



M2 probabilités et statistiques des nouvelles données

Approche d'une double intégrale par Monte Carlo

Djamila AZZOUZ
RAZAFIMANDIMBY Henimpitahiana

Professeur référent
Mr JEANTHEAUThierry

Année académique 2022 - 2023

I Introduction

La méthode de Monte Carlo est l'implémentation numérique de la Loi Forte des Grands Nombres (LFGN) lorsque l'on veut estimer une moyenne.

Dans ce mini projet nous allons utiliser 4 méthodes différentes pour estimer la valeur de notre double intégrale :

— **Méthode 1 "volume" :**

— **Étape 1 : Choix de la fonction à intégrer**

Prenons :

$$\begin{aligned}\phi &: [0, 2] \times [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = x^2 \exp(-y)\end{aligned}$$

Rappelons que le but est de simuler

$$I = \int_0^2 \int_0^2 \phi(x, y) dx dy \quad (1)$$

En utilisons la méthode de Monte Carlo et à l'aide de la méthode 1 :

— **Étape 2 : Visualisation de la fonction ϕ en 3D**

— Nous allons visualiser la fonction ϕ en 3D, grâce à la fonction "**quad2d**" existante sur *R*.

On obtient la figure ci dessus :

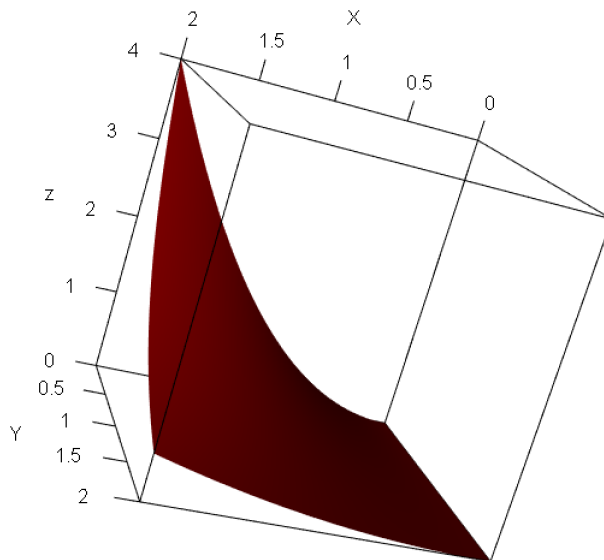


FIGURE 1 – Représentation graphique la fonction phi

D'après les résultats sur *R* on obtient que :

$$I = 2,3$$

— **Étape 3 : Choix de l'estimateur**

— Prenons l'estimateur \hat{I}_1 :

$$\hat{I}_1 = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{w_i \leq \phi(u_i, v_i)\}}$$

Où w_i suit une loi uniforme sur $[0, k]$ pour $k=4$.

Et u_i, v_i suivent une loi uniforme sur $[0, 2]$.

— En utilisant la loi forte des grands nombres, nous avons :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{w_i \leq \phi(u_i, v_i)\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{PS} E(\mathbb{1}_{\{w_1 \leq \phi(u_1, v_1)\}})$$

$$\text{Or } E(\mathbb{1}_{\{w_1 \leq \phi(u_1, v_1)\}}) = P(w_1 \leq \phi(u_1, v_1)) = \frac{I}{k} = \frac{I}{4}$$

Pour que $E(\hat{I}_1) = I$

il faut que $k = 4 * \max(z)$ qui représente l'air totale du cube d'après la figure 3 et que :

$$\hat{I}_1 = \frac{4 * \max(z)}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{w_i \leq \phi(u_i, v_i)\}}$$

— **Étape 4 : Vérification de la convergence de \hat{I}_1**

— Observons la convergence de \hat{I}_1 vers I , pour cela nous allons utiliser "cumsum" sur R .

Nous obtenons la figure suivante :

