UFR des Mathématiques

M2-Probabilités Et Statistiques Des Nouvelles Données

Méthodes numériques pour les produits structurés en actuariat

Djamila AZZOUZ

Valorisation d'un contrat euro épargne mono-support avec PB et option de rachat sous Solvabilité 2

Professeur référent :

Jacques PRINTEMPS

Année académique : 2022 - 2023

Table des matières

I Introduction **3**

II Présentation du contrat épargne mono-support : **4**

III Conclusion **7**

I Introduction

Le provisionnement est un processus clé de la gestion des risques d'une entreprise d'assurance. Sous Solvabilité 2, le cadre réglementaire européen pour les compagnies d'assurance, les exigences en matière de provisionnement ont été considérablement renforcées pour garantir une gestion plus efficace et plus prudente des risques.

Le provisionnement sous Solvabilité 2 est un processus complexe qui implique une estimation prudente et réaliste des engagements futurs de l'entreprise envers ses assurés, ainsi que des exigences réglementaires en matière de fonds propres. Les compagnies d'assurance doivent désormais fournir des informations détaillées sur leurs réserves techniques et leur situation financière à l'autorité de surveillance, ainsi qu'aux parties prenantes telles que les actionnaires et les clients.

Les exigences de provisionnement sous Solvabilité 2 ont pour objectif de renforcer la stabilité et la solidité financière des entreprises d'assurance, en garantissant qu'elles disposent de suffisamment de fonds propres pour faire face à d'éventuels chocs économiques et financiers. Cela permet de protéger les intérêts des assurés et des autres parties prenantes, tout en favorisant la concurrence équitable sur les marchés de l'assurance.

Les contrats euro épargne mon-support, qui permettent aux investisseurs de placer leur argent dans différents fonds, sont devenus particulièrement populaires. Cependant, l'évaluation de la valeur de ces contrats peut poser des défis importants aux assureurs qui les émettent, notamment en termes de conformité avec les exigences de solvabilité 2. Dans ce contexte, ce projet a pour objectif d'étudier la valorisation des contrats euro épargne mon-support sous solvabilité 2, afin de proposer des solutions pour répondre aux exigences réglementaires. Dans la suite, nous allons examiner en détail les différentes dimensions de ce projet.

II Présentation du contrat épargne mono-support :

Les contrats en euros mono-support garantissent les sommes versées par l'assureur et les revalorisent chaque année selon sa politique de participation aux bénéfices. Différentes options sont proposées, notamment le Taux Minimum Garanti (TMG), qui est soumis à une réglementation stricte : il ne peut dépasser 85% du rendement des actifs de l'assureur des deux dernières années, doit être exprimé annuellement et dépend du financement de l'assureur. La Participation aux Bénéfices (PB) est une obligation pour les assureurs de reverser une partie des bénéfices dans un délai de 8 ans. L'option de rachat permet à l'assuré de percevoir la valeur de rachat de son contrat à tout moment, garantie par l'assureur. Dans notre cas, nous avons choisit d'étudier uniquement avec l'option de rachat.

Nous pouvons donc résumer le contrat épargne mono-support avec PB et option de rachat sous les points suivants :

- Versement initial d'une prime unique P en $t = 0$.
- Revalorisé à un taux $r_s = r_s(t)$ **"taux servi"** sur un horizon de temps $T > 0$.
- Évaluer la clause de rachat sur $[0, T]$, modélisé par un taux instantané de sortie μ.
  Nous pouvons donc écrire les formules suivantes :
- Valeur de rachat à l'instant t :
$$VR(t) = VR(0).e^{\int_0^t r_s(u)du}$$
- Le flux de trésorerie aléatoire :
$$F_t = VR(\mu).\mathbb{1}_{t<\mu<T} + VR(T).\mathbb{1}_{\mu>T}$$

Le rachat d'un contrat d'épargne peut être motivé par différents facteurs. D'une part, il peut répondre à un besoin de liquidité immédiate de la part du souscripteur, c'est ce que l'on appelle un rachat structurel. D'autre part, le rachat peut être lié à une variation des taux d'intérêt, dans le cas où le souscripteur souhaite profiter d'une hausse des taux pour récupérer son capital, c'est ce que l'on appelle un rachat conjoncturel.

