

Otimização da Produção Sustentável de energia: um Modelo de Programação Linear para Maximizar Lucros entre Energia Solar e Eólica

Autor: Djelany Cruz

Data: 15 de Outubro de 2025

LinkedIn: www.linkedin.com/in/djelany-cruz

Ferramentas usadas: Python (PuLP, NumPy, Matplotlib, Plotly)

Resumo

Este projeto tem como objetivo otimizar a produção sustentável de energia proveniente de fontes renováveis — solar e eólica — através da aplicação de um modelo de Programação Linear. O estudo visa determinar a combinação ótima de produção diária que maximiza o lucro total da empresa, respeitando simultaneamente restrições operacionais, ambientais e de manutenção.

O modelo foi desenvolvido em Python, utilizando a biblioteca PuLP para formulação e resolução do problema, complementado por visualizações 3D e uma análise de sensibilidade para avaliar o impacto das principais restrições no lucro ótimo.

Os resultados obtidos indicam que a produção ótima é de 60 MW de energia solar e 50 MW de energia eólica, resultando num lucro máximo diário de 5.700 €, sem ultrapassar os limites de emissões e tempo de manutenção. Este estudo demonstra o potencial da Programação Linear como ferramenta de apoio à tomada de decisão sustentável e eficiente no setor energético.

Abstract

This project aims to optimize the sustainable production of energy from renewable sources — solar and wind — through the application of a Linear Programming model. The study seeks to determine the optimal daily production mix that maximizes the company's total profit while simultaneously respecting operational, environmental, and maintenance constraints.

The model was developed in Python using the PuLP library for problem formulation and resolution, complemented by 3D visualizations and a sensitivity analysis to assess the impact of key constraints on the optimal profit.

The results indicate that the optimal production consists of 60 MW of solar energy and 50 MW of wind energy, resulting in a maximum daily profit of €5,700, without exceeding emission or maintenance time limits. This study demonstrates the potential of Linear Programming as a decision-support tool for achieving sustainable and efficient energy management.

Problema

A empresa **de energia** pretende determinar a produção diária ótima de energia a partir de duas fontes renováveis — **energia solar** (em MW) e **energia eólica** (em MW) — de modo a **maximizar o lucro**

diário total, sujeita a restrições de capacidade, de garantia de abastecimento, de manutenção e de emissões de gases de efeito estufa. Os lucros unitários são de **45 € por MW** para a energia solar e **60 € por MW** para a energia eólica. Assume-se que a produção diária em MWh corresponde a $(24x_1)$ e $(24x_2)$.

Parametrização numérica adotada no modelo

- Capacidade máxima solar: **60 MW**
- Capacidade máxima eólica: **80 MW**
- Demanda mínima total: **90 MW**
- Tempo de manutenção disponível por dia: **70 horas**
- Tempo de manutenção por MW: **0,5 h/MW** para solar e **0,8 h/MW** para eólica
- Fator de emissão (ciclo de vida) assumido: **45 kg CO₂/MWh** para solar e **12 kg CO₂/MWh** para eólica
- Teto diário de emissões: $(E_{\text{max}}) = 100,000$ kg CO₂/dia
- Intensidade média máxima de emissões: $(I_{\text{max}}) = 30$ kg CO₂/MWh

Objetivo geral

Criar um modelo de otimização linear (Programação Linear) com duas variáveis de decisão, explorado em profundidade, com:

- Modelagem matemática e solução ótima.
- Visualização do espaço viável e da função objetivo em 3D.
- Análise de sensibilidade.
- Interpretação prática dos resultados.

1- Formulação matemática do problema

Variáveis de decisão

x_1 = Produção de energia solar em MW

x_2 = Produção de energia eólica em MW

- Função objectivo

Maximizar lucro diário $45 \cdot 24x_1 + 60 \cdot 24x_2$

- Restrições

$x_1 \geq 0$ - Não negatividade.

$x_2 \geq 0$ - Não negatividade.

$x_1 \leq 60$ MW - Potência máxima de energia solar.

$x_2 \leq 80$ MW - Potência máxima de energia eólica.

$x_1 + x_2 \geq 90$ MW - Procura mínima diária.

$0,5x_1 + 0,8x_2 \leq 70$ Horas - Garantia diária de manutenção.

