UFR des Mathématiques
M2-Probabilités Et Statistiques Des Nouvelles Données

Méthodes Numériques pour les Produits Structurés en Actuariat

Djamila AZZOUZ

Le risque de mortalité joue un rôle crucial dans l'évaluation des assurances-vie " en cas de décès".

Professeur référent :

Jacques PRINTEMPS

Année académique : 2022 - 2023

TABLE DES MATIÈRES

I Introduction

Le risque de mortalité est la probabilité qu'une personne meurt dans un certain temps ou à un certain âge. Il peut être influencé par de nombreux facteurs tels que la santé, les habitudes de vie, les conditions environnementales, etc. Les médecins et les chercheurs utilisent souvent cette mesure pour évaluer les effets de divers traitements, politiques et interventions sur la santé des populations.

En actuariat, le risque de mortalité joue un rôle crucial dans l'évaluation des assurances de personnes, notamment les assurances-vie. Nous utilisons des modèles de mortalité pour prédire la probabilité de décès pour une population donnée à différents âges, ce qui nous permet de déterminer les primes nécessaires pour couvrir les paiements d'indemnité en cas de décès. Le risque de mortalité est un facteur important dans l'élaboration de produits d'assurance tels que les polices d'assurance-vie et les produits annuels payants. Les actuaires continuent d'actualiser régulièrement ces modèles pour tenir compte des tendances en matière de mortalité et pour s'assurer que les produits d'assurance sont rentables et équitablement tarifés.

Voici quelques exemples de produits d'assurance dans lesquels le risque de mortalité est pris en compte :

Assurance-vie : c'est un contrat d'assurance qui garantit le paiement d'une somme d'argent en cas de décès de l'assuré. Les primes sont souvent versées sur une base mensuelle, trimestrielle ou annuelle.

Rentes viagères : ce sont des produits financiers qui garantissent un paiement régulier à un assuré pour le restant de sa vie.

Assurance décès accidentel :c'est un type d'assurance qui couvre les frais funéraires et les frais médicaux en cas de décès accidentel.

Contrats de retraite : peuvent inclure une option d'assurance décès, qui garantit le paiement d'une somme d'argent en cas de décès de l'assuré avant la retraite. Le risque de mortalité est pris en compte pour établir les primes pour cette option d'assurance et pour déterminer le montant que le bénéficiaire recevra en cas de décès de l'assuré.

Ces produits sont soumis au risque de mortalité car ils garantissent un paiement en cas de décès, et il est donc important de prendre en compte la probabilité de décès pour établir les primes et évaluer la rentabilité du produit pour l'assureur.

Dans ce projet nous nous intéresserons particulièrement au risque de mortalité dans l'assurance-vie **"en cas de décès"** .

II Préparation des données et études des tables de mortalité :

L'assureur est à la recherche de moyens pour mieux comprendre la mortalité de sa population d'assurés en France. Dans cet objectif, la table de mortalités entre 1994 à 2019 obtenue sur le site **INSEE** sera utilisée pour évaluer les différents produits financiers.

Les tables de mortalité sont des outils statistiques permettant de décrire la mortalité d'une population en fonction de l'âge, du sexe et de la durée. Elles sont basées sur des observations de mortalité sur plusieurs années et permettent d'avoir une vision globale de la mortalité pour une population donnée, ici dans notre cas on vise la population en France entière.

L'objectif final de l'assureur est de sous-estimer la mortalité de ses assurés pour minimiser les pertes financières liées aux produits d'assurance. En utilisant la table de mortalité, il peut avoir une idée plus précise de la mortalité de ses assurés et ajuster les produits financiers en conséquence. Cela permettra à l'assureur d'avoir une estimation plus fiable des coûts liés à ses produits d'assurance et d'optimiser ses activités pour atteindre ses objectifs financiers.
Les figures ci dessus nous montre le contenu de chaque table de mortalité pour **"Femmes"** et **"Hommes"**.