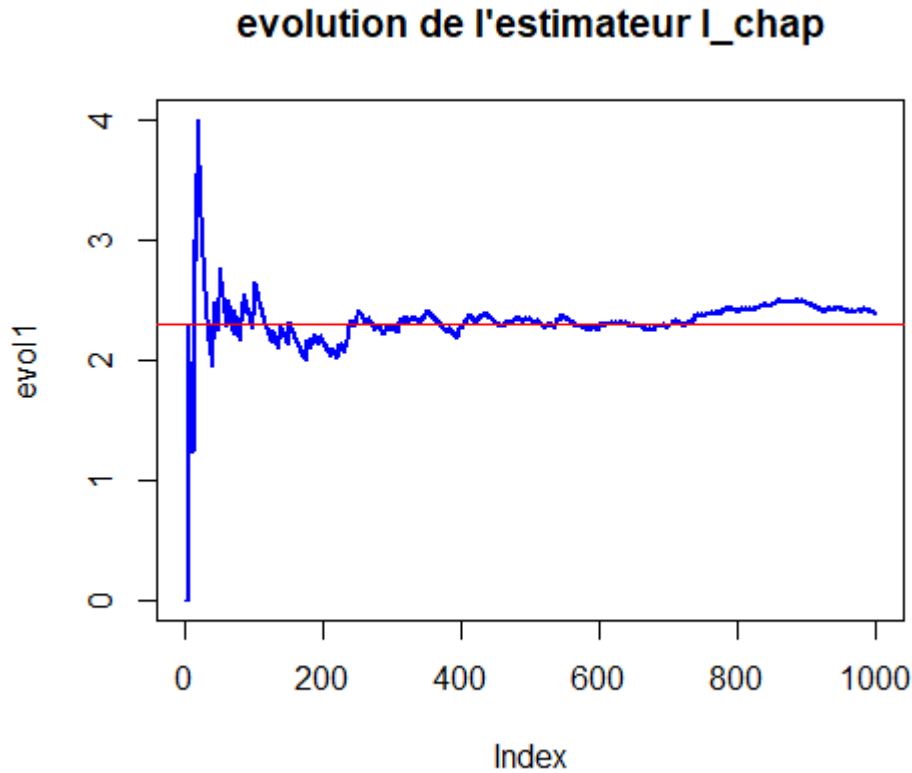


FIGURE 2 – Évolution de l'estimateur Ichap

Observation : nous remarquons que notre estimateur converge bien vers I qui est la valeur de notre double intégrale.

- Nous allons projeter aussi l'histogramme associé à N estimation de I, présenté dans la figure ci dessus :

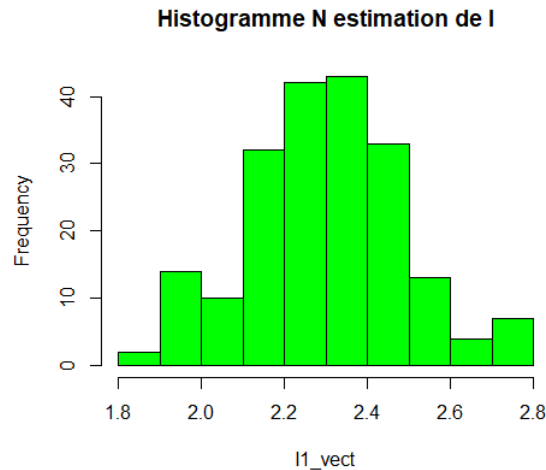


FIGURE 3 – Représentation de l'histogramme de N estimation de I

On remarque que l'histogramme ressemble un peu à la loi normale, mais pas totalement centré.

- Vérifions la qualité de notre estimateur :
L'écart type de cet estimateur est d'une valeur de **0.1667559**.

En effet, la valeur associée à cet estimateur est petite, mais nous pourrions avoir mieux.
C'est pourquoi nous allons utiliser les autres méthodes de simulations pour essayer d'avoir un meilleur estimateur de notre intégrale avec un écart type plus petit que 0.1667559.

- **Méthode 2 "loi uniforme"** : Nous allons procéder de la même façon que dans la méthode 1.

- **Étape 1 : Choix de l'estimateur**

- Nous posons donc :

$$\hat{I}_2 = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n \phi(u_i, v_i)$$

Où u_1, u_2, \dots, u_n et $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ suivent une loi uniforme $[0, 2]$.

- Nous avons bien que $E(\hat{I}_2) = I$

- **Étape 2 : Vérification de la convergence de \hat{I}_2**

- Observons la convergence de \hat{I}_2 vers I , nous obtenons donc la figure ci dessus :