$45 \text{ kg CO}_2/\text{MWh} * 24x_1 \text{ MWh} + 12 \text{ kg CO}_2/\text{MWh} * 24x_2 \text{ MWh} \leq 100000 \text{ kg CO}_2/\text{dia} \Leftrightarrow 1080x_1 \text{ kg CO}_2/\text{dia} + 288x_2 \text{ kg CO}_2/\text{dia} \leq 100000 \text{ kg CO}_2/\text{dia} - \text{Teto diário de emissões.}$

2-Modelagem em python

```
In [17]: # importações
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pulp
%matplotlib inline
```

```
In [18]: # Definição de parâmetros fixos
lucro_solar = 45
lucro_eolica = 60
max_solar = 60
max_eolica = 80
demanda_min = 90
tempo_max = 70
Emax = 100000

# Fatores de emissão
emissao_solar = 45 #45 kg CO2/MWh para energia solar,
emissao_eolica = 12 # 12 kg CO2/MWh para energia eólica.
#Usados na restrição ambiental (convertidos para kg CO2/dia multiplicando por 24 horas → 1080
```

```
In [19]: # Definição da função que resolve o problema

def resolver_modelo (max_solar, max_eolica, demanda_min, tempo_max, Emax):
    modelo = pulp.LpProblem('PL_Otimizacao', pulp.LpMaximize)
    #Variáveis de decisão
    x_1 = pulp.LpVariable('Energia Solar', lowBound = 0)
    x_2 = pulp.LpVariable('Energia Eólica', lowBound = 0)
    #FO
    modelo += lucro_solar * x_1 + lucro_eolica * x_2
    #restrições
    modelo += x_1 <= max_solar # Capacidade máxima solar
    modelo += x_2 <= max_eolica # Capacidade máxima eólica
    modelo += x_1 + x_2 >= demanda_min # Demanda mínima de energia
    modelo += 0.5*x_1 + 0.8*x_2 <= tempo_max # Garantia máxima diária de manutenção
    modelo += 1080*x_1 + 288*x_2 <= Emax # Teto de emissões
    # Resolver o problema
    modelo.solve(solver= pulp.PULP_CBC_CMD(msg= False))
    return pulp.value(modelo.objective)
```

```
In [50]: #Resultados
modelo = pulp.LpProblem('PL_Otimizacao', pulp.LpMaximize)
    #Variáveis de decisão
    x_1 = pulp.LpVariable('Energia Solar', lowBound = 0)
    x_2 = pulp.LpVariable('Energia Eólica', lowBound = 0)
    #FO
    modelo += lucro_solar * x_1 + lucro_eolica * x_2
    #restrições
    modelo += x_1 <= max_solar # Capacidade máxima solar
    modelo += x_2 <= max_eolica # Capacidade máxima eólica
    modelo += x_1 + x_2 >= demanda_min # Demanda mínima de energia
    modelo += 0.5*x_1 + 0.8*x_2 <= tempo_max # Garantia máxima diária de manutenção
    modelo += 1080*x_1 + 288*x_2 <= Emax # Teto de emissões

    # Resolver o problema
    modelo.solve(solver= pulp.PULP_CBC_CMD(msg= False))
```

```
# resultados
print(f'Estado do modelo: {pulp.LpStatus[modelo.status]}\n')
print(x_1.varValue, 'MWh de energia solar a produzir')
print(x_2.varValue, 'MWh de energia eólica a produzir')
print(f'Lucro máximo= {resolver_modelo(max_solar, max_eolica, demanda_min, tempo_max, Emax)}€')
```

Estado do modelo: Optimal

60.0 MWh de energia solar a produzir
 50.0 MWh de energia eólica a produzir
 Lucro máximo= 5700.0€

In [49]: *# verificação de cumprimento de restrições*

```
print('Se x_1 =', x_1.varValue, 'e', 'x_2 =', x_2.varValue,
      'MW, logo a não negatividade foi respeitada.')
print('Potência máxima Solar produzida =', x_1.varValue,
      'MW, logo a Potência máxima de 60 MW foi respeitada.')
print('Potência máxima eólica produzida =', x_2.varValue,
      'MW, logo a Potência máxima de 80 MW foi respeitada.')
print('Produção total diaria =', x_1.varValue + x_2.varValue,
      'MW, logo a procura mínima foi satisfeita.')
print('Manutenção diaria necessária=', 0.5*x_1.varValue + 0.8*x_2.varValue,
      'horas, logo a a garantia de 70 horas de manutenção diaria não foi excedida.')
print('Total de emissões =', 1080*x_1.varValue + 288*x_2.varValue,
      'kg CO2/dia, que não ultrapassa o teto de 100.000 kg CO2/dia.')
```

Se x_1 = 60.0 e x_2 = 50.0 MW, logo a não negatividade foi respeitada.
 Potência máxima Solar produzida = 60.0 MW, logo a Potência máxima de 60 MW foi respeitada.
 Potência máxima eólica produzida = 50.0 MW, logo a Potência máxima de 80 MW foi respeitada.
 Produção total diaria = 110.0 MW, logo a procura mínima foi satisfeita.
 Manutenção diaria necessária= 70.0 horas, logo a a garantia de 70 horas de manutenção diaria não foi excedida.
 Total de emissões = 79200.0 kg CO₂/dia, que não ultrapassa o teto de 100.000 kg CO₂/dia.