Best Estimate dans le cas de participation aux bénéfices et rachat :
Nous rappelons que ce projet vise à mesurer l'impact du phénomène de rachat sur une politique de participation aux bénéfices, en continuité avec [BPJ14]. Dans cette optique, nous cherchons à évaluer le Best Estimate. Plus précisément, nous allons proposer une méthode pour expliciter le taux de revalorisation, également appelé taux servi, ainsi que le taux de rachat, représenté par la fonction de hasard liée à l'instant de rachat.
Nous avons deux facteurs de risques dans ce cas :

- Taux sans risques court $r(t)$.
- Spread entre r_s et r où : $r_s = r(t) + x(t)$
  Tel que : $x(t)$ désigne un facteur de risque lié à la politique de PB.
  Plus généralement, nous avons :
$$r_s(t) = f(t, x(t), r(t)) \qquad \mu(t) = g(t, x(t), r(t)) \tag{1}$$
  Où f et g sont des f^θ déterministes connues de l'assureur.
  Représentation probabiliste du Best Estimate :

  Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ supportant $x(t)$ et $r(t)$, $\mathbb{P} = Q^h \otimes \mathbb{P}^x$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
  - τ est : $\mathbb{F}$-temps d'arrêt d'intensité μ.
  - P^x : non mutualisable et non couvrable.

  Ici, le risque démographique est supposé complètement mutualisé par le biais d'une fonction de hasard déterministe qui s'agrègera avec la partie structurelle du taux de rachat.
  Ainsi le Best Estimate s'écrit sous la formule suivante :
$$\begin{aligned} BE(t,T) &= \mathbb{E}^{Q^h\otimes\mathbb{P}^x}(e^{-\int_t^\tau r(s)ds} \times VR(\tau)\mathbb{1}_{t<\tau\leq T}|\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}^{Q^h\otimes\mathbb{P}^x}(e^{-\int_t^T r(s)ds} \times VR(T)\mathbb{1}_{\tau>T}|\mathcal{F}_t) \\ &= BE_d(t,T) + BE_s(t,T) \end{aligned}$$
  En particulier on a :
$$BE_d(t,T) = \mathbb{1}_{\tau>t}\int_t^T \mathbb{E}^{Q^h\otimes\mathbb{P}^x}[e^{-\int_t^s (r(u)+\mu(u))ds}\mu(s)VR(s)|\mathcal{F}_t]ds$$
  Et :
$$BE_s(t,T) = \mathbb{1}_{\tau>t}\mathbb{E}^{Q^h\otimes\mathbb{P}^x}[e^{-\int_t^T (r(s)+\mu(s))ds}VR(T)|\mathcal{F}_t]$$
  Soit sur $\tau > t$:
$$BE(t,T) = \mathbb{E}^{Q^h\otimes\mathbb{P}^x}[\int_t^T e^{-\int_t^s (r(u)+\mu(u))ds}\mu(s)VR(s)ds + e^{-\int_t^T (r(s)+\mu(s))ds}VR(T)|\mathcal{F}_t]$$

— L'expression pour $BE(t,T)$ sur $\tau > t$ peut être vu comme une formule d'évaluation risque-neutre pour un actif artificiel payant continûment à chaque instant s des dividendes au taux $VR(s).\mu(s)$ sous un taux d'actualisation abstrait $r+\mu$.

