

УДК 004.942

Трифонов. С.В., Васильев М.О., Холодов. Я.А.

Московский физико-технический институт

Исследование распространения мощных сверхширокополосных радиоимпульсов на дальние расстояния в атмосфере

Исследуются явления, возникающие при распространение мощных СВЧ-импульсов через атмосферу. Физико-математическая модель построена на базе уравнений Максвелла и кинетических уравнений ионизации воздуха. Получающаяся модель состоит из системы уравнений в частных производных гиперболического типа и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения которых применяются методы 2–3-го порядка аппроксимации и методы использующие аналитическое решение соответственно. Разработанные численные методы позволяют полностью решать задачу распространения СВЧ-излучения в атмосфере на дальние расстояния с учётом нелинейных эффектов, в том числе моделировать как движение отдельного импульса так и серии импульсов в атмосфере с высокой искусственной фоновой ионизацией и получить эффект отражения от плазмы при частотах электромагнитного поля ниже плазменной частоты.

Powerful extra-wideband radiofrequency pulses propagation research for long range in the atmosphere

Phenomena due to powerful microwave propagation through the atmosphere have been researched. Physico-mathematical model is based on Maxwell's equations and kinetic equations for atmosphere ionization. The model consist of hyperbolic partial differential equations system and ordinary differential equations system, that we solve using a 2–3rd approximation order method and a method that use analytical solution respectively. Developed numerical methods make it possible to completely solve microwave propagation problem for long range in the atmosphere taking into account non-linear effects, including both single pulses and pulse series simulation in the atmosphere with high artificial

background ionization, as well as reflection from plasma, when pulse frequency is lower than plasma frequency.

Ключевые слова: СВЧ-излучение, ионизация, нелинейный режим распространения, температура электронов, гиперболическая система уравнений, отражающие граничные условия.

Keywords: microwave, ionization, non-linear propagation mode, electron temperature, hyperbolic equations system, reflective boundary condition.

Введение

В связи с тем, что в последнее время появилась возможность генерации и использования мощных сверхширокополосных радиоимпульсов, появилась потребность в исследовании влияния атмосферы на изменение их параметров, в частности в работе [1] построена простая одномерная модель распространения таких импульсов. Целью данной работы является исследование влияния атмосферы на изменение параметров мощных сверхширокополосных (СШП) радиоимпульсов (РИ) при распространении их на дальние расстояния, с использованием монотонных схем высокого порядка точности. Исследуются как одиночные импульсы, так и серии импульсов

Целью данной работы является верификация результатов работы [1], с использованием схем более высокого порядка аппроксимации, а также изучение одиночных импульсов и серий таких импульсов.

Сложность задачи состоит в том, что при распространении в газах мощных импульсов СВЧ-излучения можно выделить три нелинейных режима распространения:

режим слабой нелинейности, когда заметно повышается электронная температура и практически не изменяется концентрация электронов;

допробойный режим распространения, когда мощности излучения еще не хватает для развития лавинной ионизации газа, но концентрация электронов повышается и влияет на поглощение импульса;

режим сильной нелинейности, когда развивается электронная лавина и меняется сам характер поглощения электромагнитной энергии: мало меняется амплитуда и сильно меняется протяженность импульса.

В основу математического аппарата положена модель, базирующаяся на уравнениях Максвелла для электромагнитного поля и кинетических уравнений для описания ионизации воздуха. Это приводит нас к неоднородной гиперболической системе из 7 уравнений в частных производных.

Выбранный метод численного решения предполагает расщепление системы на гиперболическую однородную систему и неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Физико-математическая постановка задачи

1.1. Анализ физико-математических моделей распространения СШП РИ в атмосфере

Источником мощного микроволнового или СВЧ-излучения являются устройства, генерирующие электромагнитное излучение, максимум спектральной плотности которого лежит в диапазоне 300 МГц-300 ГГц, а их энергетические характеристики, как правило, удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий: энергия в импульсе не менее 100 Дж, пиковая мощность не ниже 100 МВт и средняя мощность не ниже 1 МВт. Для традиционных СВЧ-генераторов, таких как клистрон, магнетрон и другие, характерны квазигармонические импульсные сигналы. Подобное заполнение имеют импульсы черенковских генераторов, гиротронов и некоторых других релятивистских устройств. Перечисленные устройства генерируют достаточно узкополосное излучение – ширина их спектра, как правило, не превышает нескольких процентов от величины несущей частоты. (Сверхшироким считается сигнал у которого $\Delta f/f_0 > 0,25$, где Δf — ширина спектра, f_0 — средняя частота излучения.

Кроме узкополосных генераторов существует ряд устройств, излучение которых является сверхширокополосным. Расширение спектра сигналов достигается главным образом путем укорочения длительности импульсов. К таким источникам, в частности, относятся и источники взрывного типа [2]. Взрывомагнитные и плазменные МГД-генераторы образовали две асимптотики в ряду устройств прямого преобразования энергии. Синтезом этих двух асимптотических устройств является взрывной МГД-генератор (МГДВГ), впервые предложенный в США в начале 60-годов и активно разрабатывавшийся в России в ряде организаций. В МГДВГ механический лайнер, сжимающий магнитное поле и связанную с ним энергию, заменен компактным

сгустком электропроводной плазмы, что позволило создать неразрушаемый генератор, способный работать в режиме генерации серий мощных электрических импульсов [1].

Высокие уровни мощности существующих и перспективных источников требуют учета нелинейных эффектов при прохождении сверхмощных импульсов СВЧ-излучения по трассе «Земля-Космос» и «Космос-Земля», т.е. на значительные расстояния, составляющие сотни и тысячи километров.

В период 50-70-х годов нелинейные эффекты рассматривались для случая распространения непрерывных электромагнитных волн, т.е. когда длина импульса значительно превышает длительность релаксации электронной температуры. При этом обычно предполагалось, что возмущение электронной концентрации n_e пренебрежимо мало. Учет изменения частоты столкновения электронов $\nu = \nu(T)$ при условии протяженного импульса давал возможность рассматривать слабонелинейные задачи в ионосфере [3-5].

Примерно с середины 80-х годов по мере развития мощных СВЧ-источников – увеличение мощности могло происходить лишь при условии сокращения длины сигнала — возник интерес к нелинейному распространению мощных СВЧ импульсов [6-10], в которых учитывалось возмущение n_e . Рост n_e может приводить к образованию пробоя воздуха, когда за время прохождения импульса успевает развиваться процесс лавинной ионизации, и в этом случае наблюдается сравнительно быстрая потеря энергии импульса по мере распространения [9, 10]. Возможны также режимы распространения импульса, когда наблюдается значительное возрастание n_e в зоне прохождения импульса, однако из-за его малой длительности лавинная ионизация не успевает развиваться и реализуется так называемый допробойный режим распространения, в котором эффект накопления поглощения СВЧ-энергии происходит за счет больших дальностей распространения [11].

Из приведенного выше краткого анализа состояния вопроса о развитии разрядных процессов в газах следует, что при распространении в газах мощных импульсов СВЧ-излучения можно выделить три нелинейных режима распространения:

- режим слабой нелинейности, когда заметно повышается электронная температура и практически не изменяется концентрация электронов ($T_e = T_e(t)$, $n_e = const$);
- допробойный режим распространения, когда мощности излучения еще не хватает для развития лавинной ионизации газа, но концентрация электронов повышается и влияет на поглощение импульса ($T_e = T_e(t)$, $n_e = n_e(t)$);

- режим сильной нелинейности, когда развивается электронная лавина и меняется сам характер поглощения электромагнитной энергии: мало меняется амплитуда и сильно меняется протяженность импульса τ_{imp} .