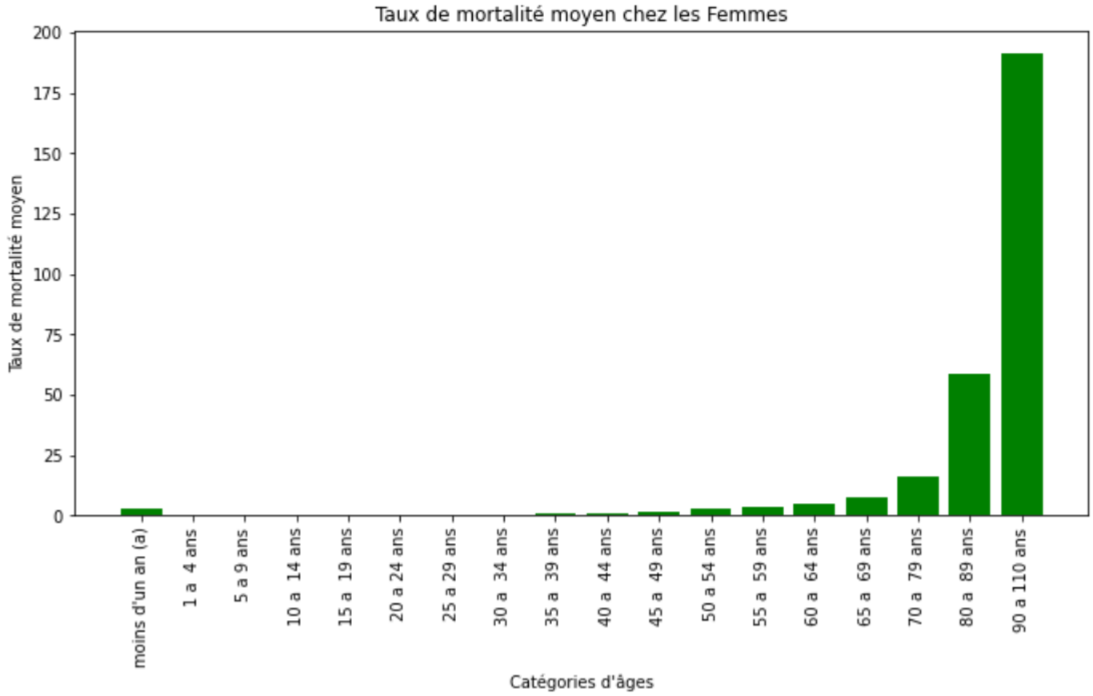
Année	moins d'un an (a)	1 à 4 ans	5 à 9 ans	10 à 14 ans	15 à 19 ans	20 à 24 ans	25 à 29 ans	30 à 34 ans	35 à 39 ans	40 à 44 ans	45 à 49 ans	50 à 54 ans	55 à 59 ans	60 à 64 ans	65 à 69 ans	70 à 79 ans	80 à 89 ans	90 à 110 ans
1994	4.3	0.46	0.15	0.16	0.27	0.43	0.54	0.72	1.01	1.36	2.02	2.89	4.1	6.0	9.3	19.1	70.4	201
1995	3.7	0.45	0.14	0.15	0.29	0.44	0.53	0.74	0.97	1.44	2.03	2.84	4.0	6.0	9.2	19.2	73.1	205
1996	3.7	0.38	0.13	0.13	0.27	0.41	0.49	0.70	0.97	1.39	1.99	2.87	4.0	5.9	9.0	19.4	74.4	207
1997	3.7	0.40	0.12	0.14	0.28	0.38	0.41	0.60	0.88	1.35	2.01	2.88	4.0	5.6	8.9	19.3	74.4	205
1998	3.8	0.34	0.14	0.13	0.26	0.40	0.43	0.57	0.87	1.35	1.92	2.79	4.0	5.6	8.7	19.6	75.0	205

Année	moins d'un an (a)	1 à 4 ans	5 à 9 ans	10 à 14 ans	15 à 19 ans	20 à 24 ans	25 à 29 ans	30 à 34 ans	35 à 39 ans	40 à 44 ans	45 à 49 ans	50 à 54 ans	55 à 59 ans	60 à 64 ans	65 à 69 ans	70 à 79 ans	80 à 89 ans	90 à 110 ans
1994	5.7	0.62	0.20	0.23	0.69	1.35	1.58	1.99	2.48	3.37	4.85	6.98	10.4	15.7	23.0	39.7	107.6	247
1995	4.8	0.50	0.19	0.20	0.66	1.26	1.53	1.93	2.42	3.39	4.81	6.86	10.1	15.6	23.3	40.2	110.2	252
1996	4.7	0.53	0.18	0.21	0.67	1.19	1.36	1.71	2.25	3.31	4.62	6.80	10.0	15.4	23.0	40.7	113.2	255
1997	4.7	0.48	0.17	0.18	0.66	1.17	1.25	1.47	2.03	3.07	4.62	6.57	9.6	14.7	22.2	40.6	111.7	253
1998	4.5	0.46	0.16	0.17	0.61	1.14	1.20	1.38	1.96	3.01	4.63	6.52	9.4	14.4	21.7	40.9	113.5	247

FIGURE 1 – Visualisation des deux tables de mortalité chez les Hommes et Femmes

La visualisation des données est cruciale pour comprendre les informations collectées. Cela permet de découvrir les tendances et les patrons cachés dans les données, et est la première étape pour explorer les données. Il est important de surveiller les données manquantes ou nulles lors de la visualisation, car cela peut avoir un impact sur la qualité des analyses et des modèles.

Nous pouvons voir le taux de mortalité moyen chez les hommes et femmes par tranche d'âge sur les années $[1994-2019]$ sous forme d'histogramme, représenté sous les figures ci dessous :