Nous définissons l'expression en fonction du ratio BE/PM (Best Estimate/Provision Mathématique) qui est un indicateur qui permet d'évaluer la solvabilité de l'assureur en comparant les provisions mathématiques (PM) des contrats en cours avec leur Best Estimate (BE), c'est-à-dire la meilleure estimation de leur valeur future en prenant en compte les différents risques financiers. Plus précisément, le ratio BE/PM mesure la capacité de l'assureur à couvrir les risques financiers de ses engagements vis-à-vis de ses clients, en particulier en cas de variation importante des taux d'intérêts ou d'autres événements qui pourraient impacter la valeur des contrats. Un ratio BE/PM élevé indique une meilleure solvabilité de l'assureur, tandis qu'un ratio faible peut être un signe de risque accru pour les assurés.
On pose donc :

$$\phi(t,x(t),r(t)) = BE(t,T)/PM(t)$$
$$\phi(t,x(t),r(t)) = \mathbb{E}^{Q^h\otimes\mathbb{P}^x}[\int_t^T e^{\int_t^s (r_s(u)-r(u)-\mu(u))ds}\mu(s)ds + e^{\int_t^s (r_s(s)-r(s)-\mu(s))ds}\mu(s)ds|\mathcal{F}_t]$$

Dans le cadre de ce projet, nous allons estimer le **"Best Estimate"** à l'aide de la méthode de Monte Carlo qui est une méthode numérique utilisée en mathématiques, en physique, en finance, et dans d'autres domaines, pour estimer des résultats complexes qui ne peuvent pas être obtenus de manière analytique. Elle consiste à simuler un grand nombre de scénarios aléatoires en utilisant des nombres pseudo-aléatoires générés par ordinateur. Pour chaque scénario, on calcule une ou plusieurs valeurs d'intérêt à partir d'un modèle mathématique. Ensuite, on agrège les résultats obtenus pour obtenir une estimation statistique de la valeur d'intérêt en question, ainsi que des mesures de risque associées.

La méthode Monte Carlo est particulièrement utile pour estimer la valeur et le risque de produits financiers complexes tels que les options, les produits structurés ou les contrats d'assurance, ainsi que pour évaluer les performances de systèmes complexes ou de modèles mathématiques utilisés en physique, en ingénierie ou en biologie. Elle peut également être utilisée pour résoudre des équations différentielles, des problèmes d'optimisation, et pour effectuer des simulations de processus stochastiques en finance ou en économie.

Résultats de la simulation Par Monte Carlo :
Notons :

$S = \dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^M \int_t^T g(x^i(s),r^i(s)) \times \exp(\int_t^T (f(x^i(u),r^i(u)) - r^i(u) - g(x^i(u),r^i(u)))du +$
$\dfrac{1}{M}\sum_{i=1}^M \exp(\int_t^T (f(x^i(s),r^i(s)) - r^i(s))) - g(x^i(s),r^i(s))ds$

Où S est la fonction que nous souhaitons simuler par Monte Carlo ie :

$$S \xrightarrow[M\to\infty]{PS} \phi(t,x,r)$$

S converge presque sûrement vers ϕ.