При определении режимов передачи энергии СВЧ импульсов через газовые среды чаще всего в нулевом приближении ориентируются на пробойные характеристики соответствующих газовых сред, например воздуха, полученные для квазистационарных условий [12]. В этих условиях эксперимент и теория хорошо согласуются между собой: так, для длины волны $\lambda = 8 \text{ см}$ ($f = 37,5 \text{ ГГц}$) минимальное пробойное поле $E_n = 2,4 \text{ кВ/см}$ достигается в воздухе при давлении около 20 мм рт.ст. (высота порядка 30 см). Однако ясно, что в импульсном режиме излучения порог должен быть выше и, естественно, должен зависеть от основной его характеристики — длительности импульса [13]. К сожалению, зависимость E_n от других его характеристик для мощных импульсов в настоящее время исследована еще недостаточно, как в экспериментальном, так и в теоретическом отношении, что ограничивает возможность применения простых оценок для определения характера распространения импульса.

Поэтому в данной работе в основу математического аппарата положена модель, базирующаяся на исходных фундаментальных уравнениях — уравнениях Максвелла для электромагнитного поля и кинетических уравнений для описания ионизации воздуха в импульсе.

1.2. Физико-математическая постановка задачи

Физико-математическая постановка задачи практически полностью взята из [1], за исключением небольших деталей, что будет указано ниже

Для анализа первых двух режимов часто используется приближение, основанное на уравнении распространения электромагнитной энергии. В [14] был выполнен подробный анализ различных приближений и показано, что в СВЧ-диапазоне правильное описание распространения и структуры импульса возможно лишь на основе полной системы уравнений Максвелла, которая для одномерного плоского случая может быть записана для компонент электромагнитного поля $E_x(t, z)$, $H_y(t, z)$, $E_z(t, z)$ (E_z — продольная компонента, соответствующая ленгмюровским колебаниям) в форме:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \rho \frac{\partial H_y}{\partial z} + \rho j_x = 0,$$

$$\frac{\rho}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \rho j_z = 0.$$

Здесь $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ — скорость света в вакууме, $\rho = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376 \text{ Ом}$ — волновое сопротивление пространства, $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м}$ — диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума. Компоненты тока определяются через скорости электронов в поле:

$$j_x = -en_e u_x,$$

$$j_z = -en_e u_z,$$

где $e = |e|$. Движением ионов в образовании тока пренебрегаем.

Концентрация n_e , тепловая энергия ε и скорости направленного движения электронов u_x , u_z определяются, исходя из системы уравнений для моментов функции распределения электронов. Для изменения концентрации электронов имеем:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial (n_e u_z)}{\partial z} = S_e,$$

здесь S_e — скорость изменения n_e в неупругих процессах:

$$S_e = (j_{0e} n_e n_0 - j_{ei} n_e^2 n_i) - j^v n_e n_i - R_m,$$

$$R_m = j_g n_e n_i + n_e n n_{0_2} j_g,$$

где j_g , j_p — скорости диссоциативной рекомбинации и прилипания электронов, n_0 , n_i , n_{0_2} — концентрации нейтралов, ионов и кислорода в невозмущенной атмосфере, $n = n_0 + n_i$ (задаваемые в зависимости от высоты в м^{-3}).

На энергетическое распределение электронов в мощных импульсах существенное влияние оказывает поле. Как показал анализ работы [9] лучшее согласие с экспериментом дает моноэнергетическое распределение, где для ε берется среднее значение. Тогда

$$j_{0e} = \sigma(\varepsilon) V(\varepsilon), \quad \text{м}^3/\text{с},$$

$$j_{ei} = \frac{8,75 \times 10^{-27}}{\left(\frac{2}{3}\varepsilon\right)^{\frac{9}{2}}}, \text{ см}^6/\text{с},$$

$$V(\varepsilon) = 5,3 \times 10^7 \sqrt{\varepsilon}, \text{ см}^3/\text{с},$$

$$j^v = \frac{2,7 \times 10^{-13}}{\left(\frac{2}{3}\varepsilon\right)^{\frac{3}{4}}}, \text{ см}^3/\text{с},$$

где ε измеряется в электрон-вольтах.

Достаточно точное значение сечения ионизации для молекул воздуха в диапазоне энергий $1-10^4$ эВ дается в [15] с использованием аппроксимация экспериментальных данных:

$$\sigma(\varepsilon) = \bar{f}(\varepsilon) \cdot 4\pi a_0^2 \left(\frac{Ry}{\varepsilon}\right)^2 \frac{\varepsilon - I}{I}, \quad \varepsilon \geq I$$

Принимается, что при $\varepsilon \leq I$ неупругие процессы несущественны, т.е. $S_e = 0$, выделена Томсоновская зависимость с поправочной функцией $\bar{f}(\varepsilon)$:

$$\bar{f}(\varepsilon) = 11,67 \left[1 + \frac{0,64(\varepsilon - 11,35)}{88,65 + \varepsilon} \right] \times [1 - \exp(-0,0083(\varepsilon - 11,35))].$$

Здесь $Ry = 13,6$ эВ, $\pi a_0^2 = 0,88 \times 10^{-16}$ м², $I = 14,86$ эВ, где ε измеряется в эВ. Следуя общему предположению о слабом разогреве ионов, будем считать, что диссоциация не успевает существенно произойти и процессы идут на молекулярных ионах. Тогда

$$j_g = 1,16 \times 10^{-8} / \varepsilon,$$

$$j_p = \frac{3,8 \times 10^{-31}}{\varepsilon} e^{\frac{-0,103}{\varepsilon}}.$$

Уравнения движения электронов по осям координат (x, z) имеют вид:

$$m_e n_e \frac{\partial u_x}{\partial t} = -m_e n_e (v_{ei} + v_{e0}) u_x - e n_e E_x + e n_e u_z \mu_0 H_y,$$

$$m_e n_e \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial P_e}{\partial z} - m_e n_e (v_{ei} + v_{e0}) u_z - e n_e E_z - e n_e u_x \mu_0 H_y.$$

Уравнения записаны в системе единиц СИ. P_e — давление электронного газа, для частот столкновений использовались выражения:

$$v_{ei} = \frac{16\sqrt{\pi}}{3} \frac{e^4 L n_i Z^2}{\sqrt{m} (2kT_e)^{3/2}},$$

$$v_{e0} = \frac{8\sigma_{e0}}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT_e}{m}} n_0,$$

где $L = 25,2 + \ln T_e (\text{eV}) - 0,5 \ln n_e (\text{cm}^{-3})$ — кулоновский логарифм ($L \approx 15 \div 18$), $kT_e = \frac{2}{3} \varepsilon$,

σ_{e0} — сечение рассеяния электронов на нейтралах.

Остальные обозначения общепринятые. Тепловая энергия электронов определяется из уравнения:

$$3/2 kn_e \frac{dT_e}{dt} + n_e k T_e \text{div} \vec{U} = \text{div}(\lambda \nabla T_e) + S_{ee} + Q_e + Q_w,$$

$$\lambda = 16 \frac{Z}{4 + Z} \frac{k(kT_e) n_e}{m(v_{ei} + 1,28 \cdot v_{e0})},$$

где при низкой степени ионизации $n_e \ll n$ надо брать $Z = 1$. Величина S_{ee} определяет изменение T_e в ионизационно-рекомбинационных процессах

$$S_{ee} = -(I + 3/2 kT_e) (n_e n_0 j_{0e} - n_e^2 n_i j_{ei}) + \\ + (3/2 - \varphi) kT_e n_e n_i j^v - 3/2 kT_e j_g n_e n_i - 3/2 kT_e j_p n_e n_{O_2} n^v,$$

где $\varphi = 0,64 + 0,11 \lg(I/kT_e)$ — безразмерная функция, аппроксимирующая среднее повышение T_e при фоторекомбинации. Величина $Q_e = Q_{ei} + Q_{e0}$ определяет потерю энергии электронами в упругих столкновениях с ионами и в столкновениях с нейтралами в допороговой области энергии ($\varepsilon < 12,1 \text{ eV}$). Для условий данной задачи из общего выражения для Q_{ei} , полученного в [16] следует:

$$Q_{ei} = \frac{3}{2} n_e \frac{kT_e - kT}{\tau_{ei}} - 2v_{ei} n_e \left(\frac{mu^2}{2} \right) = -2v_{ei} n_e \left[(\varepsilon - \varepsilon') m / M + mu^2 / 2 \right],$$