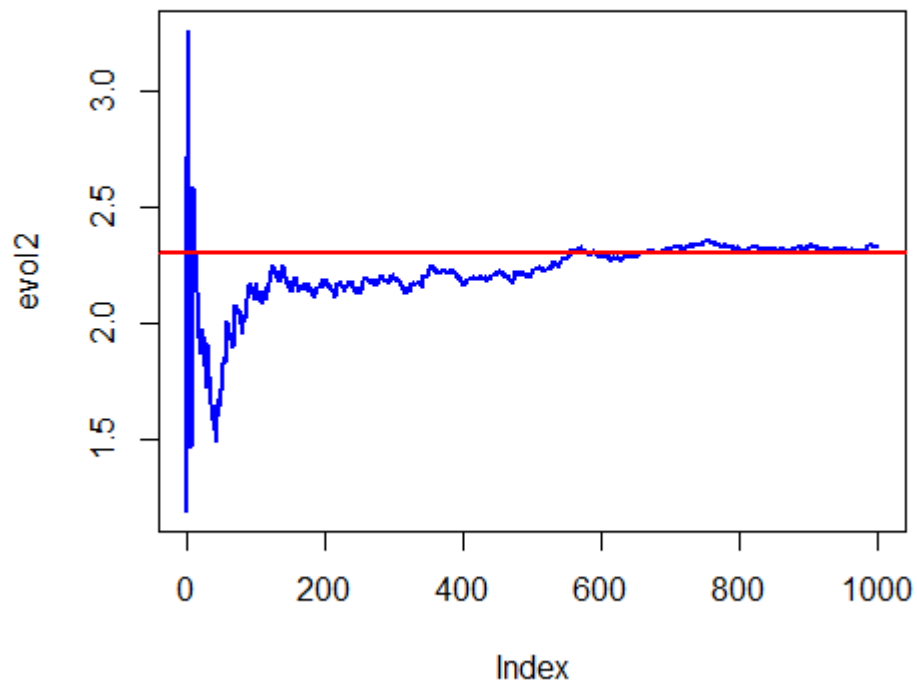


FIGURE 4 – Évolution de l'estimateur Ichap2

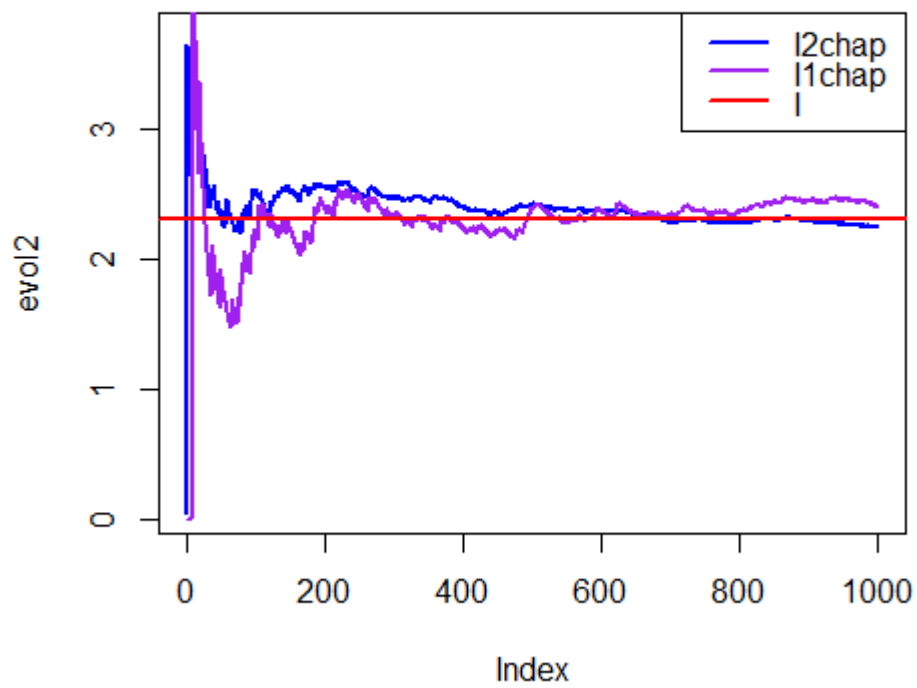


FIGURE 5 – Évolution de Ichap1 et Ichap2

— **Étape 3 :Projection de l'histogramme de \hat{I}_2**

— Regardons aussi l'histogramme de N estimation de I :

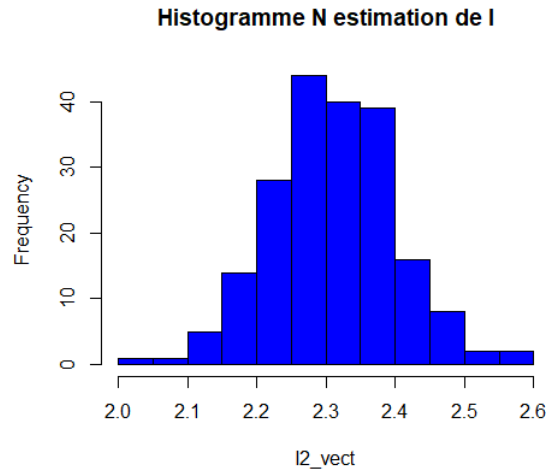


FIGURE 6 – Représentation de l'histogramme de N estimation de I

Nous remarquons que l'histogramme du deuxième estimateur est plus centré que celui dans la méthode 1.

En effet, la valeur associée à l'estimateur \hat{I}_2 est **0.0902909**, qui est petite et meilleur que celle du premier estimateur.
 Nous pouvons confirmer ceci grâce à la figure 4, l'estimateur 2 représenté en bleu converge vers I mieux que le premier estimateur.

$$sd(\hat{I}_2) \leq sd(\hat{I}_1)$$

— **Méthode 3 "Généralisation" :**

Nous allons simuler le couple (z_1, z_2) dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

1. **Étape1 :** Cherchons $p_1(x)$ et $p_2(y)$ les densités respectives de z_1 et z_2 .

Où $p_1(x)$ et $p_2(y)$ sont indépendantes définies sur $[0, 2]$.

Nous avons donc la densité du couple :

$$(z_1, z_2) = p_1(x) \times p_2(y)$$

— Le choix de p_1 et p_2 est basé sur le fait que $p_1(x) \times p_2(y)$ doit ressembler graphiquement à notre fonction $\phi(x, y)$.

— Prenons donc :

$$p_1(x) = \frac{1}{\exp(2) - 1} \exp(x)$$

Vérifions que cette fonction est bien une densité :

— $p_1(x) > 0$ est positive car l'exponentielle est positive.

— Montrons que $\int_0^2 p_1(x) dx = 1$

Nous avons :

$$\int_0^2 p_1(x)dx = \frac{1}{\exp(2) - 1} [\exp(x)]_0^2 = 1$$

D'où $p_1(x)$ est bien une densité.

— ET :

$$p_2(x) = \frac{1}{2}y$$

— $p_2(x) > 0$ ssi $x > 0$
Et

$$\frac{1}{2} \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = 1$$

D'où $p_2(x)$ est aussi une densité.

