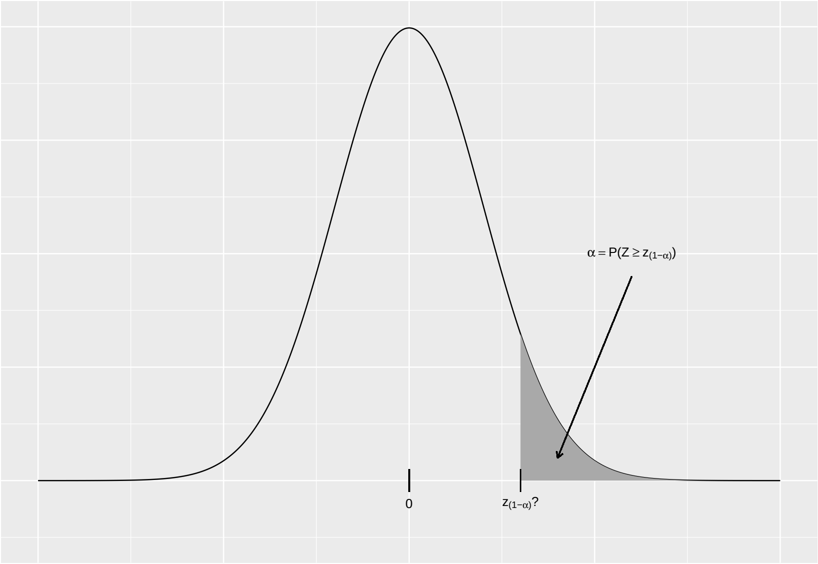
Dans certains cas, on ne cherche pas à calculer une probabilité pour un b donné (e.g., $P(\mathrm{Z} \leq b)$) mais on cherche b telle que la probabilité soit égale à une certaine valeur :

On veut trouver b tel que $P(\mathrm{X} \geq b) = \alpha$ où $P(|\mathrm{X}| \geq b) = \alpha$

- Dans ce cas, on s'assure que la probabibilité concerne une variable suivant une **loi normale centrée réduite**, puis on regarde dans une des tables

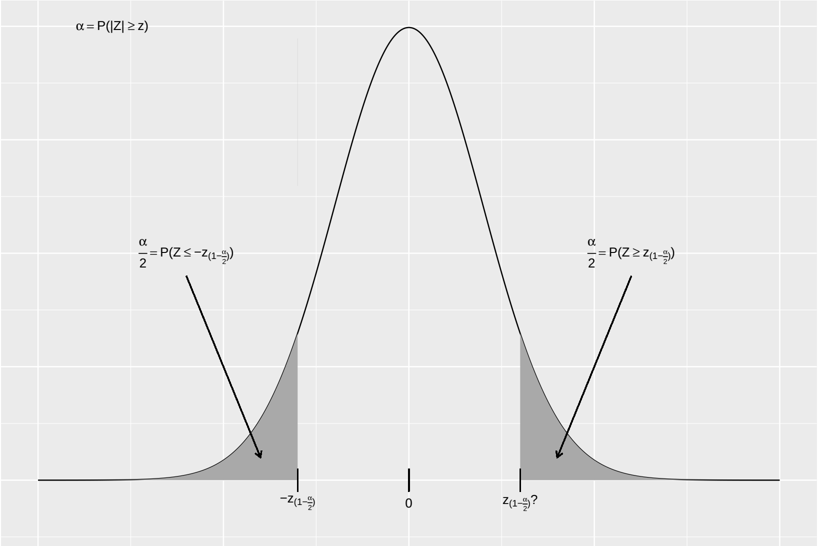
Calcul des quantiles : table 1

On recherche unevaleur z telle que $P(\mathrm{Z} > z)$ avec $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$:



Calcul des quantiles : table 2

On recherche une une valeur z telle que $P(|\mathrm{Z}| > z)$ avec $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$:



Calcul des quantiles

Attention, cette problématique est faussement facile. . .dans la majorité des cas elle nécessite une bonne maîtrise du calcul des probabilités de la loi normale !

Cas fréquents

- On ne demande pas de trouver z tel que $P(\mathrm{Z} \geq z) = \alpha$ mais plutôt $P(\mathrm{Z} \leq z) = 1 - \alpha$.
- On ne demande pas de trouver z tel que $P(|\mathrm{Z}| \geq z) = \alpha$ mais plutôt $P(|\mathrm{Z}| \leq z) = 1 - \alpha$.
- La probabilité porte sur une variable $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Il faut bien penser à centrer et réduire l'évènement (ce qui se trouve dans la probabilité) e.g., $P(\mathrm{X} > x) = P(\mathrm{Z} > \frac{x-\mu}{\sigma})$ où et $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Calcul des quantiles

Exemple général (théorique mais utile !)