3- Vizualização 3D do espaço viável

In [22]: *# aranges*

```
x_vals = np.arange(0,100, 0.01) #x_1
y_vals = np.arange(0,100, 0.01) # x_2
X,Y = np.meshgrid(x_vals, y_vals)

Z = np.where((1080*X + 288*Y <= 100000) &
             (X <= 60) &
             (Y <= 80) &
             (X + Y >= 90) &
             (0.5*X + 0.8*Y <= 70),
             45*X + 60*Y, np.nan)
```

In [23]: *# ponto ótimo*

```
max_index = np.nanargmax(Z)
x_opt, y_opt, z_opt = X.flatten()[max_index], Y.flatten()[max_index], Z.flatten()[max_index]
```

In [52]: *#criar a figura para o gráfico*

```
fig= plt.figure('Produção ótima de energias renováveis', figsize= (9,16))
plot = fig.add_subplot(111, projection='3d')
plot.text(x_opt, y_opt, z_opt, f'Lucro máximo:{z_opt}€\n Solar: {x_opt}MW \n Eólica: {y_opt}MW')

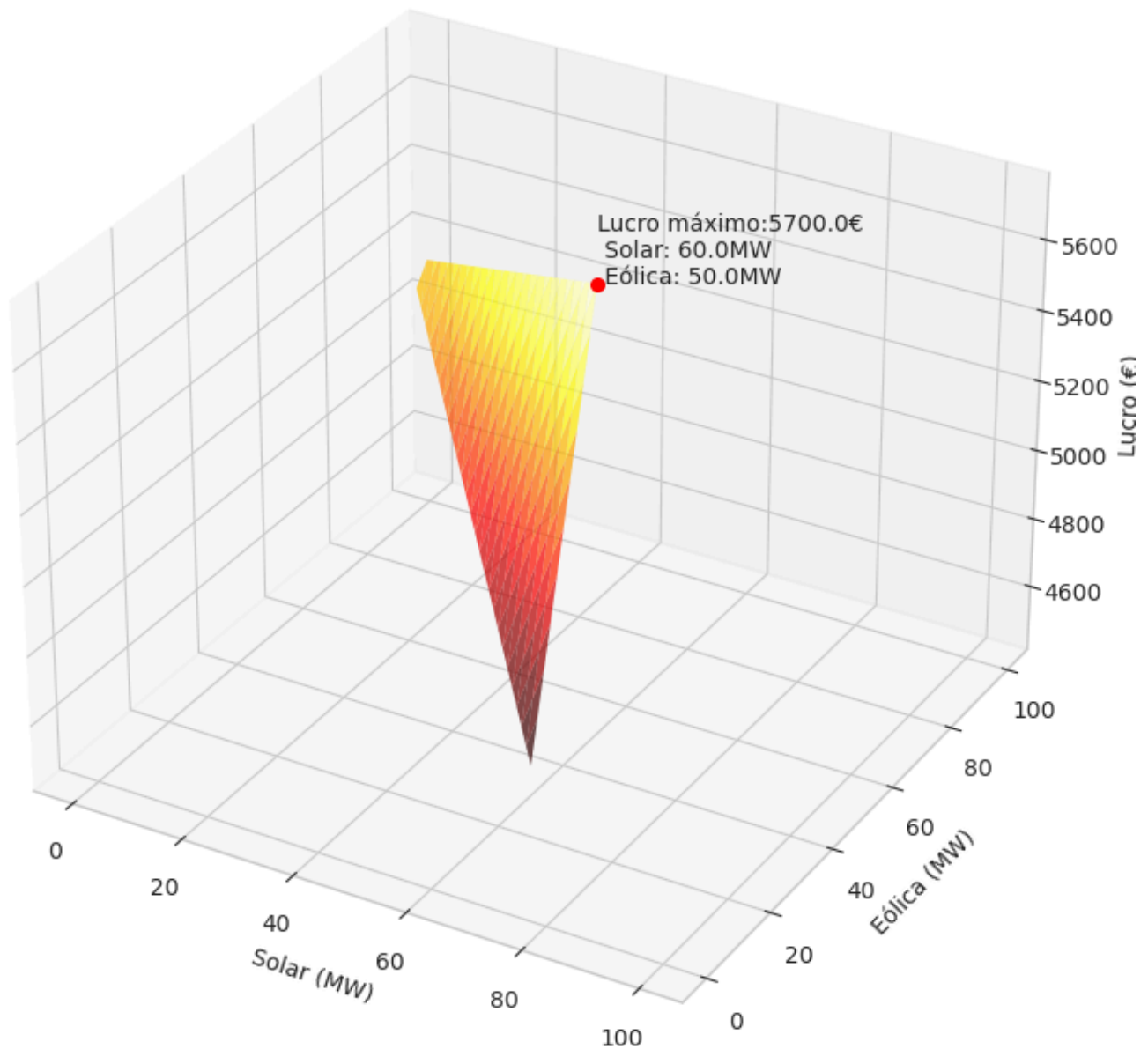
# Desenha o gráfico
plot.plot_surface(X,Y,Z, cmap= 'hot', alpha= 0.7)
```

```
# bolinha sobre o ponto ótimo
plot.scatter(x_opt, y_opt, z_opt, color= 'red', s= 30)

# Eixos
plot.set_xlabel ('Solar (MW)')
plot.set_ylabel ('Eólica (MW)')
plot.set_zlabel ('Lucro (€)')
plot.set_title ('Produção ótima de energia')

#0 gráfico
plt.show()
```