где $\frac{1}{\tau_{ei}} = 2 \frac{m}{M} v_{ei}$; $\varepsilon' = 0,025 \text{ eV}$; $M = 4,84 \times 10^{-23} \text{ г}$ — средняя масса иона воздуха (29

масс водорода). Столкновения с нейтралами важны в самом начале развития электронной лавины (пробоя). При этом потери электронной энергии связаны с четырьмя видами процессов: упругие потери, потери на возбуждение вращения молекул, потери на возбуждении колебаний и электронное возбуждение. Будем аппроксимировать величину Q_{e0} выражением:

$$Q_{e0} = -n_e (\varepsilon - \varepsilon_0) \nu \Delta(\varepsilon), \quad \hat{y} \hat{A} / \hat{m}^2 \hat{n}$$

В работе [17] на основе анализа экспериментальных данных для воздуха получены выражения для частоты ν и доли передаваемой энергии $\Delta(\varepsilon)$ до энергий меньших 5–6 эВ

$$\nu = 6 \times 10^{-8} n_0 \sqrt{\varepsilon} \left(0,4 + \frac{0,84\varepsilon}{0,5 + \varepsilon} \right),$$

$$\Delta(\varepsilon) = 1,7 \times 10^{-3} \frac{1 + 0,2(\varepsilon/0,9)^5}{1 + 3,7 \cdot 10^{-2} \left[1 + 0,2(\varepsilon/0,9)^5 \right]},$$

где n_0 измеряется в см^{-3} , а ε в эВ. Так как $\nu = \sigma_{e0} n_0 \bar{V}$, $\bar{V} = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m}}$, то из выражения для ν можно получить выражение для сечения:

$$\sigma_{e0}(\varepsilon) = 12,47 \pi a_0^2 \left(0,4 + \frac{0,84\varepsilon}{0,5 + \varepsilon} \right),$$

где $\pi a_0^2 = 0,88 \times 10^{-16} \text{см}^2$. Это значение сечения удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [15] и поэтому используется в выражении для ν_{e0} .

Электроны получают энергию от электрического поля — это энергия направленного движения $u^2 = u_x^2 + u_z^2$. В результате столкновений значительная часть этой энергии переходит в тепло. Скорость этого процесса определяется в [1] выражением $Q_w = en_e (|E_x U_x| + |E_z U_z|)$. Но ввиду того, что уравнение баланса плотности электромагнитной энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + B^2}{8\pi} + \text{div} \frac{c}{4\pi} [EB] = -jE,$$

мы будем считать, что

$$Q_w = en_e (E_x U_x + E_z U_z).$$

Таким образом, определенные выше уравнения полностью описывают изменение структуры импульса СВЧ-излучения при его распространении в атмосфере для сильно нелинейного режима. Итак, полная система уравнений, которая непосредственно решается численными методами имеет вид:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial(n_e U_z)}{\partial z} = S_e \quad (1)$$

$$\frac{du_x}{dt} = -(v_{ei} + v_{e0})u_x - \frac{eE_x}{m_e} + \frac{eu_z\mu_0 H_y}{m_e} \quad (2)$$

$$\frac{du_z}{dt} = \frac{\partial P_e}{\partial z} \frac{1}{mn_e} - (v_{ei} + v_{e0})u_z - \frac{eE_z}{m_e} - \frac{eu_x\mu_0 H_y}{m_e} \quad (3)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{2}{3}\varepsilon \operatorname{div} \vec{U} - \frac{2}{3kn_e} \operatorname{div}(\lambda \nabla \varepsilon) = \frac{1}{n_e}(S_{ee} + Q_e + Q_w) \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + c\rho \frac{\partial H_y}{\partial z} = -c\rho j_x \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = -c\rho j_z \quad (7)$$

Мы используем неподвижную систему отсчета, так как она удобна для рассмотрения изменения газодинамических параметров электронов в атмосфере при пропускании через нее серий импульсов. Подвижная система отсчета, использованная в [1] более удобна для рассмотрения изменений параметров и формы импульса, но как было показано в [1] высокочастотные короткие импульсы могут пройти всю атмосферу, потеряв только незначительную часть своей энергии. В данной работе интерес представляют газодинамические параметры электронов в атмосфере, которые сильно изменяются в конкретной точке при прохождении через нее импульса и, более того, заметно меняются за импульсом.

2. Численный метод

2.1. Разбиение системы уравнений по физическим процессам

Для начала перейдем от E_x, H_y к φ, ψ :

$$\varphi = E_x + \rho H_y,$$

$$\psi = E_x - \rho H_y.$$

Это приводит уравнения (5–6) к простейшим независимым уравнениям переноса:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -c \rho j_x, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - c \frac{\partial \psi}{\partial z} = -c \rho j_x. \quad (9)$$

Теперь пусть $U = \{n_e, u_x, u_z, \varepsilon, \varphi, \psi, E_z\}$ — вектор неизвестных величин, а $G(t, x, U)$ — правые части уравнений. Записав систему уравнений (1–7) в дивергентном виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = G(t, x, U),$$

можно разбить ее на две части: однородную гиперболическую систему и систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial F(U_1)}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{dU}{dt} = G(t, x, U(V_1)) \quad (11)$$

Следует отметить, что система (10) состоит из четырёх связанных уравнений соответствующих (1–4), двух уравнений переноса соответствующих (8) и (9), и обыкновенного дифференциального уравнения соответствующего (7)

2.2. Численные методы расчета гиперболической части уравнений

Для решения подсистемы из четырёх связанных гиперболических уравнений из системы (38) записанной в дивергентной форме (без нижних индексов для краткости):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

в данной работе используется шеститочечный сеточный шаблон с узлами $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$.

Для начала, рассмотрим линейную систему уравнений:

$$U_t + F_x = U_t + A U_x = 0, \quad (13)$$

где $A = \partial F / \partial U = [a_{ij}]$, $(a_{ij} = \text{const})$ матрица Якоби. Воспользуемся также тождеством: $A = \Omega^{-1} \Lambda \Omega$, где $\Lambda = [\lambda_i]$ — диагональная матрица из собственных чисел матрицы A , определяемых из уравнения $\text{Det}(A - \lambda E) = 0$ (E — единичная матрица), $\Omega = [\omega_i]$ — матрица, строками которой являются левые собственные векторы матрицы A , с точностью до их длины, определяемые из однородных линейных систем уравнений

$\omega_i(A - \lambda_i E) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad I = 4$ — размерность системы (13). Тогда система (13) может быть представлена в следующем виде:

$$U_t + F_x = U_t + AU_x = U_t + (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) U_x = 0 \quad (14)$$

Перейдем от вектора U к вектору инвариантов Римана $W = \Omega U$, для этого систему уравнений (14) умножим слева на матрицу собственных векторов Ω :

$$\Omega(U_t + (\Omega^{-1} \Lambda \Omega) U_x) = (\Omega U)_t + \Lambda(\Omega U)_x = W_t + \Lambda W_x = 0 \quad (15)$$

Каждое из уравнений (15) является простейшим уравнением переноса для соответствующей компоненты вектора инвариантов Римана $W = \Omega U = \{w_1, \dots, w_I\}^T$:

$$w_{it} + \lambda_i w_{ix} = 0, \quad i = 1, \dots, I$$

Соответственно для каждого из этих уравнений переноса может быть использована разностная схема в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_{im}^{n+1} = & w_{im}^n + \frac{\sigma_i}{2} (w_{im-1}^n - w_{im+1}^n) + \frac{\sigma_i^2}{2} (w_{im-1}^n - 2w_{im}^n + w_{im+1}^n) + \\ & + \frac{c_{im}}{2} \left(\sigma_i (w_{im-2}^n - 2w_{im-1}^n + 2w_{im+1}^n - w_{im+2}^n) + \right. \\ & \left. + |\sigma_i| (w_{im-2}^n - 4w_{im-1}^n + 6w_{im}^n - 4w_{im+1}^n + w_{im+2}^n) \right) \end{aligned}$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned} W_m^{n+1} = & W_m^n + \frac{\tau}{2h} \Lambda (W_{m-1}^n - W_{m+1}^n) + \frac{\tau^2}{2h^2} \Lambda^2 (W_{m-1}^n - 2W_m^n + W_{m+1}^n) + \\ & + \frac{\tau}{2h} C_m \left(\Lambda (W_{m-2}^n - 2W_{m-1}^n + 2W_{m+1}^n - W_{m+2}^n) + \right. \\ & \left. + |\Lambda| (W_{m-2}^n - 4W_{m-1}^n + 6W_m^n - 4W_{m+1}^n + W_{m+2}^n) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