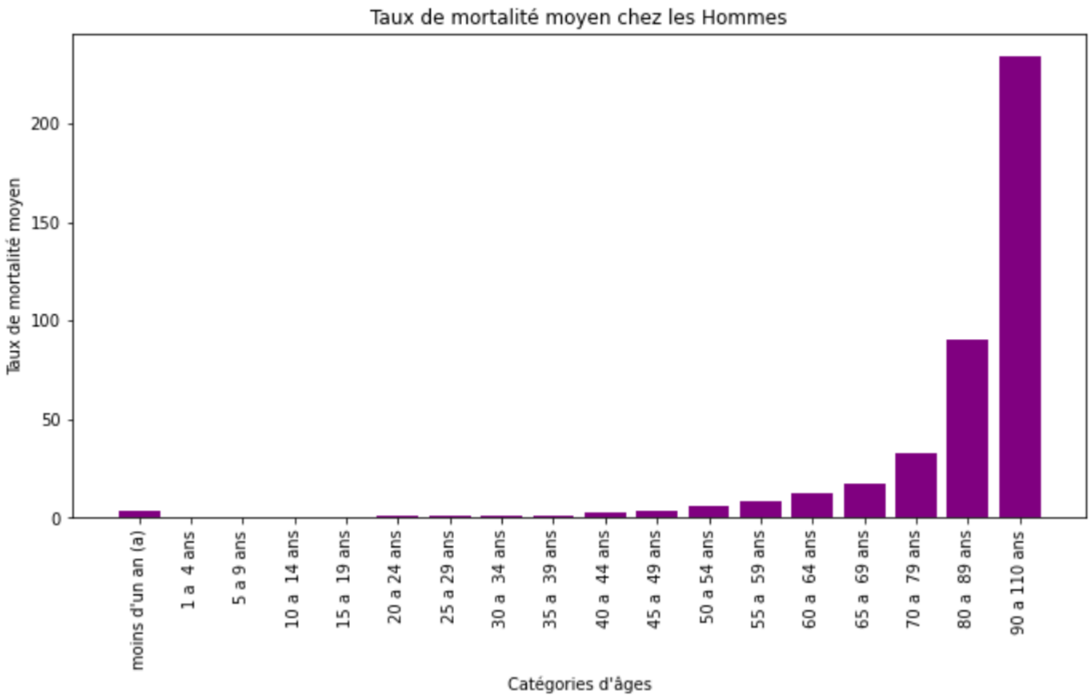


FIGURE 2 – Taux de mortalité moyen chez les hommes et les femmes par tranche d'âge

Observation :

Les figures montrent que le taux de mortalité chez les femmes est plus faible que celui des hommes. On peut constater que les femmes décèdent en général entre 70 à 79 ans, tandis que chez les hommes le taux de mortalité se manifeste à partir de 55 à 65 ans.

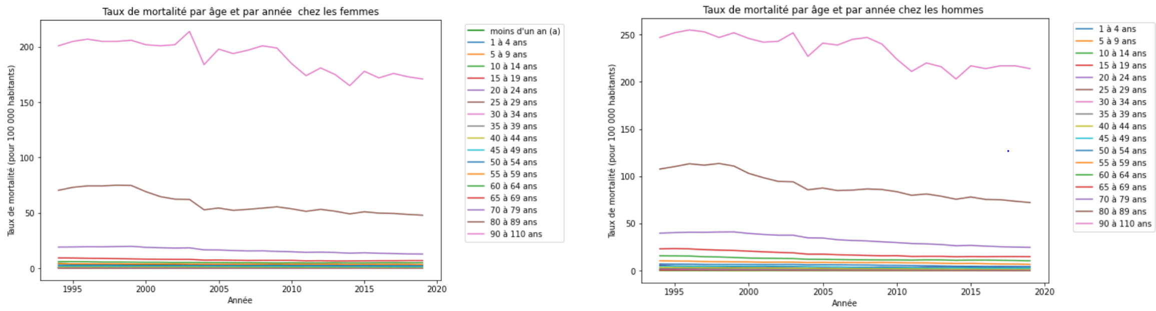


FIGURE 3 – Taux de mortalité par catégorie d'âge et année

Observation : En examinant la figure précédente, il est une fois de plus confirmé que les femmes vieillissent plus que les hommes. En effet, le taux de mortalité chez les hommes est plus élevé, en particulier dans la tranche d'âge de $[90-110ans]$, où il est d'environ 250 décès pour 100 000 personnes nées, alors que le taux de mortalité des femmes est d'environ 190 pour 100 000 personnes.

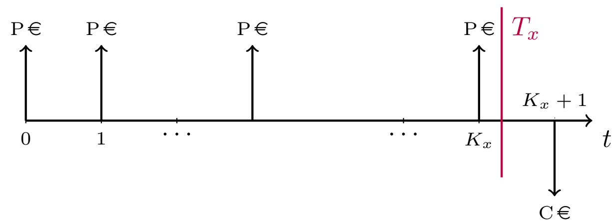
III Choix du modèle de mortalité et son évaluation :

Notre objectif de calibrage d'un modèle pour évaluer le taux de risque de la population française a été mentionné précédemment. Ce modèle est crucial pour les assureurs, car toute erreur de paramétrage peut entraîner des erreurs systématiques irrécupérables. Nous allons explorer cette question en utilisant l'exemple d'une assurance-vie en cas de décès d'un assuré âgé de x ans. L'assuré versera une prime annuelle P jusqu'à son décès, et en retour, l'assureur versera un capital C après son décès. Pour cela nous allons introduire les éléments suivants :

— $\mu(x,t)$: qui le taux du hasard autrement dit le taux instantané de décès à la data t pour un individu d'âge x.

— $T_x = T - x$: qui est la durée de survie d'un assuré d'âge x.
Où T est la durée de vie.