Produção ótima de energia



Este gráfico 3D permite visualizar a área viável de combinações de produção (solar, eólica), ou seja, todas as combinações que caem fora do desenho do gráfico infringem a pelo menos uma restrição, o que torna inviáveis tais produções.

4- Análise de sensibilidade

```

In [47]: # Lucro ótimo vs Teto de emissões
Emax_values = range(70000, 140001, 500)
lucro_Emax = [resolver_modelo(max_solar, max_eolica, demanda_min, tempo_max, E)
               for E in Emax_values]

# Lucro ótimo vs Tempo de manutenção garantido
tempo_m_values = range(50,141,5)
lucro_tempo = [resolver_modelo(max_solar, max_eolica, demanda_min, T, Emax)
               for T in tempo_m_values]

# Lucro ótimo vs Demanda mínima
demanda_values = range(0,201,20)
lucro_demanda = [resolver_modelo(max_solar, max_eolica, D, tempo_max, Emax)
                 for D in demanda_values]

# Lucro ótimo vs capacidade solar
solar_values = range(20,111,5)
lucro_s = [resolver_modelo(S, max_eolica, demanda_min, tempo_max, Emax)
           for S in solar_values]

#Lucro ótimo vs capacidade eólica
eolica_values = range(20,111,5)
lucro_e = [resolver_modelo(max_solar, E, demanda_min, tempo_max, Emax)
           for E in eolica_values]

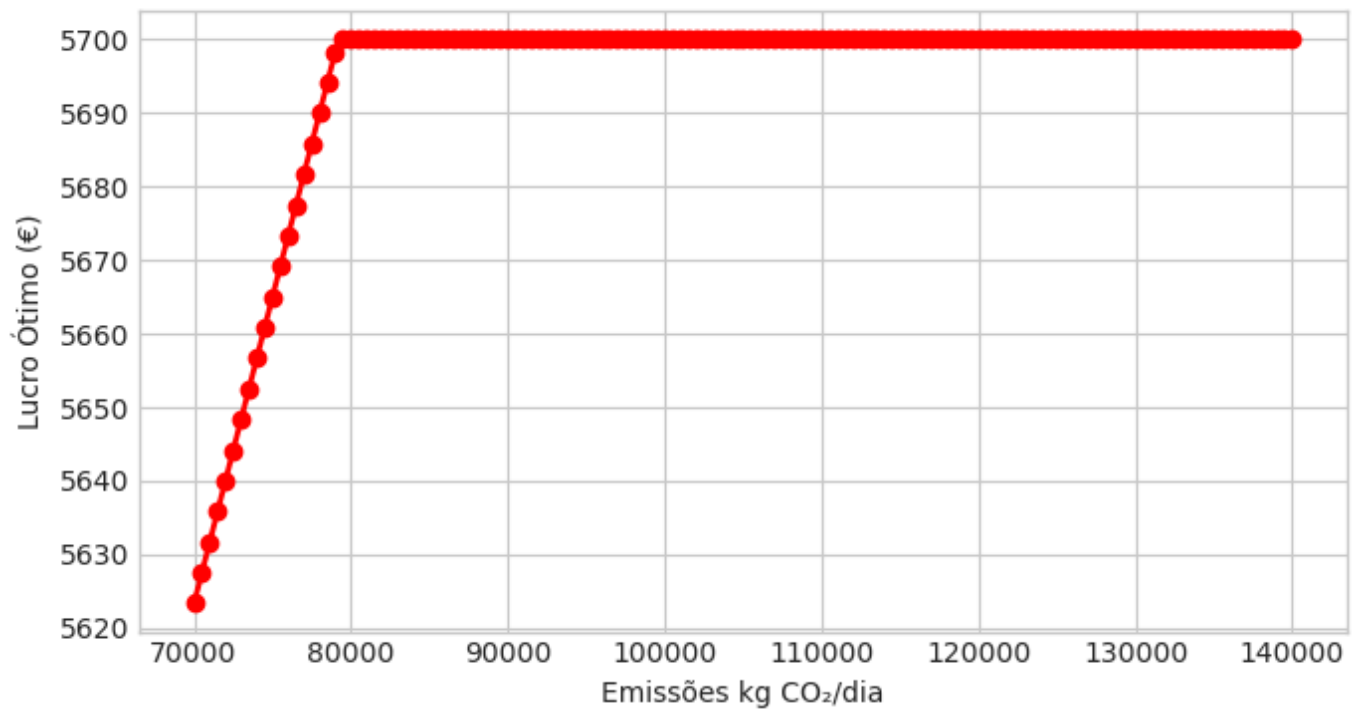
#Gráficos

def grafico(x,y, xlabel, titulo):
    plt.figure(figsize=(7,4))
    plt.plot(x,y, marker = 'o',color= 'r',linewidth=2)
    plt.title(titulo)
    plt.xlabel(xlabel)
    plt.ylabel('Lucro Ótimo (€)')
    plt.grid(True)
    plt.tight_layout()
    plt.show()
plt.rcParams['font.family'] = 'DejaVu Sans'

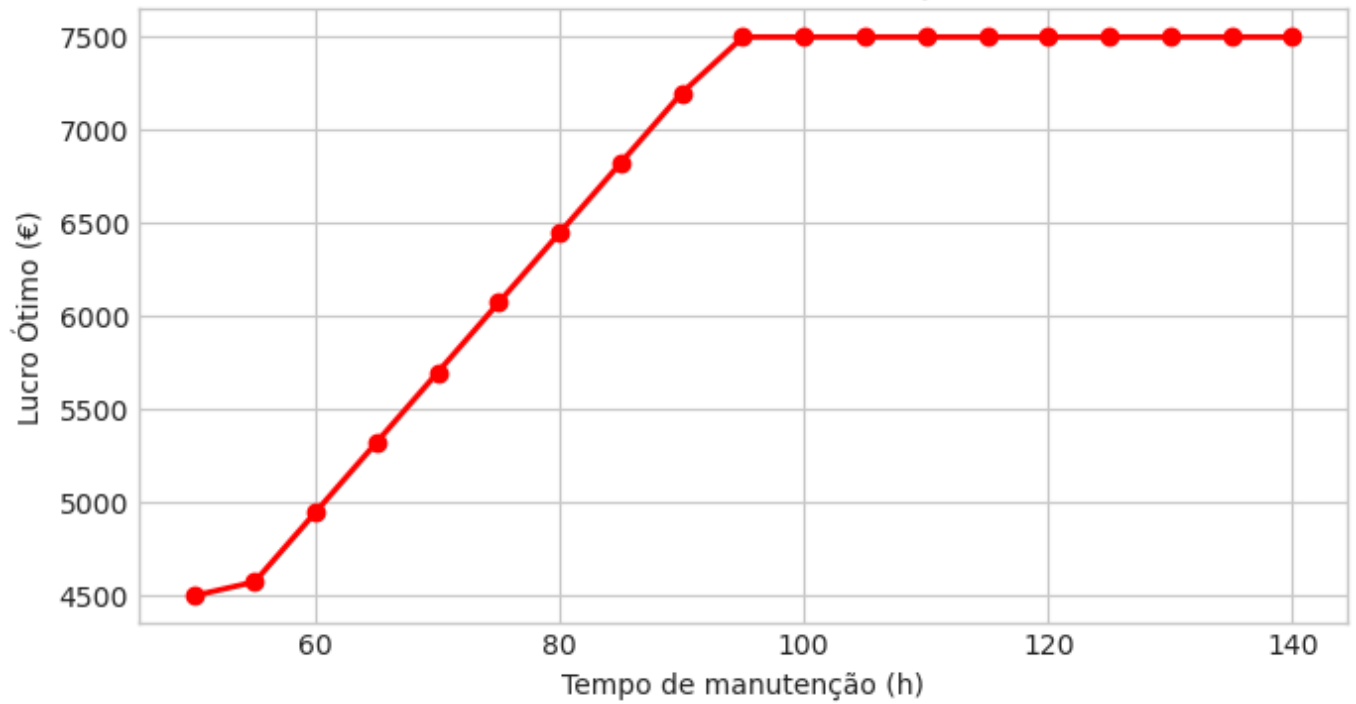