где $C_m = \text{diag}[c_{im}]$ — матрица, на диагонали которой находятся произвольные коэффициенты c_{im} , $i = 1, \dots, I$. Если мы теперь перейдем к двухшаговым (т.е. типа предиктор-корректор) разностным схемам, то схему (16) можно разбить также на два шага, предиктор:

$$\tilde{W}_m = W_m^n + \frac{\tau}{2h} \Lambda (W_{m-1}^n - W_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h} |\Lambda| (W_{m-1}^n - 2W_m^n + W_{m+1}^n),$$

и корректор:

$$\begin{aligned} W_m^{n+1} = & \tilde{W}_m + \left(\frac{\tau^2}{2h^2} \Lambda^2 - \frac{\tau}{2h} |\Lambda| \right) (W_{m-1}^n - 2W_m^n + W_{m+1}^n) + \\ & + C_m \left((\tilde{W}_{m-1} - 2\tilde{W}_m + \tilde{W}_{m+1}) - (W_{m-1}^n - 2W_m^n + W_{m+1}^n) \right). \end{aligned}$$

Если теперь вернуться к исходному вектору $U = \Omega^{-1}W$, то для него мы получим следующее однопараметрическое семейство схем второго порядка аппроксимации со свободными параметрами c_{im} , $i = 1, \dots, I$:

$$\begin{cases} \tilde{U}_m = U_m^n + \frac{\tau}{2h}(F_{m-1}^n - F_{m+1}^n) + \frac{\tau}{2h}\Omega^{-1}|\Lambda|\Omega(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n), \\ U_m^{n+1} = \tilde{U}_m + \Omega^{-1}\left(\frac{\tau^2}{2h^2}\Lambda^2 - \frac{\tau}{2h}|\Lambda|\right)\Omega(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + \\ + \Omega^{-1}C_m\Omega\left((\tilde{U}_{m-1} - 2\tilde{U}_m + \tilde{U}_{m+1}) - (U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n)\right). \end{cases}$$

Такую форму записи можно сократить, если воспользоваться предложенным в [18] двухпараметрическим подходом при записи схем на выбранном сеточном шаблоне:

$$\begin{cases} \tilde{U}_m = U_m^n - \frac{\tau}{h}(F_{m+1/2} - F_{m-1/2}), \\ U_m^{n+1} = \tilde{U}_m + (\Omega^{-1}B_m\Omega)(U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n) + \\ + (\Omega^{-1}C_m\Omega)(\tilde{U}_{m-1} - 2\tilde{U}_m + \tilde{U}_{m+1}). \end{cases}$$

Здесь B_m — диагональная матрица, связанная с C_m следующим соотношением:

$$B_m = \left(\frac{\tau^2}{2h^2}\Lambda^2 - \frac{\tau}{2h}|\Lambda|\right) - C_m, \quad F_{m\pm 1/2} = \frac{1}{2}(F_m^n + F_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2}(\Omega^{-1}|\Lambda|\Omega)_{m\pm 1/2}^n (U_m^n - U_{m\pm 1}^n)$$

Возвращаясь к исходной нелинейной системе уравнений (12), мы можем записать наше двухпараметрическое семейство схем в следующем виде:

$$\begin{cases} \tilde{U}_m = U_m^n - \frac{\tau}{h}(F_{m+1/2} - F_{m-1/2}) \\ U_m^{n+1} = \tilde{U}_m + (\Omega^{-1}B\Omega)_{m+1/2}^{n+1/2}(U_{m+1}^n - U_m^n) - (\Omega^{-1}B\Omega)_{m-1/2}^{n+1/2}(U_m^n - U_{m-1}^n) + \\ + (\Omega^{-1}C\Omega)_{m+1/2}^{n+1/2}(\tilde{U}_{m+1} - \tilde{U}_m) - (\Omega^{-1}C\Omega)_{m-1/2}^{n+1/2}(\tilde{U}_m - \tilde{U}_{m-1}) \end{cases} \quad (17)$$

Такая форма записи возникает в силу нелинейности исходной системы (12), и как следствие этого зависимости матрицы Якоби $A = \Omega^{-1}A\Omega$ от самого решения. То есть, теперь значения собственных чисел $\Lambda_m = [\lambda_{im}]$ и собственных векторов $\Omega_m = [\omega_{im}]$ матрицы A различны для каждой из точек нашего сеточного шаблона.

Выбор предиктора в схеме (17) не является принципиальным, в случае разрывов большой интенсивности он может быть взят, например, из схемы Годунова [Error! Reference source not found.] (для уравнений газовой динамики), или это может быть

консервативный вариант сеточно-характеристического метода. В нашем случае используется метод Годунова.

Полученное семейство схем второго порядка аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$ при выборе свободного параметра $c_i = 0$ является единственной на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$, схемой, аналогичной схеме [20]. При выборе $c_i = (|\sigma_i| - 1)/2$ получим также схему второго порядка, аналогичную схеме [21] на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m)$ при $\sigma_i > 0$, а при $\sigma_i < 0$, получим аналогичную схему на шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$. При выборе $c_i = (\sigma_i^2 - 1)/6$ получим единственную схему третьего порядка аппроксимации $O(\tau^3, h^3)$, аналогичную схеме Русанова [22] на сеточном шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1})$ при $\sigma_i > 0$, а при $\sigma_i < 0$ получим аналогичную схему на шаблоне $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$.

Таким образом, для каждого из уравнений системы (12) существует свое уравнение переноса, разностный аналог которого может быть исследован на монотонность в точке (t^{n+1}, x_m) с помощью характеристического критерия [23], после чего те коэффициенты c_i , которые дают монотонное поведение решения, подставляются в схему (17). Данный подход не ограничивается в использовании выбранным нами сеточным шаблоном $(t^{n+1}, x_m), (t^n, x_{m-2}), (t^n, x_{m-1}), (t^n, x_m), (t^n, x_{m+1}), (t^n, x_{m+2})$ и может быть легко перенесен на другие заданные сеточные шаблоны.

Из оставшихся трёх уравнений уравнение соответствующее (7) имеет константное решение, а уравнения соответствующие (8) и (9) отвечают переносу электромагнитного импульса, и имеют собственные значения, всегда равные скорости света. Особенностью нашей задачи является то, что перенос электромагнитного поля должен быть осуществлён без размазывания, типичного для методов решения уравнений переноса, иначе импульс будет распространяться со скоростью большей скорости света. Поэтому отношение шага по пространству к шагу по времени выбиралось из условия равенства единице числа Курант для переноса электромагнитного поля, что позволяет получить аналитическое решение уравнения переноса простым копированием и сдвигом значений из ячеек на предыдущем временном слое.