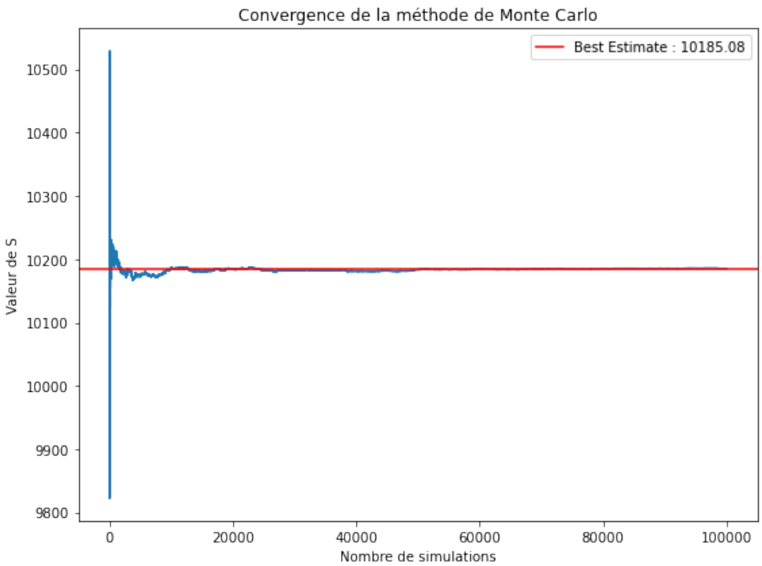


FIGURE 1 – Trajectoire de la valeur de $\phi(t,x,r)$ en fonction du nombre de simulations

Observation : D'après la figure au dessus on voit bien que la méthode de Monte Carlo a bien convergé pour 100000 simulations. Autrement dit on a réussi à approcher S par cette méthode et obtenir un Best estimate égal à $10185,08$, avec un intervalle de confiance à 95% :$[10179.50, 10190.66]$ ce qui montre que le best estimate obtenu est fiable à 95%.
Nous pouvons voir aussi l'histogramme de la distribution de S dans la figure suivante :

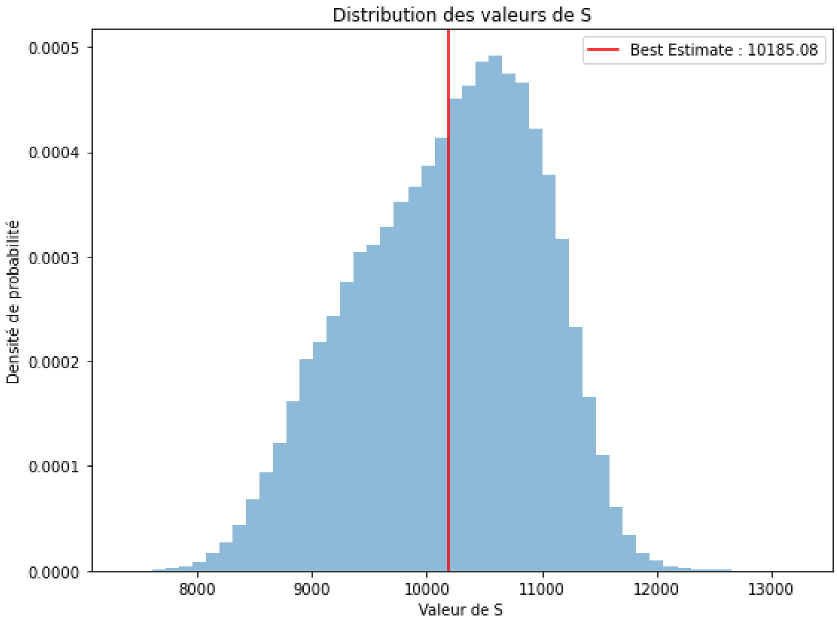


FIGURE 2 – Distribution de la valeur de S

Observation : le Best Estimate (BE) est à peu près autour du résultat obtenu par l'histogramme des valeurs de S, cela signifie que les simulations ont produit des résultats cohérents et que la méthode de Monte Carlo est efficace pour estimer le Best Estimate. L'histogramme des valeurs de S montre la distribution des résultats des simulations, cela indique que les simulations ont produit des résultats qui sont globalement proches de la valeur attendue.