2. **Étape2** : Maintenant nous allons vérifier que la densité du couple (z_1, z_2) ressemble graphiquement à notre fonction ϕ . La représentation graphique est la suivante :

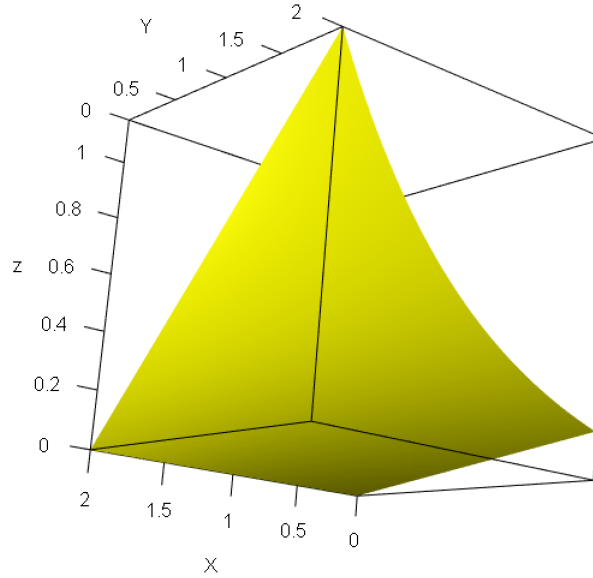


FIGURE 7 – Représentation graphique de la densité du couple

3. **Étape3** : Construction l'estimateur de I :

Dans ce cas à l'aide toujours de la loi forte des grands nombres nous avons :

$$\hat{I}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\phi(z_{1,i}, z_{2,i})}{p_1(z_{1,i}) \times p_2(z_{2,i})}$$

Où :

$$\hat{I}_3 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{PS} E\left(\frac{\phi(z_{1,1}, z_{2,1})}{p_1(z_{1,1}) \times p_2(z_{2,1})}\right)$$

Donc nous avons bien :

$$E(\hat{I}_3) = I$$

Et ceci est confirmé par le graphe de l'évolution de l'estimateur3 présenté si dessous :

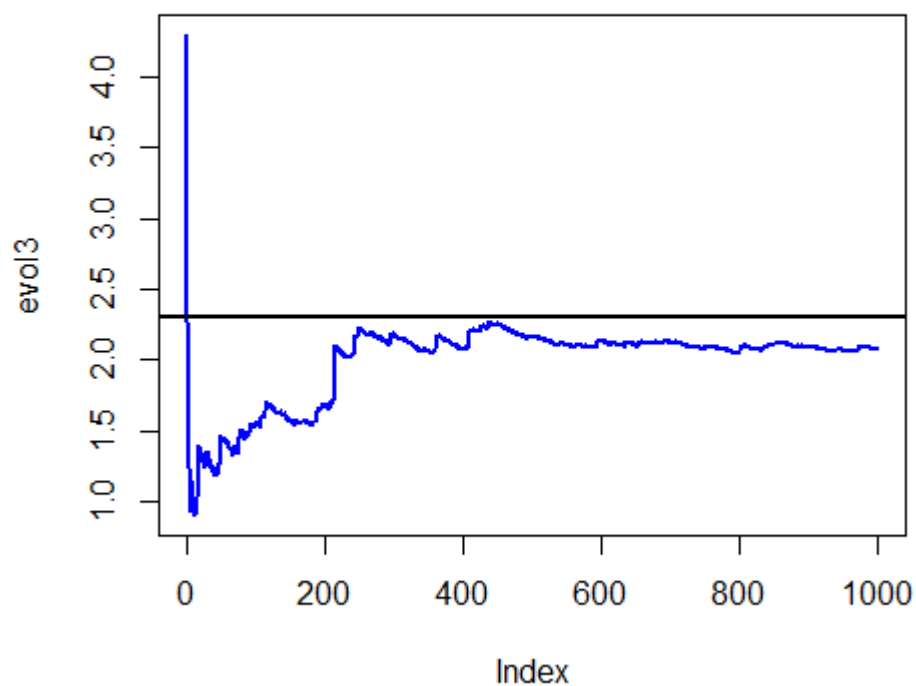


FIGURE 8 – Évolution de l'estimateur Ichap3

— Maintenant nous allons comparer les 3 graphiques associées à l'évolution des trois estimateurs ainsi que leur histogrammes :