2.3. Численные методы расчета дифференциальной части уравнений

Выполним линеаризацию функций в правой части первых четырех уравнений системы (11) и приведём тем самым систему к виду

$$\frac{dU}{dt} = AU + b \quad (18)$$

где $U = \{n_e, u_z, u_x, \varepsilon\}$. Потребуем, чтобы матрица A и вектор b имели следующий, достаточно разреженный вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

При помощи простых, но достаточно громоздких выкладок убеждаемся, что линеаризация действительно позволяет привести матрицу к такому виду, и получаем выражения для элементов матрицы и вектора

$$\begin{aligned} a_{11} &= j_{0e}n_0 - (j_g + j_v)n_i - j_p n n_{O_2} - j_{ei}n_i n_e \\ a_{22} &= a_{33} = -V_{e0} - V_{ei} \\ a_{32} &= -a_{23} = \frac{e\mu_0}{m_e} H_y \\ a_{41} &= (I + \varepsilon)n_i j_{ei} \\ a_{42} &= (m_e V_{ei} u_z - eE_z)k_{\bar{A}e \rightarrow \dot{y}\bar{A}} \\ a_{43} &= (m_e V_{ei} u_x - eE_x)k_{\bar{A}e \rightarrow \dot{y}\bar{A}} \\ a_{44} &= -n_0 j_{0e} + \frac{2}{3} f n_i j_v - j_g n_i - j_p n_{O_2} n - 2 \frac{m_e}{M} V_{ei} - v\Delta(\varepsilon) \\ b_2 &= \frac{e}{m_e} E_z \\ b_3 &= \frac{e}{2m_e} (\varphi + \psi) \\ b_4 &= -In_0 j_{0e} + 2 \frac{m_e}{M} V_{ei} \varepsilon_0 + v\Delta(\varepsilon) \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Здесь все величины измеряются в единицах СИ, а ε и I в эВ, поэтому в четвертой строке матрицы стоят соответствующие переходные коэффициенты. Вид матрицы и связь

между элементами ($a_{22} = a_{33}$, $a_{23} = -a_{32}$) позволяют получить аналитические выражения для собственных чисел:

$$\lambda_1 = a_{11}; \lambda_2 = a_{22} + ia_{32}; \lambda_3 = a_{22} - ia_{32}; \lambda_4 = a_{44}$$

Ввиду особенностей матрицы Якоби A система ((18)) является жесткой, поэтому используется точное аналитическое решение

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= AU + b \\ U(t) &= -A^{-1}b + \sum_{k=1}^K C_k h_k \exp(\lambda_k t), \\ U_m^{n+1} &= -(A_m^n)^{-1}b_m^n + \sum_{k=1}^K (C_k)_m^n (h_k)_m^n \exp((\lambda_k)_m^n \tau) \end{aligned} \quad (19)$$

Матрица A и вектор b вычисляются на каждом шаге в каждом узле сетки, а для определения вектора C используются начальные условия для (19), получающиеся из значений U на n -м слое

$$\sum_{k=1}^K (C_k)_m^n (h_k)_m^n = U_m^n + (A_m^n)^{-1}b_m^n$$

Оставшиеся три уравнения системы (11) не являются жесткими и решаются методом Эйлера

$$W_m^{n+1} = W_m^n + \tau f(U_m^n)$$

где $W = \{\varphi, \psi, E_z\}$, f — векторная функция правых частей соответствующих уравнений

2.4. Начальные и граничные условия

В общем случае исследуемый импульс представляет последовательность цугов — состоящих из импульсов опорной частоты — испускаемых с определённой частотой повторения. Импульс вводится в систему через левую границу при помощи φ , так как соответствующая характеристика в нашем случае всегда направлена внутрь расчётной области:

$$\varphi(t)|_{z=z_0} = 2E_0 \sin(2\pi f(t - \tilde{t}_k)), \quad \tilde{t}_k \leq t \leq \tilde{t}_k + \frac{\tilde{n}}{f}, \quad k = 0, 1, \dots$$

где $\tilde{t}_k = k / \tilde{f}$ — время начала k -го цуга, f — опорная частота, \tilde{f} — частота повторения цугов, \tilde{n} — число периодов импульса опорной частоты в цуге

По газодинамическим переменным на левой границе используются отражающие граничные условия. Что физически обозначает стенку из диэлектрика, из которой испускается импульс. Граничные условия для ψ и E_z не нужны, так как соответствующие характеристики не входят в область интегрирования ни при каких условиях. Правая граница имеет простейшие «прозрачные» граничные условия:

$$\left. \frac{dn_e}{dx} \right|_{z=z_0} = 0, \left. \frac{du_x}{dx} \right|_{z=z_0} = 0, \left. \frac{du_z}{dx} \right|_{z=z_0} = 0, \left. \frac{d\varepsilon}{dx} \right|_{z=z_0} = 0$$

Начальные условия, передают параметры невозмущённой атмосферы на высоте z :

$$n_e(z) = n_{e0}(z_0), \varepsilon(z) = \varepsilon'_0(z_0), u_x(z) = u_z(z) = \varphi(z) = \psi(z) = E_z(z) = 0$$

2.5. Выбор временного шага для численного расчета. Условия применимости модели

Отношение шага по пространству к шагу по времени выбиралось из условия равенства единице числа Курант для переноса электромагнитного поля, что т.е. имеет место соотношение

$$h = c\tau$$

Время свободного пробега электрона τ_e накладывает ограничение на временной шаг, так как гидродинамическое описание динамики электронов не увеличивает точность расчётов при уменьшении шага по времени τ до значений меньших τ_e

$$\tau \leq \tau_e$$

Для задач распространения СШП РИ газодинамическое приближение динамики электронов применимо, только если характерное время свободного пробега электронов много меньше, чем период моделируемого импульса.

$$\tau_e \leq 1/f$$

Нерелятивистская газовая динамика для электронов применима, если характерная тепловая скорость и характерная скорость упорядоченного движения много меньше скорости света.

$$\varepsilon \ll m_e c^2, u_x \ll c, u_z \ll c$$

3. Анализ результатов расчетов

Далее будут рассматриваться импульсы с параметрами приведёнными в табл. 1

Таблица 1. Параметры импульсов и режимов их испускания

№	Опорная частота f , ГГц	Амплитуда напряжённости электрического поля E_0 , МВ/м	Число периодов в цуге, \tilde{n}	Энергия цуга, Дж	Частота повторения цугов \tilde{f} , ГГц
1.1	4	10	1	33,2	0
1.2	3	10	1	44,3	0
1.3	2	10	1	66,4	0
2.1	4	10	1	33,2	2
2.2	4	10	1	33,2	0,4

Где энергия цугов находится по формуле

$$W = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \frac{c}{f} \tilde{n}$$

Структура одиночных импульсов №1.1–3 качественно одинакова и понятна из рис. 1–3, сделанных по расчёту для импульса №1.1. Величины отложенные по оси ординат обезразмеренны.

Видно, что для продольной компоненты скорости u_z происходит удвоение частоты, это связано с тем, что в невозмущённой атмосфере $u = 0$ и преобладает Кулоновская сила, что вызывает увеличение u_x , в то время когда $u_z \ll u_x$ и u направленно противоположно E . Когда E меняет направление на противоположное, то и $H = E/\rho$ и u тоже меняют, но $F_e = \frac{e}{c}[u \times H]$ не меняет направления, что и вызывает наблюдаемый эффект.

Для данного импульса за счёт довольно высокой продольной скорости u_z электроны успевают заметно сместиться в сторону направления распространения. Это обуславливает возникновение продольной компоненты напряженности электрического поля E_z . Конечно же, выполняется $E_z \ll E_0$.

За время прохождения импульсом конкретной точки пространства, концентрация электронов n_e в этой точке успевает возрасти на десятки процентов, в то время как после прохождения импульса n_e возматывает на несколько порядков. Это происходит за время релаксации τ_e температуры электронов, которое в данном случае около 5 нс.