— $T_x = \lfloor K_x \rfloor$: qui représente la date du dernier versement de la prime.
On peut résumer l'asusrance vie en cas de décès selon le schéma suivant :



Lorsqu'un assureur propose une assurance vie en cas de décès à ses assurés et que ces derniers souhaitent souscrire à cette assurance, il est important pour l'assureur d'établir une tarification pour chaque client. Pour ce faire, il doit prendre en compte plusieurs facteurs tels que l'âge de l'assuré, la durée de survie de l'assuré, le taux de rendement actuel et le coût associé au contrat.

La notion de valeur actuelle probable **"VAP"** est introduite pour déterminer une estimation de la valeur actuelle d'un contrat d'assurance en cas de décès. Cette estimation est basée sur la prise en compte de tous les facteurs mentionnés précédemment, ainsi que sur la probabilité de décès de l'assuré au cours de la durée du contrat. La valeur actuelle probable joue un rôle important dans la tarification de l'assurance vie en cas de décès, permettant à l'assureur de prendre en compte tous les éléments nécessaires pour établir un tarif juste pour chaque client.

— Nous avons donc les équations suivantes :

$$\begin{cases} VAP_{assuré}(0) = P \times \ddot{a}_x \\ VAP_{assureur}(0) = C \times A_x \end{cases}$$

Où :

— P : **est la prime annuelle versée par l'assuré pour l'assureur jusqu'à son décès.**

— C : **est le capital versé par l'assureur pour l'assuré après son décès.**

— $A_x = \sum_{k=0}^{\infty} V^{k+1} * q_{x+k} * {}_kp_x$
Avec : ${}_kp_x = P(T_x > k)$ **qui est la probabilité de survie de l'assuré d'âge x après l'instant** k
Et q_{x+k} **qui est la probabilité de décès de l'assuré**

— V : **est le facteur d'actualisation**

L'estimation de ${}_kp_x$ est fondamentale ici car l'équation actuarielle exige que les valeurs actualisées probables de l'assuré et de l'assureur soient égales. Il est donc crucial d'avoir un modèle précis pour estimer ${}_kp_x$.
Dans le cadre général, l'estimation de ${}_kp_x$ est donnée en fonction du **"taux instantané de mortalité"** noté :

$$\mu_x(t) = \frac{\frac{-d}{dx}\,{}_kp_x}{{}_kp_x}$$

Nous avons donc :

$${}_kp_x = \mathbb{E}(e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds})$$

Où :

$$\mu_{x+t} = \frac{-d}{dt}\ln({}_kp_x)$$

Nous allons calibrer notre taux instantané de mortalité par le modèle de **"Lee Carter"** qui est un outil pour prévoir la mortalité d'une population en se basant sur une tendance générale et des fluctuations à court terme. Il se compose de deux parties : une partie structurelle qui décrit la tendance générale de la mortalité et une partie cyclique qui prend en compte les variations temporaires causées par des facteurs tels que les pandémies ou les fluctuations économiques. La modélisation du taux instantané pour lex^{me} groupe d'âge et d'année t dans ce cas est la suivante :

$$\ln(\mu(x,t)) = \alpha(t) + \beta(t) \times k(t)$$

Où :

— $\alpha(t)$: composante structurelle pour un âge donné (t)

— $\beta(t) =$ coefficient de la composante structurelle pour un âge donné(t)

— $k(t)$: composante cyclique pour un âge donné (t)

Le facteur d'optimisation est de maximiser la quantité de variance expliquée par le modèle, ce qui se traduit par la minimisation de la variance des erreurs. Pour garantir la reconnaissance du modèle, il est nécessaire d'imposer des restrictions sur les paramètres. Cela implique l'ajout de contraintes suivantes :

$$\sum_{X=X_m}^{X_M} \beta_x = 1, \sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$$

En utilisant l'estimation par la méthode des moindres carrés on obtient :

$$(\hat{\alpha_x}, \hat{\beta_x}, k_t) = argmin \sum_{X,t} (\ln \mu_{x,t} - \alpha_x - \beta_x k_t)^2$$

Après avoir estimé les paramètres, le modèle de Lee Carter peut être utilisé pour évaluer le niveau de risque de mortalité et déterminer la prime d'assurance requise pour couvrir ce risque de décès.

Au vu de nos données, nous allons estimer le taux de mortalité pour chaque catégorie d'âge, puis on déterminera les probabilités de survie qui nous permettrons de déterminer notre prime annuelle nécessaire pour le contrat choisi . Enfin , nous allons prédire ce taux de mortalité.

Explication du code :

Tout d'abord, les données sont transformées en logarithmes à l'aide de la fonction numpy "log". Ensuite, l'âge moyen est calculé pour chaque groupe d'âge à l'aide de la fonction numpy "array". Le modèle de Lee-Carter est ensuite défini à l'aide de la fonction "OLS" de la bibliothèque statsmodels.api. Les paramètres du modèle sont estimés à l'aide de la fonction "fit". Les résultats de l'estimation sont ensuite affichés à l'aide de la fonction "summary", qui fournit des informations sur la qualité de l'ajustement et les paramètres estimés. Les résultats sont également affichés à l'aide des fonctions "params", "bse" et "predict", qui fournissent les paramètres estimés, les erreurs standards et les valeurs prédites respectivement. Enfin, les valeurs prédites sont stockées dans un DataFrame pandas appelé "prediction", qui contient l'âge moyen et le taux de mortalité prédit en logarithmes pour chaque groupe d'âge.