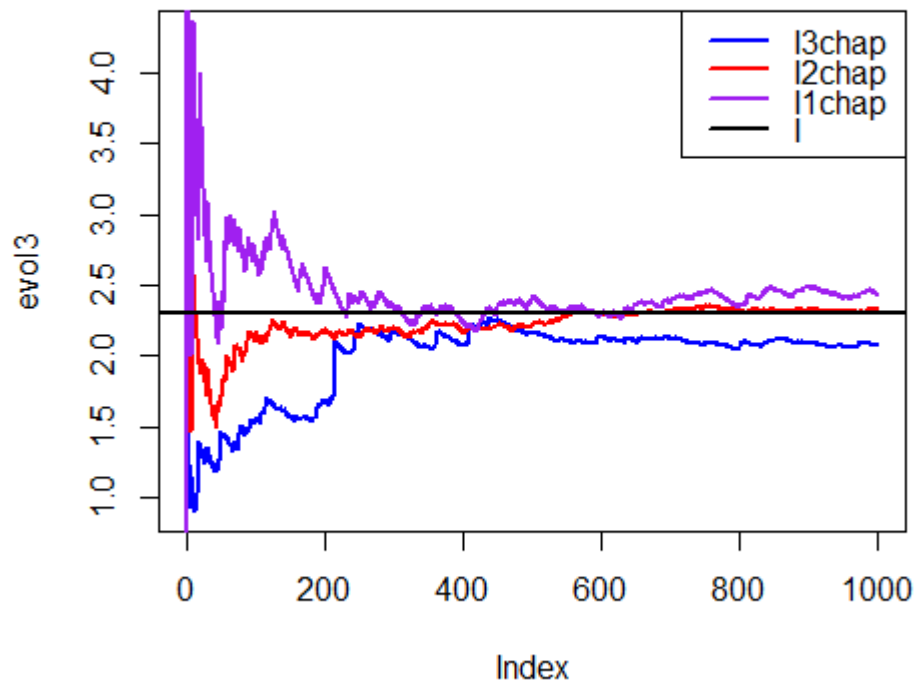
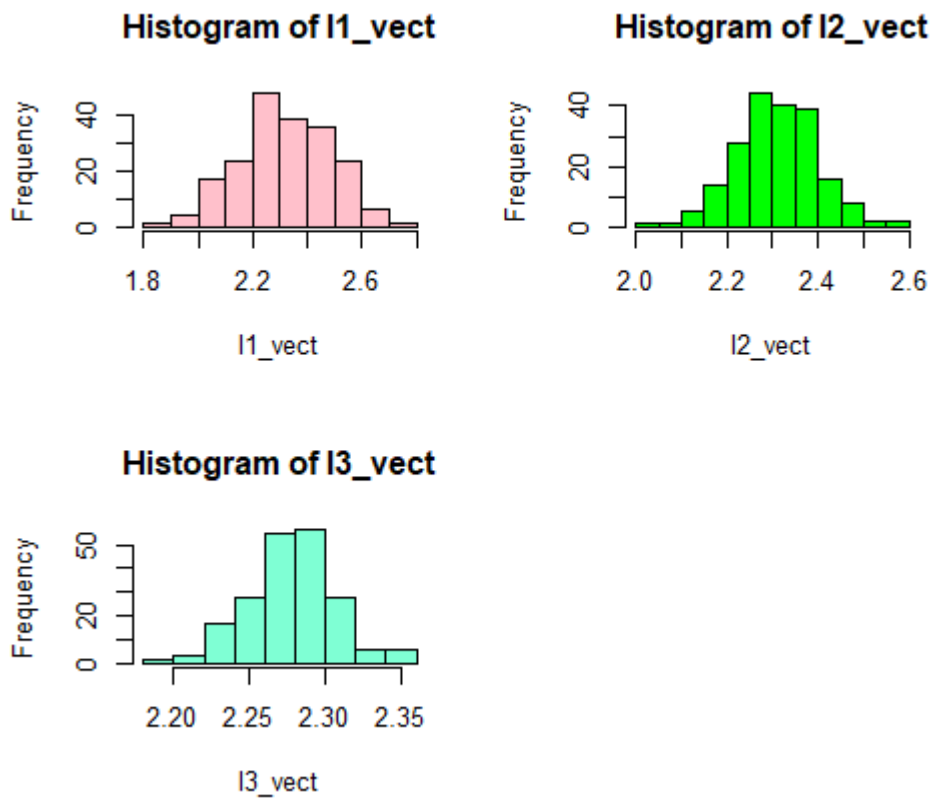


FIGURE 9 – Évolution des 3 estimateurs



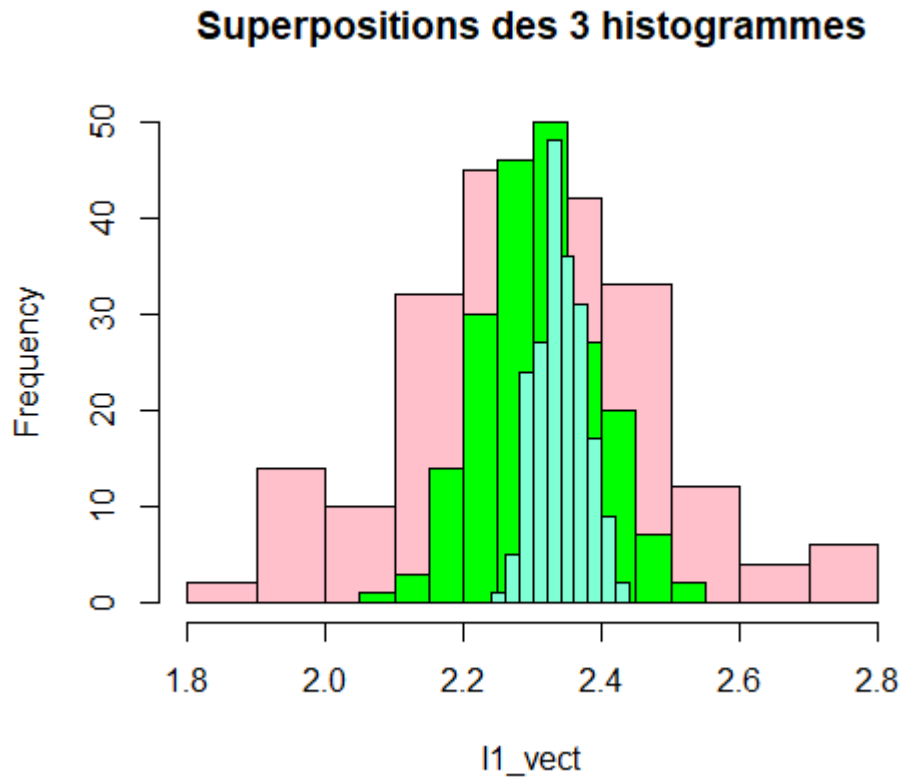


FIGURE 10 – Comparaison entre les 3 histogrammes

on remarque que l'histogramme associé à l'estimateur $I3chap$ est plus centré que les autres.