Количественные данные для импульсов №1.1–3 на момент времени 100 нс представлены на рис. 4–6 (отметка 0 м соответствует фронту импульса):

Импульсы меньшей частоты вызывают ионизацию медленней, т.к. они обладают меньшей мощностью, но «насыщение» концентрации электронов происходит на большем уровне, т.к. продолжительность их воздействия дольше по сравнению с импульсами меньшей частоты. Расчет проводился для высоты 42 км, где $n_{e0} = 28 \text{ и}^{-3}$

$$(n_{e\max})_{1.1} = 1,27 \times 10^{10} \text{ и}^{-3}, (n_{e\max})_{1.2} = 1,65 \times 10^{10} \text{ и}^{-3}, (n_{e\max})_{1.3} = 2,41 \times 10^{10} \text{ и}^{-3}$$

Также были проведены расчёты для серии одиночных импульсов №2.1 (рис. 7–9) Импульсы почти не теряют энергии, а концентрация растёт экспоненциально. Это объясняется тем, что затраты на ионизацию и разогрев E_c , много меньше энергии импульса E_i .

$$E_c = I \int n_e - n_{e0} dx + \int (\varepsilon - \varepsilon'_0)(n_e - n_{e0}) dx = 1.5 \times 10^{-4} + 1.3 \times 10^{-1} \text{ Аэ}, E_i = 30 E_s = 996 \text{ Аэ}$$

Расчёты для серии одиночных импульсов №2.2 показали интересные результаты. Из выпущенных 7 импульсов в среду вошли только 4, а последующие импульсы отражались и частично поглощались средой:

Отражение импульсов начинается когда плазменная частота $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e} > 2\pi f$ (СГС), что и происходит, при $n_e > \pi m_e f^2 / e^2 = 1,99 \times 10^{17} \text{ и}^{-3}$

На левой границе происходит быстрый разогрев электронов за счёт отражения импульсов, что в конечном счёте приводит к неприменимости нашей модели, когда электроны становятся релятивистскими, при температурах порядка энергии покоя 0,5 МэВ

Заклучение

В основу математического аппарата положена модель, базирующаяся на уравнениях Максвелла для электромагнитного поля и кинетических уравнений для

описания ионизации воздуха. Это приводит нас к неоднородной гиперболической системе из 7 уравнений в частных производных.

Выбранный метод численного решения предполагает расщепление системы на гиперболическую однородную систему и неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. С вычислительной точки зрения вторая система является жёсткой, что затрудняет вычисления, особенно если речь идёт о распространении на дальние расстояния.

Разработанные численные методы, как показывают полученные результаты, позволяют полностью решать задачу распространения СВЧ-излучения в атмосфере на дальние расстояния с учётом нелинейных эффектов, в том числе позволяют моделировать как движение отдельного импульса так и серии импульсов в атмосфере с высокой искусственной фоновой ионизацией и получить эффект отражения от плазмы при частотах электромагнитного поля ниже плазменной частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакин В.Н., Ступицкий Е.Л., Шапранов А.В. Распространение мощных импульсов СВЧ-излучения в атмосфере // Геомагнетизм и аэрономия. — 2003. — Т.43, вып. 5. — С. 673-682.
2. Взрывные генераторы мощных импульсов электрического тока / Под ред. В.Е. Фортова. — М.: Наука, 2002.
3. Гуревич А.В., Шварцбург А.Б. Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Наука, 1973.
4. Гуревич А.В., Щлюгер И.С. Исследование нелинейных явлений при распространении мощного радиоимпульса в нижних слоях ионосферы // Изв. вузов. Радиофизика — 1975. — , Т.18, — С.1237-1260.
5. Плис А.И., Щенков В.А. О поглощении импульса электромагнитного излучения в плазме // ЖТФ. — 1977. — Т. 47 — С. 71-75.
6. Рogaшкова А.И., Чернов З.С., Шаталова Т.И. О нелинейных эффектах, возникающих при прохождении СВЧ-импульсов через слабоионизированную газовую среду // Радиотехника и электроника.— 1984 — Т. 29. — С.133-140.

7. *Розаишкова А.И., Чернов З.С., Шаталова Т.И.* Самовоздействие импульсов СВЧ-поля при прохождении через слабоионизированную газовую среду // Радиотехника и электроника. — 1985. — Т. 30. — С. 270-275.
8. *Борисов И.Д.* Ионизация нижней ионосферы плоской радиоволной // Взаимодействие декаметровых радиоволн с ионосферой. — М.: ИЗМИРАН, 1985. — С.68-70.
9. *Yee J.H., Alvares R.A., Mayhall D.J., Dyruc D.P. De Groot J.* Theory of intense electromagnetic pulse propagation through the atmosphere // Phys. Fluids. — 1986. — V. 29, N.4. — P.1238-1244.
10. *Sullivan C.A., Destler W.W., Rodgers J., Segalov Z.* Short pulse high-power microwave propagation in the atmosphere // J.Appl. Phys. — 1988. — V. 63, N. 11 — P. 5228-5233.
11. *Виноградов А.А., Розаишкова А.И.* Исследование нелинейного искажения мощного СВЧ-импульса при распространении в слабоионизированной газовой среде // Физика плазмы. —1993. — Т. 19, вып. 10. — С.1220-1228.
12. *Мак-Дональд А.* Сверхвысокочастотный пробой в газах. — М.: Мир, 1969.
13. *Диденко А.Н., Новиков С.А., Разин С.В., Чумерин П.Ю., Юшков Ю.Г.* Пробой волнового тракта при распространении мощных наносекундных СВЧ-импульсов // Радиотехника и электроника. — 1985. — Т. 30, вып. 4 — С. 731-734.
14. *Ступицкий Е.Л.* Динамика мощных импульсных излучений и плазменных образований — М.: Физмат, 2006.
15. *Мак-Даниэль И.* Процессы столкновений в ионизованных газах. — М.: Мир, 1967.
16. *Faenov A.Ya., Pepin A.Yu., Stupitsky E.L., Drjunetkin B.A.* Interaction of laser-produced plasma clouds in vacuum and background medium // J.Phys. D.: Appl. Phys. — 1992. — V. 25. — P. 1583-1590.
17. *Медведев Ю.А., Метелкин Е.В., Степанов Б.И., Федорович Г.В.* Физические процессы в потоках проникающих излучений // Импульсные электромагнитные поля быстропротекающих процессов и измерение их параметров. — М.: Атомиздат, 1976 г — С.183-189.
18. *Холодов А.С.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1980. — Т. 20, № 6. — С. 1601-1620.
19. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. // Журнал

вычислительной математики и математической физика. — 1969. — Т. 9, № 2. — С. 373-386.

20. *Lax P.D., Wendroff B.* System of Conservation Laws. // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1960 — V. 13.
21. *Warming R.F., Beam R.M.* Upwind Second-Order Difference Schemes and Applications in Unsteady Aerodynamic Flow. // Proc. AIAA 2nd Comput. Fluid Dyn. Conference, Hartford, Connecticut. — 1975.
22. *Русанов В.В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений. // Докл. АН СССР — 1968. — Т. 9, № 4. — С. 85-97.
23. *Холодов А.С., Холодов Я.А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1560-1588.