grafico(Emax_values,lucro_Emax,'Emissões kg CO2/dia','Lucro ótimo vs Teto de emissões')
grafico(tempo_m_values,lucro_tempo,'Tempo de manutenção (h)', 'Lucro ótimo vs Tempo de manuten
grafico(demanda_values, lucro_demanda,'Demanda mínima (MW)','Lucro ótimo vs Demanda mínima')
grafico(solar_values, lucro_s, 'Capacidade de produção solar (MW)','Lucro ótimo vs capacidade
grafico(eolica_values,lucro_e,'Capacidade de produção eólica (MW)','Lucro ótimo vs capacidade

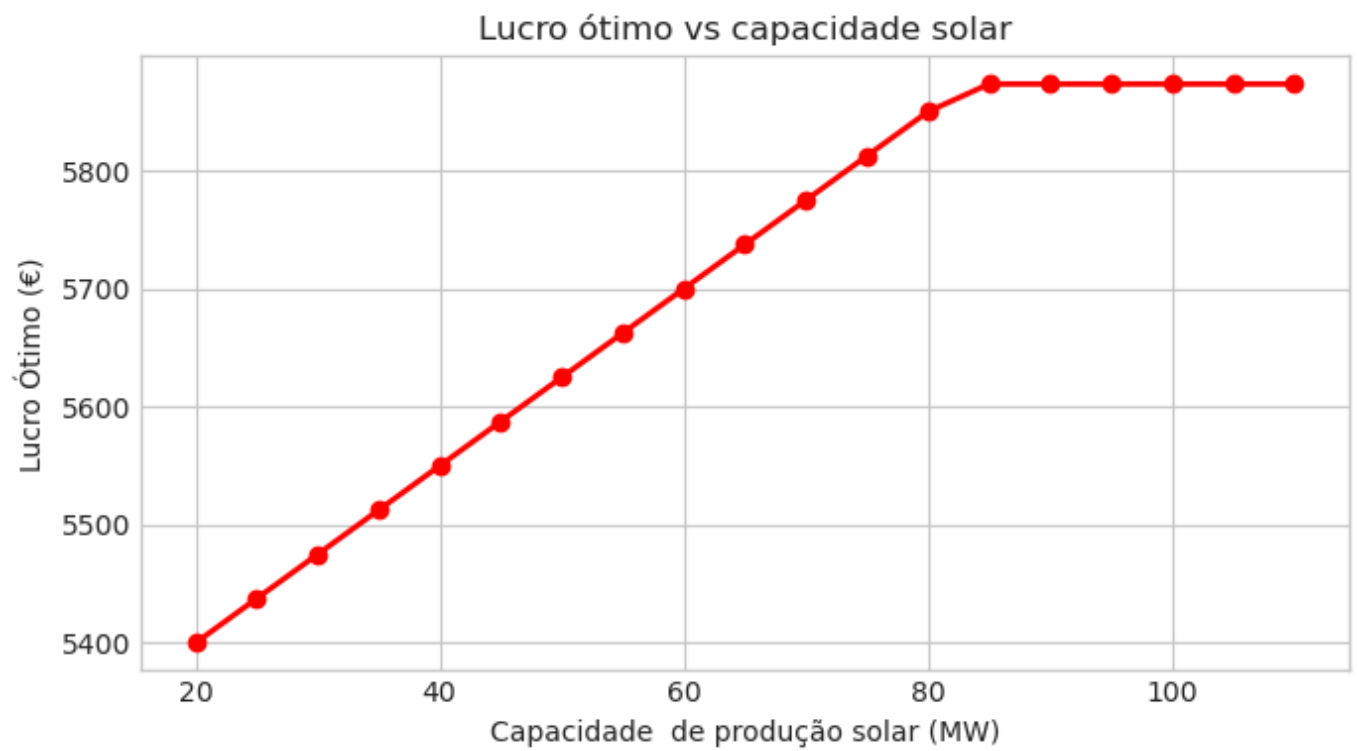
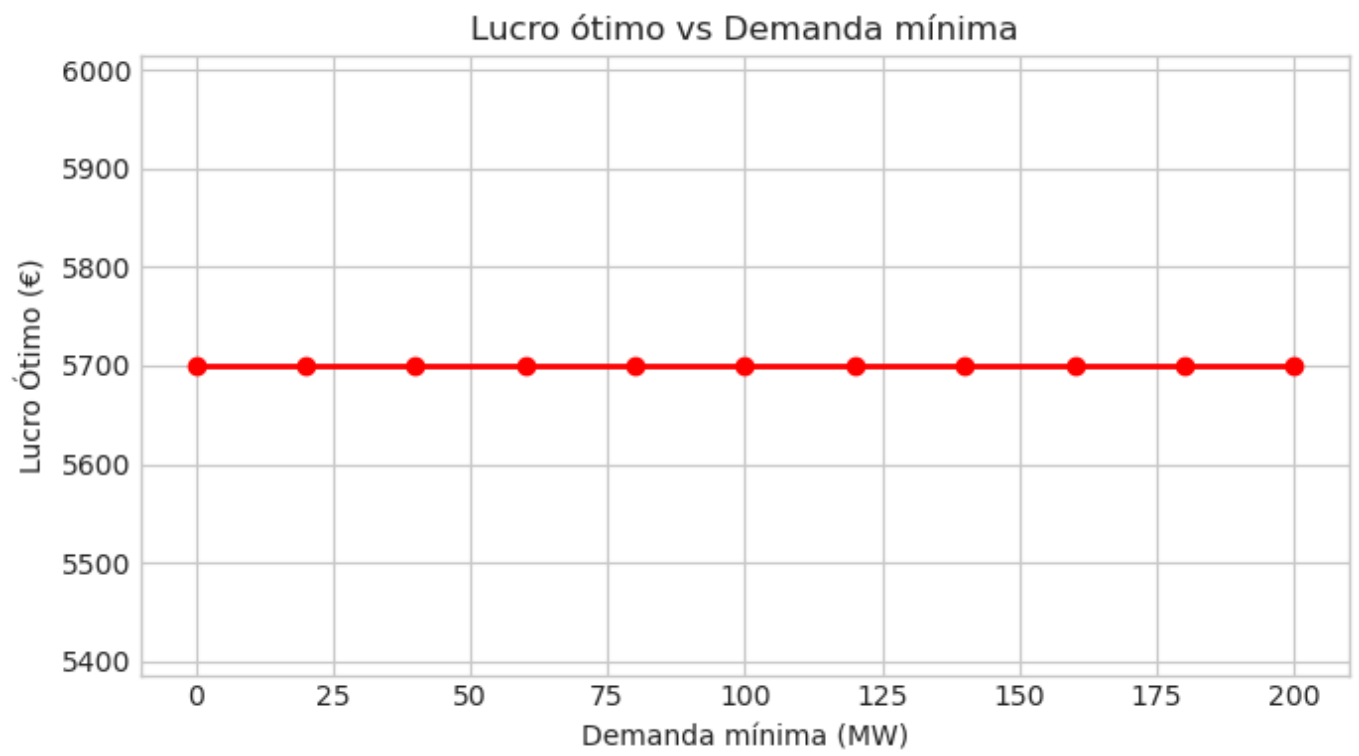
```