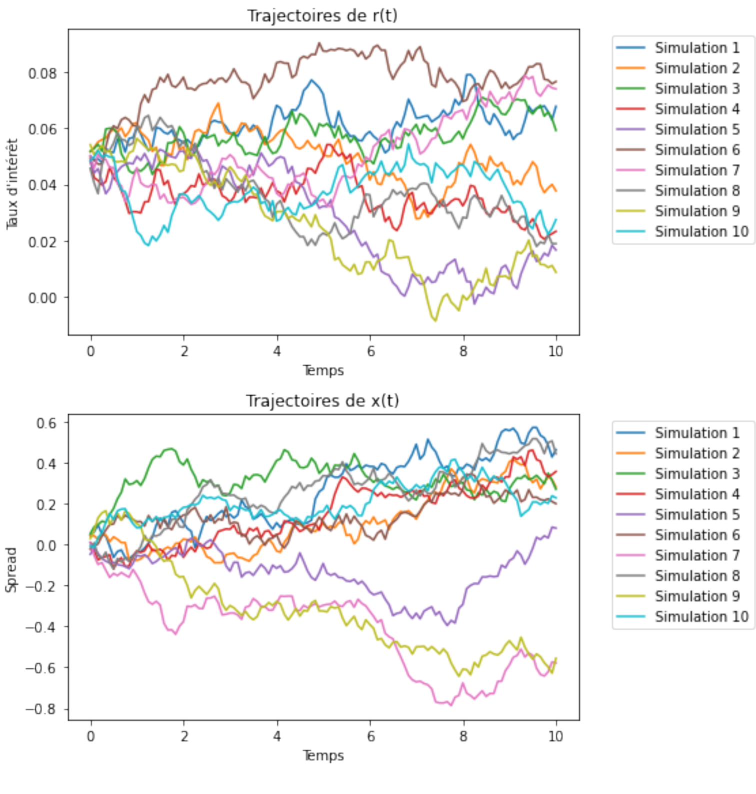


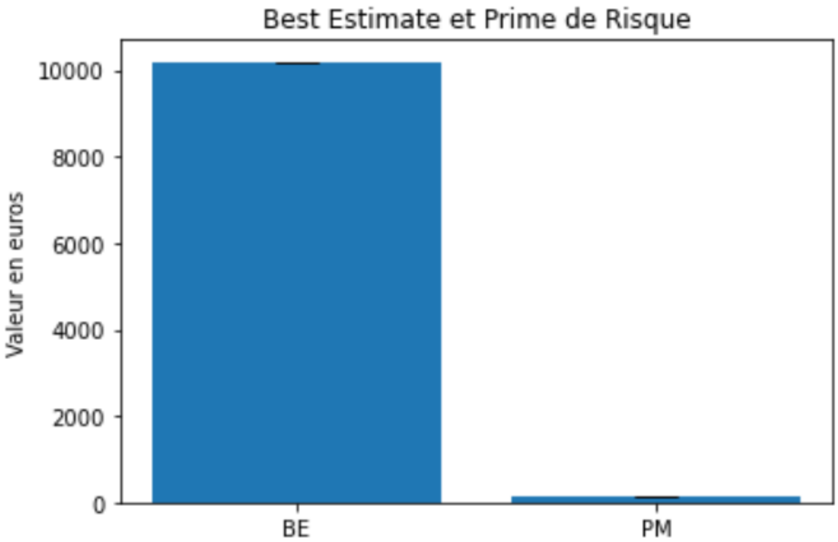
FIGURE 3 – Trajectoires de $r(t)$ et $x(t)$

Observation : Les graphes des trajectoires de r(t) et x(t) représentent les simulations de l'évolution du taux sans risque court et du spread entre le taux de rachat et le taux sans risque court au cours du temps, selon la méthode de Monte Carlo. Chaque ligne du graphe représente une trajectoire aléatoire différente, correspondant à une simulation de la variable correspondante. En effet, Ces graphes permettent de visualiser l'incertitude associée à l'évolution de ces variables, en montrant différentes trajectoires possibles.