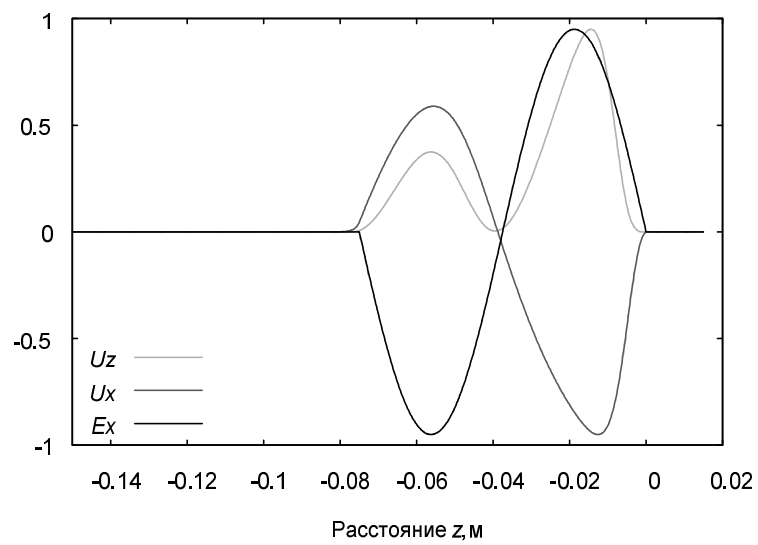


Рис. 1. Структура импульса №1.1

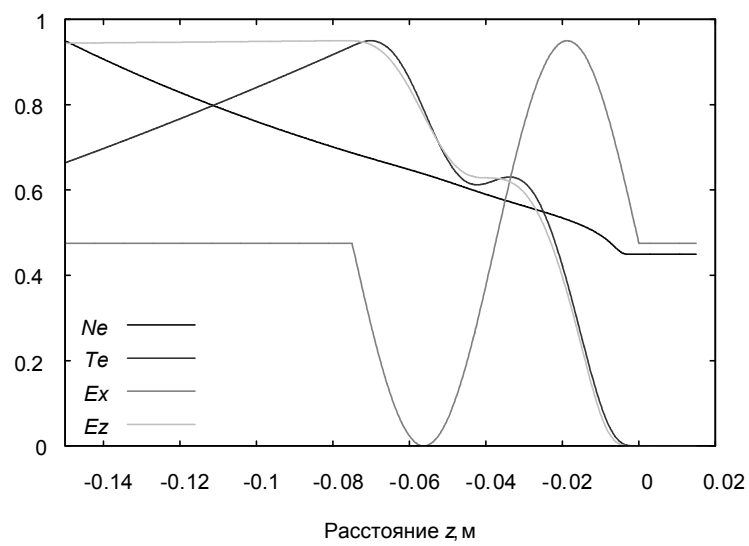


Рис. 2. Структура импульса №1.1

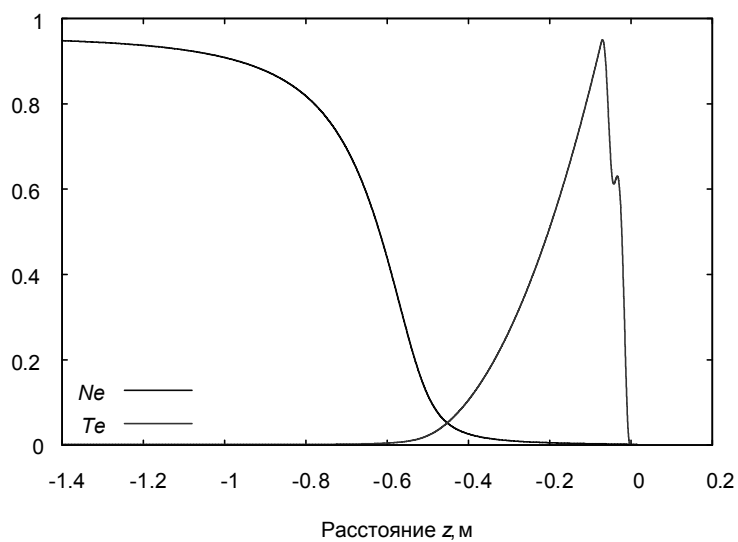


Рис. 3. Релаксация электронной энергии для импульса №1.1

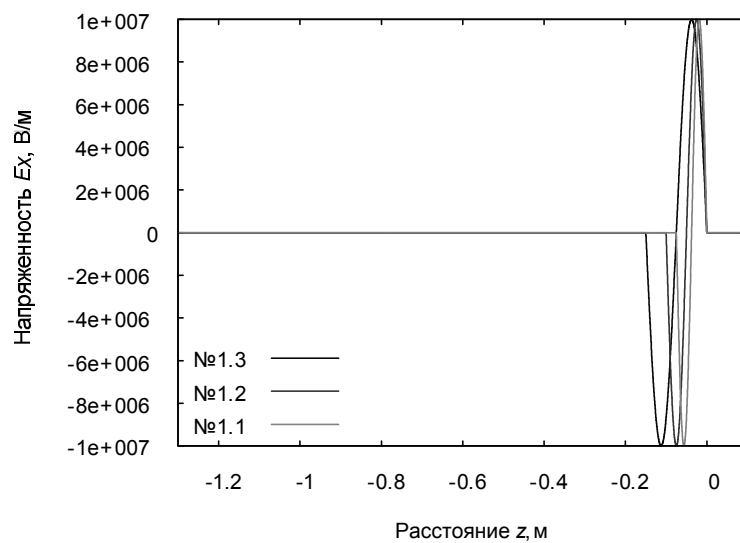


Рис. 4. Сравнение импульсов №1.1–3

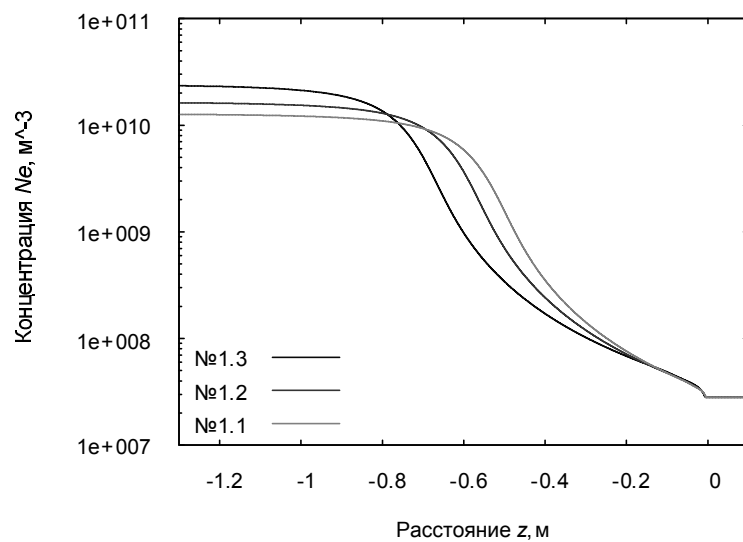


Рис. 5. Сравнение электронной концентрации для импульсов №1.1–3

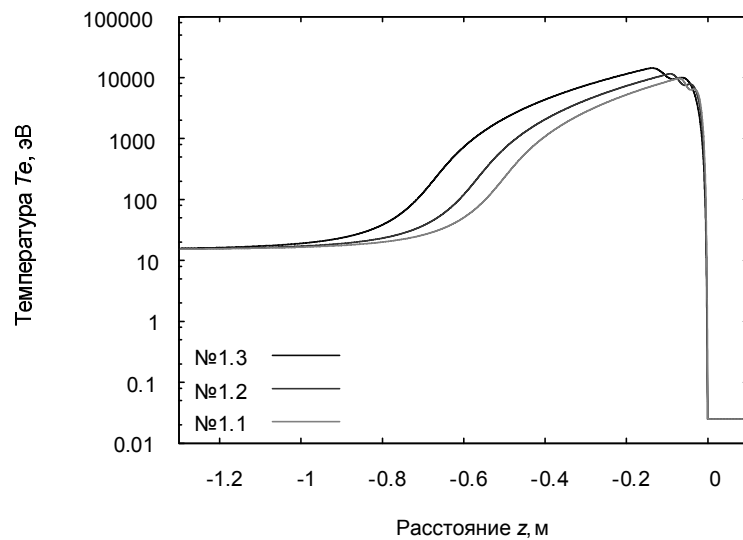


Рис. 6. Сравнение электронной температуры для импульсов №1.1–3

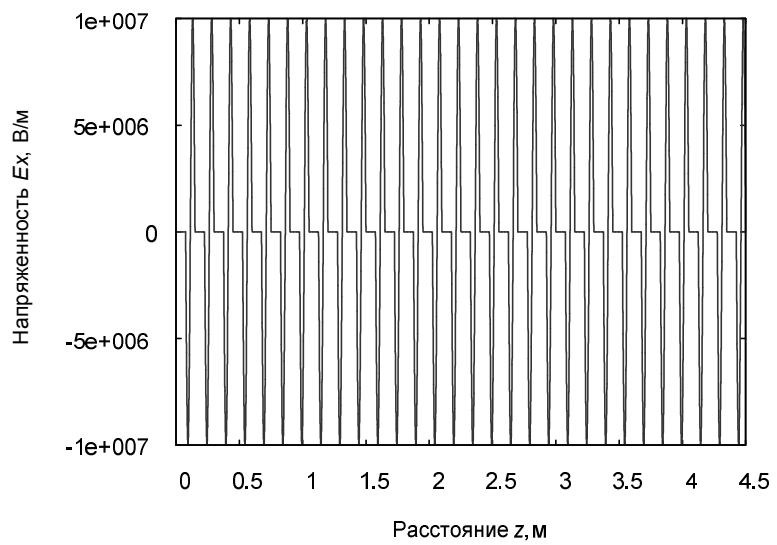


Рис. 7. Напряжённость электрического поля серии импульсов №2.1 (15 нс)