Nous présentons les résultats du modèle de Lee carter pour l'estimation $\ln \mu(x,t)$ sous les figures çi dessous :

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.785
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.771
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     58.37
Date:                Thu, 16 Feb 2023   Prob (F-statistic):           1.00e-06
Time:                        21:28:24   Log-Likelihood:                -24.851
No. Observations:                  18   AIC:                             53.70
Df Residuals:                      16   BIC:                             55.48
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const         -2.2008      0.426     -5.167      0.000      -3.104      -1.298
x1             0.0650      0.009      7.640      0.000       0.047       0.083
==============================================================================
Omnibus:                       24.959   Durbin-Watson:                   0.548
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):               34.811
Skew:                           2.260   Prob(JB):                     2.76e-08
Kurtosis:                       8.098   Cond. No.                         88.6
==============================================================================

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
Parameters:  const   -2.200782
x1       0.065047
dtype: float64
Standard errors:  const    0.425913
x1       0.008514
dtype: float64
Predicted values:  [-2.16825809 -2.03816343 -1.74545045 -1.4202138  -1.09497716 -0.76974052
 -0.44450387 -0.11926723  0.20596942  0.53120606  0.85644271  1.18167935
  1.50691599  1.83215264  2.15738928  2.64524425  3.29571754  4.30395113]
```

Figure 4 – la qualité de l'ajustement et les paramètres estimés pour log taux de mortalité chez les femmes

```
                            OLS Regression Results
==============================================================================
Dep. Variable:                      y   R-squared:                       0.785
Model:                            OLS   Adj. R-squared:                  0.771
Method:                 Least Squares   F-statistic:                     58.37
Date:                Thu, 16 Feb 2023   Prob (F-statistic):           1.00e-06
Time:                        22:29:55   Log-Likelihood:                -24.851
No. Observations:                  18   AIC:                             53.70
Df Residuals:                      16   BIC:                             55.48
Df Model:                           1
Covariance Type:            nonrobust
==============================================================================
                 coef    std err          t      P>|t|      [0.025      0.975]
------------------------------------------------------------------------------
const         -2.2008      0.426     -5.167      0.000      -3.104      -1.298
x1             0.0650      0.009      7.640      0.000       0.047       0.083
==============================================================================
Omnibus:                       24.959   Durbin-Watson:                   0.548
Prob(Omnibus):                  0.000   Jarque-Bera (JB):               34.811
Skew:                           2.260   Prob(JB):                     2.76e-08
Kurtosis:                       8.098   Cond. No.                         88.6
==============================================================================