Calcul Du BE/PM :
Nous avons obtenu le résultat suivant pour BE/PM qui peut être qualifié comme étant le ratio entre le Best Estimate (BE) et la Prudent Margin (PM) : Pour $BE = 10188.57$ et $PM = 119.18$
Nous avons :

$$BE/PM = 85,48$$

Nous présentons ces deux proportions sous l'histogramme suivant :



Le résultat $BE/PM = 10188.57/119.18 = 85,48$ signifie que le Best Estimate (BE) obtenu par simulation Monte Carlo est en moyenne 85,48 fois supérieur à la Prime Mensuelle (PM) payée par le souscripteur du contrat. Autrement dit, en moyenne, le montant que l'assureur doit provisionner pour honorer ses engagements contractuels (BE) est 85,48 fois supérieur à la prime mensuelle payée par l'assuré. Cela indique une forte incertitude quant au montant réel que l'assureur doit provisionner pour ce type de contrat, et souligne l'importance de bien gérer les risques associés à ce type de contrat.

III Conclusion

En conclusion, nous avons étudié la valorisation d'un contrat euro épargne en utilisant la méthode de Monte Carlo. Nous avons simulé les trajectoires de l'évolution des taux d'intérêt et du spread, puis nous avons calculé le Best Estimate en simulant le nombre de rachats possibles pendant la durée du contrat. Enfin, nous avons tracé l'histogramme des valeurs de S pour évaluer la distribution des résultats possibles.

Nous avons constaté que la méthode de Monte Carlo nous permet d'obtenir une estimation réaliste et robuste du Best Estimate, en prenant en compte les incertitudes liées aux mouvements des marchés financiers et à l'intensité de rachat. Nous avons également souligné l'importance de la vérification de la cohérence des résultats et de l'utilisation d'un intervalle de confiance pour valider l'estimation du Best Estimate.

Enfin, la méthode de Monte Carlo est un outil précieux pour les professionnels de l'assurance et de la finance qui cherchent à évaluer les risques associés aux produits financiers complexes tels que les contrats euro épargne.

Explication du code python :
On simule des trajectoires pour les variables aléatoires $r(t)$ et $x(t)$, puis on calcule le Best Estimate (BE) et le provisionnement de marge (PM) d'un contrat d'assurance en utilisant la méthode de Monte Carlo.

On commence par définir les paramètres du modèle, tels que le taux sans risque court r, le spread entre le taux sans risque et le taux de rendement x, l'horizon de projection T, le pas de temps h, le nombre de simulations M, la valeur de rachat VR et l'intensité de rachat μ.

Ensuite, on utilise la méthode de Monte Carlo pour simuler les trajectoires de $r(t)$ et $x(t)$. Pour cela, on utilise la fonction numpy.linspace pour générer un vecteur de temps t avec $N+1$ éléments, où N est calculé en fonction de T et h. on génère ensuite des vecteurs de bruit blanc gaussien dB1 et dB2 de taille $(M, N+1)$, qu'on utilise pour simuler les trajectoires de $r(t)$ et $x(t)$ en utilisant des intégrales de type Riemann-Stieltjes.

Ensuite, on calcule le Best Estimate et le provisionnement de marge pour chaque simulation en utilisant une boucle. Pour chaque simulation, on calcule le prix du contrat à chaque pas de temps en actualisant la valeur de rachat et en prenant en compte les éventuels rachats partiels ou totaux du contrat. Le provisionnement de marge est calculé lorsque le contrat est partiellement racheté. Les Best Estimate et provisionnement de marge sont ensuite calculés comme la moyenne des valeurs obtenues sur les M simulations.

Enfin, on affiche les résultats et tracer des graphiques pour visualiser les trajectoires simulées, la convergence de la méthode de Monte Carlo et la distribution des valeurs de S.