En effet, d'après le TCL, l'estimateur $I3chap$ converge vers la loi normale centrée réduite plus que les deux premiers estimateurs ;

Nous pouvons confirmer ceci en présentant les valeurs des écarts types de chaque estimateur :

$$sd(\hat{I}_1) = 0.1667559$$

$$sd(\hat{I}_2) = 0.0902909$$

$$sd(\hat{I}_3) = 0.02806624$$

Nous avons bien :

$$sd(\hat{I}_3) < sd(\hat{I}_2) < sd(\hat{I}_1)$$

— **Conclusion :**

On peut dire qu'ici on est dans une dimension 2 pour cela on se permet d'utiliser la méthode de Monte Carlo dont le but est d'estimer la valeur qui rapproche de notre intégral.

On trouve le meilleur estimateur en minimisant l'écart-type.

On conclut que la méthode 3 est la plus efficace car son écart-type est plus petit que les deux autres.

— **Méthode 4 "Simulation avec les copules" :**

Pour approcher l'intégrale par la méthode de copules, nous allons utiliser la copule de Clayton pour $\theta = 5$.

Voici un aperçu de cette copule :

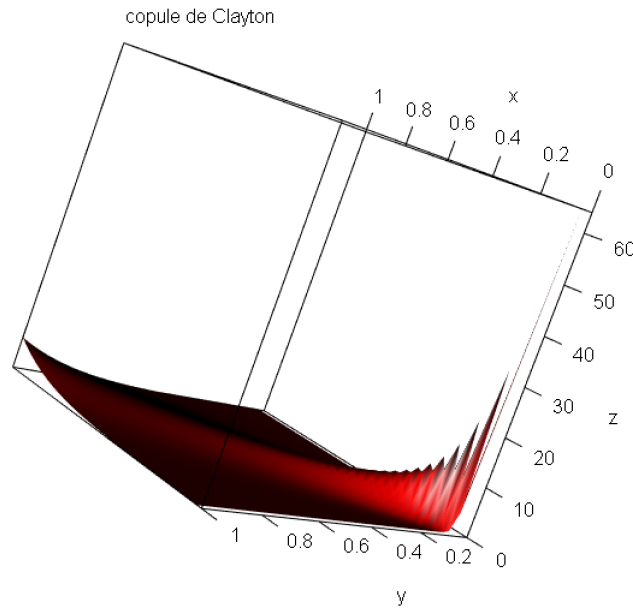


FIGURE 11 – Copule de Clayton

— Pour réaliser l'approximation de I par la méthode des copules, nous allons effectuer 5 étapes :

— **Étape 1 :**

En observons la représentation de la fonction ϕ en 3d (cf 3), nous remarquons que nous avons un pic en $(b, c) = (2, 0)$.

— **Étape 2 :**

Nous allons construire les marginales du couple (U, V) sur $[0, 1] \times [0, 1]$ selon la copule de **Clayton** où la densité est :

$$c(U, V) = (1 + \theta)(UV)^{(-\theta-1)}(U^{-\theta} + V^{(-\theta-1)})^{(-1/\theta-2)}$$

— Puisque le but est d'avoir un pic en $(2, 0)$, nous allons faire une petite transformation pour le couple (U, V) devient $(1 - U, V)$.

On pose : $(1 - U, V) = (U_2, V_2)$. Nous avons donc la densité du Clayton selon le nouveau couple (U_2, V_2) est :

$$c_2(U, V) = (1 + \theta)((1 - U)V)^{(-\theta-1)}((1 - U)^{-\theta} + V^{(-\theta-1)})^{(-1/\theta-2)}$$

— **Étape 3 :**

- A l'aide du logiciel *R*, on trouve les marginales de $(U2, V2)$.
- On les transformes sur l'intervalle $[0, 2] \times [0, 2]$.
Pour s'assurer que nous avons fait la bonne transformation, ci dessus le nuage de points des marginales du couples $(U2, V2)$.