Notes:
[1] Standard Errors assume that the covariance matrix of the errors is correctly specified.
Parameters:  const   -2.200782
x1       0.065047
dtype: float64
Standard errors:  const    0.425913
x1       0.008514
dtype: float64
Predicted values:  [-2.16825809 -2.03816343 -1.74545045 -1.4202138  -1.09497716 -0.76974052
 -0.44450387 -0.11926723  0.20596942  0.53120606  0.85644271  1.18167935
  1.50691599  1.83215264  2.15738928  2.64524425  3.29571754  4.30395113]
```

Figure 5 – la qualité de l'ajustement et les paramètres estimés pour log taux de mortalité chez les hommes

Observation :

La fonction "summary" permet d'afficher les résultats de l'estimation du modèle de Lee-Carter, en fournissant des informations sur la qualité de l'ajustement et les paramètres estimés. Dans ce cas, les résultats montrent une bonne qualité d'ajustement du modèle pour l'étude des taux de mortalité en logarithmes pour les deux sexes, avec une valeur de 0.785 qui est très proche de 1. Cette proximité indique que le modèle a été capable de s'ajuster de manière satisfaisante aux données, ce qui renforce la confiance que l'on peut accorder aux paramètres estimés.

En examinant les graphes ci-dessous, qui représentent les taux de mortalité estimés par Lee Carter, nous pouvons observer que les taux de mortalité des deux sexes sont relativement similaires, bien que celui des hommes reste légèrement plus élevé que celui des femmes.

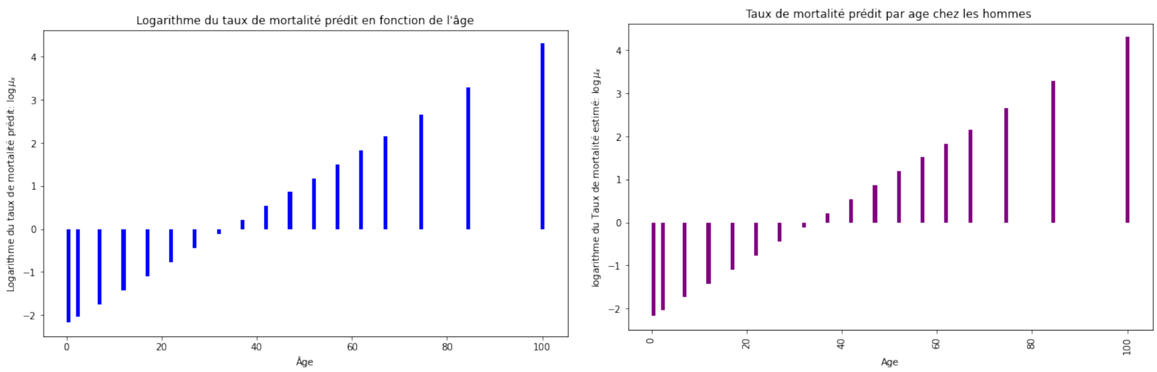


FIGURE 6 – log Taux de mortalité par catégorie d'âge et année estimé par Lee carter

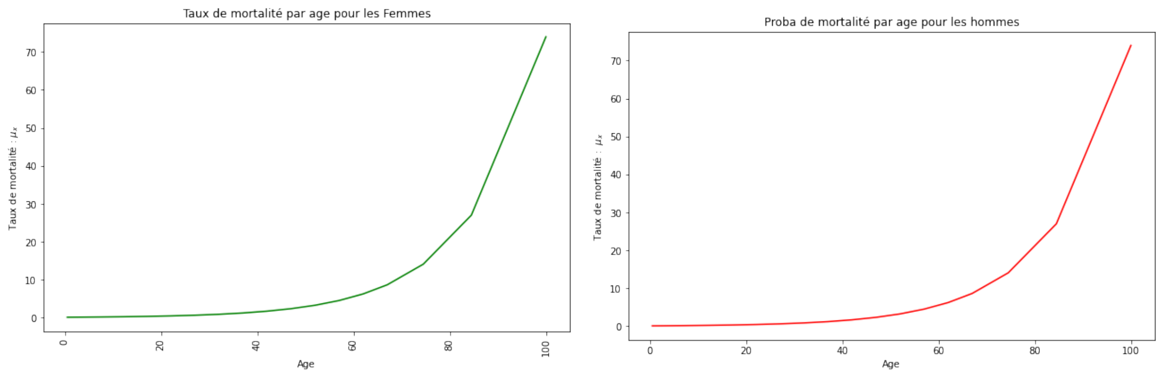


FIGURE 7 – Taux de mortalité par catégorie d'âge et année estimé par Lee carter

	age	Taux_mort_estimée	probabilite_mortalite	probabilite_survie
0	0.5	0.000011	0.000011	0.999989
1	2.5	0.000013	0.000013	0.999987
2	7.0	0.000017	0.000017	0.999983
3	12.0	0.000024	0.000024	0.999976
4	17.0	0.000033	0.000033	0.999967