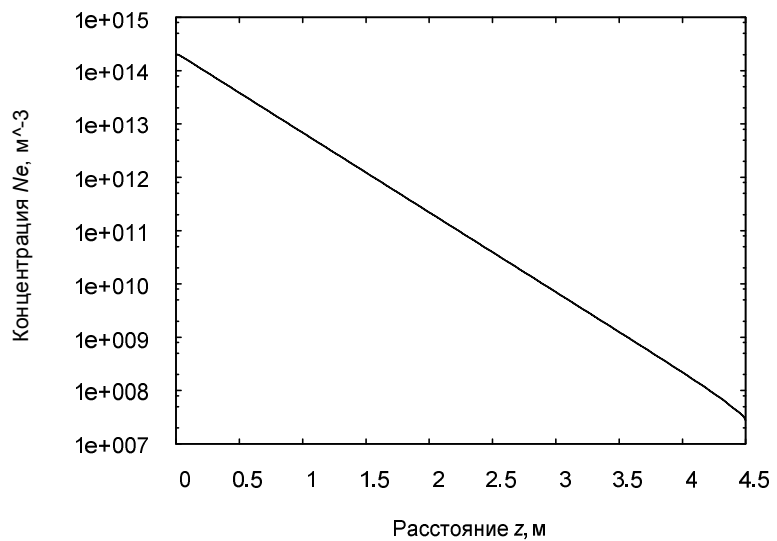


Рис. 8. Электронная концентрация создаваемая серией импульсов №2.1 (15 нс)

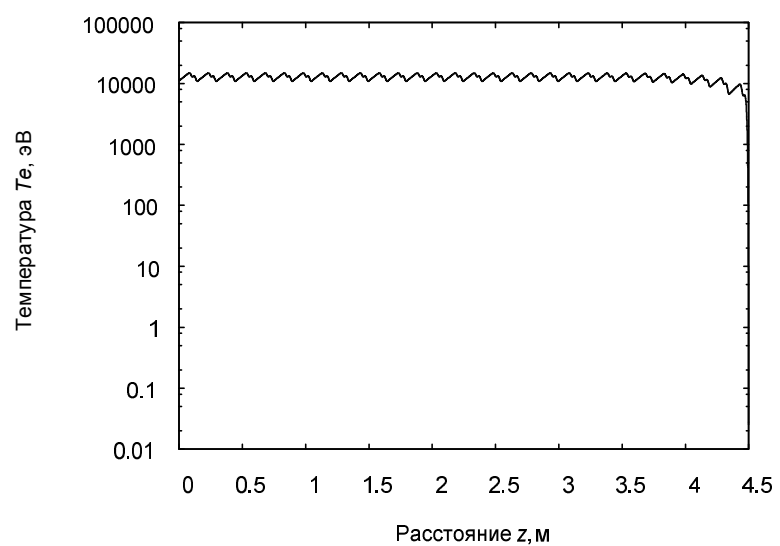


Рис. 9. Электронная температура создаваемая серией импульсов №2.1 (15 нс)

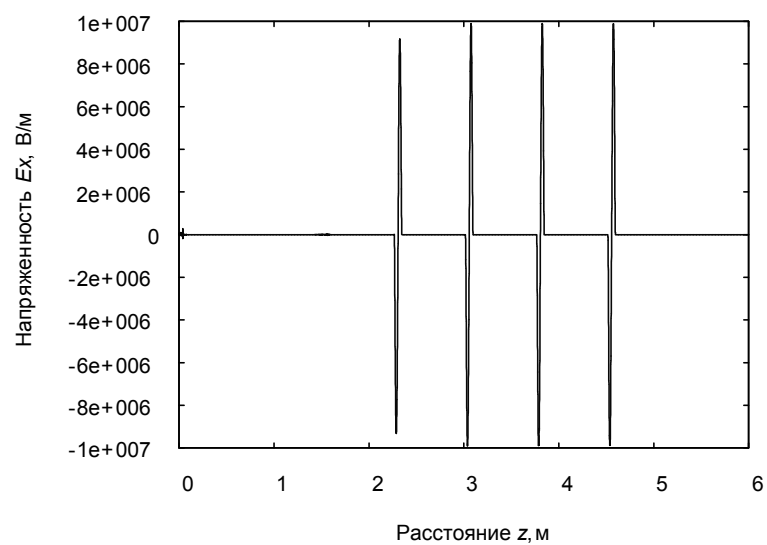


Рис. 10. Напряжённость электрического поля серии импульсов №2.2 (15 нс)

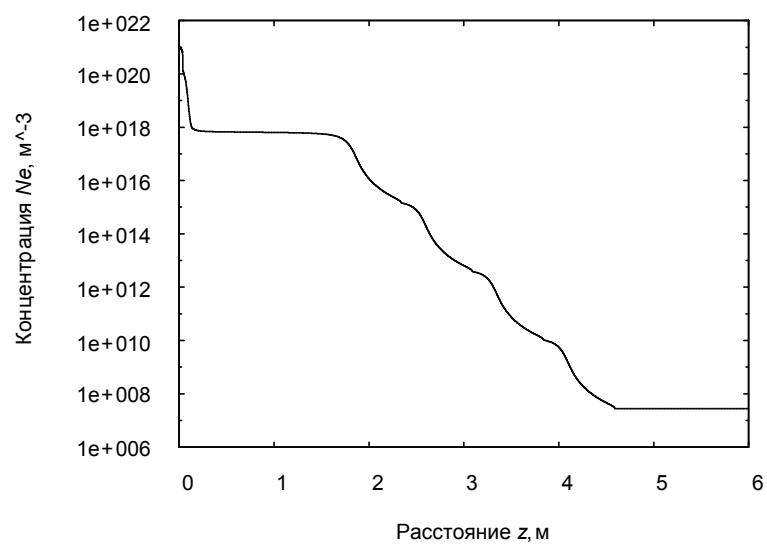


Рис. 11. Электронная концентрация создаваемая серией импульсов №2.2 (15 нс)

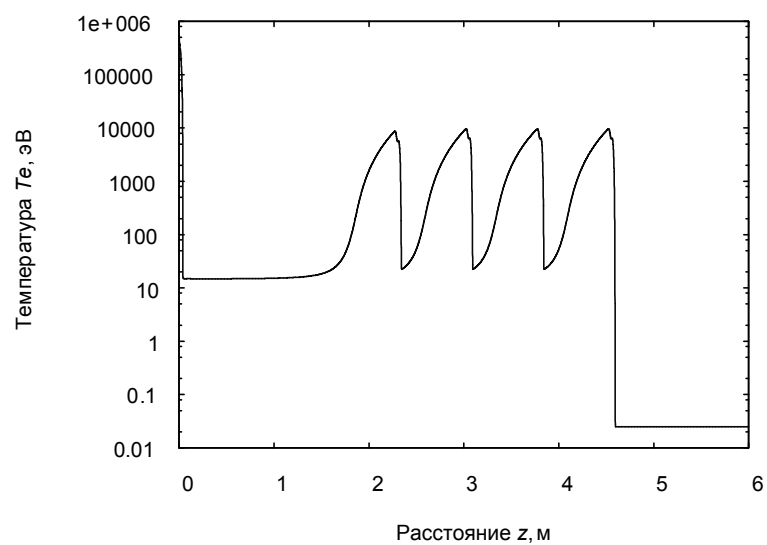


Рис. 12. Электронная температура создаваемая серией импульсов №2.2 (15 нс)