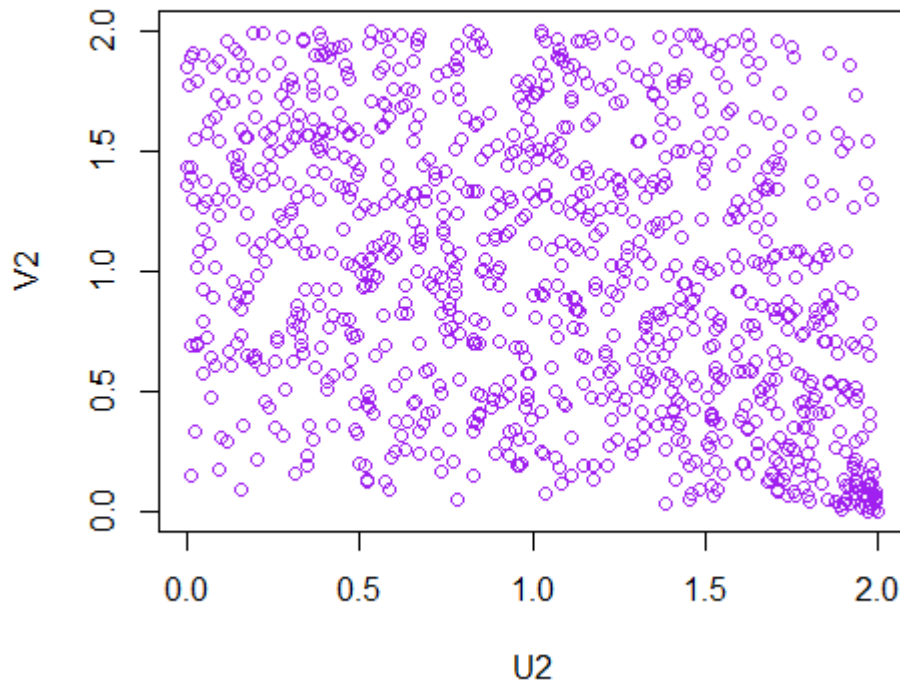


FIGURE 12 – Représentation des marginales

Nous avons bien beaucoup de points en $(2, 0)$, donc notre transformation est bonne.

- **Étape 4 :** On cherche la densité du couple $(U2, V2)$
- On sait que d'après le théorème de **Sklar**, nous avons :

$$H(x, y) = C(F(X), G(Y)) \quad (2)$$

Où C est la fonction de répartition de la copule c' .

Et $F(X)$, $G(Y)$ sont les marginales respectives de $U2$ et $V2$.

- Pour retrouver la densité du couple $(U2, V2)$, il suffit juste de dériver 2. Nous obtenons donc la formule suivante :

$$h(x, y) = f(x) \times g(y) \times c'(F(X), G(Y))$$

Où $f(x)$, $g(y)$ sont les densités marginales respectives de $U2$ et $V2$

— **Étape 5 :**

- Maintenant que nous avons trouvés la densité du couple $(U2, V2)$, nous pouvons construire l'estimateur de l'intégrale I . On pose :

$$\hat{I}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\phi(U2, V2)}{h(U2, V2)}$$

Vérifions que cet estimateur converge vers l'intégrale I .

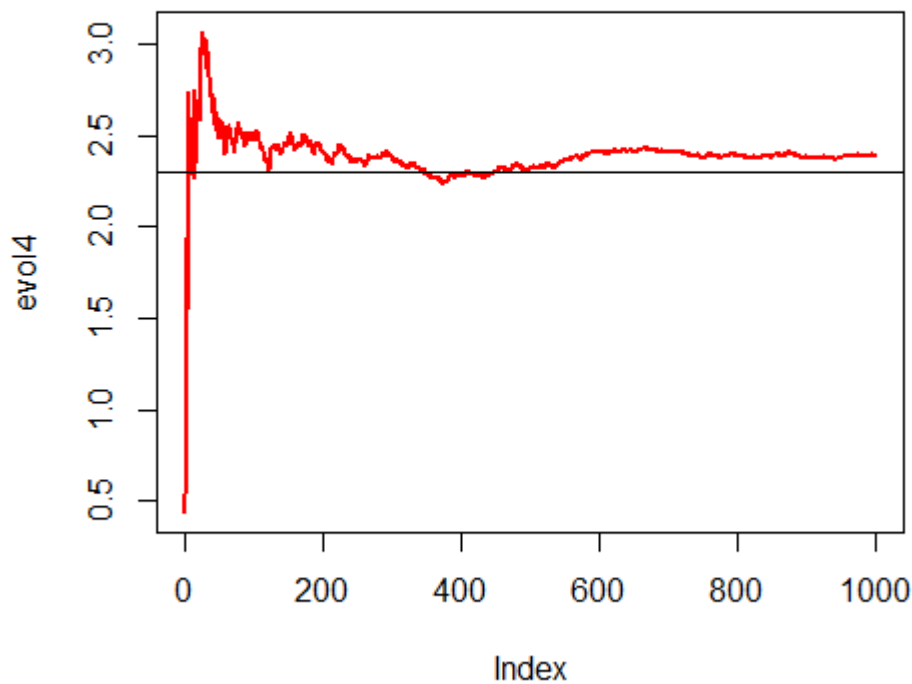


FIGURE 13 – Évolution de Ichap4

La figure présentée juste au dessus confirme bien que notre estimateur converge vers I .

- La figure ci dessus présente l'évolution des quatre estimateurs construits avec les méthodes définies précédemment :