5	22.0	0.000046	0.000046	0.999954
6	27.0	0.000064	0.000064	0.999936
7	32.0	0.000089	0.000089	0.999911
8	37.0	0.000123	0.000123	0.999877
9	42.0	0.000170	0.000170	0.999830
10	47.0	0.000235	0.000236	0.999764
11	52.0	0.000326	0.000326	0.999674
12	57.0	0.000451	0.000451	0.999549
13	62.0	0.000625	0.000625	0.999375
14	67.0	0.000865	0.000866	0.999134
15	74.5	0.001409	0.001411	0.998589
16	84.5	0.002700	0.002707	0.997293
17	100.0	0.007399	0.007454	0.992546

	age	Taux_mort_estimée	probabilite_mortalite	probabilite_survie
0	0.5	0.001144	0.001145	0.998855
1	2.5	0.001303	0.001304	0.998696
2	7.0	0.001746	0.001749	0.998251
3	12.0	0.002417	0.002422	0.997578
4	17.0	0.003345	0.003357	0.996643
5	22.0	0.004631	0.004653	0.995347
6	27.0	0.006411	0.006453	0.993547
7	32.0	0.008876	0.008955	0.991045
8	37.0	0.012287	0.012440	0.987560
9	42.0	0.017010	0.017304	0.982696
10	47.0	0.023548	0.024116	0.975884
11	52.0	0.032598	0.033697	0.966303
12	57.0	0.045128	0.047261	0.952739
13	62.0	0.062473	0.066636	0.933364
14	67.0	0.086485	0.094673	0.905327
15	74.5	0.140869	0.163967	0.836033
16	84.5	0.269968	0.369803	0.630197
17	100.0	0.739916	2.844907	-1.844907

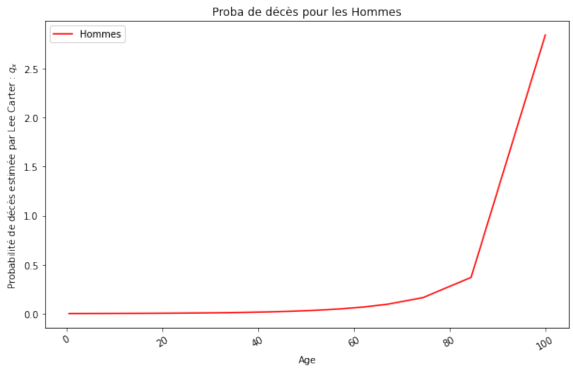


FIGURE 8 – Probabilités de décès par âge chez les femmes et les hommes

Observations : D'après la figure ci-dessus, il est évident que les femmes ont des probabilités de décès nettement plus faibles que celles des hommes. Cela vient renforcer notre analyse initiale.

IV Prédiction du taux de mortalité pour les 5 prochaines années

Nous avons réalisé des prévisions sur une période de 5 ans et avons constaté que les femmes continuent d'avoir une espérance de vie plus élevée que les hommes, comme en témoignent les graphiques ci-dessous :

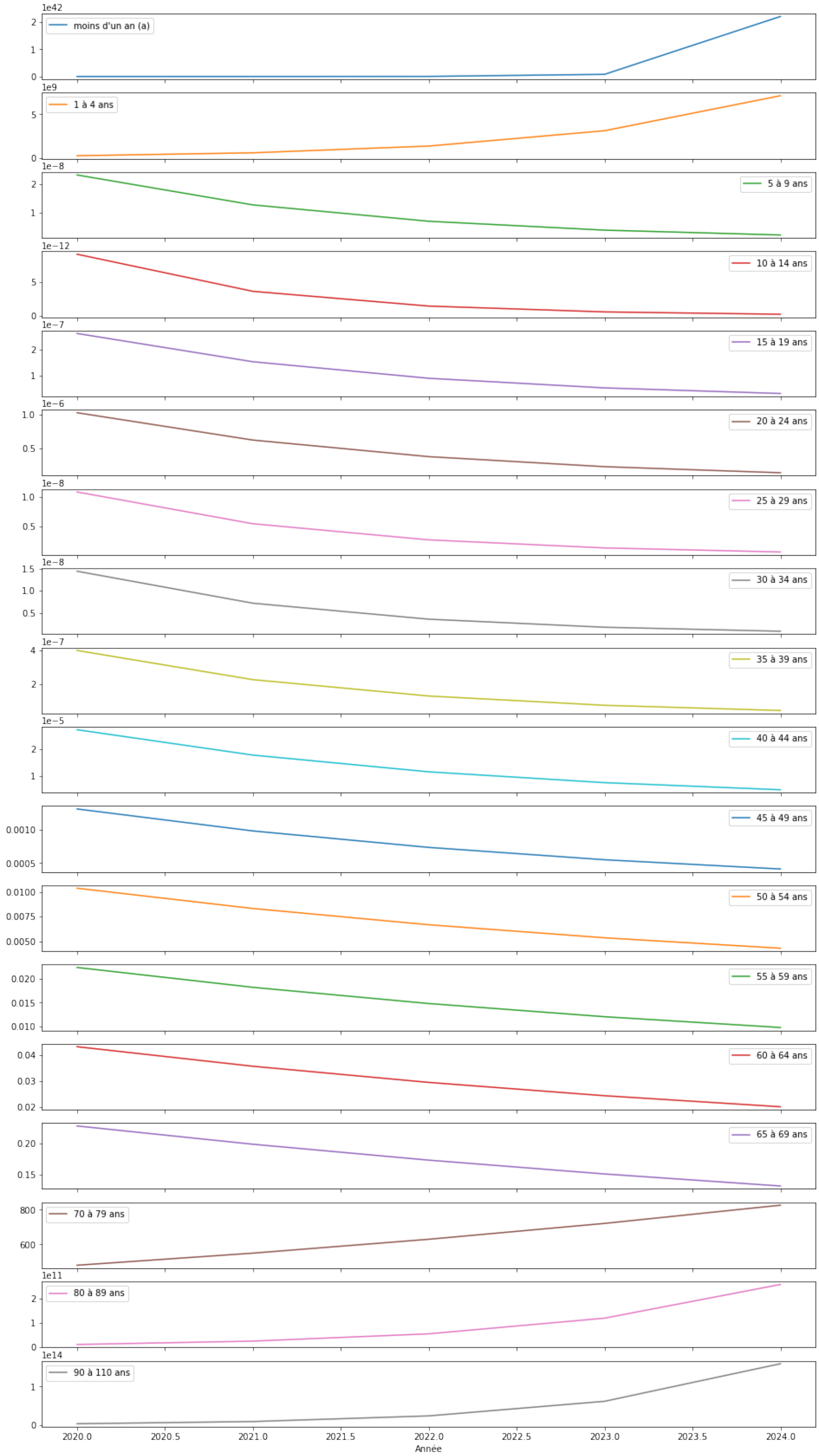


FIGURE 9 – Taux de mortalité prédis pour les 5 prochaines années chez les Femmes

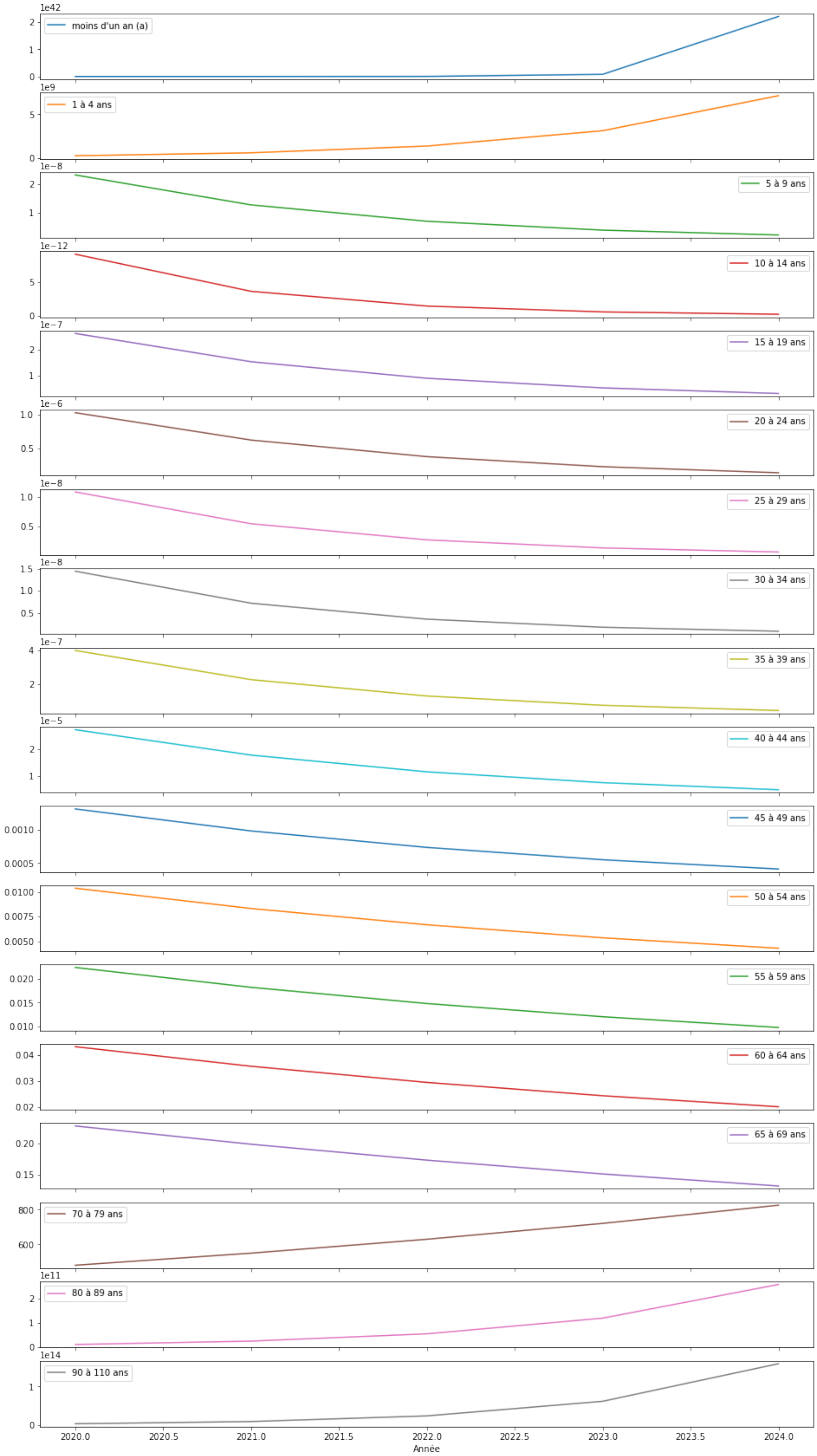


FIGURE 10 – Taux de mortalité prédis pour les 5 prochaines années chez les Hommes