Soit $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on suppose $\alpha \in]0; 0.5[$ connu.

On cherche b **tel que** $P(\mathrm{X} > b) = \alpha$

Voici les étapes qui nous permettent de trouver la solution :

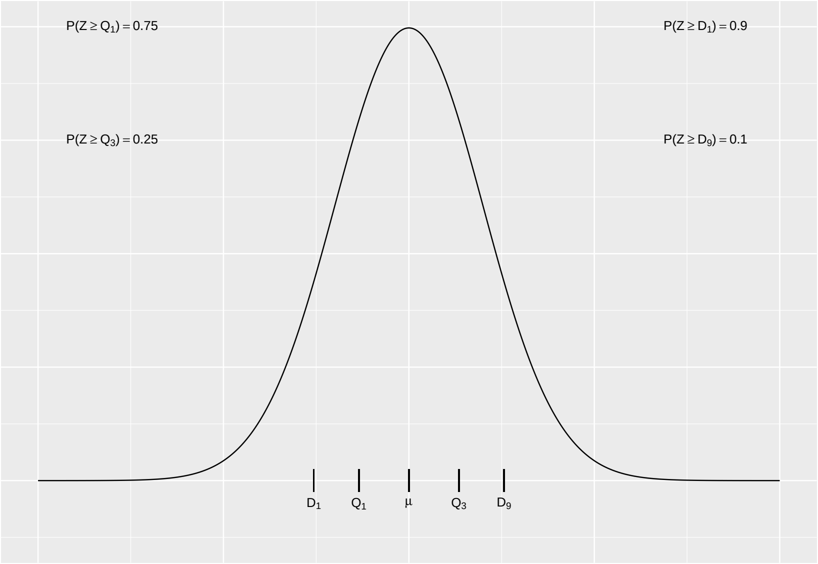
$$
\begin{array}{rrcl}
 & P(\mathrm{X} > b) & = & \alpha \\
\Leftrightarrow & P(\mathrm{Z} > \frac{b-\mu}{\sigma}) & = & \alpha \\
\Leftrightarrow & P(\mathrm{Z} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) & = & 1-\alpha \\
\Rightarrow & \frac{b-\mu}{\sigma} & = & z_{(1-\alpha)} \\
 & \text{Donc} \quad b & = & \mu + \sigma \times z_{(1-\alpha)}
\end{array}
$$

Avec :

- $\mathrm{Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $z_{(1-\alpha)}$ est le **quantile** d'ordre $(1-\alpha)$ de la loi normale centrée réduite

Calcul des quantiles

- Rappel sur la position des déciles et quartiles extrêmes



Calcul des quantiles

Soit $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Détermination des déciles et quartiles extrêmes

En utilisant la formule précédente, il vient :

$$\begin{array}{rrcl} & P(\mathrm{X} > Q_3) & = & 0.25 \\ \Rightarrow & Q_3 & = & \mu + \sigma \times z_{(0.75)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} & P(\mathrm{X} > D_9) & = & 0.1 \\ \Rightarrow & D_9 & = & \mu + \sigma \times z_{(0.9)} \end{array}$$

Pour rappel :

- Q_3 : troisième quartile
- D_9 : neuvième décile

Calcul des quantiles

Soit $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Détermination des déciles et quartiles extrêmes

Pour D_1 et Q_1, le calcul est un peu **sioux.** Par exemple pour D_1, on a :

$$\begin{array}{rrcl}
 & P(\mathrm{X} > D_1) & = & 0.9 \\
\Leftrightarrow & P(\mathrm{Z} > \frac{D_1-\mu}{\sigma}) & = & 0.9 \\
\Leftrightarrow & P(\mathrm{Z} \leq \frac{D_1-\mu}{\sigma}) & = & 0.1 \\
\Rightarrow & \frac{D_1-\mu}{\sigma} & = & z_{(0.1)} \quad \text{or } z_{(0.1)} = -z_{(1-0.1)} = -z_{(0.9)} \\
 & \text{Donc} \quad D_1 & = & \mu - \sigma \times z_{(0.9)}
\end{array}$$

Calcul des quantiles

Soit $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Détermination des déciles et quartiles extrêmes

On peut utiliser les formules suivantes pour D_1 et Q_1 :

$$Q_1 = \mu - \sigma \times z_{(0.75)}$$

$$D_1 = \mu - \sigma \times z_{(0.9)}$$

Avec :

- Q_1 : premier quartile i.e., $P(\mathrm{X} \leq Q_1) = 0.25$
- D_1 : premier décile i.e., $P(\mathrm{X} \leq D_1) = 0.1$