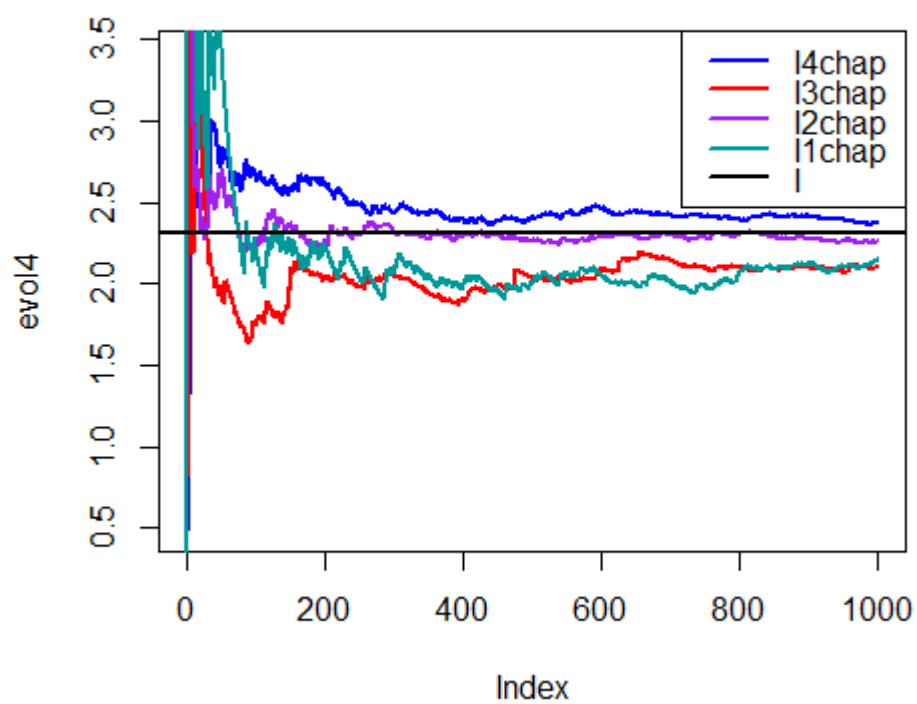
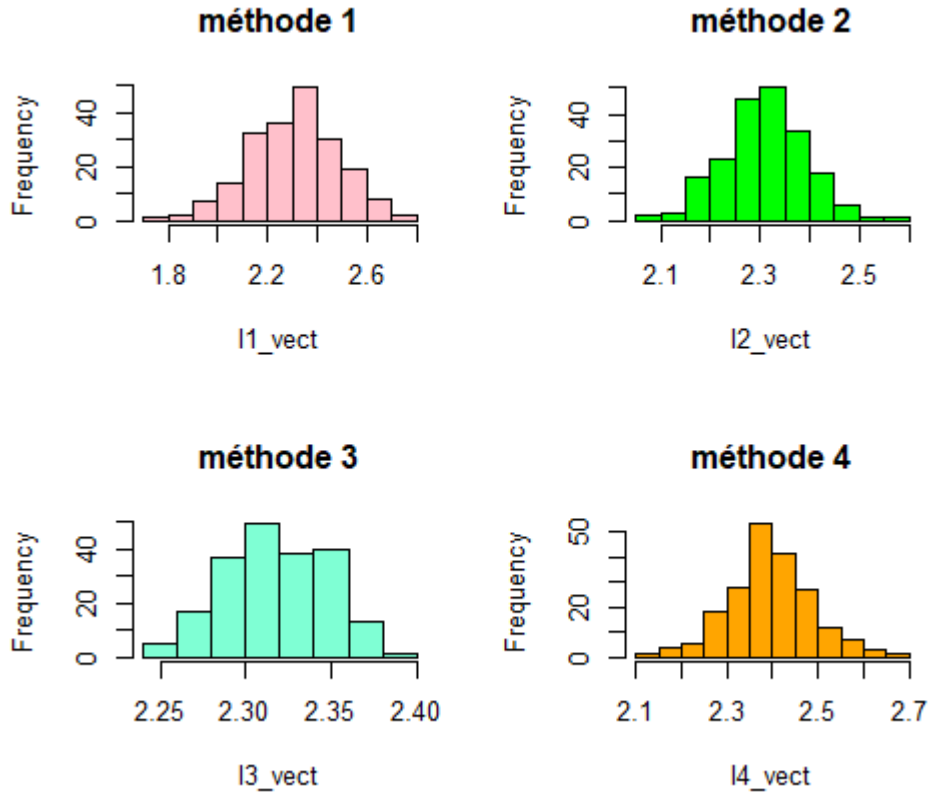


FIGURE 14 – Évolution des quatre estimateurs

— Maintenant vérifions si cet estimateur est meilleur que les 3 premiers déjà définis.



Observation :

On remarque que l'histogramme associé à l'estimateur $I4chap$ est moins centré que les autres obtenus dans les trois premières méthodes. Nous pouvons confirmer ceci en présentant les valeurs des écarts types de chaque estimateur :

$$sd(\hat{I}_1) = 0.1667559$$

$$sd(\hat{I}_2) = 0.0902909$$

$$sd(\hat{I}_3) = 0.02806624$$

$$sd(\hat{I}_4) = 0.0924831$$

Nous avons bien :

$$sd(\hat{I}_3) < sd(\hat{I}_2) < sd(\hat{I}_1) \leq sd(\hat{I}_4)$$

II Conclusion :

La méthode de Monte Carlos nous permet de déterminer la valeur de l'intégrale dans une grande dimension. Pour la déterminer, il nous faut un bon estimateur convergeant vers la valeur de l'intégrale.

On a donc utilisé quatre méthodes différentes pour le trouver et dans chacune de ces méthodes, on cherche le bon estimateur, et la qualité de cet estimateur diffère d'une méthode à une autre. Elle dépend effectivement de la valeur de l'écart-type.

L'estimateur est meilleur quand l'écart-type est plus petite.

Parmi ces méthodes qu'on a vu, la méthode 3 est plus efficace car on a trouvé que l'écart-type est 0.02 par rapport aux autres méthodes