Maintenant, nous souhaitons par exemple déterminer la prime que les femmes ont cotisés pendant ces 25 ans passées pour chaque âge :
Prenons l'exemple suivant : supposons que le salaire moyen annuel des femmes est : $S = 25000$ euro par ans.
Nous avons donc le Capital que l'assureur doit verser à l'assuré est d'une valeur de $C = S * 2$, ici nous n'avons pas pris

en compte de nombreux autres facteurs qui peuvent influencer la prime d'assurance, tels que les antécédents médicaux de l'assuré, les risques professionnels, etc.
Donc :

$$C = 50000$$

Et la valeur de la prime est $P = C * q_x$.
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

age	Prime_femme
0.5	49999,42811
2.5	49999,34865
7.0	49999,12715
12.0	49998,79166
17.0	49998,32721
22.0	49997,68423
27.0	49996,79408
32.0	49995,56175
37.0	49993,85567
42.0	49991,49364
47.0	49988,22338
52.0	49983,69546
57.0	49977,42585
62.0	49968,74387
67.0	49956,71992
74.5	49929,46621
84.5	49864,65071
100.0	49627,28438

V Conclusion

En conclusion, l'utilisation du modèle de Lee-Carter pour estimer le taux de mortalité a permis de déterminer avec précision les probabilités de décès et de survie chez les hommes et les femmes pour chaque âge. Les résultats ont révélé que le taux de mortalité chez les hommes est plus élevé que chez les femmes, ce qui a des implications importantes pour les contrats d'assurance vie en cas de décès. En utilisant ces estimations, il a été possible de prédire que les hommes continueront à avoir un taux de mortalité plus élevé que les femmes au cours des cinq prochaines années. Ces prévisions ont permis de calculer les primes et le capital nécessaires pour les contrats d'assurance vie en cas de décès. En fin de compte, ces informations précieuses aideront les assureurs à élaborer des contrats d'assurance vie en cas de décès qui reflètent avec précision les risques associés à l'âge et au sexe de chaque client.