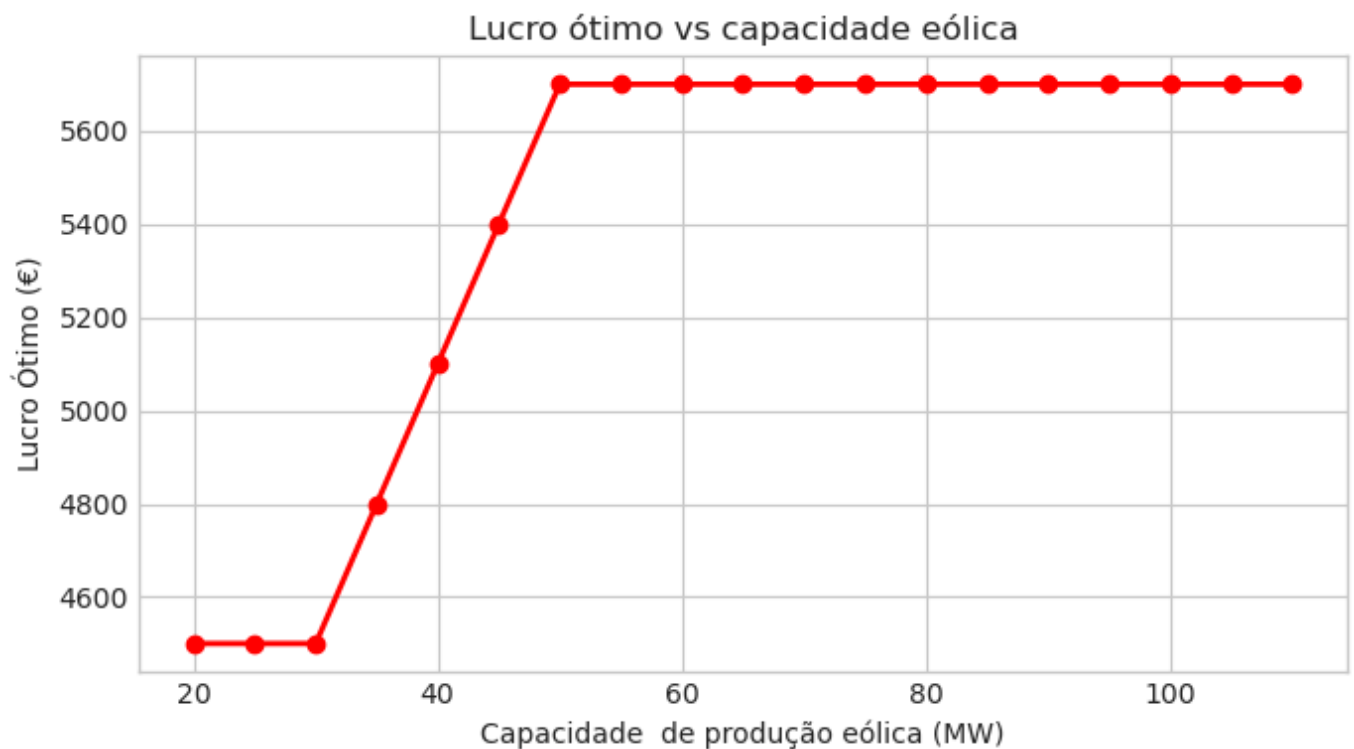
Lucro ótimo vs Teto de emissões



Lucro ótimo vs Tempo de manutenção garantido







Os gráficos de linha acima, mostram-nos o impacto linear, no lucro ótimo que a variação de cada restrição do modelo apresenta.

O teto de emissões impacta razoavelmente o lucro ótimo da produção, deixando de ser impactante a partir dos 80000 kgCO₂/dia. Isto significa que não é possível aumentar o lucro ótimo da produção elevando o teto de emissões de carbono pois o lucro ótimo implica emissões de 79200.0 kg CO₂/dia.

Já o tempo de manutenção parece muito mais relevante. O intervalo mais importante nesta relação entre o tempo de manutenção e o lucro Ótimo, situa-se entre as 55h as 95h, sendo ela linear com um declive positivo, isto é, quanto maior for o número de horas de manutenção diárias garantida, maior será o lucro, podendo atingir o máximo de 7500€ (+1800€ que o ótimo atual).

A variação demanda mínima não influencia de forma alguma o lucro ótimo da empresa.

O lucro ótimo da empresa, mostra-se de certa forma sensível a capacidade de produção solar até aos 85MW de capacidade, gerando 5873.3€ (+173.3€ que o ótimo atual), acima disto deixa de gerar mais lucro.

A capacidade de produção de energia eólica mostra-se bastante relevante na ótica da conservação dos ganhos de lucro ótimo pois cada 1MW de capacidade perdido pode representar uma perda significativa, porém, por outro lado não apresenta o mesmo comportamento, quer dizer, o aumento da capacidade atual não impacta os ganhos.

5- Análise dos resultados

Perante aos desafios apresentados pelas restrições neste problema, o modelo foi capaz de encontrar uma solução ótima diária para a produção de energia (**60MW de energia Solar e 50 MW de energia Eólica**) que geram um lucro máximo de **5700€/dia**. Foi possível determinar também quais restrições merecem mais atenção na ótica do aumento dos lucros, ou seja as que mais travam os ganhos, elas são:

o **tempo de manutenção diario** com uma margem de **1800€** acima ótimo atual, e a **capacidade de produção de energia solar** com uma margem de **173.3€** acima ótimo atual.

É importante salientar que para além dos obstáculos sobre a produção de energia desta empresa, muitos outros obstáculos podem surgir e todos eles devem ser analisados para uma tomada de decisão mais informada, cuidada, real chegando a soluções cada vez mais reais no dia a dia da produção.

O modelo proposto demonstra como técnicas de Programação Linear podem apoiar decisões sustentáveis e economicamente eficientes no setor energético.