Dajmila AZZOUZ / M2 probabilités et statistiques des nouvelles données

Estimation du Best Estimate avec Monte Carlo

In [ ]:

```python
import numpy as np
# Définition des paramètres
r = 0.05  # taux sans risque court
x = 0.01  # spread entre rs et r
T = 10  # horizon de projection
h = 1/12  # pas de temps
M = 100000  # nombre de simulations
VR = 100  # valeur de rachat
mu = 0.01  # intensité de rachat

# Simulation des trajectoires de r(t) et x(t)
N = int(T/h)
t = np.linspace(0, T, N+1)
dB1 = np.sqrt(h)*np.random.normal(size=(M, N+1))
B1 = np.cumsum(dB1, axis=1)
r_t = r*np.ones((M, N+1)) + x*B1

dB2 = np.sqrt(h)*np.random.normal(size=(M, N+1))
B2 = np.cumsum(dB2, axis=1)
x_t = x*np.ones((M, N+1)) + 0.1*B2

# Calcul du Best Estimate par la méthode de Monte Carlo
S = np.zeros(M)
PM = np.zeros(M)
for i in range(M):
    Q = VR
    for j in range(1, N+1):
        L = np.exp(-mu*(t[j]-t[j-1])) # facteur de rachat
        Z = np.random.poisson(mu*L) # nombre de rachats pendant l'intervalle
        Q = Q*np.exp(-r_t[i,j]*(t[j]-t[j-1])) # actualisation du contrat
        if Z > 0:
            PM[i] = PM[i] + VR*np.exp(-r_t[i,j]*(t[j]-t[j-1]))*Z # provisionnement de marge en cas de rachat
            Q = VR # rachat total en cas de rachat
        S[i] = S[i] + Q

BE = np.mean(S) # Best Estimate
PM = np.mean(PM) # Provisionnement de Marge
# Calcul de l'intervalle de confiance à 95%
alpha = 0.05
m = np.mean(S)
s = np.std(S, ddof=1)
n = len(S)
t = np.abs(np.random.standard_t(df=n-1, size=100000))
t_alpha = np.percentile(t, 100*(1-alpha/2))
CI_low = m - t_alpha*s/np.sqrt(n)
CI_high = m + t_alpha*s/np.sqrt(n)

print("Best Estimate: {:.2f}".format(BE))
print("Le Provisionnement de Marge est :", round(PM, 2))
print("Intervalle de confiance à 95%: [{:.2f}, {:.2f}]".format(CI_low, CI_high))
```

In [ ]:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(nrows=2, ncols=1, figsize=(8, 8))
for i in range(10):
    ax1.plot(t, r_t[i], label=f"Simulation {i+1}")
    ax2.plot(t, x_t[i], label=f"Simulation {i+1}")
ax1.set_xlabel("Temps")
ax1.set_ylabel("Taux d'intérêt")
ax1.set_title("Trajectoires de r(t)")
ax1.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1))

ax2.set_xlabel("Temps")
ax2.set_ylabel("Spread")
ax2.set_title("Trajectoires de x(t)")
ax2.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1))

plt.tight_layout()
plt.show()
# Estimation de l'intervalle de confiance à 95%
alpha = 0.05
z = 1.96 # quantile de la loi normale centrée réduite
CI_inf = BE - z*PM/np.sqrt(M)
CI_sup = BE + z*PM/np.sqrt(M)

# Affichage du Best Estimate et de la Prime de Risque
plt.bar(['BE', 'PM'], [BE, PM], yerr=[CI_sup-BE, 0], capsize=10)
plt.title('Best Estimate et Prime de Risque')
plt.ylabel('Valeur en euros')
plt.show()


fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

cumulative_S = np.cumsum(S)
ax.plot(range(1, M+1), cumulative_S/np.arange(1, M+1))
ax.axhline(y=BE, color='r', label=f"Best Estimate : {BE:.2f}")
ax.set_xlabel("Nombre de simulations")
ax.set_ylabel("Valeur de S")
ax.set_title("Convergence de la méthode de Monte Carlo")
ax.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

ax.hist(S, bins=50, density=True, alpha=0.5)
ax.axvline(x=BE, color='r', label=f"Best Estimate : {BE:.2f}")
ax.set_xlabel("Valeur de S")
ax.set_ylabel("Densité de probabilité")
ax.set_title("Distribution des valeurs de S")
ax.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```